

МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Транспортные и технологические машины»

# КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕХНИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ И ПРОЦЕССОВ

*Методические рекомендации к лабораторным работам  
для студентов специальности 1-37 80 01 «Транспорт»  
очной и заочной форм обучения*



Могилев 2020

УДК 004.41/.42  
ББК 32.973-018  
К63

Рекомендовано к изданию  
учебно-методическим отделом  
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Транспортные и технологические машины»  
«10» июня 2020 г., протокол № 10

Составитель ст. преподаватель Ю. С. Романович

Рецензент канд. техн. наук, доц. В. В. Кутузов

Методические рекомендации разработаны в соответствии с учебной программой дисциплины «Компьютерное моделирование технических объектов и процессов» для студентов II ступени высшего образования специальности 1-37 80 01 «Транспорт» профилизации «Проектирование колесных транспортных средств» очной и заочной форм обучения и предназначены для использования при выполнении лабораторных работ.

Учебно-методическое издание

## КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕХНИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ И ПРОЦЕССОВ

Ответственный за выпуск	И. В. Лесковец
Корректор	Е. А. Галковская
Компьютерная верстка	Н. П. Полевничая

Подписано в печать . Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.  
Печать трафаретная. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 26 экз. Заказ №

Издатель и полиграфическое исполнение:  
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования  
«Белорусско-Российский университет».  
Свидетельство о государственной регистрации издателя,  
изготовителя, распространителя печатных изданий  
№ 1/156 от 07.03.2019.  
Пр-т Мира, 43, 212022, Могилев.

© Белорусско-Российский  
университет, 2020

## Содержание

Введение.....	4
1 Лабораторная работа № 1. Структура технической системы. Взаимодействие с внешней средой .....	5
2 Лабораторная работа № 2. Метод сосредоточенных масс. Выделение дискретных элементов .....	7
3 Лабораторная работа № 3. Динамическая модель механической системы. Орграф и матрица инцидентий .....	9
4 Лабораторная работа № 4. Построение математической модели механической системы на основе орграфа .....	15
5 Лабораторная работа № 5. Построение математической модели механической системы структурно-матричным методом .....	16
6 Лабораторная работа № 6. Построение математической модели механической системы с трансформаторными элементами (трансмиссии автомобиля).....	18
7 Лабораторная работа № 7. Определение статических состояний механической системы (трансмиссия, подвеска).....	23
8 Лабораторная работа № 8. Моделирование переходных процессов в трансмиссии автомобиля. Определение показателей качества переходного процесса.....	25
9 Лабораторная работа № 9. Моделирование плоского движения твердых тел. Определение показателей качества переходного процесса в подвеске автомобиля.....	29
10 Лабораторная работа № 10. Планирование и проведение активного полного факторного эксперимента.....	32
11 Лабораторная работа № 11. Планирование и проведение дробного факторного эксперимента.....	35
12 Лабораторная работа № 12. Планирование, проведение эксперимента и построение квадратичных регрессионных моделей.....	39
13 Лабораторная работа № 13. Поиск безусловного экстремума аналитической целевой функции.....	41
14 Лабораторная работа № 14. Поиск условного экстремума целевой функции при наличии ограничений .....	43
15 Лабораторная работа № 15. Определение оптимальных параметров автомобиля .....	45
Список литературы .....	47

## Введение

Программа дисциплины «Компьютерное моделирование технических объектов и процессов» определяет содержание и последовательность изучения вопросов разработки математических моделей транспортных средств и их реализации на ЭВМ с помощью современного прикладного программного обеспечения.

Основная цель дисциплины – сформировать компетенции в области применения современных информационных технологий для решения научно-технических задач, проектировании транспортных объектов и систем.

Задачей учебной дисциплины является подготовка высококвалифицированных специалистов, обладающих навыками решения научно-исследовательских задач путем применения современных компьютерных технологий при проектировании транспортных объектов и проведении научных исследований.

Материал дисциплины изучается в лекционном курсе, закрепляется при выполнении лабораторных работ.

По результатам выполнения лабораторной работы оформляется отчет, содержащий титульный лист, цель работы, индивидуальное задание, схемы, графики процессов, составленные уравнения и выводы.

# 1 Лабораторная работа № 1. Структура технической системы. Взаимодействие с внешней средой

**Цель работы:** изучить основные понятия и определения, используемые при проектировании и моделировании технических объектов; получить представление о принципах декомпозиции технических объектов при проектировании и особенностях их взаимодействия с внешней средой.

## 1.1 Общие сведения

При создании машин, технических комплексов и других объектов широко используется *моделирование* – процесс замещения объекта исследования некоторой его моделью и проведение исследований на модели для получения необходимой информации об объекте. *Модель* – это физический или абстрактный образ моделируемого объекта, удобный для проведения исследований и позволяющий адекватно отображать интересующие исследователя физические свойства и характеристики объекта.

*Математическая модель* – это совокупность математических объектов и отношений между ними, адекватно отображающая физические свойства создаваемого технического объекта. Процесс формирования математической модели и использования ее для анализа и синтеза называется *математическим моделированием*.

При создании технического объекта осуществляется *декомпозиция* процесса проектирования в зависимости от степени абстрагирования, характера отображаемых свойств объекта, его структуры, принятой схемы распределения работ между подразделениями и др. Декомпозиция приводит к выделению составных частей (блоков), иерархических уровней, аспектов. Это позволяет сложную задачу проектирования свести к решению более простых задач с учетом взаимодействия между ними.

При блочном структурировании вначале выделяют крупные блоки, составляющие верхний иерархический уровень, затем каждый блок расчленяют на более мелкие, входящие в следующий уровень, и т. д. – вплоть до неделимых элементов (деталей), составляющих нижний уровень иерархии.

С другой стороны, технический объект и выделяемые по функциональным признакам блоки могут быть структурированы по степени абстрагирования (детальности описания физических свойств). В этом случае возникают три *иерархических уровня*: верхний называют *метауровнем*, средний – *макроуровнем* и нижний – *микроуровнем*.

*Структура технического объекта* характеризуется качественным и количественным составом элементов и их взаиморасположением или взаимосвязями. Качественное различие элементов определяется их физическими свойствами. Количественно физические свойства элементов выражаются некоторыми скалярными величинами, называемыми параметрами элементов.

Характеристики функционирования технического объекта зависят от его физических свойств и внешних воздействий окружающей среды.

Физические свойства объекта определяются его структурой и параметрами элементов, из которых он состоит. Внешние воздействия зависят от физических свойств внешней среды и характера ее взаимодействия с техническим объектом. Физические свойства внешней среды также определяются ее параметрами.

*Параметр* – это величина, *характеризующая свойство или режим работы объекта*. Под объектом здесь понимается как отдельный элемент технической системы, так и вся система в целом. Следует отметить, что параметрами технической системы являются *показатели качества и эффективности*: производительность, рабочая скорость, грузоподъемность, удельная материалоемкость, удельная энергоемкость, габариты, масса, показатели надежности, показатели качества переходных процессов и др. Эти параметры называют *выходными параметрами технического объекта*.

Если структура технического объекта определена, то его выходные параметры зависят только от параметров элементов и параметров внешней среды. Различают внутренние и внешние параметры.

*Внутренние параметры* – это параметры элементов, из которых состоит технический объект. Например, двигатель и трансмиссия являются элементами автомобиля. Выходные параметры их – мощность двигателя, передаточные числа трансмиссии и одновременно это внутренние параметры автомобиля.

*Выходные параметры характеризуют свойства технического объекта, а внутренние параметры – свойства его элементов.*

При переходе к новому иерархическому уровню проектирования внутренние параметры могут стать выходными, и наоборот.

*Внешние параметры* – это параметры внешней среды, оказывающей влияние на функционирование технического объекта. Например, для автомобиля внешняя среда – дорога и воздушная среда. Параметры дороги включают в себя углы продольного и поперечного уклонов, коэффициенты сопротивления качению и сцепления колес с дорогой. Параметры воздушной среды – плотность и относительная влажность воздуха, скорость и направление ветра.

Воздействия внешней среды на технический объект носят случайный характер и описываются случайными функциями. При проектировании также учитывается случайный разброс параметров элементов объекта, обусловленный технологическим процессом изготовления. Все процессы, происходящие в объекте, также случайны и могут быть оценены вероятностными и статистическими характеристиками: вероятностью выполнения тех или иных требований, корреляционной функцией, спектральной плотностью, математическим ожиданием, дисперсией и др. Анализ функционирования объекта в этом случае требует построения *вероятностной математической модели*. Однако такая модель весьма сложная и ее использование при проектировании требует больших затрат машинного времени. Поэтому ее применяют чаще на заключительном этапе проектирования.

