МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Физические методы контроля»

ПЛАНИРОВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА

Методические рекомендации к практическим занятиям для студентов специальности 1-38 80 01 «Приборостроение» очной и заочной форм обучения

Могилев 2020

УДК 621.317
ББК 31.21
П37

Рекомендовано к изданию
учебно-методическим отделом
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Физические методы контроля» «31» августа 2020 г., протокол № 7

Составитель ст. преподаватель Н. В. Герасименко

Рецензент канд. техн. наук, доц. С. В. Болотов

В методических рекомендациях приведены краткие теоретические сведения, а также задания к практическим занятиям по курсу «Планирование эксперимента».

Учебно-методическое издание

ПЛАНИРОВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА

Ответственный за выпуск С. С. Сергеев

Корректор А. А. Подошевко

Компьютерная верстка Н. П. Полевничая

Подписано в печать . Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Печать трафаретная. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. .Тираж 16 экз. Заказ №

Издатель и полиграфическое исполнение:
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования
«Белорусско-Российский университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/156 от 07.03.2019.
Пр-т Мира, 43, 212022, Могилев.

Содержание

Введение

Экспериментальные исследования широко применяются на всех стадиях разработки, производства и эксплуатации различных технических объектов. При создании электронных и электротехнических устройств основные затраты приходятся на их настройку и испытания.

Теория планирования эксперимента формулирует приемы и способы оптимальной организации исследовательской работы. Овладение основами теории эксперимента и практическими приемами ее использования повышает эффективность работы исследователя, позволяет с наименьшими затратами решать многие практически важные исследовательские задачи: построение по опытным данным математической модели объектов, оптимизацию процессов, проверку различных предположений.

1 Практическое занятие № 1. Методы и приборы измерения электрических величин

Цель работы: исследование электроизмерительных приборов и их применение в экспериментах.

Краткие теоретические сведения

Электроизмерительные приборы служат для контроля режима работы электрических установок, их испытания и учета расходуемой электрической энергии. В зависимости от назначения электроизмерительные приборы подразделяют на амперметры (измерители тока), вольтметры (измерители напряжения), ваттметры (измерители мощности), омметры (измерители сопротивления), частотомеры (измерители частоты переменного тока), счетчики электрической энергии и др. Различают две категории электроизмерительных приборов: рабочие − для контроля режима работы электрических установок в производственных условиях и образцовые − для градуировки и периодической проверки рабочих приборов. В зависимости от способа отсчета электроизмерительные приборы разделяют на приборы непосредственной оценки и приборы сравнения.

Приборами непосредственной оценки, или показывающими, называются такие, которые позволяют производить отсчет измеряемой величины непосредственно на шкале. К ним относятся амперметры, вольтметры, ваттметры и др. Основной частью каждого такого прибора является измерительный механизм. При воздействии измеряемой электрической величины (тока, напряжения, мощности и др.) на измерительный механизм прибора подается соответствующий сигнал на отсчетное устройство, по которому определяют значение измеряемой величины.

По конструкции отсчетного устройства показывающие приборы делятся на приборы с механическим указателем (стрелочные), со световым указателем (зеркальные), с пишущим устройством (самопишущие) и электронные приборы со стрелочным или цифровым указателем отсчета. В стрелочных приборах измерительный механизм поворачивает стрелку на некоторый угол, который определяет значение измеряемой величины (шкала прибора проградуирована в соответствующих единицах: амперах, вольтах, ваттах и пр.).

В электроизмерительных приборах сравнения измерения осуществляются путем сравнения измеряемой величины с какой-либо образцовой мерой или эталоном. К ним относятся различные мосты для измерения сопротивлений и компенсационные измерительные устройства (потенциометры). Последние измеряют разность между измеряемым напряжением или ЭДС и компенсирующим образцовым напряжением. В качестве сравнивающего прибора обычно используют гальванометр.

Действие электроизмерительных приборов непосредственной оценки основано на различных проявлениях электрического тока (магнитном, тепловом, электродинамическом и пр.), используя которые можно при помощи различных измерительных механизмов вызвать перемещение стрелки.

В зависимости от принципа действия, положенного в основу устройства измерительного механизма, электроизмерительные приборы относятся к различным системам: магнитоэлектрической, электромагнитной, электродинамической, тепловой, индукционной и др. Приборы каждой из этих систем имеют свои условные обозначения.

Приборы могут выполняться с противодействующей возвратной пружиной и без пружины. В последнем случае они называются логометрами.

Задание для самостоятельной работы

1 Исследовать назначение и систему электроизмерительных приборов, используемых в экспериментальной работе по теме диссертации.

2 Разработать методику измерений.

2 Практическое занятие № 2. Способы представления измерительной информации

Цель работы: исследование способов представления измерительной информации и их использование в экспериментах.

Краткие теоретические сведения

Измеряемое значение − произведение числового значения на размер соответствующей единицы. В процессе измерения информация об этом числовом значении (измерительная информация) передается с помощью сигналов. Различают две формы представления информации − непрерывную и дискретную. Поскольку носителями информации являются сигналы, то в качестве дискретных могут использоваться физические процессы различной природы.

При аналоговом способе измерения устанавливается прямая связь между значением измеряемой величины и значением физической величины сигнала.

В противоположность этому цифровой метод измерения характеризуется тем, что результат измерения, точное числовое значение вырабатывается в измерительном устройстве. При этом обработка сигнала производится числовым методом, как в цифровых вычислительных машинах.

