

УДК 621.833

М. Е. Лустенков, канд. техн. наук, доц., А. П. Прудников

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОТЕРЬ МОЩНОСТИ В НАГРУЖЕННОМ КОНТАКТЕ «ТЕЛО КАЧЕНИЯ – ПОВЕРХНОСТЬ»

В статье рассматриваются вопросы теоретического определения потерь мощности в однотоочечном (однолинейном) и трехточечном (трехлинейном) контактах шариков (роликов) и рабочих поверхностей передач и механизмов, в которых используются тела качения для передачи нагрузки. Определен качественный и количественный состав потерь мощности. Предложены способы определения угловой скорости тела качения, контактирующего в процессе передачи нагрузки с несколькими поверхностями.

В машинах, механизмах и приборах осуществляется взаимное перемещение контактирующих деталей, сопровождаемое потерями мощности, зачастую с местным нагревом, усталостным и хрупким разрушением. Данное взаимодействие осуществляется посредством процессов скольжения и качения, характер протекания которых, по сути, определяет долговечность машины. Наиболее характерны эти процессы для механизмов, использующих тела качения для передачи нагрузки и осуществления перемещений узлов машин: шариковинтовых передач, обгонных муфт, подшипников качения, направляющих качения и др. Качение со скольжением сопровождается затратами энергии, в связи с чем возникает необходимость теоретического их определения с целью последующей минимизации.

*Однотоочечный (однолинейный) контакт.* Механика движения тела качения по поверхности с одним точечным либо линейным касанием до настоящего времени широко рассмотрена при изучении взаимодействия пары «колесо-рельс». Изучим влияние в данных условиях на процесс движения тела качения величины тягового (тормозного) момента. Рассмотрим тело сферической формы с радиусом  $R$  (рис. 1), движущееся в плоскости по опорной поверхности. Внешние силовые факторы, действующие на тело, можно привести к главному вектору, раскладываемому, в свою очередь, на нормальную  $\vec{F}_n$  и касательную  $\vec{F}_\tau$  составляющие, и к

моменту  $M$ , действующему в плоскости, перпендикулярной оси вращения. Реакция опорной поверхности  $N$  будет смещена в сторону движения тела качения на расстояние (эксцентриситет)  $\delta$ , называемый коэффициентом трения качения. В точке контакта  $A$  будет действовать сила сцепления  $F_{cu}$ , которая при равномерном движении уравнивает внешнюю касательную силу  $\vec{F}_\tau$ .

Рассмотрим систему трех уравнений плоскопараллельного движения тела [1, с. 321]:

$$m\dot{s} = F_\tau - F_{cu}; \quad (1)$$

$$-m \frac{\dot{s}^2}{\rho} = -F_n + N; \quad (2)$$

$$J_z \ddot{\phi} = M + F_{cu} R - N \delta, \quad (3)$$

где  $\dot{s}$ ,  $\ddot{s}$  – скорость и ускорение центра масс тела  $C$  ( $s$  – дуговая координата);  $\ddot{\phi}$  – угловое ускорение тела относительно оси, проходящей через центр масс, перпендикулярно плоскости движения;  $\delta$  – коэффициент трения качения;  $m$  – масса тела;  $J_z$  – осевой момент инерции тела относительно бинормали;  $\rho$  – радиус кривизны траектории движения центра масс тела качения.

Исследуем качение по плоскости ( $\rho = 0$ ). Используя одно из условий качения ( $\dot{s} = R\dot{\phi}$ ), из системы (1)...(3) выразим силу сцепления.

$$F_{сц} = \left( -M + N\delta + \frac{J_z F_\tau}{mR} \right) / \left( R + \frac{J_z}{mR} \right). \quad (4)$$

Применив другое условие качения, при котором сила сцепления не может

превышать предельное значение, определяемое из закона Кулона, получим

$$fN \geq \left( -M + N\delta + \frac{J_z F_\tau}{mR} \right) / \left( R + \frac{J_z}{mR} \right) \geq -fN. \quad (5)$$