Большинство проектных процедур выполняется на *детерминированных моделях*, для которых характерно однозначное соответствие между внешним воздействием на динамическую систему и ее реакцией на это воздействие. В вычислительном эксперименте при проектировании обычно задают некоторые стандартные типовые воздействия на объект: ступенчатые, импульсные, гармонические, кусочно-линейные, экспоненциальные и др. Их называют *тестовыми воздействиями*.

## **1.2 Порядок выполнения работы**

Ознакомиться с основными понятиями и определениями, используемыми при проектировании и моделировании технических объектов [1, глава 1].

По заданному преподавателем типу технического объекта выполнить его декомпозицию на блоки с описанием каждого из них. Перечислить внутренние и внешние параметры для каждого блока.

### **Контрольные вопросы**

- 1 Основные стадии процесса проектирования технического объекта.
- 2 Структура и параметры объектов проектирования.
- 3 Постановка задач проектирования.
- 4 Классификация математических моделей.
- 5 Режимы функционирования технических объектов.

## **2 Лабораторная работа № 2. Метод сосредоточенных масс. Выделение дискретных элементов**

**Цель работы:** получить навыки выделения сосредоточенных элементов технических объектов.

### **2.1 Общие сведения**

Наиболее часто при построении динамической модели используют метод *сосредоточенных масс*. Этот метод применим, если система имеет явно выраженный дискретный спектр собственных частот. Это характерно для технических объектов, у которых масса распределена в пространстве неравномерно. Например, в механической системе автомобиля масса вращающихся деталей в основном сосредоточена в маховике двигателя, крупных шестернях трансмиссии, барабане стояночного тормоза, колесах, имеющих большие радиальные размеры и обладающих большими моментами инерции, а соединяющие их детали (валы, муфты, карданные передачи и др.) имеют малые радиальные размеры и массу, но обладают существенными упругими свойствами. Из названия метода

следует, что он предназначен для моделирования технических объектов, мерой инертности элементов которых служит масса.

Математическая модель динамической системы с сосредоточенными параметрами представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dV}{dt} = F(V, t).$$

Сосредоточенные массы обладают инерционными свойствами и способностью накапливать кинетическую энергию. Их называют *инерционными элементами*. Количество выделяемых сосредоточенных масс в динамической модели равно числу ее степеней свободы. Взаимодействие сосредоточенных масс осуществляется посредством упругих, диссипативных, фрикционных и трансформаторных элементов.

*Упругие элементы* отображают упругие свойства динамической системы. Они обладают способностью накапливать потенциальную энергию.

*Диссипативные элементы* отображают свойства диссипации (рассеивания) энергии конструктивными элементами технического объекта, обусловленные силами внутреннего трения, пропорциональными относительной скорости перемещения взаимодействующих сосредоточенных масс (или сосредоточенных масс относительно внешней среды, например, при движении жидкости в трубопроводе).

*Фрикционные элементы* отображают физические свойства фрикционных механизмов технического объекта.

*Трансформаторные элементы* отображают безынерционные преобразования параметров потока энергии, осуществляемые техническими устройствами, называемыми трансформаторами.

Состояние сосредоточенных масс характеризуется *фазовыми координатами типа потока*. Это геометрические координаты и их первые производные по времени, позволяющие определять положение сосредоточенных масс в многомерном фазовом пространстве и скорости их движения.

Взаимодействие различных элементов динамической модели отображается переменными типа потенциала.

Фазовые координаты типа потока выбирают в качестве обобщенных координат. *Количество независимых обобщенных координат системы равно числу ее степеней свободы*. В общем случае не все введенные фазовые переменные типа потока будут независимыми. Переменные же типа потенциала всегда принадлежат к зависимым координатам и выражаются через переменные типа потока.

Направления фазовых координат типа потока выбирают таким образом, чтобы они отражали положительное направление потока передаваемой через техническую систему энергии внешних источников. При этом также учитываются ограничения, наложенные объектами внешней среды на свободу перемещения сосредоточенных масс. Направления фазовых координат типа потока должны быть отображены в динамической модели системы.



*Ограничения на изменения геометрических координат и скоростей движения сосредоточенных масс динамической системы называют связями.* Различают связи: геометрические (позиционные) и кинематические; удерживающие и недерживающие (виртуальные); стационарные и нестационарные; голономные и неголономные. Математическое описание ограничений дается уравнениями связей. Каждое уравнение связи отображает тот факт, что данная связь лишает материальную систему одной степени свободы. При этом соответственно уменьшается количество независимых координат системы.

Если в динамической модели выбрать только такие независимые фазовые координаты, которые отображают лишь перемещения сосредоточенных масс, допускаемые позиционными удерживающими связями, то необходимость составления и использования уравнений этих связей исключается. Сложное движение твердого тела при этом раскладывается на простейшие составляющие – поступательное и вращательное.

## **2.2 Порядок выполнения работы**

По заданной преподавателем схеме технического объекта выполнить выделение сосредоточенных элементов системы.

### **Контрольные вопросы**

- 1 Методы представления структуры технического объекта на макроуровне.
- 2 Классификация дискретных элементов. Физические свойства, отображаемые ими.
- 3 Структура математической модели технического объекта на макроуровне.

## **3 Лабораторная работа № 3. Динамическая модель механической системы. Орграф и матрица инцидентий**

**Цель работы:** получить навыки построения динамических моделей технических объектов; теоретические сведения о формах представления математических моделей.

### **3.1 Общие сведения**

Построение математической модели технического объекта осуществляется на основе его *динамической модели* – абстрактного графического отображения основных физических свойств технического объекта и характеристик взаимодействия с внешней средой.

При построении динамической модели следует учитывать только те физические свойства объекта, которые могут оказать существенное влияние на точность результатов исследования моделируемого процесса функционирования

объекта. Это позволяет избежать необоснованной избыточности в его математическом описании, однако, при этом должна быть обеспечена адекватность математической модели [1, § 1.5].

Графические изображения элементов динамической модели отождествляются с их компонентными уравнениями, а соединения элементов соответствуют топологическим уравнениям. Следовательно, динамическую модель можно рассматривать в качестве математической модели технического объекта в графической форме.

Структурирование динамической модели и идентификация ее элементов позволяют формализовать процесс составления математической модели технического объекта в инвариантной форме. Для этого удобно использовать графические формы моделей в виде графов и эквивалентных схем.

*Граф представляет структурную математическую модель системы и отображает ее топологию, а эквивалентная схема – функциональную модель и отображает топологию и компонентный состав, как и динамическая модель. Если ввести обозначения ветвей графа, то он будет содержать ту же информацию, что и эквивалентная схема.*

Граф представляет собой совокупность узлов (вершин) и соединяющих их ветвей (ребер). Такое же определение имеет и эквивалентная схема. Определение графа может быть записано в следующем виде:  $\Gamma = (U, B, I)$ , где  $U$  – множество узлов;  $B$  – множество ветвей;  $I$  – инцидентор – указатель способа соединения ветвей.

Ветви графа соответствуют компонентам математической модели. Они отображают математические описания инерционных, упругих и диссипативных элементов динамической модели и источников внешних воздействий.

Узлы графа соответствуют узлам дискретизации непрерывных объектов в геометрическом пространстве, вводимым при переходе от моделей макроуровня к моделям микроуровня. При дискретизации системы методом сосредоточенных масс узлы дискретизации совпадают с сосредоточенными массами, представляемыми в динамической модели материальными точками или твердыми телами. Состояние технической системы и характер протекающих в ней процессов определяются фазовыми координатами узлов дискретизации. Эти координаты представляют собой потоковые переменные (например, в механической системе – скорости или геометрические координаты).

Сосредоточенные массы динамической модели обладают дуальными свойствами: они отображают инерционные свойства технической системы и одновременно являются носителями информации о ее состоянии. Последнее выражается в том, что систему фазовых координат динамической модели связывают непосредственно с сосредоточенными массами.

Граф позволяет эти свойства сосредоточенных масс дифференцировать четче: инерционные свойства отображаются ветвями, а носители информации о состоянии технической системы – узлами. В результате каждая сосредоточенная масса отображается узлом графа или эквивалентной схемы, а ее физические свойства – ветвью инерционного элемента.