В отношении точности отсчета разница состоит в том, что при цифровом показании отсчет производится практически без ошибки. При отсчете аналогового показания преобразование его в число производится оператором, причем точность отсчета заранее не определена и зависит от способности оператора к интерполяции. Поэтому отсчет аналоговых показаний принципиально содержит погрешности.

Преимущество аналогового вывода измеряемого значения состоит в большей наглядности. Наблюдение за стрелочным прибором на щите управления существенно проще, чем за цифровыми показаниями. Кроме того, аналоговый регистратор передает существенно больше информации, чем ряд чисел цифропечатающего устройства. Этот факт подтверждается тем, что для интерпретации ряда чисел часто прибегают к графическому изображению, что эквивалентно преобразованию цифровой информации в аналоговую.

Однако при цифровом методе обработка чисел происходит последовательно, причем продолжительность цикла обработки быстро возрастает с ростом точности. Аналоговая обработка, наоборот, осуществляется непрерывно, одновременно, что существенно улучшает динамические свойства измерительной системы. Это особенно важно при измерении физических величин, изменяющихся во времени.

Аналоговые методы представления измеряемых величин по сравнению с цифровыми являются менее точными. Однако эти методы, основанные на непрерывных физических процессах, делают доступными для измерительной техники исключительно большое разнообразие физических эффектов; к тому же обычно их очень просто реализовать. Часто аналоговые методы представляют единственную возможность воспринять измеряемое значение.

По способу передачи и восприятия различают следующие виды информации:

- текстовая − передаваемая в виде символов, предназначенных обозначать лексемы языка;
- числовая − в виде цифр и знаков, обозначающих математические действия;
- графическая − в виде изображений, событий, предметов, графиков;
- звуковая − устная или в виде записи передача лексем языка аудиальным путём.

Задание для самостоятельной работы

Проанализировать способы представления измерительной информации в экспериментальной работе по теме диссертации.

3 Практическое занятие № 3. Анализ погрешностей аналоговых измерительных приборов

Погрешности измерений – отклонения результатов измерения от истинного значения измеряемой величины. Погрешности неизбежны, выявить истинное значение невозможно. Классификация погрешностей измерения: абсолютная погрешность Δ, относительная погрешность δ, приведенная погрешность γ.

Погрешности измерительных приборов рассмотрены в таблице 1.

Для определения общей погрешности комплекса приборов необходимо знать абсолютную, относительную или приведенную погрешности каждого из приборов и воспользоваться формулой

$$\sigma(\delta)=\sqrt{\delta_1^2+\delta_2^2+\cdots+\delta_n^2}\,.$$

Таблица 1 – Погрешности измерительных приборов

Погрешность	Определение	Формула	Обозначение класса точности	Параметры
Абсолютная Δ	Характеризует абсолютное отклонение измеряемой величины от действительного значения физической величины	$\Delta = X_Д - X_{ИЗМ}$	M L	$X_д$ – действительное значение измеряемой величины
Относительная δ	Погрешность измерения, выраженная отношением абсолютной погрешности измерения к действительному значению измеряемой величины	$\delta = \frac{\Delta}{X_Д}\cdot 100\ \%$	1,5 0,02/0,01	$X_{изм}$ – измеряемое значение
Приведенная γ	Погрешность, выраженная отношением абсолютной погрешности средства измерений к нормирующему значению	$\gamma = \frac{\Delta}{X_n}\cdot 100\ \%$	1,5 0,5 $\sqrt{\ }$	X_n – нормирующее значение (зависит от типа шкалы измерительного прибора и определяется по его градуировке)

Так как истинное значение выявить невозможно, то необходимо хотя бы наиболее точно приблизиться к нему или определить доверительный интервал, в котором истинное значение находится с большой долей вероятности:

Определяем среднее арифметическое отклонение:

$$\Delta' = \sum_{i=1}^{n}\frac{\Delta_i}{n}\,.$$

Вычисляем среднее квадратическое отклонение (СКО) среднего арифметического:

$$S_\Delta^2 = \sum_{i=1}^{n}\frac{(\Delta-\Delta')^2}{n\cdot(n-1)}\,.$$

Рассчитываем случайную составляющую погрешности:

$$\varepsilon = \pm S_\Delta \cdot t_{a,n}\,,$$

где $t_{a,n}$ – коэффициент Стьюдента.

Определяем СКО систематической составляющей погрешности и суммарное СКО:

$$S_{\Theta}^{2} = \frac{\Delta^{2'}}{n}; \qquad S_{\Sigma} = \sqrt{S_{\Delta}^{2} + S_{\Theta}^{2}}.$$

Проводим оценку доверительных границ погрешности:

$$\Delta = \pm S_{\Sigma} \cdot K; \quad K = \frac{\varepsilon + |\Delta'|}{S_{\Delta} + S_{\Theta}}.$$

Предполагая, что приборные погрешности, имеющие систематический характер, устранены, все приборные погрешности будем относить к случайным. Такие погрешности могут возникать при изготовлении приборов или при их градуировке. Обычно довольствуются сведениями о допустимых приборных погрешностях, сообщаемых заводами-изготовителями в паспортах, прилагаемых к приборам. Завод ручается, что погрешности отсчета по прибору не выходят за пределы, указываемые в паспорте. При этом остаются неизвестными ни конкретная величина, ни знак погрешности, получающиеся в результате отдельного измерения данным прибором.

