

УДК 621.833.001.24

## **ПАРАМЕТРЫ ОСОБЫХ ТОЧЕК ПРОФИЛЯ ЭВОЛЬВЕНТНЫХ ЗУБЬЕВ Н.И. РОГАЧЕВСКИЙ**

*ГУ ВПО «Белорусско-Российский университет»,  
г.Могилев, Республика Беларусь*

Форма зуба однозначно определяется его торцовым профилем и ходом винтовых линий зуба. Торцовый профиль состоит из нескольких участков, имеющих общие точки – особые точки профиля. Основными из них являются: граничная точка  $L$  профиля зуба и начальная точка  $G$  линии модификации головки зуба. Положение этих точек влияет на коэффициент перекрытия передачи, ее интерференцию и заклинивание, то есть определяет качество передачи.

Имеющиеся в литературе, например, в ГОСТ 16532-70 или [1], расчетные зависимости параметров особых точек являются приближенными. Исследования показали, что часто они оказываются вообще непригодными из-за значительного расхождения получаемых по этим зависимостям результатов с действительностью или из-за узости области их применения. Неточность существующих формул особенно велика при  $z < 20$  и  $x < 0$  для определения точки  $L$  и при  $z < 35$  и  $x < 0,3$  для  $G$ .

Особые точки при заданных исходных данных могут занимать различные положения, обусловленные предельными дополнительными смещениями, установленными ГОСТ 1643-81.

В промышленности часто используют [2, 3] модификацию головки зуба дугой окружности. Существующие стандарты не предусматривают расчета такой модификации, а необходимость в этом очевидна.

Устранение указанных недостатков, то есть точному определению предельных значений параметров граничной точки и точек начала модификации зубьев как прямой линией, так и другой окружности для любых значений исходных данных, посвящена настоящая работа.

I. Исходные данные для расчета.

Полагают известными параметры:  $m$  - модуль, мм;  $\alpha$  - угол профиля, град;  $h_a^*$ ,  $h_f^*$ ,  $h_l^*$ ,  $c^*$ ,  $\delta^*$ ,  $h_g^*$  и  $\Delta^*$  - коэффициенты соответственно высоты головки, высоты ножки, граничной высоты, радиального зазора, уменьшения высоты зуба [3], высоты и глубины модификации головки зуба;  $\beta$  - угол наклона линии зуба, град;  $x$  - коэффициент смещения;  $z$  - число зубьев;  $E_{HS}$  - наименьшее дополнительное смещение исходного контура, мкм;  $T_H$  - допуск на смещение исходного контура, мкм.

По известным [1,4] формулам определяют коэффициент  $\rho_f^*$  радиуса скругления вершины производящей рейки, номинальный коэффициент смещения  $x^*$  и другие параметры:

$$\begin{aligned}\rho_f^* &= (2 \cdot h_a^* + c^* - h_i^*) / (1 - \sin \alpha); \\ x^* &= x - (|E_{HS}| + T_H / 2) / (1000 \cdot m); \\ \alpha_t &= \arctg(\operatorname{tg} \alpha / \cos \beta); \\ d &= 2 \cdot r = z \cdot m / \cos \beta; \\ d_b &= 2 \cdot r_b = d \cdot \cos \alpha_t; \\ d_a &= 2 \cdot r_a = d + 2 \cdot m \cdot (h_a^* + x - \delta^*); \\ \psi_b &= (\pi / 2 + 2 \cdot x^* \cdot \operatorname{tg} \alpha) / z + \operatorname{inv} \alpha_t.\end{aligned}$$

Впредь считают известными значения этих параметров.

2. Вычисление параметров граничной точки.

Определяют вспомогательные величины:

$$\begin{aligned}x_c &= m \cdot (h_a^* + c^* - \rho_f^* - x^*); \\ y_c &= \frac{m}{\cos \beta} \cdot \left[ \frac{z}{4} + (h_i^* - h_a^*) \cdot \operatorname{tg} \alpha + \rho_f^* \cdot \cos \alpha \right].\end{aligned}$$