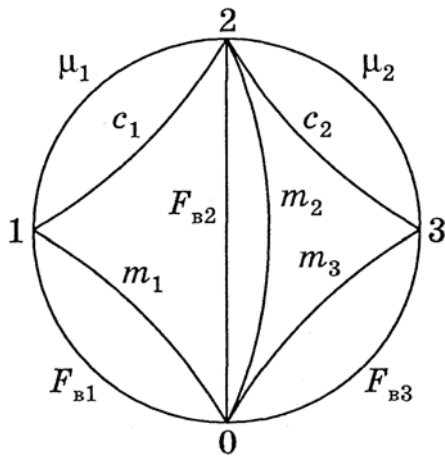


Рисунок 3.1 – Пример графа механической системы

Узлы графа обозначают точками, а ветви – линиями (рисунок 3.1). Узлам присваивают номера сосредоточенных масс, а ветвям дают обозначения параметров отождествляемых ими элементов динамической модели или обозначения источников внешних воздействий (источники потенциалов  $U_B$ , источники потоков  $I_B$ ). Один из узлов графа и эквивалентной схемы отображает инерциальную систему отсчета фазовых координат типа потока.

Его называют базовым узлом (или базой) и ему присваивается нулевой номер.

Ветви эквивалентной схемы и графа, отображающие внутренние свойства технического объекта, можно именовать так же, как и соответствующие им элементы динамической модели, т. е. инерционные, упругие и диссипативные. Поскольку эти ветви суть компоненты математической модели в графической форме, то и компоненты имеют те же наименования, что и ветви.

Если обозначить направления сигналов в ветвях графа, то получим *ориентированный граф (орграф)*. Направления сигналов в ветвях графа изображают стрелками.

Рассмотрим особенности построения орграфа на примере механической вращательной системы, динамическая модель которой приведена на рисунке 3.2. Модель отображает инерционные, упругие и диссипативные элементы системы и внешние воздействия на нее.

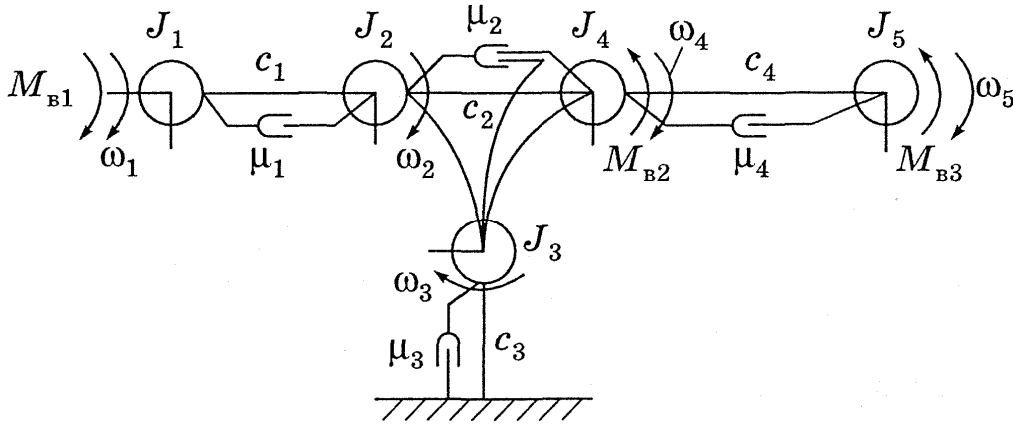


Рисунок 3.2 – Динамическая модель механической вращательной системы

Если один и тот же упругий элемент соединяет между собой более двух сосредоточенных масс, т. е. образует кольцевое соединение (например, элемент  $c_2$  на рисунке 3.2), то такое соединение называется *дифференциальным*. Это же относится и к диссипативным элементам.

В случае дифференциального соединения следует иметь в виду, что все сосредоточенные массы, входящие в соединение, взаимодействуют с одним и тем же упругим и диссипативным элементами, что и отражено на рисунке 3.2.

В ветвях источников внешних воздействий сигналы направляют от базы к узлу, если энергия подводится к узлу и источник обеспечивает возрастание потоковой переменной узла. В случае источника потенциала подвод энергии осуществляется при условии совпадения направлений  $M_{vk}$  и  $\omega_i$ . При отводе энергии на преодоление сопротивлений направления  $M_{vk}$  и  $\omega_i$  противоположны, поэтому направление сигнала в ветви источника внешнего воздействия – от узла к базе. Направление сигнала в ветви источника потока определяется аналогично, в зависимости от того, подводится энергия к техническому объекту от внешней среды или отводится.

Во всех ветвях инерционных компонентов направления сигналов – от узлов к базе. Такое направление характеризует затраты энергии источников на увеличение кинетической энергии инерционных элементов. В любых других ветвях, соединяющих узлы с базой, кроме ветвей источников, сигналы всегда направлены к базе.

В ветвях упругих компонентов стрелки указывают направление передачи энергии от источников к потребителям. Если ветви диссипативных компонентов параллельны ветвям упругих компонентов, то направления сигналов в них одинаковые.

Однако встречаются случаи, когда нельзя однозначно указать направление передачи энергии в некоторых ветвях графа. Это характерно для систем с дифференциальным соединением сосредоточенных масс. В рассматриваемом примере сосредоточенные массы с моментами инерции  $J_2$ ,  $J_3$  и  $J_4$  соединены упругим элементом с коэффициентом жесткости  $c_2$  и диссипативным элементом с коэффициентом сопротивления  $\mu_2$ . В результате орграфе узлы 2, 3 и 4 связаны между собой одними и теми же упругими и диссипативными ветвями  $c_2$  и  $\mu_2$ . Энергия передается от узла 2 к узлам 3 и 4, но направление передачи энергии между узлами 3 и 4 априори установить нельзя.

Орграф механической вращательной системы приведен на рисунке 3.3.

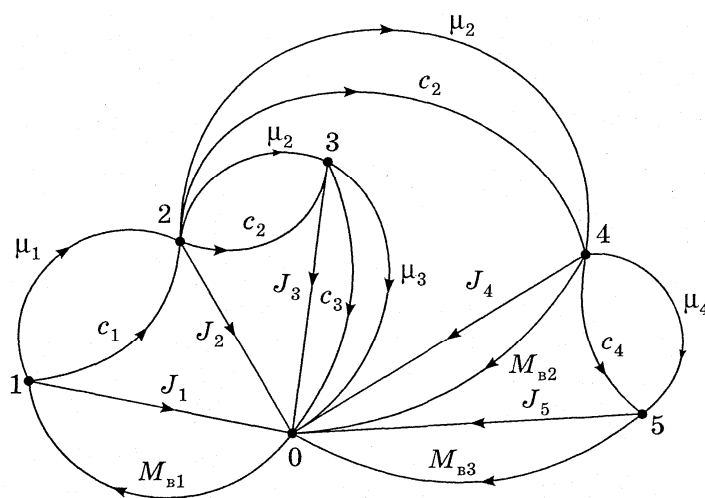


Рисунок 3.3 – Орграф механической вращательной системы

Использование орграфа дает возможность формализовать процесс составления полной математической модели объекта в инвариантной форме, т. е. получить систему обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих процесс функционирования технического объекта.

Информация о математической модели технического объекта, которую содержит орграф, может быть представлена в виде матрицы.

Сформируем матрицу размерности  $\alpha \times \beta$ , где  $\alpha$  – число строк,  $\beta$  – число столбцов. В этой матрице каждому узлу орграфа, за исключением базового, соответствует строка, а каждой ветви – столбец. Единицами в матрице отметим наличие соединений между узлами и ветвями орграфа, а нулями – их отсутствие. Направления сигналов в ветвях орграфа отобразим знаками единиц. Если сигнал направлен от узла, примем знак минус, а если к узлу – знак плюс.

Матрицу, построенную по изложенным правилам для данного орграфа, называют *матрицей инциденций*.

В таблице 3.1 приведена матрица инциденций для технического объекта, динамическая модель которого представлена на рисунке 3.2, а орграф – на рисунке 3.3.

Таблица 3.1 – Матрица инциденций

Узел	Ветвь															
	Инерционная					Диссипативная				Упругая				Источник потенциалов		
	$J_1$	$J_2$	$J_3$	$J_4$	$J_5$	$\mu_1$	$\mu_2$	$\mu_3$	$\mu_4$	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$c_4$	$M_{B1}$	$M_{B2}$	$M_{B3}$
1	-1	0	0	0	0	-1	0	0	0	-1	0	0	0	1	0	0
2	0	-1	0	0	0	1	-1	0	0	1	-1	0	0	0	0	0
3	0	0	-1	0	0	0	1	-1	0	0	1	-1	0	0	0	0
4	0	0	0	-1	0	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0	-1	0
5	0	0	0	0	-1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	-1

Матрицу инциденций  $A$  можно представить состоящей из подматриц инерционных  $A_{и}$ , диссипативных  $A_{д}$ , упругих  $A_{у}$  ветвей и подматрицы ветвей источников потенциалов  $A_{в}$ :

$$A = [A_{и}, A_{д}, A_{у}, A_{в}].$$

Из таблицы 3.1 следует, что подматрица  $A_{и}$  во всех случаях единичная диагональная. В этой связи при составлении матрицы инциденций  $A$  с целью упрощения обычно подматрицу  $A_{и}$  опускают.