Стрелочные электроизмерительные приборы по величине допустимой погрешности делятся на *классы точности*, которые обозначаются на шкалах приборов цифрами 0,1; 0,2; 0,5; 1,0; 1,5; 2,5; 4,0 (цифры могут быть помещены в кружок или ромбик). Цифровые электроизмерительные и прочие приборы имеют как правило допустимую погрешность, составляющую 1–2 единицы последнего индицируемого разряда. Если сведений о допустимой приборной погрешности не имеется, то в качестве нее можно принять половину наименьшего деления шкалы прибора или половину наименьшего значения измеряемой величины, которое еще можно найти при помощи этого прибора.

Задание для самостоятельной работы

1 Оценить класс точности измерительного прибора по указанию преподавателя.

2 Исследовать причины возникновения погрешностей в экспериментах по теме диссертации.

4 Практическое занятие № 4. Обработка результатов прямых измерений электрических величин

Цель работы: ознакомиться с методикой обработки результатов прямых измерений электрических величин.

Краткие теоретические сведения

Прямые измерения − это такие измерения, при которых искомое значение находится непосредственно из эксперимента. Например, однократное измерение напряжения щитовым вольтметром.

Различают однократные (одиночные) и многократные (множественные) прямые измерения. Однократные − самые простые по выполнению и обработке − наиболее распространены в практике промышленных экспресс-измерений и в ЖКХ и означают получение окончательного результата по одному разовому наблюдению (отсчету).

В многократных (множественных) прямых измерениях получают ряд результатов измерения (в общем случае − различных) одной и той же физической величины. При этом возможны две постановки задачи:

1) измеряемая величина неизменна, а множество различных результатов измерения вызваны наличием у инструмента заметных случайных погрешностей. И тогда решаются вопросы, что принять за измеренное значение (за окончательный результат измерения) и как оценить суммарную погрешность результата;

2) сама измеряемая величина − случайна, тогда решается вопрос определения оценки математического ожидания этой случайной величины и оценки ее среднего квадратичного отклонения. Математический аппарат решения обеих задач фактически общий, однако существо постановки принципиально разное.

Рассмотрим подробнее первый случай. Предположим, имеем ряд результатов x_1, x_2, ..., x_n, полученных одним прибором при измерении одной и той же неизменной величины X. Прибор имеет только случайную погрешность (систематической погрешностью можно пренебречь, $\Delta_c = 0$).

Тогда оценкой X* истинного значения измеряемой величины, т. е. результатом измерения, следует считать среднее арифметическое всех исходных результатов x_i:

$$X^* = \sum_{i-1}^{n} \frac{x_i}{n}.$$

Если систематической погрешностью Δ_C нельзя пренебречь и ее значение известно, то необходимо скорректировать полученный результат:

$$X^* = \sum_{i-1}^{n} \frac{x_i}{n} - \Delta_C.$$

В случае, когда значение систематической погрешности неизвестно, задача не имеет корректного решения.

Мерой достоверности найденной оценки X^* служит оценка среднего квадратичного отклонения σ^* этого среднего арифметического:

$$\sigma^* = \sqrt{\frac{\sum_{i-1}^{n}(x_i - X^*)^2}{n\cdot(n-1)}}.$$

Задание для самостоятельной работы

1 Провести эксперимент по измерению уровня напряжения первичного измерительного преобразователя.

2 По результатам эксперимента вычислить среднее значение измеряемой величины и среднее квадратичное отклонение (учесть приборную погрешность).

5 Практическое занятие № 5. Исследование градиентных методов оптимизации

Градиентные методы – численные методы решения с помощью градиента задач, сводящихся к нахождению экстремумов функции.

Предположим, пока что нам нужно просто найти минимум одномерной функции:

$$f(x) \to \min_{x\in\mathbb{R}}; \qquad f(x) \approx f(x^*) + f'(x^*)(x - x^*),$$

где x^* – точка минимума функции f^*;

f' – производная функции f.

Чем ближе x к x^*, тем точнее это приближение. В многомерном случае аналогично из линейного приближения:

$$f(x) \approx f(x^*) + \nabla F(x^*)^T (x - x^*).$$

Величина $\nabla F(x^*)$) – градиент функции f в точке x^*. Также равенство градиента нулю означает равенство всех частных производных нулю, поэтому в многомерном случае можно получить этот критерий просто последовательно применив одномерный критерий по каждой переменной в отдельности.

Градиентный спуск. Основная идея методов заключается в том, чтобы идти в направлении наискорейшего спуска, а это направление задаётся антиградиентом $-\nabla F$:

$$\overline{x}_{k+1} = \overline{x}_k - \alpha_k \nabla F(\overline{x}_k),$$

где α_k выбирается:

- постоянной, в этом случае метод может расходиться;
- дробным шагом, длина шага в процессе спуска делится на некое число;
- наискорейшим спуском: $\alpha_k = \arg\min F(x_k - \alpha_k \nabla F(x_k))$.

Алгоритм выполнения метода.

1 Задают начальное приближение и точность расчёта $\bar{x}_0, \varepsilon$.

2 Рассчитывают $\bar{x}_{k+1} = \bar{x}_k - \alpha_k \nabla F(\bar{x}_k)$, где $\alpha_k = \arg\min F(\bar{x}_k - \alpha_k \nabla F(\bar{x}_k))$.