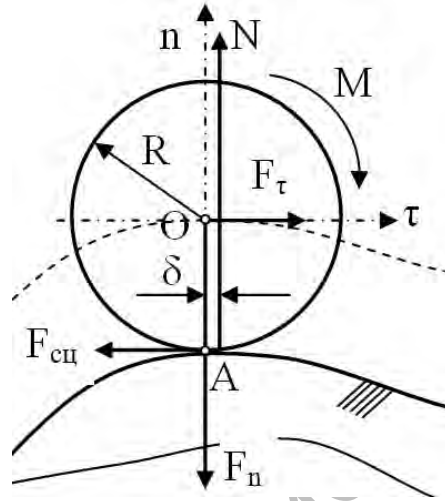


Рис. 1. К анализу условия осуществления чистого качения в одноточечном (однолинейном) контакте

Проведя преобразование неравенства (5), выразим из него внешний крутящий момент  $M$ .

$$\frac{J_z F_\tau}{mR} + N\delta - fN \left( R + \frac{J_z}{mR} \right) \leq M \leq \frac{J_z F_\tau}{mR} + N\delta + fN \left( R + \frac{J_z}{mR} \right), \quad (6)$$

или  $M_{кач.min} \leq M \leq M_{кач.max}$ .

Выражением (6) определяется интервал, в котором должен находиться приложенный к телу крутящий момент  $M$ , чтобы при заданном главном векторе внешних сил осуществлялся процесс качения. Величина интервала определится из выражения

$$\Delta M = 2 fN \left( R + \frac{J_z}{mR} \right). \quad (7)$$

Для сферы, у которой  $J_z = 0,4mR^2$ , получим

$$M_{кач.min} = N\delta + 0,4F_\tau R - 1,4fNR; \quad (8)$$

$$M_{кач.max} = N\delta + 0,4F_\tau R + 1,4fNR; \quad (9)$$

$$\Delta M = |M_{кач.max} - M_{кач.min}| = 2,8fNR. \quad (10)$$

Как показывают расчеты, диапазон  $\Delta M$  достаточно узок. Например, для шарика диаметром 10 мм с параметрами нагружения  $F_\tau = 10$  Н,  $F_n = 981$  Н и при коэффициентах  $f = 0,1$  и  $\delta = 0,05$  см он составляет  $\Delta M = 1,373$  Н·м. При этом внешний крутящий момент должен быть в пределах от  $-0,176$  до  $1,197$  Н·м для поддержания процесса чистого качения. Из этого диапазона, при определенных условиях, следует исключать момент, соответствующий условию равновесия (остановки) шарика. Для тела качения в виде ролика диапазон изменения крутящего момента  $\Delta M$  на 7,14 % больше (из-за разницы значений в моментах инерции).

При движении по поверхности с изменяющимся радиусом кривизны реакция опоры поверхности, согласно уравнению (2), будет зависеть от скорости движения и радиуса траектории:

$$N = F_n - m \frac{\dot{s}^2}{\rho}. \quad (11)$$

Уравнение (6) при этом будет записано в следующем виде:

$$\frac{J_z F_\tau}{mR} + \left( F_n - m \frac{\dot{s}^2}{\rho} \right) \left( \delta - f \left( R + \frac{J_z}{mR} \right) \right) \leq \\ \leq M \leq \frac{J_z F_\tau}{mR} + \left( F_n - m \frac{\dot{s}^2}{\rho} \right) \left( \delta + f \left( R + \frac{J_z}{mR} \right) \right). \quad (12)$$

Частным случаем является равномерное движение центра масс тела качения. При этом диапазон значений внешнего момента определится из зависимости

$$N(\delta - fR) \leq M \leq N(\delta + fR). \quad (13)$$

Для описанных выше условий нагружения шарика диаметром 10 мм, для осуществления процесса чистого качения (без скольжения) внешний момент должен изменяться от 0 до 0,981 Н·м.

Рассмотрим вышеизложенный математический анализ с точки зрения практического применения. Полученные формулы позволяют рассчитывать силовые параметры при создании приводов со следящими системами. Входными параметрами могут являться значения реакций тел качения, их изменяющиеся радиусы, скорость движения центра масс и координаты траектории движения. После обработки цифровых сигналов система определяет необходимый крутящий момент для поддержания процесса качения и генерирует его с помощью независимых приводов, связанных с осями тел качения. Практически же достаточно сложно и экономически невыгодно обеспечить для механизмов с телами качения диаметром менее 20 мм независимый привод, с помощью которого будет

производиться их подтормаживание либо разгон. Однако данный вопрос актуален и вполне осуществим для систем с парами «колесо–поверхность», где используются тела качения большого диаметра.