Затем вычисляют аргумент  $\gamma_l$ , определяющий граничную точку. Для чего задаются рядом последовательно уменьшающихся неотрицательных значений независимого аргумента  $\gamma$ , начиная от  $(\pi / 2 - \alpha_t)$ . Для каждого взятого  $\gamma$ , при котором  $r_t \geq r_b$ , вычисляют функцию  $\Delta\psi(\gamma)$  по формулам:

$$\begin{aligned}\gamma_o &= \arctg(\operatorname{tg} \gamma / \cos \beta); \\ x_{to} &= x_c + m \cdot \rho_f^* \cdot \cos \gamma_o; \\ y_{to} &= y_c - m \cdot \rho_f^* \cdot \sin \gamma_o / \cos \beta; \\ \varphi &= (y_{to} + x_{to} \cdot \operatorname{tg} \gamma) / r; \\ x_t &= (r - x_{to}) \cdot \cos \varphi + x_{to} \cdot \operatorname{tg} \gamma \cdot \sin \varphi; \\ y_t &= (r - x_{to}) \cdot \sin \varphi - x_{to} \cdot \operatorname{tg} \gamma \cdot \cos \varphi; \\ r_t &= \sqrt{x_t^2 + y_t^2}; \\ \psi_t &= \arctg(y_t / x_t); \\ \Delta\psi &= \psi_t - \psi_b + \operatorname{inv} \operatorname{arccos}(r_b / r_t).\end{aligned}$$

То наибольшее значение  $\gamma$ , при котором получают  $\Delta\psi = 0$ , и есть искомый аргумент  $\gamma_l$ . При  $\gamma = \gamma_l$  соответствующие функции аргумента  $\gamma$  снабжают индексом «l». Например,  $\gamma_{ol}$ ,  $x_{tol} = x_{to}(\gamma_l)$ ,  $r_l = r_t(\gamma_l)$ ,  $\psi_l = \psi_t(\gamma_l)$ .

Итак, номинальный диаметр окружности граничных точек:

$$d_l = 2 \cdot r_l = 2 \cdot \sqrt{x_{tl}^2 + y_{tl}^2}. \quad (1)$$

Номинальный радиус кривизны торцового профиля зуба в граничной точке:

$$\rho_l = \sqrt{r_l^2 - r_b^2}.$$

Модуль предельных отклонений диаметра  $d_l$

$$\Delta d_l = \Delta x^* \cdot \frac{dd_l}{dx^*} = \frac{T_H}{2000 \cdot m} \cdot 2 \cdot \frac{dr_l}{dx^*}.$$

Выполнив процедуру дифференцирования по  $x^*$  уравнения (1), подставив полученный результат в формулу для  $\Delta d_l$  и выполнив преобразования, получают:

$$\Delta d_l = \frac{T_H}{1000} \cdot \frac{r - x_{tol} / \cos^2 \gamma_l}{r_l}.$$

Предельные диаметры окружностей граничных точек  $d_{l_{\min}}$ ,  $d_{l_{\max}}$ :

$$\begin{aligned} d_{l_{\min}} &= d_l - \Delta d_l; \\ d_{l_{\max}} &= d_l + \Delta d_l. \end{aligned}$$

Пример I: для зубчатого колеса с исходным контуром по ГОСТ 13754-81 и параметрами  $\delta^* = 0$ ,  $m = 3$  мм,  $z = 15$ ,  $\beta = 12^\circ$ ,  $x = 0$ ,  $E_{HS} = 294$  мкм,  $\dot{O}_l = 98$  мкм, положение граничных точек характеризуется величинами:  $d_{l_{\min}} = 43,134$  мм,  $d_{l_{\max}} = 43,170$  мм,  $\rho_l = 0,735$  мм. По ныне существующей методике расчета  $d_l = 43,132$  мм,  $\rho_l = -0,581$  мм. Как видно, значение  $d_l$  находится за пределами интервала  $[d_{l_{\min}}, d_{l_{\max}}]$ ; полученное отрицательное значение  $\rho_l$  противоречит истине, так как это длина касательной к основной окружности от граничной точки.

### 3. Параметры модификации головки зуба прямой линией.

Предварительно вычисляют:

$$\begin{aligned} \alpha_m &= \arctg\left(\operatorname{tg} \alpha_t + \frac{\Delta^*}{h_g^* \cdot \cos \beta}\right); \\ \alpha_{bm} &= d \cdot \cos \alpha_m; \\ \psi_\Delta &= \operatorname{inv} \alpha_m - \operatorname{inv} \alpha_t + (h_a^* - h_g^* + x^*) \cdot \frac{2 \cdot \Delta^*}{z \cdot h_g^*}; \\ \alpha_{am} &= \arccos(d_{bm} / d_a). \end{aligned}$$

Номинальный диаметр  $d_g$  окружности, проходящей через точки  $G$  является [5] положительным корнем уравнения:

$$\operatorname{inv} \arccos(d_{bm} / d_g) - \operatorname{inv} \arccos(d_b / d_g) - \psi_\Delta = 0. \quad (2)$$