3 Проверяют условие остановки:

– если одно из условий (выбирается одно на протяжении всей проверки): $|\bar{x}_{k+1} - \bar{x}_k| > \varepsilon$ или $|F(\bar{x}_{k+1}) - F(\bar{x}_k)| > \varepsilon$ или $\| F(\bar{x}_{k+1}) \| > \varepsilon$, то $k = k+1$;

– если условие не выполняется, то $\bar{x} = \bar{x}_{k+1}$ и операция останавливается.

Покоординатный спуск. Идея данного метода заключается в том, что спуск на каждой итерации происходит по одной из переменных. Исходные данные: начальное приближение и точность расчёта $\bar{x}_0, \varepsilon$. Итерационная формула имеет вид:

$$\bar{X}_{k(n+1)} = \bar{X}_{kn} - \alpha_{k(n+1)} \cdot \frac{\partial F(\bar{X}_{kn})}{\partial x_{n+1}} \cdot \vec{e}^{\,n+1}$$

или

$$\begin{cases} \bar{X}_{k1} = \bar{X}_{k0} - \alpha_{k1} \cdot \dfrac{\partial F(\bar{X}_{k0})}{\partial x_1} \cdot \vec{e}^{\,1}; \\ \dots \\ \bar{X}_{kn} = \bar{X}_{k(n-1)} - \alpha_{kn} \cdot \dfrac{\partial F(\bar{X}_{k(n-1)})}{\partial x_n} \cdot \vec{e}^{\,n}. \end{cases}$$

При этом

$$\alpha_{ki} = \arg\min F\left(x_{k(i-1)} - \alpha_k \cdot \frac{\partial F(\bar{x}_{k(i-1)})}{\partial x_i} \right);$$

$$\bar{e}_j^{\,n+1} = \begin{cases} 1, j = n; \\ 0, j \neq n. \end{cases}$$

Проверяют условие остановки:

– если одно из условий (выбирается одно на протяжении всей проверки): $|\bar{x}_{kn} - \bar{x}_{k0}| > \varepsilon$, то $\bar{x}_{(k+1)0} = \bar{x}_{kn}$, $k = k+1$;

– если условие не выполняется, то $\bar{x} = \bar{x}_k$ и операция останавливается.

Метод сопряжённых градиентов. *Итерационный метод* (нахождение по приближённому значению величины следующего приближения) для безусловной оптимизации в многомерном пространстве. Основным достоинством метода является то, что он решает квадратичную задачу оптимизации за конечное число шагов.

Рассмотрим следующую задачу оптимизации:

$$F(x)=\frac{1}{2}\langle Ax,x\rangle-\langle b,x\rangle\rightarrow \inf; x\in R^n,$$

где A – симметричная положительно определённая матрица размера $n \times n$,
R^n – евклидово пространство, $R^n = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Такая задача оптимизации называется *квадратичной*. Заметим, что $F'(x) = Ax - b$. Условие экстремума функции $F'(x) = 0$ эквивалентно системе $Ax - b = 0$. Функция $F(x)$ достигает своей нижней грани в единственной точке x^*, определяемой уравнением $Ax^* = b$. Таким образом, данная задача оптимизации сводится к решению системы линейных уравнений $Ax = b$.

Идея метода сопряжённых градиентов состоит в следующем: пусть $\{\rho_k\}_{k=1}^n$– базис в R^n. Тогда для любой точки $x_0 \in R^n$ вектор $x^* - x_0$ раскладывается по базису $x^* - x_0 = \alpha_1\rho_1 + \alpha_2\rho_2 + \cdots + \alpha_n\rho_n$. Таким образом, x^* представимо в виде

$$x^* = x_0 + \alpha_1\rho_1 + \alpha_2\rho_2 + \cdots + \alpha_n\rho_n.$$

Каждое следующее приближение вычисляется по формуле

$$x_k = x_0 + \alpha_1\rho_1 + \alpha_2\rho_2 + \cdots + \alpha_n\rho_n.$$

Два вектора ρ и q называются сопряжёнными относительно симметричной матрицы B, если $\langle B_{\rho,q}\rangle = 0$. Опишем способ построения базиса $\{\rho_k\}_{k=1}^n$ в методе сопряжённых градиентов. В качестве начального приближения x_0 выбираем произвольный вектор. На каждой итерации α_k выбираются по правилу

$$\alpha_k = \arg\min F(x_k - \alpha_k \cdot \rho_k).$$

Базисные вектора $\{\rho_k\}$ вычисляются по формулам:

$$\rho_1 = -F'(x_0);\ \rho_{k+1} = -F'(x_0) + \beta_k \cdot \rho_k.$$

Коэффициенты β_k выбираются так, чтобы векторы ρ_k и ρ_{k+1} были сопряжёнными относительно A:

$$\beta_k = \frac{\langle F'(x_k), A_{Pk}\rangle}{\langle A_{pk}, p_k\rangle}.$$

Если обозначить за $r_k = b - Ax_k = -F'(x_k)$, то после нескольких упрощений получим окончательные формулы, используемые при применении метода сопряжённых градиентов на практике:

$$r_1 = p_1 = b - Ax_0;\ \alpha_k = \frac{\langle r_k, r_k \rangle}{\langle A_{pk}, p_k \rangle};\ x_{k+1} = x_k + \alpha_k \rho_k;$$

$$r_{k+1} = r_k - \alpha_k A p_k;\ \beta_k = \frac{\langle r_{k+1}, r_{k+1} \rangle}{\langle r_k, r_k \rangle};\ x_{k+1} = x_k + \alpha_k \rho_k.$$

