

УДК 621.1.016.4

Г. С. Ленеvский, канд. техн. наук, доц., А. Е. Моисеев, А. В. Жлоба

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ НАГРЕВА В ТЕРМОСТАТИЧЕСКИХ УСТАНОВКАХ

Работа посвящена созданию математической модели протекания теплообменных процессов в термостатических установках, в которой учтены основные параметры, влияющие на характер протекания и качество процессов. Показана адекватность разработанной параметрической модели на основании математической модели экспериментальным данным, что подтверждает возможность её использования термостатическими установками для оптимизации конструкции и режимов работы.

В настоящее время в сельском хозяйстве для искусственного осеменения крупного рогатого скота используют криоконсервированный биологический материал элитных быков производителей. Для применения и исследования замороженный в жидком азоте биологический материал размораживают в специально разработанных для этих целей термостатических установках (термостатах) в строгом соответствии с требованиями международных и отечественных стандартов. Поскольку натурное исследование термостатов весьма затратно, то наиболее эффективным методом исследования технологических процессов, протекающих в них, является математическое моделирование с применением ЭВМ, которое позволяет найти лучшее конструктивное решение еще на стадии проектирования и определить оптимальные режимы работы устройства и его системы управления. Поэтому на стадии проектирования важны качество используемых расчетных методик, их адекватность, надежность в реализации и достоверность полученных результатов.

Конструкция термостата представлена на рис. 1. Термостат состоит из следующих основных элементов: 1 – корпус; 2 – стакан термостата в сборе; 3 – крышка; 4 – вода. Между корпусом и стаканом термостата имеется воздушный промежуток для уменьшения потерь тепловой энергии на излучение в окружающую

среду. Для обеспечения процесса стабилизации температуры в стакан наливается вода. Между верхней границей воды и крышкой также имеется воздушная прослойка. Во время проведения натуральных экспериментов было выявлено, что корпус термостата нагревается незначительно. В дальнейшем, при разработке математического описания и при составлении расчетной системы для определения распределения температур в разнородных составных элементах термостата, влияние, которое оказывает воздушный промежуток и корпус термостата, учитываться не будет.

Конструкция стакана термостата в сборе представлена на рис. 2. По своей конструкции стакан термостата 2 представляет собой в нижней части диск (основание), с которым сочленена боковая стенка. Стакан термостата снаружи и изнутри покрывается слоем полиэфирной краски. На внешней боковой стороне основания и стенки стакана термостата расположена диэлектрическая прокладка 3, которая предназначена для электрической изоляции поверхности стакана от нагревательного элемента 4. Для обеспечения стабилизации температуры в стакан термостата наливается вода 1. В верхней рабочей зоне стакана термостата с внешней стороны имеется зона, в которой устанавливается датчик температуры 5.