Двухточечный (двухлинейный) контакт, рассмотренный нами на примере радиального подшипника качения, является частным случаем трехточечного контакта и в данной работе не приводится.

Трехточечный (трехлинейный) контакт (плоская модель). Данный случай характерен для силового взаимодействия тел качения и рабочих поверхностей кулачков в планетарных шариковых передачах (ППП) [2]. Рассмотрим плоскопараллельное движение тела качения 4 с радиусом  $r_s$ , контактирующего с тремя поверхностями: внутреннего кулачка 1, вала с пазами 2 и наружного кулачка 3, – одна из которых (3) неподвижна (рис. 2). При этом пространственная модель передачи заменена плоской разверткой.

Характер взаимодействия тел, изображенных на рис. 2, соответствует первой кинематической схеме ППП. Центр масс тела качения имеет скорость  $v_4$ . Тела 1 (ведущее звено передачи) и 2 (ведомое звено передачи) имеют соответственно скорости  $v_1$  и  $v_2$ , которые в точках контакта  $A$  и  $B$  передаются телу качения 4. Известными считаем угловые скорости всех звеньев передачи  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  и  $\omega_3$  ( $\omega_3 = 0$ ) и, соответственно, линейные скорости  $v_1$ ,  $v_2$  и  $v_3$  ( $v_3 = 0$ ), а также скорость движения центра шарика  $v_4$ . Определим проекции линейных скоростей на оси координат.

$$\begin{aligned} v_{1x} &= \omega_1 R; & v_{1y} &= 0; & v_{2x} &= \omega_2 R; \\ v_{2y} &= 0; & v_{3x} &= 0; & v_{3y} &= 0; \\ v_{4y} &= \omega_1 \frac{AZ_3}{i} \cos\left(\frac{Z_3 \varphi_1}{i}\right), \end{aligned} \quad (14)$$

где  $\varphi_1$  – угол поворота ведущего звена;  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  – угловые скорости внутреннего кулачка и вала с пазами соответственно;  $A$  – амплитуда зацепления (амплитуда сопрягаемых кривых, описывающих беговые дорожки для тел качения на внутреннем и

наружном кулачках);  $R$  – радиус цилиндрической поверхности, на которой расположены центры тел качения;  $Z_3$  – число периодов (выступов) рабочей поверхности наружного кулачка;  $i$  – передаточное отношение.

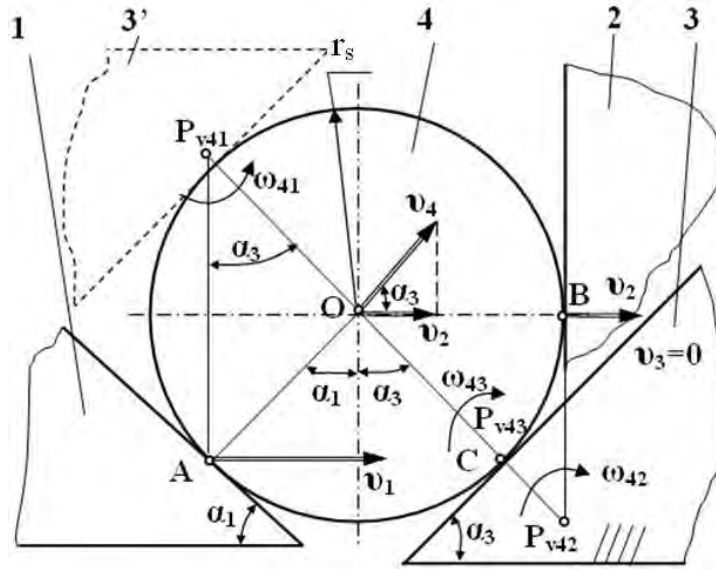


Рис. 2. Контакт тела качения с тремя поверхностями: 1 – внутренний кулачок; 2 – вал с пазами; 3 – наружный кулачок; 3' – другое возможное положение наружного кулачка; 4 – тело качения