Рассмотрим теперь модификацию метода сопряжённых градиентов для случая, когда минимизируемый функционал не является квадратичным. Будем решать задачу

$$F(x) \to \min, x \in R^n,$$

где $F(x)$ – непрерывно дифференцируемая в R^n функция;

R^n – евклидово пространство, $R^n = x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Чтобы модифицировать метод сопряжённых градиентов для решения этой задачи необходимо получить для ρ_k, α_k, β_k формулы, в которые не входит матрица A:

$$\alpha_k = \arg\min F(x_k - \alpha_k \cdot \rho_k),$$

$$p_{k+1} = r_{k+1} + \beta_k \rho_k,$$

где β_k можно вычислять по одной из трёх формул:

$$\beta_k = -\frac{\langle F'(x_k), F'(x_k) \rangle}{\langle F'(x_{k-1}), F'(x_{k-1}) \rangle};$$

$$\beta_k = \frac{\langle F'(x_k), F'(x_k) - F'(x_{k-1}) \rangle}{\langle F'(x_{k-1}), F'(x_{k-1}) \rangle};$$

$$\beta_k = -\frac{\langle F''(x_k)\rho_k, F'(x_k) \rangle}{\langle F''(x_{k-1}), \rho_k, \rho_k \rangle}.$$

Если функция $F(x)$ – квадратичная и строго выпуклая, то все три формулы дают одинаковый результат. Если $F(x)$ – произвольная функция, то каждой из формул соответствует своя модификация метода сопряжённых градиентов.

Третья формула используется редко, она требует, чтобы функция $F(x) \in C^2(R^n)$ и вычисления гессиана функции $F(x)$ на каждом шаге метода.

Задание для самостоятельной работы

1 Сформулировать задачу оптимизации в рамках экспериментального исследования по теме диссертации.

2 Разработать алгоритм оптимизации.

6 Практическое занятие № 6. Методы вычислительной математики в задачах оптимизации

Цель работы: ознакомиться с методами вычислительной математики в задачах оптимизации.

Краткие теоретические сведения

При решении конкретной задачи оптимизации исследователь прежде всего должен выбрать математический метод, который приводил бы к конечным результатам с наименьшими затратами на вычисления или же давал возможность получить наибольший объем информации об искомом решении. Выбор того или иного метода в значительной степени определяется постановкой оптимальной задачи, а также используемой математической моделью объекта оптимизации.

В настоящее время для решения оптимальных задач применяют в основном следующие методы:

– методы исследования функций классического анализа;
– методы, основанные на использовании неопределенных множителей Лагранжа;
– вариационное исчисление;
– динамическое программирование;
– принцип максимума;
– линейное программирование;
– нелинейное программирование.

Методы исследования функций классического анализа представляют собой наиболее известные методы решения несложных оптимальных задач, с которыми известны из курса математического анализа. Обычной областью использования данных методов являются задачи с известным аналитическим выражением критерия оптимальности, что позволяет найти не очень сложное, также аналитическое выражение для производных. Полученные приравниванием нулю производных уравнения, определяющие экстремальные решения оптимальной задачи, крайне редко удается решить аналитическим путем, поэтому, как правило, применяют вычислительные машины. При этом надо решить систему конечных уравнений, чаще всего нелинейных, для чего приходится использовать численные методы, аналогичные методам нелинейного программирования.

Дополнительные трудности при решении оптимальной задачи методами исследования функций классического анализа возникают вследствие того, что система уравнений, получаемая в результате их применения, обеспечивает лишь необходимые условия оптимальности. Поэтому все решения данной системы (а их может быть и несколько) должны быть проверены на достаточность. В результате такой проверки сначала отбрасывают решения, которые не определяют экстремальные значения критерия оптимальности, а затем среди остающихся экстремальных решений выбирают решение, удовлетворяющее условиям оптимальной задачи, т. е. наибольшему или наименьшему значению критерия оптимальности в зависимости от постановки задачи.

Метод множителей Лагранжа применяют для решения задач такого же класса сложности, как и при использовании обычных методов исследования функций, но при наличии ограничений типа равенств на независимые переменные. К требованию возможности получения аналитических выражений для производных от критерия оптимальности при этом добавляется аналогичное требование относительно аналитического вида уравнений ограничений.

Множители Лагранжа можно применять для решения задач оптимизации объектов на основе уравнений с частными производными и задач динамической оптимизации. При этом вместо решения системы конечных уравнений для отыскания оптимума необходимо интегрировать систему дифференциальных уравнений.

Следует отметить, что множители Лагранжа используют также в качестве вспомогательного средства и при решении специальными методами задач других классов с ограничениями типа равенств, например, в вариационном исчислении и динамическом программировании. Особенно эффективно применение множителей Лагранжа в методе динамического программирования, где с их помощью иногда удается снизить размерность решаемой задачи.

Методы вариационного исчисления обычно используют для решения задач, в которых критерии оптимальности представляются в виде функционалов и решениями которых служат неизвестные функции. Такие задачи возникают обычно при статической оптимизации процессов с распределенными параметрами или в задачах динамической оптимизации.