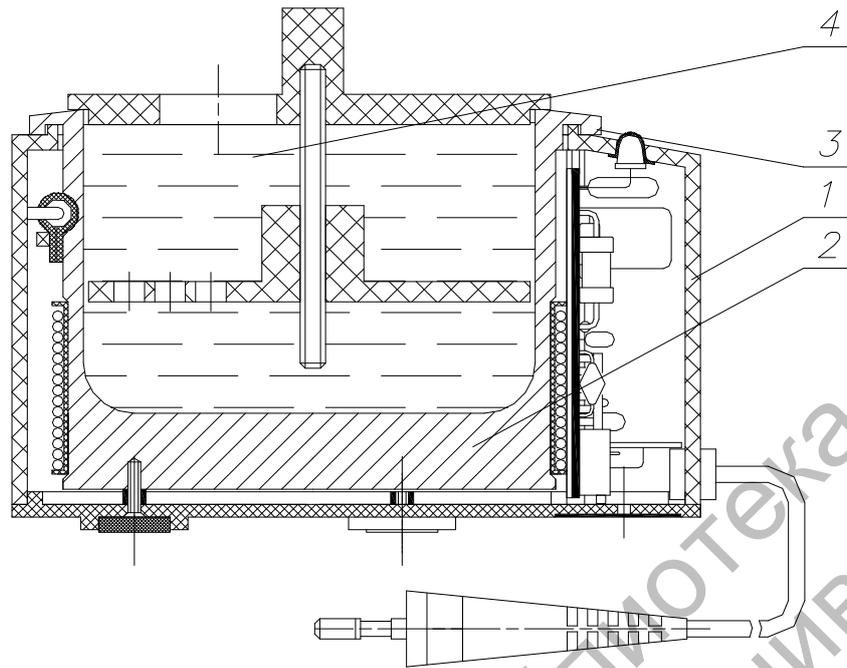


Рис. 1. Конструкция термостата

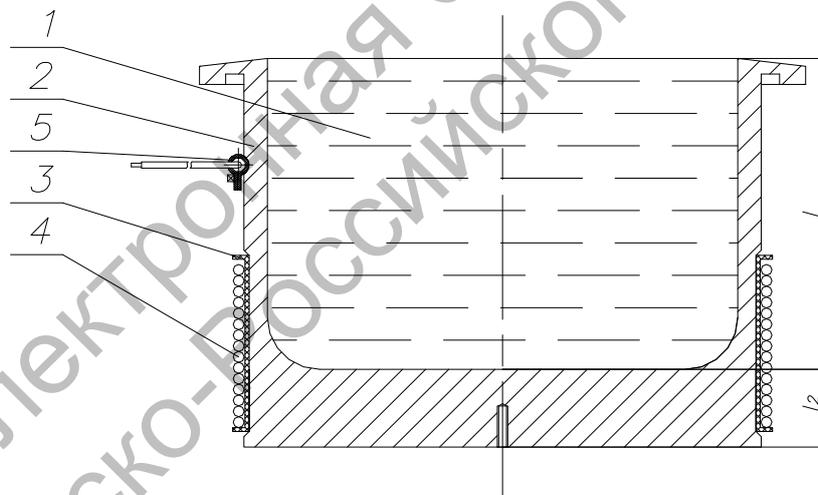


Рис. 2. Конструкция стакана термостата в сборе

Рассмотрим тепловые процессы, протекающие в стакане термостата. Их можно разделить на две составляющие: нагрев основания стакана термостата при подаче тепловой энергии со стороны нагревательного элемента и нагрев боковой стенки стакана термостата.

Тепловые процессы нагрева воды в стакане термостата также можно разде-

лить на две части: нагрев воды от поверхности основания стакана термостата и нагрев воды от внутренней поверхности боковой стенки стакана термостата. Результирующий процесс нагрева воды будет представлять суперпозицию двух процессов.

Теплообменные процессы в термостате можно разделить на два этапа:

«нагрев» и «стабилизация».

Нагрев. Теплофизические процессы функционально зависят от температуры и являются функцией времени. Это режимы, такие как нагрев нагревательного элемента; передача тепловой энергии от нагревательного элемента к основанию и боковой стенке стакана термостата; нагрев воды в стакане термостата от основания и боковой стенки стакана термостата от начальной температуры воды до температуры стабилизации.

Стабилизация. Режим стабилизации температуры воды в стакане на уровне

температуры стабилизации, когда тепловое состояние всей системы можно считать установившимся и не являющимся функцией времени.

Для описания нестационарных температурных полей необходимо решить задачу нестационарной теплопроводности для составного тела. Расчетная система для определения распределения температур в разнородных составных элементах термостата в нестационарном режиме приведена на рис. 3, толщина элементов представлена условно.