Рассмотрим подматрицу ветвей упругих компонентов  $A_{у}$  для примера технического объекта (см. рисунок 3.2) и установим связь между нею и компонентными уравнениями упругих элементов.

Компонентное уравнение упругого элемента механической вращательной системы имеет вид:

$$M_y = c \int \omega_y dt.$$

Для первого упругого элемента, согласно динамической модели на рисунке 3.2,  $\omega_y = \omega_1 - \omega_2$ , следовательно, компонентное уравнение этого элемента

$$M_y = c_1 \int (\omega_1 - \omega_2) dt. \quad (3.1)$$

Рассмотрим возможность получения этого же уравнения на основе матрицы инцидентий. Примем во внимание, что состояние сосредоточенных масс, а, следовательно, и отображающих их узлов графа, характеризуется фазовыми координатами типа потока  $\omega_i$ . Учитывая это и используя столбец подматрицы  $A_y$ , соответствующий данному упругому элементу, можно составить следующее выражение:

$$M_{yj} = -c_j \int \left( \sum_{i=1}^n I_{yij} \omega_i \right) dt, \quad (3.2)$$

где  $\omega_i$  – фазовая координата типа потока (угловая скорость)  $i$ -й сосредоточенной массы ( $i$ -го узла орграфа);

$I_{yij}$  – инцидентор – элемент матрицы инцидентий  $A$ , характеризующий наличие или отсутствие соединения  $j$ -й ветви орграфа с  $i$ -м узлом и направление сигнала в данной ветви;

$n$  – число узлов орграфа.

Используя выражение (3.2), на основе матрицы инцидентий (см. таблицу 3.1) получаем компонентное уравнение для первого упругого элемента, полностью совпадающее с уравнением (3.1).

Для второго упругого элемента получаем

$$M_{y2} = c_2 \int (\omega_2 - \omega_3 - \omega_4) dt.$$

Для получения компонентных уравнений инерционных элементов по матрице инцидентий используют выражение, которое составляется аналогично выражению (3.2):

$$M_{ni} = -J_i \frac{d}{dt} (I_{nii} \omega_i),$$

где  $I_{nii}$  – диагональный элемент подматрицы инцидентий  $A_n$  ветвей инерционных элементов:  $I_{nii} = -1$  для всех инерционных элементов, поэтому

$$M_{ni} = J_i \frac{d\omega_i}{dt}.$$

Компонентное уравнение диссипативного элемента

$$M_{dk} = -\mu_k \sum_{i=1}^n I_{dik} \omega_i,$$

где  $I_{dik}$  – элемент подматрицы инцидентий  $A_d$  ветвей диссипативных компонентов.

Таким образом, на основе матрицы инцидентий можно получить все компонентные уравнения элементов технической системы и построить ее математическую модель в инвариантной форме. Следовательно, матрица инцидентий несет ту же информацию о системе, что и оргграф или динамическая модель. Поэтому ее можно рассматривать как функциональную математическую модель технического объекта в матричной форме.

### ***3.2 Порядок выполнения работы***

Изучить способы построения теоретических моделей технических объектов на макроуровне [1, глава 4].

По заданным преподавателем схемам построить динамические модели технических систем. Выделить сосредоточенные элементы системы, указать их параметры.

### ***Контрольные вопросы***

- 1 Определение динамической модели технического объекта.
- 2 Определение оргграфа и использование его для получения уравнений математической модели.
- 2 Классификация элементов динамической модели технического объекта.
- 3 Параметры элементов динамической модели поступательной и вращательной механических систем. Единицы измерения параметров.
- 4 Методика определения параметров диссипативных элементов системы.

## **4 Лабораторная работа № 4. Построение математической модели механической системы на основе оргграфа**

**Цель работы:** получить навыки построения математических моделей технических систем в графическом и табличном видах.

### ***4.1 Порядок выполнения работы***

На основании сведений, полученных в лабораторной работе № 3, по предложенным преподавателем динамическим моделям составить математические модели в графической форме (оргграфы).

По полученным оргграфам составить математические модели в табличной форме (матрицы инцидентий).

### ***Контрольные вопросы***

- 1 Классификация фазовых координат технической системы.
- 2 Компонентные уравнения элементов технической системы. Законы физики для описания их свойств.

3 Формы представления математических моделей.

4 Режимы функционирования технических объектов.

5 Виды графических моделей и особенности отображения ими физических свойств технической системы.

## 5 Лабораторная работа № 5. Построение математической модели механической системы структурно-матричным методом

**Цель работы:** получить практические навыки составления топологических и компонентных уравнений математической модели технического объекта структурно-матричным методом.

### 5.1 Общие сведения

В лабораторной работе № 3 был рассмотрен принцип формирования компонентных уравнений, при этом было отмечено, что эти уравнения могут быть составлены с использованием столбцов матрицы инциденций.

Топологические уравнения также можно получить с помощью матрицы инциденций. Они получаются путем суммирования потенциалов компонентов, инцидентных данным узлам:

$$\frac{dv_i}{dt} = \frac{1}{m_i} \left( \sum_{l=1}^L I_{vil} F_{vil} + \sum_{j=1}^N I_{yij} F_{yij} + \sum_{k=1}^K I_{dik} F_{dik} \right), \quad i = \overline{1, n}, \quad (5.1)$$

где  $L$  – количество источников внешних воздействий типа потенциала (источников потенциалов);

$N$  – количество упругих элементов системы;

$K$  – количество диссипативных элементов;

$n$  – количество сосредоточенных масс системы, равное ее числу степеней свободы.

Дополним уравнение (5.1) компонентными уравнениями упругих и диссипативных элементов:

$$\frac{dF_{yj}}{dt} = -c_j \sum_{i=1}^n I_{yij} v_i, \quad j = \overline{1, N}; \quad (5.2)$$

$$F_{dk} = -\mu_k \sum_{i=1}^n I_{dik} v_i, \quad k = \overline{1, K}. \quad (5.3)$$

Реакции внешней среды могут быть определены из следующего выражения:

$$F_{vm}^* = - \left( \sum_{j=1}^N I_{ymj} F_{yj} + \sum_{k=1}^K I_{dmk} F_{dk} \right), \quad m = \overline{1, M}, \quad (5.4)$$

где  $M$  – количество источников внешних воздействий типа потока;



$F_{\text{в}m}^*$  – реакция внешней среды, генерирующий  $m$ -й источник потока.

Уравнения (5.1)–(5.4) описывают алгоритм структурно-матричного метода формирования математических моделей технических объектов. Основу этого метода составляет матрица инцидентий. Алгоритм структурно-матричного метода легко реализовать на ЭВМ и, следовательно, обеспечить автоматизацию процесса построения моделей.

## 5.2 Порядок выполнения работы

На рисунке 5.1 приведена динамическая модель, которую используют при анализе нагруженности трансмиссии транспортного средства, обусловленной неровностями опорной поверхности дороги.

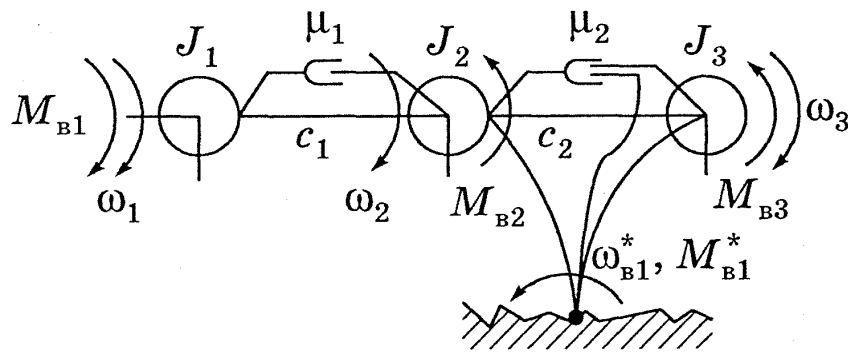


Рисунок 5.1 – Динамическая модель трансмиссии

На рисунке 5.2 приведен орграф, соответствующий этой модели.