Вариационные методы позволяют в этом случае свести решение оптимальной задачи к интегрированию системы дифференциальных уравнений Эйлера, каждое из которых является нелинейным дифференциальным уравнением второго порядка с граничными условиями, заданными на обоих концах интервала интегрирования. Число уравнений указанной системы при этом равно числу неизвестных функций, определяемых при решении оптимальной задачи. Каждую функцию находят в результате интегрирования получаемой системы.

Уравнения Эйлера выводятся как необходимые условия экстремума функционала. Поэтому полученные интегрированием системы дифференциальных уравнений функции должны быть проверены на экстремум функционала.

При наличии ограничений типа равенств, имеющих вид функционалов, применяют множители Лагранжа, что дает возможность перейти от условной задачи к безусловной. Наиболее значительные трудности при использовании вариационных методов возникают в случае решения задач с ограничениями типа неравенств.

Динамическое программирование служит эффективным методом решения задач оптимизации дискретных многостадийных процессов, для которых критерий оптимальности задается как аддитивная функция критериев оптимальности отдельных стадий. Без особых затруднений указанный метод можно распространить и на случай, когда критерий оптимальности задан в другой форме, однако при этом обычно увеличивается размерность отдельных стадий.

По существу, метод динамического программирования представляет собой алгоритм определения оптимальной стратегии управления на всех стадиях процесса. При этом закон управления на каждой стадии находят путем решения частных задач оптимизации последовательно для всех стадий процесса с помощью методов исследования функций классического анализа или методов нелинейного программирования. Результаты решения обычно не могут быть выражены в аналитической форме, а получаются в виде таблиц.

При решении задач методом динамического программирования, как правило, используют вычислительные машины, обладающие достаточным объемом памяти для хранения промежуточных результатов решения, которые обычно получаются в табличной форме.

Принцип максимума применяют для решения задач оптимизации процессов, описываемых системами дифференциальных уравнений. Достоинством математического аппарата принципа максимума является то, что решение может определяться в виде разрывных функций; это свойственно многим задачам оптимизации, например, задачам оптимального управления объектами, описываемыми линейными дифференциальными уравнениями.

Нахождение оптимального решения при использовании принципа максимума сводится к задаче интегрирования системы дифференциальных уравнений процесса и сопряженной системы для вспомогательных функций при граничных условиях, заданных на обоих концах интервала интегрирования, т. е. к решению краевой задачи. На область изменения переменных могут быть наложены ограничения. Систему дифференциальных уравнений интегрируют, применяя обычные программы на цифровых вычислительных машинах.

Принцип максимума для процессов, описываемых дифференциальными уравнениями, при некоторых предположениях является достаточным условием оптимальности. Поэтому дополнительной проверки на оптимум получаемых решений обычно не требуется.

Линейное программирование представляет собой математический аппарат, разработанный для решения оптимальных задач с линейными выражениями для критерия оптимальности и линейными ограничениями на область изменения переменных. Такие задачи обычно встречаются при решении вопросов оптимального планирования производства с ограниченным количеством ресурсов, при определении оптимального плана перевозок (транспортные задачи) и т. д.

Для решения большого круга задач линейного программирования имеется практически универсальный алгоритм − *симплексный метод,* позволяющий за конечное число итераций находить оптимальное решение подавляющего большинства задач. Тип используемых ограничений (равенства или неравенства) не сказывается на возможности применения указанного алгоритма. Дополнительной проверки на оптимальность для получаемых решений не требуется. Как правило, практические задачи линейного программирования отличаются весьма значительным числом независимых переменных. Поэтому для их решения обычно используют вычислительные машины, необходимая мощность которых определяется размерностью решаемой задачи.

Методы нелинейного программирования применяют для решения оптимальных задач с нелинейными функциями цели. На независимые переменные могут быть наложены ограничения также в виде нелинейных соотношений, имеющих вид равенств или неравенств. По существу, методы нелинейного программирования используют, если ни один из перечисленных выше методов не позволяет сколько-нибудь продвинуться в решении оптимальной задачи. Поэтому указанные методы иногда называют также *прямыми методами* решения оптимальных задач.

Для получения численных результатов важное место отводится нелинейному программированию и в решении оптимальных задач такими методами, как динамическое программирование, принцип максимума и т. п. на определенных этапах их применения.

Пожалуй, наилучшим путем при выборе метода оптимизации, наиболее пригодного для решения соответствующей задачи, следует признать исследование возможностей и опыта применения различных методов оптимизации.

Задание для самостоятельной работы

1 Изучить методы вычислительной математики для оптимизации.

2 Разработать алгоритм поиска наименьшего расстояния между объектами (условие задачи для каждого варианта определяет преподаватель).

7 Практическое занятие № 7. Численные методы решения некоторых типов задач, связанных с автоматизацией эксперимента

Цель работы: исследовать сеточные методы аппроксимации дифференциальных уравнений и ознакомиться с принципом аппроксимации производной конечными разностями.

Краткие теоретические сведения

Наряду с аналитическими методами для решения задач математической физики активно используют численные методы.

Численные методы позволяют получить конкретное числовое описание протекающего процесса. Чтобы довести решение задачи «до числа», нужно вписаться в особенности процесса вычислений. Для этого в пространственно-временной области выбирают конечное число точек. Всю совокупность точек называют *сеткой*, а каждую отдельную точку – *узлом сетки*.

Дифференциальное уравнение, граничные и начальные условия заменяют соотношениями между значениями искомой величины в узлах сетки.