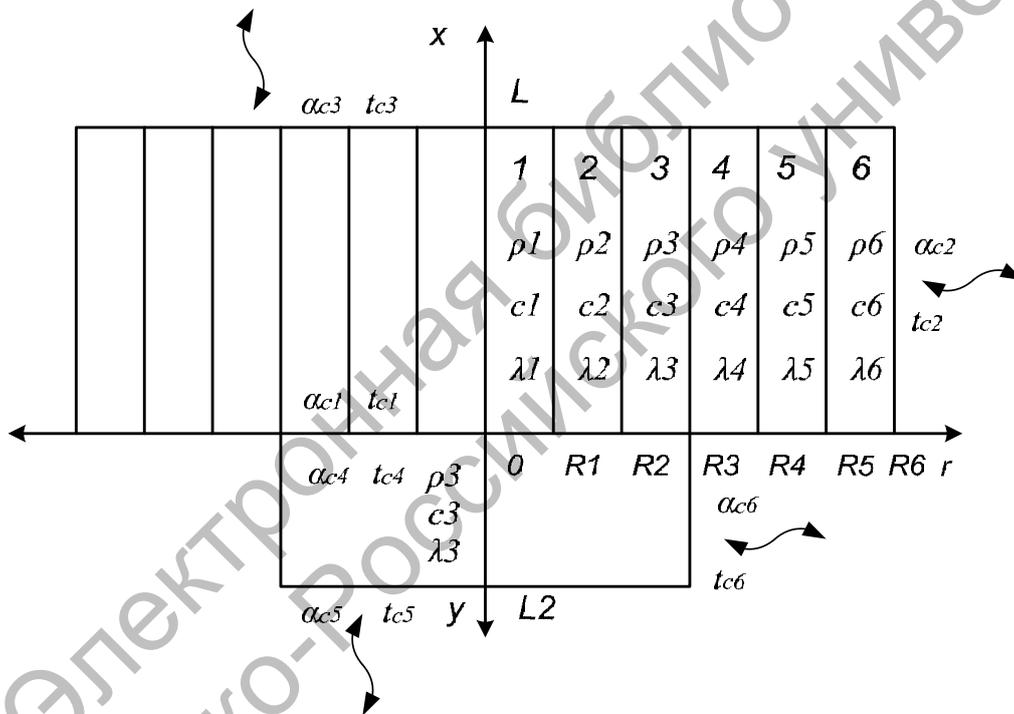


Рис. 3. Расчетная система для определения распределения температур в разнородных составных элементах термостата в нестационарном режиме: 1 – вода; 2 – полиэфирная краска; 3 – боковая стенка стакана термостата; 4 – полиэфирная краска; 5 – диэлектрическая прокладка; 6 – нагревательный элемент

Задача теплопроводности для составного тела [1] может быть решена следующим образом. Решаются соответствующие задачи нестационарной теплопроводности для каждого из контактирующих тел независимо друг от друга при произвольных температурах на поверхности контакта (или произвольных тепловых по-

токах через поверхность контакта). Затем из граничных условий 4-го рода на поверхности контакта определяются функции, первоначально заданные как произвольные.

Тогда решение задачи нестационарной теплопроводности для расчетной системы, представленной на рис. 3,

разбивается на три этапа.

1 Решение задачи нестационарной теплопроводности для шестислойного (вода–полиэфирная краска–боковая стенка стакана термостата–полиэфирная краска–диэлектрическая прокладка–нагревательный элемент) сплошного ограниченного цилиндра с произвольным начальным распределением тепловых потоков, граничными условиями 4-го рода на поверхности контакта слоёв и неоднородными несимметричными граничными условиями 3-го рода на торцевых поверхностях и боковой внешней границе.

2 Решение задачи нестационарной теплопроводности для сплошного граничного цилиндра (основание стакана термостата) с произвольным начальным распределением и неоднородными несимметричными граничными условиями 3-го на торцевых и боковых поверхностях.

3 После решения соответствующих задач нестационарной теплопроводности для каждого из контактирующих тел независимо друг от друга (первый и второй этапы) из граничных условий 4-го рода на поверхности контакта определяются функции, первоначально заданные как произвольные.