После применения метода остановки тела качения, т. е. сообщения всем телам скоростей, равных скорости центра тела качения, но направленных в противоположную сторону, получим выражения для определения условных скоростей:

$$v'_{1x} = v_{1x} - v_{4x} = R(\omega_1 - \omega_2);$$

$$v'_{1y} = v_{1y} - v_{4y} = -\omega_1 \frac{AZ_3}{u} \cos\left(\frac{Z_3\varphi_1}{u}\right); \quad (15)$$

$$v'_{2x} = v_{2x} - v_{4x} = 0;$$

$$v'_{2y} = v_{2y} - v_{4y} = -\omega_1 \frac{AZ_3}{i} \cos\left(\frac{Z_3\varphi_1}{i}\right); \quad (16)$$

$$v'_{3x} = v_{3x} - v_{4x} = -\omega_2 R;$$

$$v'_{3y} = v_{3y} - v_{4y} = -\omega_1 \frac{AZ_3}{i} \cos\left(\frac{Z_3\varphi_1}{i}\right). \quad (17)$$

Условные угловые скорости относительно центра  $O$  и абсолютная скорость тела качения:

$$\omega'_1 = \text{sign}(\alpha_1) \left( \frac{v'_{1x}}{r_s \cos(\alpha_1)} \right) = -\text{sign}(\alpha_1) \left( \frac{v'_{1y}}{r_s \sin(\alpha_1)} \right); \quad (18)$$

$$\omega'_2 = \frac{v'_{2y}}{r_s};$$

$$\omega'_3 = \frac{-v_{4y}}{r_s} = -\frac{\sqrt{v_{4x}^2 + v_{4y}^2}}{r_s}; \quad (19)$$

$$\omega = \frac{\sum_{i=1}^s \omega'_i}{s} = \frac{\omega'_1 + \omega'_2 + \omega'_3}{3}, \quad (20)$$

где  $\alpha_1$  – угол подъема беговой дорожки на внутреннем кулачке;  $s$  – число точек

контакта ( $s = 3$ ).

Возможен альтернативный метод с нахождением угловой скорости шарика (ролика) с условными мгновенными центрами скоростей (МЦС)  $P_{v1}$ ,  $P_{v2}$  и  $P_{v3}$ :

$$\omega'_{1a} = \left( \text{sign}(\alpha_1) \frac{v_1}{r_s} \frac{\sin(|\alpha_3|)}{\sin(\pi - |\alpha_1| - |\alpha_3|)} \right);$$

$$\omega'_{2a} = \left( \frac{v_2}{r_s} \text{tg}(\alpha_3) \right); \quad \omega'_{3a} = \left( \frac{-v_2}{r_s \cos(\alpha_3)} \right); \quad (21)$$

$$\omega = \frac{\omega'_{1a} + \omega'_{2a} + \omega'_{3a}}{3}, \quad (22)$$

где  $\alpha_3$  – угол подъема рабочей поверхности торцового наружного кулачка.

Расчеты показывают, что результаты, полученные по формулам (20) и (22), абсолютно идентичны. На рис. 3 показано, как изменяются угловые скорости тела качения за один оборот ведущего вала для ПШП со следующими параметрами: частотой вращения ведущего звена  $n_1 = 1000$  об/мин,  $Z_1 = 1$ ,  $Z_3 = 4$ ,  $R = 30$  мм,  $A = 12$  мм,  $r_s = 3$  мм. В табл. 1 сведены формулы для определения угловой скорости тела качения в зависимости от линейной скорости входного звена для шести кинематических схем ПШП [1].