Таким образом, краевая задача, содержащая дифференциальное (а возможно, и интегральное) уравнение, заменяется системой в общем случае нелинейных уравнений. Эта процедура называется *дискретизацией*. Она позволяет в случае успеха получить значения неизвестной функции в узлах сетки.

Возможны другие подходы к приближенному решению краевой задачи, не связанные с выбором сетки в пространственно-временной области. Если численный метод следует предложенной схеме, т. е. основан на выборе сетки, то его относят к *сеточным методам*. Сеточные методы различаются по способу выбора сетки и правилам формирования уравнений, связывающих значения неизвестной функции в узлах сетки.

В конкретном сеточном методе важен не сам выбор фиксированной сетки и формирование уравнений, связывающих значения величины в узлах, а важны выборы бесконечной серии $\{S^N\}$ сеток, такой, что количество узлов в этих сетках неограниченно возрастает, а расстояние между ближайшими узлами сеток стремится к нулю. Метод также должен определять формирование сеточных уравнений для каждой сетки в выбранной серии. В таком случае говорят о *сеточной схеме*, понимая под этим набор правил формирования серии сеток и соответствующих систем сеточных уравнений.

Сходимость сеточной схемы к решению краевой задачи означает адекватность дискретной математической модели, получаемой в рамках этой схемы, соответствующей непрерывной математической модели, т. е. краевой задаче. Качество сеточной схемы характеризуется еще одним свойством – ее *устойчивостью*. Под этим понимается непрерывная зависимость решения сеточной задачи от исходных данных.

Исследовать сеточную схему на сходимости – достаточно сложное дело. В этом исследовании помогают *аппроксимирующие свойства* схемы.

Говорят, что дифференциальный оператор $L(u)$, определённый на функциях u, заданных в области $D \subset R^n$, аппроксимируется на некотором классе функций $u \in U$ конечно-разностным оператором $R_h(u_h)$, определённым на функциях u_h, заданных на сетке, зависящей от шага h, если выполняется условие сходимости

$$\| L(u) - R_h(u_h) \| \to 0; \qquad h \to 0 (\forall_u \in U).$$

Говорят, что аппроксимация имеет порядок точности k, если:

$$\| L(u) - R_h(u_h) \| \le h^k M; \qquad h \to 0 (\forall_u \in U),$$

где M – константа, зависящая от конкретной функции $u \in U$, но не зависящая от шага h.

Норма, использованная выше, может быть различной, и понятие аппроксимации зависит от её выбора. Часто используется дискретный аналог нормы равномерной непрерывности:

$$\|u_h\| = \max_n |u_h(x_h)|,$$

иногда используются дискретные аналоги интегральных норм.

Пример – Аппроксимация оператора $L(u) = u_{xx}$ конечно-разностным оператором

$$R_h(u_h)(x_i) = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2}; \quad u_i = u(x_i); \qquad x_{i+1} = x_i + h,$$

на ограниченном интервале $D \subset R$ имеет второй порядок точности на классе гладких функций $U = C^4(D)$.

Доказательство

С помощью формулы Тейлора

$$u_{n\pm1} = u_n \pm\ hu_x(x_n) + \frac{h^2}{2}u_{xx}(x_n) + \frac{h^2}{2}u_{xx}(x_n) \pm\ \frac{h^3}{3!}u_{xxx}(x_n) + \frac{h^4}{4!}u_{xxxx}(x_n + \xi_\pm);$$

$$\xi_\pm \in (0, \pm h)$$

получается оценка

$$|u_{xx}(x_n) - R_h(u_h)(x_n)| = \frac{1}{h^2}|u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1} - h^2u_{xx}(x_n)| =$$

$$= \frac{h^2}{4!}|u_{xxxx}(x_n + \xi_+) + u_{xxxx}(x_n + \xi_-)| \le \frac{h^2}{4!}C,$$

где C – константа,

$$C = 2\sup_{x \in D}|u_{xxxx}(x)| < \infty.$$

Конечно-разностная задача аппроксимирует дифференциальную задачу, и аппроксимация имеет порядок точности k, если и само дифференциальное уравнение, и граничные (и начальные) условия аппроксимируются соответствующими конечно-разностными операторами с порядком точности не ниже k.

Задание для самостоятельной работы

Выполнить конечно-разностную аппроксимацию для уравнения теплопроводности (допускаются задачи, связанные с темой диссертационного исследования) и разработать алгоритм численного интегрирование уравнения с помощью компьютера.

8 Практическое занятие № 8. Автоматизация оформления отчетов и документации

Автоматизация – одно из направлений научно-технического прогресса, применение саморегулирующих технических средств, экономико-математических методов и систем управления, освобождающих человека от участия в процессах получения, преобразования, передачи и использования энергии, материалов или информации, существенно уменьшающих степень этого участия или трудоёмкость выполняемых операций. Требует дополнительного применения датчиков (сенсоров), устройств ввода, управляющих устройств (контроллеров), исполнительных устройств, устройств вывода, использующих электронную технику и методы вычислений, иногда копирующие нервные и мыслительные функции человека. Цель автоматизации – повышение производительности труда, улучшение качества продукции, оптимизация управления, устранение человека от производств, опасных для здоровья. Автоматизация, за исключением простейших случаев, требует комплексного, системного подхода к решению задачи, поэтому решения стоящих перед автоматизацией задач обычно называют системами, например: система автоматического управления (САУ); система автоматизации проектных работ (САПР); автоматизированная система управления технологическим процессом (АСУ ТП).