Пространственное нестационарное температурное поле может быть описано дифференциальным уравнением Фурье-Кирхгофа [2]. Уравнение имеет вид:

$$c_p \rho \frac{dt}{d\tau} = \text{div}(\lambda \nabla t) + Q_v + \frac{dp}{d\tau} + \eta \Phi_v + S_v, \quad (1)$$

где t – температура, определяемая как функция пространственных координат α , β , γ и времени τ , $t = t(\alpha, \beta, \gamma, \tau)$; $\frac{dt}{d\tau}$ – полная производная температуры в цилиндрических координатах;

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{\partial t}{\partial \tau} + v_r \frac{\partial t}{\partial r} + \frac{v_\Theta}{r} \cdot \frac{\partial t}{\partial \Theta} + v_z \frac{\partial t}{\partial z}; \quad (2)$$

$\text{div}(\lambda, \nabla t)$ – перенос тепла теплопроводностью в цилиндрических координатах:

$$\begin{aligned} \text{div}(\lambda, \nabla t) = & \frac{\partial \lambda}{\partial r} \cdot \frac{\partial t}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial \Theta} \cdot \frac{\partial t}{\partial \Theta} + \\ & + \frac{\partial \lambda}{\partial z} \cdot \frac{\partial t}{\partial z} + \lambda \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial t}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \times \right. \\ & \left. \times \frac{\partial^2 t}{\partial \Theta^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right); \quad (3) \end{aligned}$$

c_p – удельная теплоемкость; ρ – плотность; τ – время; λ – коэффициент теплопроводности; Q_v – суммарная удельная мощность объемных источников тепла; $dt/d\tau$ – работа сил давления; η – коэффициент вязкости; Φ_v – диссипативная функция Рейля; S_v – суммарная удельная работа внешних сил в процессе диффузионного переноса.

Тогда для решения задачи нестационарной теплопроводности примем, что $t_{c1}, t_{c2}, t_{c3}, t_{c4}, t_{c5}, t_{c6}$ – температура окружающей среды соответственно; $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6$ – коэффициенты теплопроводности материалов слоёв соответственно; $R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6$ – радиусы первого, второго, третьего, четвертого, пятого и шестого слоёв соответственно; $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6$ – коэффициенты конвективной теплоотдачи от внешних поверхностей в окружающую среду соответственно; $a_1^2, a_2^2, a_3^2, a_4^2, a_5^2, a_6^2$ – коэффициенты температуропроводности слоёв соответственно; $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4, \rho_5, \rho_6$ – плотность материалов слоёв соответственно; $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$ – теплоёмкость материалов слоёв соответственно; l – высота рабочей зоны термостата; l_2 – высота основания стакана термостата.

Тогда на первом этапе задача примет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial t_i(x, r_i, \tau)}{\partial \tau} = & a_i^2 \cdot \left(\frac{\partial^2 t_i(x, r_i, \tau)}{\partial x^2} + \right. \\ & \left. + \frac{\partial^2 t_i(x, r_i, \tau)}{\partial r_i^2} + \frac{1}{r_i} \cdot \frac{\partial t_i(x, r_i, \tau)}{\partial r_i} \right); \\ & i = 1, 2, \dots, 6; \quad 0 < x \leq l; \\ & \tau > 0; \quad R_{i-1} \leq r_i \leq R_i; \quad (4) \end{aligned}$$

$$t_i(x, r_i, \tau) = f_i(x, r_i); \quad (5)$$

$$\frac{\partial t_i(x, 0, \tau)}{\partial r_i} = 0; \quad (6)$$

$$\lambda_i \cdot \frac{\partial t(0, r_i, \tau)}{\partial x} - \alpha_{c1}(t(0, r_i, \tau) - t_{c1} + t_{c2}) = 0; \quad (7)$$

$$\lambda_i \cdot \frac{\partial t(l, r_i, \tau)}{\partial x} - \alpha_{c3}(t(l, r_i, \tau) - t_{c3} + t_{c2}) = 0; \quad (8)$$