Табл. 1. Выражения для определения угловой скорости тела качения в зависимости от кинематической схемы

Номер кинематической схемы	Угловая скорость тела качения	Номер кинематической схемы	Угловая скорость тела качения
1	$\frac{v_1}{i} \frac{\text{tg} \alpha_3}{R} \left( \frac{1}{\sin \alpha_1} \pm \frac{1}{\cos \alpha_3 \text{tg} \alpha_3} - 1 \right)$	4	$\frac{v_2}{R} \text{tg} \alpha_1 \left( 1 \mp \frac{1}{\sin \alpha_1} - \frac{1}{\text{tg} \alpha_1 \cos \alpha_1} \right)$
2	$\frac{v_1}{R} \left( -\text{tg} \alpha_1 \mp \frac{1}{i \cos \alpha_3} + \frac{1}{\cos \alpha_1} \right)$	5	$\frac{v_3}{R} \left( \text{tg} \alpha_3 \mp \frac{1}{i \cos \alpha_1} - \frac{1}{\cos \alpha_3} \right)$
3	$\frac{v_2}{R} \text{tg} \alpha_3 \left( 1 \mp \frac{1}{\sin \alpha_3} - \frac{1}{\text{tg} \alpha_3 \cos \alpha_3} \right)$	6	$\frac{v_3}{i} \frac{\text{tg} \alpha_1}{R} \left( \frac{1}{\sin \alpha_3} \pm \frac{1}{\cos \alpha_1 \text{tg} \alpha_1} - 1 \right)$

Для определения угловой скорости в выражения, приведенные в табл. 1, значения передаточных отношений  $i$  подставляются по модулю. Результаты расчетов также будут отражать абсолютное значение угловой скорости  $\omega_4$ . Знак угловой скорости зависит от схемы силового взаимодействия тела качения в данный момент времени с основными звеньями передачи (для ПШП существуют два таких положения наружного кулачка, обозначенные на рис. 1 индексами 3 и 3').

Скорости скольжения в контакте определяются следующим образом:

$$v_{sk1} = v_1 \cos(|\alpha_1|) - (v_4 \cos(|\alpha_1| + |\alpha_3|) + \text{sign}(\alpha_1) \omega r_s); \quad (23)$$

$$v_{sk2} = v_{4y} + \text{sign}(\alpha_1) \omega r_s; \quad (24)$$

$$v_{sk3} = v_4 + \omega r_s. \quad (25)$$

Рассмотрим, как изменяются скорости скольжения в контакте одного шарика с деталями передачи (рис. 4).

Мощность, потерянная на скольжение, определяется как произведение скорости скольжения  $v_{sk}$  и силы трения скольжения ( $\Pi_{sk} = v_{sk} F_{sk}$ ), которая, в свою очередь, равна произведению нормальной реакции  $N$  в точке контакта и коэффициента трения скольжения  $f$  ( $F_{sk} = fN$ ).

Определять относительные угловые скорости (как у радиального подшипника в случае двухточечного контакта) в данном случае нет необходимости, т. к. в рассматриваемой модели вращение деталей передачи и относи-

тельное вращение тела качения происходят в перпендикулярных плоскостях. Потери мощности на скольжение

$$P_{sk} = f(N_1 v_{sk1} + N_2 v_{sk2} + N_3 v_{sk3}). \quad (26)$$

Потери мощности на сопротивление

качению

$$P_{cach} = \delta \omega (N_{1cp} + N_{2cp} + N_{3cp}), \quad (27)$$

где  $N_{1cp}$ ,  $N_{2cp}$ ,  $N_{3cp}$  – средние значения нормальных реакций, действующие на тело качения со стороны деталей ПШП.