Номинальная высота  $h_g$  и нормальная глубина  $\Delta_{ca}$  модификации торцового профиля головки зуба

$$h_g = (d_a - d_g) / 2;$$

$$\Delta_{ca} = d_b \cdot [\text{inv } \alpha_{am} - \text{inv } \arccos(d_b / d_a) - \psi_\Delta] / 2.$$

Модуль предельных отклонений диаметра  $d_g$

$$\Delta d_g = \Delta x^* \cdot \frac{dd_g}{dx^*} = \frac{T_H}{2000 \cdot m} \cdot \frac{dd_g}{dx^*}. \quad (3)$$

Продифференцировав по  $x^*$  уравнение (2), подставив полученный результат в формулу (3), получают

$$\Delta d_g = \frac{T_H}{1000 \cdot m} \cdot \frac{\Delta^* \cdot d_g}{z \cdot h_g^* \cdot [\text{tg } \arccos(d_{bm} / d_g) - \text{tg } \arccos(d_b / d_g)]}.$$

Предельные диаметры окружности модификации головок зубьев:

$$d_{g \min} = d_g - \Delta d_g \quad (4)$$

$$d_{g \max} = d_g + \Delta d_g \quad (5)$$

Пример 2: для зубчатого колеса с исходным контуром по ГОСТ 13754-81 и данными  $h_g^* = 0,450$ ,  $\Delta^* = 0,020$ ,  $\delta^* = 0$ ,  $m = 5,5$  мм,  $z = 21$ ,  $\beta = 9^\circ$ ,  $x = 0,6$ ,  $E_{HS} = 279$  мкм,  $\dot{O}_f = 163$  мкм параметры модификации имеют следующие значения:  $d_{g \min} = 132,184$  мм,  $d_{g \max} = 132,694$  мм,  $h_g = 1,051$  мм,  $\Delta_{ca} = 0,028$  мм. По известным из литературы формулам  $d_g = 134,059$  мм,  $h_g = 0,240$  мм,  $\Delta_{ca} = 0,006$  мм. Из сопоставления вычисленных значений параметров модификации видно, что величина  $d_g$  значительно выходит за пределы  $[d_{g \min}, d_{g \max}]$ , разница значений  $h_g$  в 4,4 раза, а значений  $\Delta_{ca}$  в 4,7 раза.

Следует заметить, что получение с высокой точностью величин  $h_g$  и  $\Delta_{ca}$  имеет большое значение при определении действительной нагрузочной способности передачи с учетом упругих деформаций зубьев и ошибок в зацеплении [2]. Известно, что при задании значения  $\Delta_{ca}$ , близкого к суммарной упругой деформации зубьев с учетом ошибок изготовления и монтажа колес, в зацепление участвует дополнительная часть зуба высотой близкой к  $h_g$ , вследствие чего увеличивается коэффициент торцового перекрытия и, следовательно, нагрузочная способность передачи [6]. Методика определения параметров модификации  $h_g^*$  и  $\Delta^*$  на режущем инструменте, которое обеспечивает получение с заданной точностью желаемых величин  $h_g$  и  $\Delta_{ca}$ , изложена в работе [7].

4. Параметры модификации головки зуба дугой окружности.

Предварительно определяют относительный радиус кривизны линии модификации головки нормального исходного контура [3]

$$\rho_a^* = \frac{\sqrt{h_g^{*2} + (\Delta^* + h_g^* \cdot \operatorname{tg} \alpha)^2}}{2 \cdot \sin[\operatorname{arctg}(\Delta^* / h_g^* + \operatorname{tg} \alpha) - \pi \cdot \alpha / 180]}.$$

Потом вычисляют аргумент  $\gamma_{ag}$ , определяющий начальную точку модификации головки. Для вычисления  $\gamma_{ag}$  задаются рядом последовательно уменьшающихся неотрицательных значений независимого аргумента  $\gamma_a$  (начиная от  $\pi(0,5 - \alpha/180)$ ) и для каждого взятого его значения вычисляют функции аргумента  $\gamma_a$

$$\begin{aligned} x_{io} &= m \cdot [h_g^* - h_a^* - x^* + \rho_a^* \cdot (\sin \alpha - \cos \gamma_a)]; \\ y_{io} &= \frac{m}{\cos \beta} \cdot \left[ \frac{\pi}{4} - (h_a^* - h_g^*) \cdot \operatorname{tg} \alpha - \rho_a^* \cdot (\cos \alpha - \sin \gamma_a) \right]; \\ \gamma &= \operatorname{arctg}(\cos \beta \cdot \operatorname{tg} \gamma_a); \\ \varphi &= (y_{io} + x_{io} \cdot \operatorname{tg} \gamma) / r; \\ x_i(\gamma_a) &= (r - x_{io}) \cdot \cos \varphi + x_{io} \cdot \operatorname{tg} \gamma \cdot \sin \varphi; \\ y_i(\gamma_a) &= (r - x_{io}) \cdot \sin \varphi - x_{io} \cdot \operatorname{tg} \gamma \cdot \cos \varphi; \\ r_i(\gamma_a) &= \sqrt{x_i^2 + y_i^2}; \\ \Delta\psi(\gamma_a) &= \psi_b - \operatorname{invarccos}(r_b / r_i) - \operatorname{arctg}(y_i / x_i). \end{aligned}$$