$$\lambda_6 \cdot \frac{\partial t_6(x, R_6, \tau)}{\partial r_6} + \alpha_{c2} \cdot (t_6(x, R_6, \tau) - t_{c2}) = 0; \quad (9)$$

$$t_j(x, R_j, \tau) = t_{j+1}(x, R_j, \tau);$$

$$\lambda_j \cdot \frac{\partial t_j(x, R_j, \tau)}{\partial r_j} = \lambda_{j+1} \cdot \frac{\partial t_{j+1}(x, R_j, \tau)}{\partial r_{j+1}},$$

$$j = 1, 2, \dots, 5. \quad (10)$$

На втором этапе задача примет вид:

$$\frac{\partial t_3(x, r_3, \tau)}{\partial \tau} = a_3^2 \cdot \left(\frac{\partial^2 t_3(y, r_3, \tau)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t_3(y, r_3, \tau)}{\partial r_3^2} + \frac{1}{r_3} \cdot \frac{\partial t_3(y, r_3, \tau)}{\partial r_3} \right); \quad (11)$$

$$0 < y < l_2; \quad 0 < r_3 < R_3;$$

$$t(y, r_3, \tau) = f(y, r_3) - t_{c6}; \quad (12)$$

$$\frac{\partial t_3(y, 0, \tau)}{\partial r_3} = 0; \quad (13)$$

$$\lambda_3 \cdot \frac{\partial t_3(0, r_3, \tau)}{\partial y} - \alpha_{c4} \times$$

$$\times (t_3(0, r_3, \tau) - t_{c4} + t_{c6}) = 0; \quad (14)$$

$$\lambda_3 \cdot \frac{\partial t_3(l_2, r_3, \tau)}{\partial y} + \alpha_{c5} \times$$

$$\times (t_3(l_2, r_3, \tau) - t_{c5} + t_{c6}) = 0; \quad (15)$$

$$\lambda_3 \cdot \frac{\partial t_3(y, R_3, \tau)}{\partial r_3} + \alpha_{c6} \cdot t_3(y, R_3, \tau) = 0. \quad (16)$$

Задача нестационарной теплопроводности на третьем этапе примет вид:

$$t_{c3}(0, r, \tau) = t_{c4}(0, r, \tau); \quad (17)$$

$$\lambda_1 \cdot \frac{\partial t_{c3}(0, r, \tau)}{\partial x} = -\lambda_3 \cdot \frac{\partial t_{c4}(0, r, \tau)}{\partial y}; \quad (18)$$

$$\lambda_2 \cdot \frac{\partial t_{c3}(0, r, \tau)}{\partial x} = -\lambda_3 \cdot \frac{\partial t_{c4}(0, r, \tau)}{\partial y}; \quad (19)$$

$$\lambda_3 \cdot \frac{\partial t_{c3}(0, r, \tau)}{\partial x} = -\lambda_3 \cdot \frac{\partial t_{c4}(0, r, \tau)}{\partial y}. \quad (20)$$

Для определения температурных полей в стационарном режиме используем следующую расчетную систему: вода–боковая стенка стакана термостата–диэлектрическая прокладка–нагревательный элемент–воздух. Данную систему можно представить в виде трехслойного цилиндрического элемента, снаружи охлаждаемого воздухом, а внутри контактирующего с водой. Коэффициенты теплопроводности слоев примем независимыми от температуры, а тепловой контакт между слоями примем идеальным. Расчетная система приведена на рис. 4.

Примем, что T_B – температура воды в стакане термостата; T_O – температура окружающей среды; T_1 и T_2 – температура стенок внутренних слоев соответственно; T_3 и T_4 – температура стенок на границе вода–стакан термостата и нагревательный элемент–окружающая среда соответственно; $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ – коэффициенты теплопроводности материалов слоев соответственно; d_1, d_2, d_3, d_4 – диаметры первого, второго, третьего и четвертого слоев соответственно; R_1, R_2, R_3, R_4 – радиусы первого, второго, третьего и четвертого слоев соответственно; α_1 и α_2 – коэффициенты конвективной теплоотдачи воды и окружающей среды соответственно; l – высота рабочей зоны термостата.