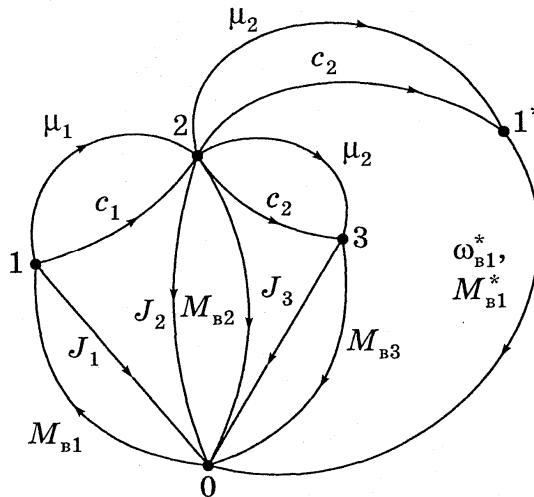


Рисунок 5.2 – Орграф модели трансмиссии

Используя орграф, составить математическую модель механической системы в табличном виде (матрицу инцидентий).

Используя полученную матрицу инцидентий, составить математическую модель механической системы в инвариантной форме, т. е. получить систему обыкновенных дифференциальных и алгебраических уравнений, описывающих процессы функционирования системы.

## Контрольные вопросы

- 1 Сущность структурно-матричного метода построения математических моделей технических систем.
- 2 Топологические уравнения технической системы. Отображаемые ими свойства системы.
- 3 Законы физики, используемые для составления топологических уравнений.

## 6 Лабораторная работа № 6. Построение математической модели механической системы с трансформаторными элементами (трансмиссии автомобиля)

**Цель работы:** получить навыки построения математических моделей технических объектов с трансформаторными элементами.

### 6.1 Общие сведения

Трансформаторные элементы отображают безынерционное преобразование характеристик потока энергии – переменных типа потока и типа потенциала. В технических объектах используются механические (зубчатые, цепные, фрикционные, рычажные, клиноременные), гидравлические (гидрообъемные и гидродинамические) и электрические трансформаторы.

Физические свойства трансформатора характеризуются передаточным числом, КПД и коэффициентом трансформации. Преобразование фазовой переменной типа потока характеризуется передаточным числом  $u$  (или обратной ему величиной, называемой передаточным отношением  $i = 1/u$ ), а типа потенциала – коэффициентом трансформации  $K$ . Потери учитываются КПД  $\eta$ .

На рисунке 6.1 приведена схема механического трансформаторного элемента (ТЭ), отображающего в динамических моделях технических объектов зубчатую передачу. ТЭ состоит из двух звеньев – входного (ведущего) 1 и выходного (ведомого) 2.

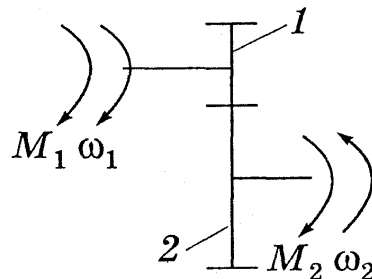


Рисунок 6.1 – Схема зубчатой передачи

*Передаточное число ТЭ* определяется отношением потоковых переменных на входе и выходе элемента. Потоковой переменной для механической вращательной системы является угловая скорость. Тогда, в соответствии с приведен-

ным определением, передаточное число ТЭ, представленного на рисунке 6.1, будет равно отношению угловой скорости на его входе  $\omega_1$  к угловой скорости на выходе элемента  $\omega_2$ :

$$u = \omega_1 / \omega_2.$$

*Коэффициент трансформации* представляет собой отношение потенциала на выходе трансформаторного элемента к потенциалу на его входе. Так как переменной типа потенциала для механической вращательной системы является вращающий момент, то коэффициент трансформации находится по формуле

$$K = M_2 / M_1.$$

Параметры  $u$  и  $K$  – скалярные алгебраические величины. Они учитывают не только модули, но и направления преобразуемых трансформаторным элементом фазовых переменных.

КПД элемента определяется отношением полезной мощности  $P_2$  на его выходе к затраченной мощности  $P_1$  на входе элемента:

$$\eta = |P_2 / P_1| = |M_2 \omega_2 / (M_1 \omega_1)|.$$

В этой формуле учтено, что КПД – скалярная положительная величина, а мощность – скалярная алгебраическая величина, поэтому отношение мощностей необходимо взять по абсолютной величине.

КПД трансформаторного элемента можно выразить через его передаточное число и коэффициент трансформации:

$$\eta = |K / u|.$$

Формулы для определения параметров ТЭ других видов и другой физической природы аналогичны, только в них используются свои обозначения фазовых переменных.

Рассмотрим возможность построения математической модели технического объекта с трансформаторными элементами структурно-матричным методом.

Предположим, что динамическая модель технического объекта имеет вид, представленный на рисунке 6.2, *а*. Эта модель отображает физические свойства механической вращательной системы с двумя зубчатыми передачами, моделируемыми в виде трансформаторных элементов ТЭ<sub>11</sub> и ТЭ<sub>21</sub>.

Индексы  $i$  и  $j$  трансформаторных элементов ТЭ <sub>$ij$</sub>  и их параметров  $u_{ij}$ ,  $K_{ij}$ ,  $\eta_{ij}$  условимся задавать следующим образом:  $i$  соответствует номеру индекса параметра инерционного элемента, а  $j$  – номеру индекса параметра упругого элемента, между которыми расположен трансформаторный элемент.

Пусть сосредоточенная масса с моментом инерции  $J_1$  связана с двигателем, а масса  $J_2$  – с рабочим органом машины или механизма. Для любого технического объекта характерны два режима функционирования – тяговый и тормозной. В тяговом режиме энергия двигателя передается посредством механизмов системы привода рабочим органам. В тормозном режиме, наоборот, двигатель начинает поглощать энергию, накопленную рабочим органом, и становится на какое-то время тормозом. Переход с одного режима на другой осуществляется

автоматически, в зависимости от воздействий внешней среды на объект, а также от управляющих воздействий оператора.

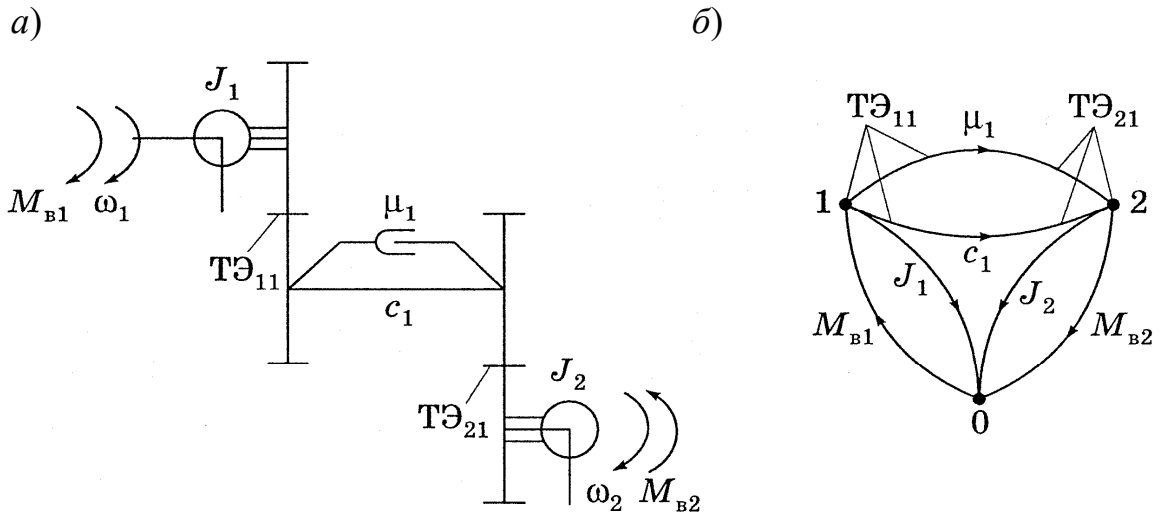


Рисунок 6.2 – Схема решения системы алгебраических уравнений

Если технический объект не содержит трансформаторных элементов, математическая модель его не меняется при переходе с одного режима на другой. В объектах с трансформаторными элементами возникает необходимость учета потерь в этих элементах. Величина этих потерь пропорциональна потенциалам в примыкающих к трансформаторному элементу упругом и диссипативном элементах. Но так как знаки этих потенциалов изменяются в зависимости от режима работы объекта, а энергия потерь всегда отрицательна, то эта особенность должна быть учтена в математической модели.

Построим орграф (рисунок 6.2, б) и матрицу инциденций (таблица 6.1) для рассматриваемого объекта, не принимая пока во внимание наличие ТЭ.

Таблица 6.1 – Матрица инциденций

Узел	Ветвь			
	$M_{B1}$	$M_{B2}$	$c_1$	$\mu_1$
1	1	0	-1	-1
2	0	-1	1	1
Подматрицы	$A_B$		$A_Y$	$A_D$

Для формирования математической модели технического объекта с трансформаторами в дополнение к матрице инциденций составляется матрица ТЭ. Она аналогична по матрице инциденций, но составляется лишь для упругих и диссипативных элементов. Наличие трансформаторных элементов между узлами и ветвями орграфа отмечают в матрице ТЭ единицами, а их отсутствие – нулями (таблица 6.2).

