УДК 539.3

УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ ОДНОСЛОЙНОЙ КРУГОВОЙ ПЛАСТИНЫ ТИПА ТИМОШЕНКО

С.В. КАРПЕНКО
Научный руководитель Э.И. СТАРОВОЙТОВ, д-р физ.-мат. наук, проф.
Учреждение образования
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТРАНСПОРТА»
Гомель, Беларусь

Для описания кинематики пакета принята гипотеза «прямой нормали»: в пластине толщиной $h = 2c$ нормаль остается прямолинейной, не изменяет своей длины, но поворачивается на некоторый дополнительный угол, составляющий с радиальной и тангенциальной осями величины $\psi_r(r, \varphi)$ и $\psi_\varphi(r, \varphi)$. Деформации малые. Проекции внешней нагрузки на вертикальную и радиальную оси координат обозначим $q = q(r, \varphi)$, $p = p(r, \varphi)$.

Постановка задачи проводится в цилиндрической системе координат r, φ, z. Срединную плоскость принимаем за координатную, ось z направляем ей перпендикулярно вверх. В этом случае перемещения в пластине выражаются через пять искомых функций u_r, u_φ, ψ_r, ψ_φ, w (соответственно радиальное и тангенциальное перемещения, радиальный и тангенциальный угол наклона нормали и прогиб).

Уравнения равновесия рассматриваемой пластины в перемещениях получены с помощью принципа возможных перемещений Лагранжа:

$$a_3\left(\psi_{r,rr}+\frac{\psi_{r,r}}{r}-\frac{\psi_r}{r^2}\right)+a_6\frac{\psi_{r,\varphi\varphi}}{r^2}-a_3\left(w_{,rrr}+\frac{w_{,rr}}{r}-\frac{w_{,r}}{r^2}+\frac{w_{,\varphi\varphi}}{r^2}-2\frac{w_{,\varphi\varphi}}{r^3}\right)+(a_6+a_4)\frac{\psi_{\varphi,\varphi r}}{r}-(a_3+a_6)\frac{\psi_{\varphi,\varphi}}{r^2}-Q_r=0\ ;$$

$$a_6\left(\psi_{\varphi,rr}+\frac{\psi_{\varphi,r}}{r}-\frac{\psi_\varphi}{r^2}\right)+a_3\frac{\psi_{\varphi,\varphi\varphi}}{r^2}-a_3\left(\frac{w_{,rr\varphi}}{r}+\frac{w_{,\varphi\varphi\varphi}}{r^3}+\frac{w_{,r\varphi}}{r^2}\right)+(a_4+a_6)\frac{\psi_{r,\varphi r}}{r}+(a_3+a_6)\frac{\psi_{r,\varphi}}{r^2}-Q_\varphi=0\ ;$$

$$(a_5+a_2)\frac{u_{r,\varphi r}}{r}+(a_5+a_1)\frac{u_{r,\varphi}}{r^2}+a_5\left(u_{\varphi,rr}-\frac{u_\varphi}{r^2}\right)+a_1\frac{u_{\varphi,\varphi\varphi}}{r^2}=-p_\varphi\ ;$$

$$(a_2+a_5)\frac{u_{\varphi,r\varphi}}{r}-(a_1+a_5)\frac{u_{\varphi,\varphi}}{r^2}+a_1\left(u_{r,rr}+\frac{u_{r,r}}{r}-\frac{u_r}{r^2}\right)+a_5\frac{u_{r,\varphi\varphi}}{r^2}=-p_r\ ;$$

$$a_3\left(\psi_{r,rrr}+2\frac{\psi_{r,rr}}{r}-\frac{\psi_{r,r}}{r^2}+\frac{\psi_r}{r^3}-\frac{\psi_{r,\varphi\varphi}}{r^3}+\frac{\psi_{r,r\varphi\varphi}}{r^2}\right)+a_3\left(-\frac{\psi_{\varphi,\varphi r}}{r^2}+\frac{\psi_{\varphi,\varphi}}{r^3}+\frac{\psi_{\varphi,\varphi\varphi\varphi}}{r^3}+\frac{\psi_{\varphi,\varphi rr}}{r}+2\frac{\psi_{r,\varphi\varphi}}{r^3}\right).$$

$$-a_3\left(w_{,rrrr}+2\frac{w_{,rrr}}{r}-\frac{w_{,rr}}{r^2}+\frac{w_{,r}}{r^3}-\frac{w_{,\varphi\varphi r}}{r^3}+\frac{w_{,\varphi\varphi rr}}{r^2}\right)-a_3\left(4\frac{w_{,\varphi\varphi}}{r^4}+\frac{w_{,\varphi\varphi\varphi\varphi}}{r^4}+\frac{w_{,\varphi\varphi rr}}{r^2}-\frac{w_{,\varphi\varphi r}}{r^3}\right)=-q$$

Запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате.

Добавив к ней принятые граничные условия, получим замкнутую краевую задачу для нахождения перемещений в задаче о неосесимметричном изгибе пластины типа Тимошенко.