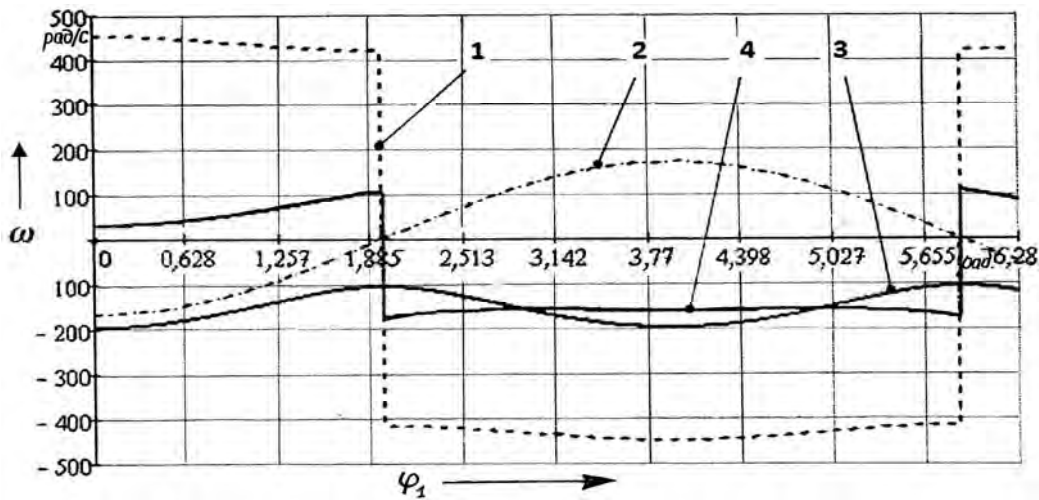


Рис. 3. Изменение условных и общей угловых скоростей тела качения: 1 –  $\dot{\omega}_1$ ; 2 –  $\dot{\omega}_2$ ; 3 –  $\dot{\omega}_3$ ; 4 –  $\dot{\omega}$

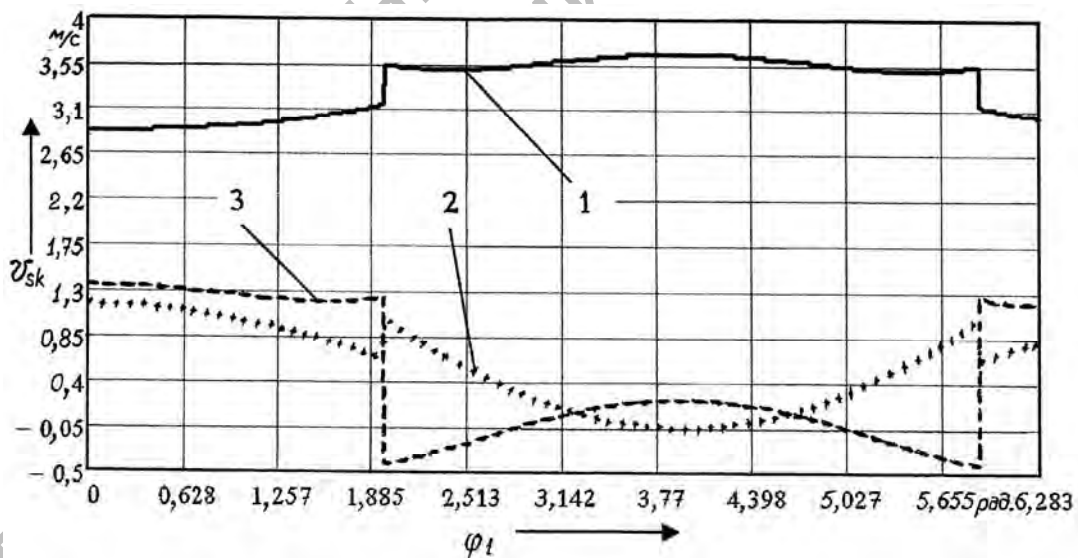


Рис. 4. Изменение условных и общей угловых скоростей тела качения: 1 –  $v_{sk1}$ ; 2 –  $v_{sk2}$ ; 3 –  $v_{sk3}$

При работе передачи значения сил, скоростей и ускорений изменяются циклически. Для численного определения потерь в

передаче необходимо использовать средние значения сил и скоростей звеньев ПШП за полный рабочий цикл, совер-

шаемый телом качения. Средние значения сил определяются по известным формулам [3]. Средние скорости (угловые и скольжения) определим, используя интегральную оценку. При этом исследоваться должен отрезок изменения угла поворота ведущего

вала, при котором каждое тело качения совершит полный рабочий цикл:  $\varphi_1 = \varphi_2 i \Rightarrow \varphi_1 = 2\pi i$ .