Таблица 6.2 – Матрица трансформаторных элементов

Узел	Ветвь	
	$c_1$	$\mu_1$
1	1	1
2	1	1

Обозначим элементы матрицы ТЭ, соответствующие упругим ветвям ор- графа,  $T_{\varepsilon ij}$ , а диссипативным ветвям –  $T_{\varepsilon ik}$ . Для учета наличия и расположения в схеме динамической модели трансформаторных элементов введем следующие функции:

$$T_{yij} = \begin{cases} \left( u_{ij} \eta_{ij}^{R_{yij}} \right)^{I_{yij}} & \text{при } T_{\varepsilon ij} = 1; \\ 1 & \text{при } T_{\varepsilon ij} = 0; \end{cases} \quad (6.1)$$

$$T_{dik} = \begin{cases} \left( u_{ik} \eta_{ik}^{R_{dik}} \right)^{I_{dik}} & \text{при } T_{\varepsilon ik} = 1; \\ 1 & \text{при } T_{\varepsilon ik} = 0; \end{cases} \quad (6.2)$$

$$S_{yij} = \begin{cases} u_{ij}^{I_{yij}} & \text{при } T_{\varepsilon ij} = 1; \\ 1 & \text{при } T_{\varepsilon ij} = 0; \end{cases} \quad (6.3)$$

$$S_{dik} = \begin{cases} u_{ik}^{I_{dik}} & \text{при } T_{\varepsilon ik} = 1; \\ 1 & \text{при } T_{\varepsilon ik} = 0. \end{cases} \quad (6.4)$$

Введем эти функции в уравнения (5.1)–(5.4):

$$\frac{dv_i}{dt} = \frac{1}{m_i} \left( \sum_{l=1}^L \mathbf{I}_{vil} F_{vil} + \sum_{j=1}^N \mathbf{I}_{yij} F_{yij} T_{yij} + \sum_{k=1}^K \mathbf{I}_{dik} F_{dik} T_{dik} \right), \quad i = \overline{1, n}; \quad (6.5)$$

$$\frac{dF_{yj}}{dt} = -c_j \sum_{i=1}^n \mathbf{I}_{yij} v_i S_{yij}, \quad j = \overline{1, N}; \quad (6.6)$$

$$F_{dk} = -\mu_k \sum_{i=1}^n \mathbf{I}_{dik} v_i S_{dik}, \quad k = \overline{1, K}; \quad (6.7)$$

$$F_{vm}^* = - \left( \sum_{j=1}^N \mathbf{I}_{ymj} F_{yj} T_{ymj} + \sum_{k=1}^K \mathbf{I}_{dmk} F_{dk} T_{dmk} \right), \quad m = \overline{1, M}. \quad (6.8)$$

При принятых обозначениях фазовых переменных в этих уравнениях функции  $R_{yj}$  и  $R_{dk}$ , используемые в выражениях (6.1), (6.2), имеют вид:

$$R_{yj} = \text{sign } F_{yj}; \quad R_{dk} = R_{yj} \text{ при } k = j.$$

Уравнения (6.5)–(6.8) описывают алгоритм формирования математической модели технического объекта с трансформаторными элементами структурно-матричным методом.

## 6.2 Порядок выполнения работы

На рисунке 6.3 приведена динамическая модель трансмиссии автомобиля с гидродинамическим трансформатором ГДТ<sub>12</sub> и двумя механическими трансформаторами ТЭ<sub>21</sub> и ТЭ<sub>31</sub>. Для ГДТ<sub>12</sub> применено специфическое графическое изображение, а в его обозначении используется двойной индекс, составленный из номеров взаимодействующих с ним сосредоточенных масс.

Построить математическую модель технического объекта (рисунок 6.3), составив орграф, матрицы инцидентий и трансформаторных элементов.

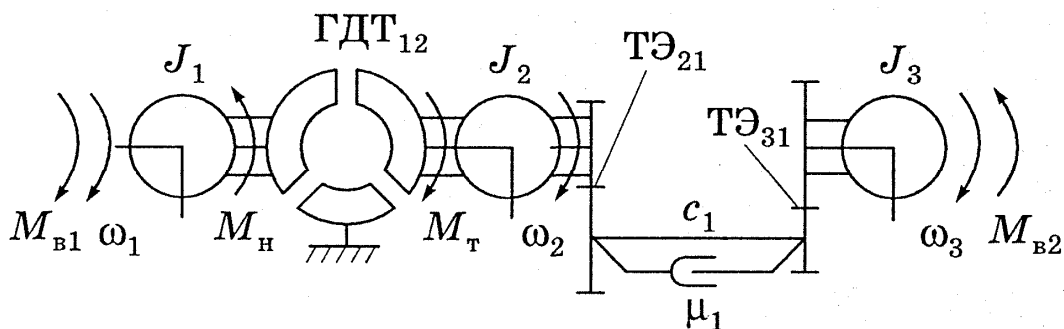


Рисунок 6.3 – Динамическая модель системы гидромеханического привода с ГДТ

### Контрольные вопросы

- 1 Режимы функционирования технических объектов.
- 2 Матрица трансформаторных элементов. Ее использование при построении математической модели объектов с ТЭ.
- 3 Параметры трансформаторных элементов механической системы. Их определение.
- 4 Определение деформации упругих элементов механической системы с ТЭ.
- 5 Определение параметров диссипативных элементов механической системы с ТЭ.

## 7 Лабораторная работа № 7. Определение статических состояний механической системы (трансмиссия, подвеска)

**Цель работы:** получить навыки построения математических моделей для анализа статических состояний технических объектов.

### 7.1 Общие сведения

Режим функционирования технической системы определяется характером внешних возмущающих и управляющих воздействий. Различают статические и динамические режимы. *Динамическим* называется режим, в котором состояние системы неустановившееся. Он обусловлен изменением во времени внешних воздействий, вызывающих возникновение переходных процессов системы, при которых изменяются ее фазовые координаты.

При постоянных воздействиях система находится в установившемся равновесном состоянии. Ее фазовые координаты при этом постоянны. Такой режим функционирования системы называется *статическим*.

Для статического режима характерна неизменность реакций взаимодействия всех элементов технической системы и реакций внешней среды. В тепловых, гидравлических, электрических и других видах систем статический режим также характеризуется постоянством фазовых переменных типа потока и типа потенциала. *Следовательно, определяющим признаком статического режима для технической системы любой физической природы является постоянство во времени всех фазовых переменных типа потока и типа потенциала, характеризующих состояние всех ее элементов.*

Для технических систем, инерционные элементы которых представляют собой сосредоточенные массы, выделяют две разновидности статических состояний: *состояние покоя* и *состояние равномерного движения*. Анализ этих состояний различается использованием разных фазовых переменных типа потока. При анализе равномерного движения используются базисные фазовые переменные, приведенные в [1, таблица 3.2]. При анализе состояния покоя фазовыми переменными типа потока являются геометрические координаты, определяющие положение инерционных элементов в пространстве.

Задачи, решаемые при анализе статических состояний, обусловлены целями и задачами проектирования технической системы. В процессе проектирования наиболее часто приходится решать следующие задачи статики: определение положений устойчивого равновесия системы; анализ распределения фазовых переменных типа потенциала и типа потока на установившихся равновесных режимах функционирования; определение начальных условий, необходимых для интегрирования системы дифференциальных уравнений; определение начальных и конечных условий при оценке качества переходных процессов по переходным характеристикам и др.

Существует несколько подходов к постановке и решению задач анализа ста-

тических состояний технических систем. Они различаются используемыми математическими моделями и методами решения систем уравнений.

Математическая модель статического состояния технического объекта представляет собой систему линейных или нелинейных алгебраических уравнений вида

$$\vec{F}(\vec{V}) = 0, \quad (7.1)$$

где  $\vec{V}$  – вектор фазовых координат технической системы.

Но статическое состояние системы можно определить и на основе исходной математической модели технической системы, представляющей собой на макроуровне проектирования систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$d\vec{V} / dt = \vec{F}(\vec{V}). \quad (7.2)$$

Численное решение этих уравнений при неизменных внешних воздействиях через конечный отрезок времени  $t_k$  приводит к стационарной точке  $\vec{V}^*$ , в которой  $d\vec{V} / dt = 0$ . Координаты этой точки и будут соответствовать искомому решению.

Если технический объект имеет несколько равновесных состояний, то для нахождения координат других стационарных точек необходимо осуществлять решение уравнений (7.2) с различными начальными условиями  $\vec{V}_0$ .