Тогда по закону Фурье для кольцевого слоя [3]:

$$Q_1 = -2\lambda_1\pi r l \left(\frac{dt}{dr} \right), \quad (21)$$

где Q_1 – тепловой поток в боковой стенке стакана термостата; λ_1 – коэффициент теплопроводности материала стакана термостата; r – радиус; l – высота рабочей зоны термостата.

Разделяя переменные, получаем

$$dt = -(Q/2\pi\lambda_1 l) \cdot (dr/r). \quad (22)$$

Интегрируя уравнение (22) в пределах от T_B до T_1 и от R_1 до R_2 при $\lambda_1 = const$

$$T_B - T_1 = (Q/2\pi\lambda_1 l) \ln \frac{R_2}{R_1},$$

откуда

$$Q_1 = (2\pi\lambda_1 l \cdot (T_B - T_1)) / (\ln(\frac{d_2}{d_1})). \quad (23)$$



Рис. 4. Расчетная система для определения распределения температур в разнородных стенках, соприкасающихся с водой и воздухом в стационарном режиме

Из анализа (23) видно, что распределение температур в слое представляет собой логарифмическую кривую. Общая температурная кривая представляет собой множество логарифмических кривых. При стационарном режиме через все слои проходит один и тот же тепловой поток, который для каждого слоя равен соответственно:

$$\begin{cases} Q_1 = (2\pi\lambda_1 l \cdot (T_B - T_1)) / (\ln(\frac{d_2}{d_1})); \\ Q_2 = (2\pi\lambda_2 l \cdot (T_1 - T_2)) / (\ln(\frac{d_3}{d_2})); \\ Q_3 = (2\pi\lambda_3 l \cdot (T_2 - T_0)) / (\ln(\frac{d_4}{d_3})), \end{cases} \quad (24)$$

где Q_1, Q_2, Q_3 – тепловые потоки в стакане термостата, диэлектрической про-

кладке и нагревательном элементе соответственно; $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ – коэффициенты теплопроводности в стакане термостата, диэлектрической прокладке и нагревательном элементе соответственно.

Решая уравнения (24) относительно разности температур, получаем

$$T_B - T_O = \frac{Q}{2\pi l} \cdot \left(\frac{1}{\lambda_1} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{\lambda_2} \ln \frac{d_3}{d_2} + \frac{1}{\lambda_3} \ln \frac{d_4}{d_3} \right),$$

откуда

$$Q = \frac{2\pi l (T_B - T_O)}{\frac{1}{\lambda_1} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{\lambda_2} \ln \frac{d_3}{d_2} + \frac{1}{\lambda_3} \ln \frac{d_4}{d_3}}. \quad (25)$$

Необходимо также учесть передачу тепла от нагревающейся воды внутри рабочей зоны стакана термостата в окружающую среду через слои. Тогда тепловой поток можно представить следующим образом:

$$Q = \pi \cdot l (T_B - T_O) / \left[\frac{1}{\alpha_1 \cdot d_1} + \frac{1}{2\lambda_1} \times \ln \left(\frac{d_2}{d_1} \right) + \frac{1}{2\lambda_2} \ln \frac{d_3}{d_2} + \frac{1}{2\lambda_3} \times \ln \left(\frac{d_4}{d_3} \right) + \frac{1}{\alpha_2 \cdot d_4} \right]. \quad (26)$$

Тогда температуру между слоями находим следующим образом:

$$\begin{cases} T_1 = T_B - \frac{Q \cdot \ln \frac{d_2}{d_1}}{2\pi\lambda_1 l}; \\ T_2 = T_1 - \frac{Q \cdot \ln \frac{d_3}{d_2}}{2\pi\lambda_2 l}, \end{cases} \quad (27)$$