Одним из средств автоматизации документации является ***Microsoft Word*** – текстовый процессор, предназначенный для создания, просмотра, редактирования и форматирования текстов статей, деловых бумаг, а также иных документов, с локальным применением простейших форм таблично-матричных алгоритмов. К автоматизированным функциям MS Word можно отнести автотекст, автозамену, автоформатирование, шаблон.

Автотекст позволяет быстро вставить в документ требуемые объекты и гарантирует правильность при повторном вводе текста. Эта функция позволяет сохранять часто используемые фрагменты текста (или рисунка) и при необходимости быстро вставлять в текст. *Автозамена* – средство для автоматической коррекции опечаток, вставки в документ фрагментов текста, графики, таблиц и т. п. Команда *Автоформат* осуществляет автоматическое форматирование под контролем пользователя. Можно просмотреть замены форматирования, предлагаемые MS Word, оставляя те, которые устраивают, и отклоняя неудачные. *Шаблон* – это совокупность параметров документа, предназначенная для многократного использования. В состав шаблона входят: форматы текста, форматы страницы, специальные панели инструментов, макросы.

Microsoft Access – система управления базами данных (СУБД), предназначенная для создания и обслуживания баз данных, обеспечения доступа к данным и их обработки. База данных (БД) представляет собой организованную структуру, используемую для хранения данных, т. е. любых сведений о явлениях, процессах, действиях и т. д. Использование MS Access для хранения и поиска данных, представления информации в удобном виде и автоматизации выполнения повторяющихся задач. MS Access может использовать в работе все возможности DDE (динамический обмен данными) и OLE (связь и внедрение объектов). DDE позволяет осуществлять обмен данными между Access и любым другим поддерживающим DDE приложением Windows. OLE является более изощренным средством Windows, которое позволяет установить связь с объектами другого приложения или внедрить какие-либо объекты в базу данных MS Access. В MS Access для обработки данных базовых таблиц используется мощный язык SQL. Используя SQL можно выделить из одной или нескольких таблиц необходимую для решения конкретной задачи информацию. В состав MS Access входят конструкторы таблиц, форм, запросов и отчётов. Используя *макросы* или модули для автоматизации решения задач, можно создавать ориентированные на пользователя приложения такими же мощными, как приложения, написанные на языках программирования.

Microsoft Excel – программа для работы с электронными таблицами, она предоставляет возможности экономико-статистических расчетов, графические инструменты и язык макропрограммирования VBA (Visual Basic for Application). Шаблоны в MS Excel – это особый вид рабочих листов и книг, для которых заданы стили и оформление. Открывая такой объект, вы можете сразу заполнять его данными, уделяя меньше внимания форматированию. Таким образом, вы поддерживаете единый стиль своих документов и экономите огромное количество времени. Применение шаблонов позволяет концентрироваться на качественной составляющей расчетов, без постоянного однотипного оформления.

К возможности автоматизации заполнения договоров и других документов (например, письма, служебные записки, различные формы текстовых отчетов, нотариально оформленная доверенность) многие относятся скептически. Это действительно так, если речь идет о единичных договорах, регулирующих довольно сложные взаимоотношения сторон, но в любом случае создание этих документов происходит по какому-либо разработанному алгоритму. За основу принимается какой-то шаблон, а потом происходит его доработка до требуемых норм.

Предположим, что юристы организации (предприятие, банк) разработали какой-то шаблон типового документа (договора) и в него необходимо внести некоторые изменения и вывести его на печать.

Для этого открывается ранее составленный шаблон, ему присваивается новое имя, происходит вычитка от начала документа до конца с одновременным редактированием. На этом этапе довольно часто встречаются внесенные или неисправленные ошибки. После вывода документа на печать происходит вычитка, и документ предоставляется на ознакомление и подписание его другой стороне.

Кроме того, созданные документы в виде отдельных файлов хранятся под разными именами и если приходится подготавливать через некоторое время аналогичный договор с этим же лицом (или другим), то дополнительное время уходит на поиск предыдущей версии. Причем потери времени на этом этапе значительны. После создания документа, его необходимо зарегистрировать в журнале, на что требуется дополнительное время.

Задание для самостоятельной работы

Исследовать возможности автоматизации оформления рукописи магистерской диссертации в Microsoft Word или LaTEX.

Список литературы

1 **Герасимова, Е. Б.** Метрология, стандартизация, сертификация: учебное пособие / Е. Б. Герасимова. – Москва: ФОРУМ, 2018. – 224 с.

2 **Пантелеев, А. В.** Методы оптимизации в примерах и задачах : учебное пособие / А. В. Пантелеев. – Москва: Высшая школа, 2002. – 544 с.

3 **Баращук, В. И.** Планирование эксперимента в технике / В. И. Баращук; под ред. Б. П. Креденцера. – Киев : Техника, 1984. – 200 с.: ил.

4 **Алексеев, Е. Р.** Scilab: Решение инженерных и математических задач / Е. Р. Алексеев, О. В. Чеснокова, Е. А. Рудченко. – Москва: БИНОМ, 2008. – 269 с.: ил.

5 **Свешников, А. Г.** Лекции по математической физике / А. Г. Свешников, А. Н. Боголюбов, В. В. Кравцов. – Москва: Наука, 2004. – 60 с.