Использование системы дифференциальных уравнений для анализа статических состояний получило довольно широкое распространение в существующих САПР. Однако при таком подходе, как правило, получаются завышенные затраты машинного времени на проектирование.

Более экономичным является подход, основанный на применении системы алгебраических уравнений (7.1). Эти уравнения могут быть получены из исходной системы обыкновенных дифференциальных уравнений (7.2), полагая в ней  $d\vec{V} / dt = 0$ .

## 7.2 Порядок выполнения работы

Для динамической системы, приведенной на рисунке 5.1, получить систему уравнений, описывающих статическое состояние объекта в виде

$$A\vec{\phi} = \vec{M}_в,$$

где  $A$  – матрица постоянных коэффициентов – параметров математической модели, определяемых параметрами элементов технического объекта;

$\vec{\phi}$  – вектор фазовых координат объекта;

$\vec{M}_в$  – вектор функций внешних воздействий.



### ***Контрольные вопросы***

- 1 Режимы работы технических объектов.
- 2 Какие виды энергии способны накапливать сосредоточенные элементы динамических моделей? Формулы для определения энергий элементов.
- 3 Формулировка условий, при которых объект будет находиться в статическом состоянии.
- 4 Методика построения модели статического состояния объекта.

## **8 Лабораторная работа № 8. Моделирование переходных процессов в трансмиссии автомобиля. Определение показателей качества переходного процесса**

**Цель работы:** получить навыки моделирования и анализа переходных процессов в технических объектах, определения показателей качества переходных процессов.

### ***8.1 Общие сведения***

Характеристики функционирования технической системы определяются ее внутренними физическими свойствами и внешними воздействиями. Внешние воздействия подразделяются на возмущающие и управляющие. Возмущающие воздействия на техническую систему оказывает внешняя среда, в которой функционирует данная система. Сложные технические объекты обычно снабжаются системами управления – автоматическими, автоматизированными или ручными (командными). Система управления предназначена для обеспечения заданных характеристик функционирования технического объекта посредством соответствующих управляющих воздействий. Эти воздействия формируются только тогда, когда характеристики объекта отклоняются от желаемых. Следовательно, они носят ярко выраженный переменный характер.

Воздействия внешней среды также переменны, а их математическое описание для большинства реальных технических объектов представляется случайными функциями.

Таким образом, для технической системы наиболее характерно функционирование в условиях непрерывно изменяющихся внешних воздействий. Состояние системы при этом оказывается неустановившимся. Это состояние характеризуется изменением во времени фазовых координат системы. Такой режим работы системы называют динамическим. Он описывается дифференциальными уравнениями.

Переходным процессом системы называется переход ее из одного установившегося состояния в другое. Моделирование переходного процесса позволяет исследовать быстродействие, точность, динамичность, колебательность и другие важнейшие свойства технической системы, регламентируемые техническими

требованиями. Для численной оценки этих свойств вводится система показателей качества переходного процесса, которые наряду с показателями эффективности, характеризующими производительность, экономичность и другие, являются важнейшими выходными параметрами, определяющими технический уровень и потребительские качества создаваемого технического объекта.

Решение задачи анализа переходного процесса включает три этапа:

- 1) интегрирование системы дифференциальных уравнений;
- 2) определение показателей качества;
- 3) оценка степени выполнения технических требований к проектируемой технической системе.

При проектировании технической системы в качестве критериев ее оптимальности принимают показатели эффективности и качества процессов функционирования. Функционирование технической системы происходит в условиях внешней среды. Любое изменение внешних возмущающих или управляющих воздействий приводит к возникновению переходного процесса. В переходном процессе могут возникать большие амплитуды отклонений фазовых координат, сопровождающиеся значительным повышением деформаций и напряжений в конструктивных элементах технической системы.

При изменении внешнего воздействия  $u(t)$  любая фазовая координата технической системы  $v(t)$  может быть представлена состоящей из двух составляющих

$$v(t) = v_v(t) + v_n(t),$$

где  $v_v(t)$  – вынужденная установившаяся составляющая, определяемая частным решением неоднородного дифференциального уравнения, описывающего функционирование технической системы;

$v_n(t)$  – переходная составляющая, характеризующая свободный переходный процесс и определяемая общим решением однородного дифференциального уравнения (без правой части).

Устойчивая техническая система может работать в установившемся или неустойчивом режиме. Поэтому возникает необходимость оценки качества процессов, описываемых обеими составляющими  $v_v(t)$  и  $v_n(t)$ . Различают две группы показателей: первую составляют показатели качества переходного процесса, а вторую – показатели, характеризующие вынужденную составляющую, по которой определяется точность выполнения алгоритма функционирования в установившемся режиме.

Сравнительная оценка динамических свойств различных технических систем возможна лишь при одинаковых условиях их функционирования. Поэтому при моделировании используют различные тестовые воздействия на систему. При анализе переходных процессов применяют следующие виды воздействий: ступенчатое, импульсное, кусочно-линейное, экспоненциальное, гармоническое. Установившиеся процессы изучают при гармонических внешних воздействиях или случайных воздействиях, описываемых стационарными случайными функциями с заданными статистическими характеристиками.

Переходной характеристикой называют реакцию технической системы на ступенчатое воздействие. Переходную характеристику в теории автоматического управления рекомендуют получать при нулевых начальных условиях, и единичном ступенчатом воздействии.

Переходную характеристику  $v_n(t)$  определяют посредством численного интегрирования системы дифференциальных уравнений, описывающих функционирование технического объекта. Переходная характеристика  $v_n(t)$  представляет собой график, отображающий процесс изменения во времени некоторой фазовой координаты  $v_i$  технической системы при переходе ее из одного установившегося статического состояния в другое. Поэтому для получения переходной характеристики в процессе вычислительного эксперимента и последующей оценки показателей качества переходного процесса необходимо предварительно определить *начальные* и *конечные* значения всех фазовых координат технической системы в начальном и конечном равновесных статических состояниях. Эти состояния могут быть двух видов: *состояние покоя* или *состояние равномерного движения* элементов технической системы. Так, например, для механических систем обычно рассматривают состояние покоя, для гидравлических – состояние равномерного движения жидкости в магистрали, для тепловых – состояние установившейся теплопередачи.

Для оценки качества переходного процесса используют следующие показатели:

- время переходного процесса  $t_n$ , характеризующее длительность пребывания технической системы в неустановившемся состоянии (динамическом режиме);
- коэффициент динамичности  $k_d$ , характеризующий максимальное отклонение фазовой координаты от ее значения в установившемся конечном состоянии;
- декремент колебаний  $D$ , характеризующий скорость затухания колебаний в технической системе;
- колебательность  $K$ , определяющую число колебаний за время  $t_n$ ;
- интегральные оценки  $I$ , характеризующие отклонение графика переходного процесса от идеальной или эталонной характеристики.

На рисунке 8.1 приведены схемы определения показателей качества переходных процессов.

