УДК 528.721.063.1

РАСЧЕТ ФРАКТАЛЬНОЙ РАЗМЕРНОСТИ ПО ДАННЫМ ПРОФИЛЬНЫХ СЕЧЕНИЙ ЦММР

В. В. ШИРОКОВ, *И. А. ГРИБОК, *И. Н. ДРОЗД
«УКРАИНСКАЯ АКАДЕМИЯ ПЕЧАТИ»
*«ЛУЦКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Львов, Луцк, Украина

Микрорельеф является результатом случайного процесса, фрактальный анализ которого можно выполнять исходя из зависимостей обобщенного броуновского движения. Чтобы построить обобщенную броуновскую кривую, для которой высота или кривая $Z(t)$ нормальной плоскости сечения, необходимо, чтобы дисперсия приращений координаты Z подчинялась соотношению

$$\left\langle \left[Z(t)-Z(0)\right]^2 \right\rangle = |t|^{2H}\sigma_0^2. \tag{1}$$

Применительно к ЦММР, это выражение можно записать в виде

$$\left\langle \left[Z(i)-Z(j)\right]^2 \right\rangle = b(d_{ij})^{2H}, \tag{2}$$

где d_{ij} – расстояние между точками i и j, $b = f(\sigma_0^2)$ – коэффициент пропорциональности, который зависит от дисперсии «изрезанности» рельефа; H – показатель Херста (для случайных трехмерных поверхностей он является кофрактальной размерностью).

Аналитическая аппроксимация ЦММР в форме выражения, содержащего показатель H, позволяет оценить масштабно-линейные соотношения в плане и по высоте, т.е. когда поверхности самоаффинны и мультифрактальны. Для исследования таких поверхностей предлагается следующий алгоритм.

1. Пусть исследуемая поверхность Ω заданна ЦММР.
2. На основе ЦММР стоится произвольный профиль $z = f(x)$.
3. Выбираем единичный отрезок ε и последовательно откладываем его на кривой, фиксируя координаты конца отрезка, получаем множество точек $P_i(x_i, y_i)$.
4. Разделяем всю кривую на секции длиной nε ($n\in\mathbf{N}$) и в каждой вычисляем дисперсии:

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2, \tag{3}$$

$$\sigma_z^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(z_i-\bar{z})^2. \tag{4}$$

В общем случае существуют масштабно-инвариантные соотношения $\sigma_x \approx n^{k_1 x}, \sigma_z \approx n^{k_2 z}$. Показатели k_1 и k_2 различны и связаны между собой зависимостью $\sigma_z \approx \sigma_x^H$, где $H = k_1 / k_2$ – показатель Херста ($0 < H < 1$).

5. Имея набор секций длиной nε ($n\in\mathbf{N}$) и значения дисперсий по координатам x, y, строится графическая зависимость в дважды логарифмическом масштабе. По одной оси откладываются Ln σ_x, Ln σ_z, а по второй – Ln n.
6. Через полученное множество точек проводится ломаная прямая наилучшего приближения, вычисляется угловой коэффициент участков этой прямой и определяется локальная и глобальная фрактальные размерности исследуемого профиля поверхности через показатель Херста.