То значение  $\gamma_a = \gamma_{aa}$ , при котором  $r_i = r_a$ , определяет вершину модифицированного зуба; значение  $\gamma_a = \gamma_{ag}$ , при котором  $\Delta\psi = 0$ , определяет начальную точку модификации головки зуба. Функции аргумента  $\gamma_a$  снабжают индексом «а» при  $\gamma_a = \gamma_{aa}$ , индексом «g» при  $\gamma_a = \gamma_{ag}$ .

Итак, номинальный диаметр окружности начала модификации головок:

$$d_g = 2 \cdot r_g = 2 \cdot r_i(\gamma_{ag}) = 2 \cdot \sqrt{x_{ig}^2 + y_{ig}^2}. \quad (6)$$

Номинальная высота  $h_g$  и нормальная глубина  $\Delta_{ca}$  модификации торцового профиля головки зуба:

$$\begin{aligned} h_g &= (d_a - d_g) / 2; \\ \Delta_{ca} &= d_b [\psi_b - \operatorname{arctg}(y_{ia} / x_{ia}) - \operatorname{invarccos}(d_b / d_a)] / 2. \end{aligned}$$

Модуль предельных отклонений диаметра  $d_g$  определяют, используя формулу (3) и производную по  $x^*$  уравнения (6). После преобразований получают:

$$\Delta d_g = \frac{T_H}{1000} \cdot \frac{r - x_{iog} / \cos^2 \gamma_{ag}}{d_g}.$$

Предельные диаметры окружности модификации головок зубьев  $d_{g \min}$  и  $d_{g \max}$  вычисляются соответственно по формуле (4) и (5).

Пример 3: для зубчатого колеса с исходными данными, приведенными в примере 2, за исключением  $h_g^*$  и  $\Delta^*$ , которые в настоящем примере равны  $h_g^* = 0,476$  и  $\Delta^* = 0,049$ , параметры модификации имеют следующие значения:  $d_{g \min} = 132,144$  мм,  $d_{g \max} = 132,677$  мм,  $h_g = 1,065$  мм,  $\Delta_{ca} = 0,031$  мм.

### Заключение

Предложенные алгоритмы расчета позволяют получить достоверные значения параметров граничной точки и точек начала модификации торцового профиля головок зубьев как прямой линии, так и дугой окружности. Последнее позволяет уточнить картину зубчатого зацепления и повысить качество передачи.

### Литература

1. Болотовский, И.А. Цилиндрические эвольвентные зубчатые передачи внешнего зацепления. Расчет геометрии. Справочное пособие/ И.А. Болотовский, Б.И. Гурьев, В.Э. Смирнов, Б.И. Шендерей - М.: Машиностроение, 1974. - 160 с.
2. Генкин, М.Д. Повышение надежности тяжелонагрузочных зубчатых передач/ М.Д. Генкин, Н.М. Рыжов, М.А. Рыжов – М.: Машиностроение, 1981. - 232 с.
3. Андожский, В.Д. Модификация головки зубьев рейкой с линией модификации по дуге окружности/ В.Д. Андожский// Вестник машиностроения.-1978. - №8. - С. 26-29.
4. Андожский, В.Д. Теория определения размера по роликам/ В.Д. Андожский, Н.И. Рогачевский, Могилев. машиностр. ин-т.– Могилев, 1981. - 75 с. : ил. – Библиогр.: 6 назв. - Деп. в БелНИИТИ 23.05.81, №302.
5. Андожский, В.Д. Геометрический расчет модификации головок зубьев/ В.Д. Андожский// – Вестник машиностроения.- 1976.- №5.- С. 39-42 и - №8. - С. 62.
6. Оников, В.В. Коэффициент перекрытия деформируемых зубчатых зацеплений/ В.В. Оников, Н.И. Рогачевский // – Известия вузов. Машиностроение.- 1982.- №8.- С. 20-24.
7. Андожский, В.Д. Модификация головок внешних зубьев эвольвентных зубчатых колес/ В.Д. Андожский, Н.И. Рогачевский// – Вестник машиностроения.- 1985.- №7. - С. 15-17.