откуда

$$\begin{cases} T_1 = T_B - \left[(T_B - T_O) \cdot \ln \frac{d_2}{d_1} / \left(\frac{2 \cdot \lambda_1}{\alpha_1 \cdot d_1} + \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \cdot \ln \frac{d_3}{d_2} + \frac{\lambda_1}{\lambda_3} \cdot \ln \frac{d_4}{d_3} + \frac{2 \cdot \lambda_1}{\alpha_1 \cdot d_1} \right) \right]; \\ T_1 = T_B - \left[(T_B - T_O) \cdot \ln \frac{d_3}{d_2} / \left(\frac{2 \cdot \lambda_2}{\alpha_1 \cdot d_1} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \cdot \ln \frac{d_2}{d_1} + \ln \frac{d_3}{d_2} + \frac{\lambda_2}{\lambda_3} \cdot \ln \frac{d_4}{d_3} + \frac{2 \cdot \lambda_2}{\alpha_1 \cdot d_1} \right) \right]. \end{cases} \quad (28)$$

Для решения рассматриваемого класса задач теплопроводности наиболее удобным оказывается метод конечных интегральных преобразований [4]. Этот метод унифицирован; позволяет получать решение в случае неоднородных граничных условий без представления задачи в виде совокупности стационарной и нестационарной; допускает преобразование по нескольким (или всем) координатам одновременно, а также по координатам, вдоль которых свойства среды изменяются ступенчато, что позволяет переходить от системы дифференциальных уравнений в частных производных в оригиналах к одному обыкновенному дифференциальному уравнению в изображениях.

Для приведенного математического описания (1)...(28) термостата (рис. 1) была разработана трёхмерная параметрическая модель. Модель учитывает механические и физические свойства жидкости и составных частей термостата и позволяет задавать различные граничные условия. Для термостата были произведены расчеты тепловых процессов. Для расчетов применено специализированное программное обеспечение (CosmosWorks). Анализ результатов экспериментальных исследований тер-

мостата и результатов исследований трехмерной параметрической модели термостата показал адекватность математического описания термостата и разработанной на основании этого математического описания трехмерной параметрической модели.

Выводы

1. Рассмотрены процессы, протекающие в термостатических установках, и предложено решение задачи протекания теплообменных процессов, в котором учтены основные параметры, влияющие на характер протекания и качество процессов.

2. Рекомендована методика решения данного класса задач теплопроводности методом конечных интегральных преобразований, граничными условиями 3 и 4 рода и соответствующими начальными условиями.

3. Разработанная трехмерная параметрическая модель может быть использована для исследования и оптимизации конструкции и режимов работы термостатических установок.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Туголуков, Е. Н.** Математическое моделирование технологического оборудования многоассортиментных химических производств / Е. Н. Туголуков. – М. : Машиностроение-1, 2004. – 100 с.

2. **Лыков, А. В.** Тепломассообмен : справочник / А. В. Лыков. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Энергия, 1978. – 480 с.

3. **Нашокин, В. В.** Техническая термодинамика и теплопередача : учеб. пособие для неэнергетических специальностей вузов / В. В. Нашокин. – М. : Высш. шк., 1975. – 496 с. : ил.

4. **Туголуков, Е. Н.** Решение задач теплопроводности методом конечных интегральных преобразований : учеб. пособие / Е. Н. Туголуков. – Тамбов : Тамб. гос. техн. ун-т, 2005. – 116 с.

Белорусско-Российский университет
Материал поступил 10.07.2008

H. S. Lenevsky, A. E. Moiseev, A. V. Zhloba
Mathematical simulation of heating processes
in thermostatic installations

The article is devoted to creating a mathematical model of heat-exchange process behavior in thermostatic installations in which basic parameters influencing the history and quality of the process are taken into account. Adequacy of the developed parameter-oriented model on the basis of mathematical model to experimental data has been shown. It proves the possibility to use the model for optimization of the structure and modes of operation of thermostatic installations.