Средняя угловая скорость при этом определится по формуле

$$\omega_s = \frac{\int_0^{2\pi} |\omega(\varphi_1)| d\varphi_1}{2\pi} = \frac{\int_0^{2\pi} \left( -\text{sign}(\alpha_1) \left( \frac{v_{1y}}{\sin(\alpha_1)} \right) - \frac{\omega_1}{i} \left( AZ_3 \cos\left(\frac{Z_3 \varphi_1}{i}\right) + \sqrt{R^2 + \left( AZ_3 \cos\left(\frac{Z_3 \varphi_1}{i}\right) \right)^2} \right) \right) d\varphi_1}{2\pi r_s} \quad (28)$$

Интегральная оценка изменения модуля функции позволяет определить площадь, ограниченную функцией  $\omega(\varphi_1)$ , осью абсцисс и начальными значениями угла  $\varphi_1$ , представить ее эквивалентной площади прямоугольника. Разделив эту площадь на ширину ( $2\pi i$ ), получим высоту, т. е. усредненное значение искомой функции на данном отрезке.

Средние скорости скольжения определяются следующим образом:

$$v_{sk1s} = \left[ \int_0^{2\pi i} \left( |v_1 \cos(|\alpha_1|) - v_4 \cos(|\alpha_1| + |\alpha_3|) + \text{sign}(\alpha_1) \omega r_s \right) d\varphi_1 \right] / 2\pi i; \quad (29)$$

$$v_{sk2s} = \frac{\int_0^{2\pi i} \left( |v_{4y} + \text{sign}(\alpha_1) \omega r_s \right) d\varphi_1}{2\pi i}; \quad (30)$$

$$v_{sk3s} = \frac{\int_0^{2\pi i} \left( |v_4 + \omega r_s \right) d\varphi_1}{2\pi i}. \quad (31)$$

Суммарные потери мощности  $P_{sum}$ , как и для одно- и двухточечного контакта, определяются как сумма значений, полученных по формулам (26) и (27) с учетом количества тел качения. КПД передачи получим из выражения

$$\eta = \frac{T_1 \omega_1 - P_{sum}}{T_1 \omega_1} = \frac{T_1 \omega_1 - t(P_{sk} + P_{cach})}{T_1 \omega_1} = \left[ T_1 \omega_1 - \left( f(N_{1cp} v_{sk1s} + N_{2cp} v_{sk2s} + N_{3cp} v_{sk3s}) + \delta \omega t (N_{1cp} + N_{2cp} + N_{3cp}) \right) \right] / T_1 \omega_1, \quad (32)$$

где  $t$  – число тел качения в передаче;  $T_1$  – крутящий момент на ведущем звене.

Для ППП с параметрами:  $A = 10$  мм,  $R = 20$  мм,  $Z_1 = 1$ ,  $Z_3 = 8$ ,  $r_s = 20$  мм,  $n_1 = 1000$  об/мин,  $f = 0,05$ ,  $\delta = 0,01$  мм – КПД составил 0,703, что близко к результатам расчета согласно разработанным ранее моделям. Доля потерь на трение качения составляет 3,6 % от общих потерь мощности. При изменении амплитуды зацепления  $A$  потери (и КПД) имеют экстремум, как было доказано ранее.

Рассмотренная плоская модель адекватно отражает процесс работы передачи с роликами в качестве тел качения. Для шариковых передач требуется повышение точности расчетов и создание пространственной модели.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Никитин, Н. Н.** Курс теоретической механики : учебник для машиностроительных и приборостроительных специальностей вузов / Н. Н. Никитин. – 5-е изд., перераб. и доп. – М. : Высш. шк., 1990. – 607 с. : ил.

2. **Лустенков, М. Е.** Планетарные шариковые передачи цилиндрического типа : монография /

М. Е. Лустенков, Д. М. Макаревич. – Могилев : Белорус.-Рос. ун-т, 2005. – 123 с. : ил.

3. **Лустенков, М. Е.** Определение основных геометрических параметров планетарных шариковых передач / М. Е. Лустенков // Сборка в машиностроении и приборостроении. – 2008. – № 1. – С. 12–17.

Белорусско-Российский университет  
Материал поступил 06.10.2008

**M. E. Lustenkov, A. P. Prudnikov**  
**The estimation of capacity losses in the loaded contact «rolling element – surface»**

Questions of theoretical estimation of capacity losses in single-point (unilinear) and three-point (three-linear) contacts of balls (rollers) and working surfaces of transmissions and mechanisms in which roller elements for loading transfer are used are considered in the article. The qualitative and quantitative structure of capacity losses has been estimated. Ways of estimation of angular speed of a roller element, contacting in the course of loading transfer with several surfaces are offered in the paper.