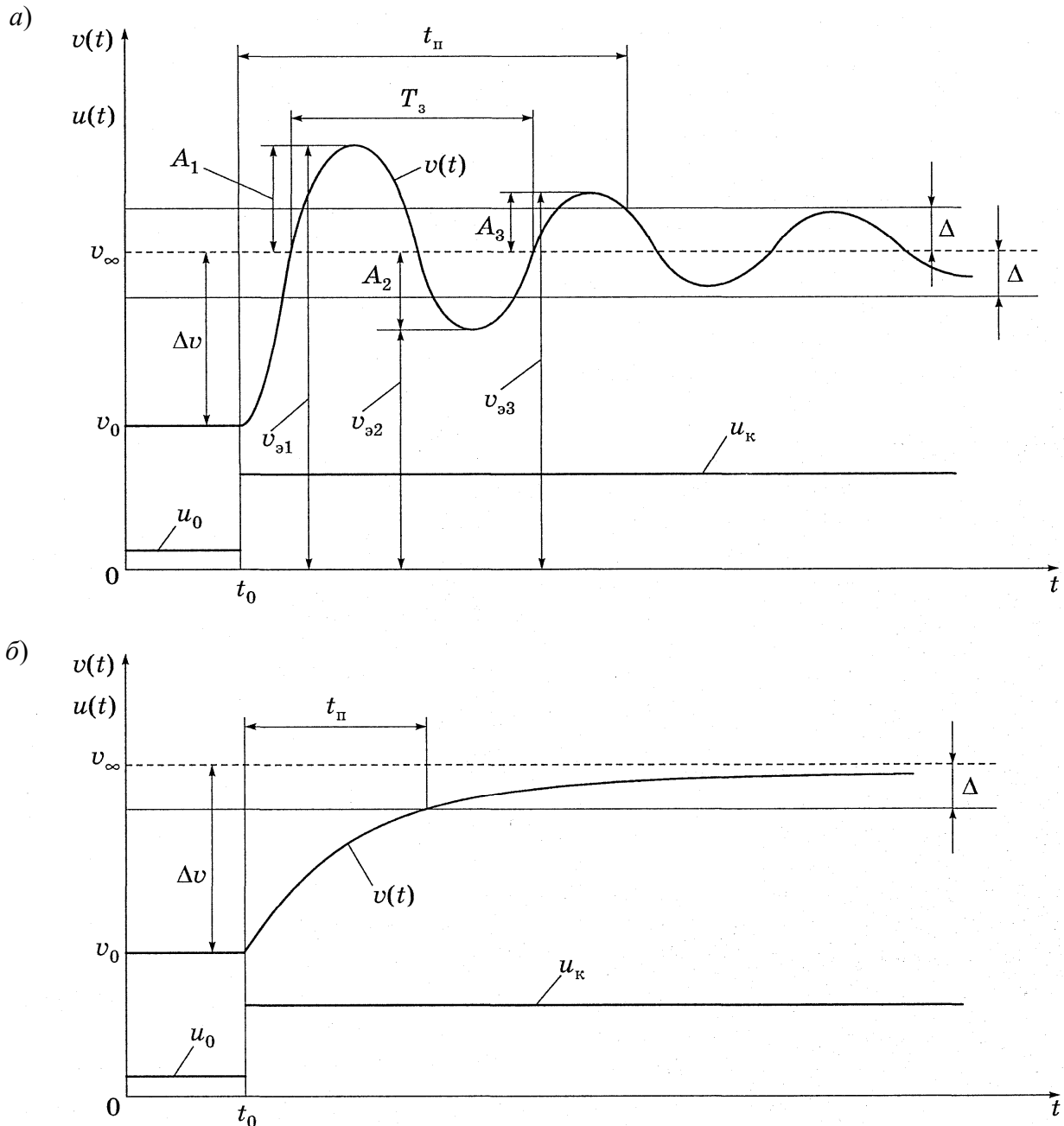


Рисунок 8.1 – К определению показателей качества переходных процессов: *a* – при колебательных процессах; *б* – при аperiodических процессах

## 8.2 Порядок выполнения работы

На основе полученной в лабораторной работе № 5 математической модели трансмиссии транспортного средства построить переходные характеристики всех фазовых координат при ступенчатом воздействии  $M_{в1к} = 1,2M_{в10}$ .

Для одной из переходных характеристик определить все показатели качества переходного процесса.

### ***Контрольные вопросы***

- 1 Понятие устойчивости технической системы.
- 2 Понятие устойчивого функционирования технической системы.
- 3 Матрица Якоби системы уравнений математической модели трансмиссии автомобиля.
- 4 Определение вида переходного процесса системы по собственным значениям матрицы Якоби.
- 5 Показатели переходного процесса при трогании автомобиля с места и их определение.

## **9 Лабораторная работа № 9. Моделирование плоского движения твердых тел. Определение показателей качества переходного процесса в подвеске автомобиля**

**Цель работы:** получить практические навыки составления математических моделей технических объектов, совершающих плоское движение.

### ***9.1 Общие сведения***

При моделировании многих технических объектов приходится учитывать плоское движение твердых тел. Это тоже сложное движение, которое можно разложить на две составляющие: переносное поступательное движение вместе с центром масс и относительное вращательное вокруг оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости движения. В этом случае динамическая модель твердого тела представляет собой три инерционных элемента, взаимодействующих между собой, а также с другими сосредоточенными массами системы и с внешней средой посредством упругих и диссипативных элементов. Число степеней свободы твердого тела при плоском движении равно трем. Фазовыми координатами типа потока при описании его движения принимают проекции скорости переносного поступательного движения центра масс на координатные оси и угловую скорость относительного вращательного движения.

При решении практических задач нередко оказывается, что центр масс твердого тела движется в координатной плоскости прямолинейно, или движение его вдоль одной из координатных осей равномерное. В таком случае при построении математической модели принимают во внимание только две степени свободы твердого тела и составляют уравнения движения только в переносном поступательном движении вдоль одной из осей координат и в относительном вращательном движении.

На рисунке 9.1 приведена динамическая модель, используемая при анализе вертикальных и продольных угловых колебаний кузова автомобиля и их воздействий на водителя.

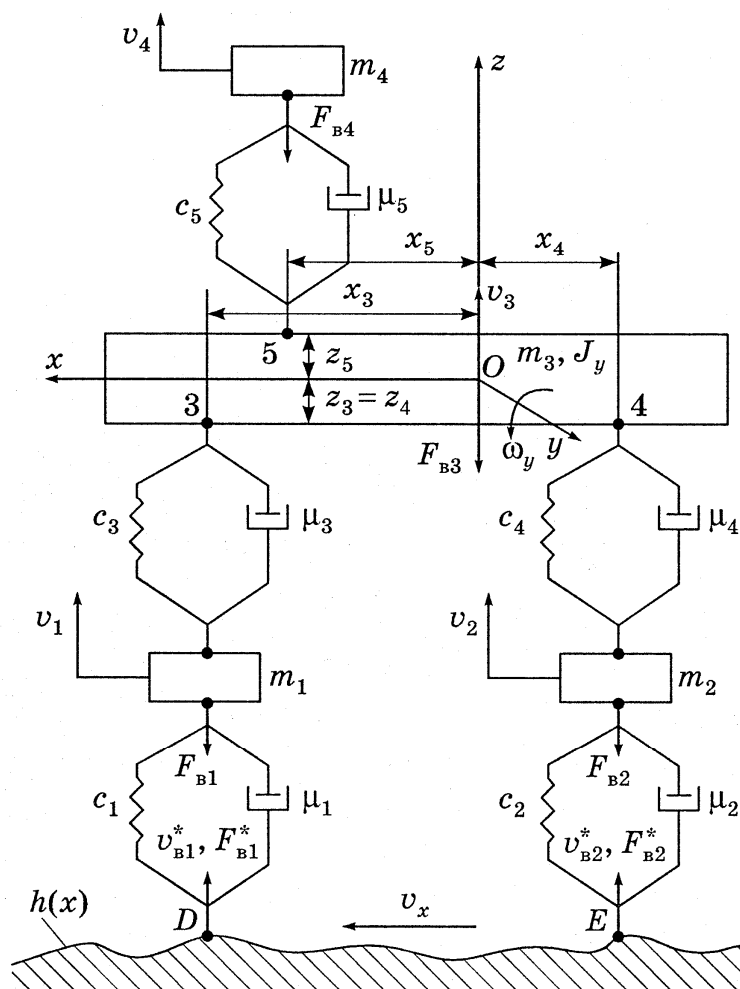


Рисунок 9.1 – Динамическая модель одномассовой колебательной системы

Для учета системы виброзащиты водителя в модель введено твердое тело массой  $m_4$ , равной суммарной массе водителя и сиденья. В результате колебательная система включает четыре твердых тела, взаимодействующих между собой и с внешней средой посредством упругих и диссипативных элементов. Наложенные на систему твердых тел голономные связи, обусловленные направляющим аппаратом подвески, позволяют массам  $m_1$ ,  $m_2$  и  $m_4$  совершать только поступательные движения относительно центра масс кузова (точка  $O$ ) вдоль оси  $Oz$ , поэтому их состояния характеризуются фазовыми переменными  $v_1$ ,  $v_2$  и  $v_4$  – линейными скоростями. Тело массой  $m_3$  совершает плоское движение. Для его описания необходимо ввести три фазовые координаты:  $v_x$ ,  $v_z$  и  $\omega_y$  – линейные скорости центра масс тела в переносном поступательном движении относительно координатных осей  $x$  и  $z$  и угловую скорость относительного вращения вокруг оси  $y$ , проходящей через центр масс кузова. Инерционные свойства тела в плоском движении отображаются тремя инерционными элементами. Параметры двух из них одинаковы и равны массе  $m_3$ , а параметром третьего элемента является момент инерции тела  $J_y$  относительно оси  $y$ :

$$J_y = m_3 \rho_y^2,$$

где  $\rho_y$  – радиус инерции тела относительно оси  $y$ .

Упругие и диссипативные элементы с коэффициентами жесткости  $c_1, c_2$  и коэффициентами сопротивления  $\mu_1, \mu_2$  отображают физические свойства шин автомобиля, элементы с параметрами  $c_3, c_4, \mu_3, \mu_4$  – свойства системы виброзащиты кузова автомобиля, а элементы с параметрами  $c_5, \mu_5$  – свойства системы виброзащиты сиденья водителя. Силы тяжести твердых тел  $F_{в1}, \dots, F_{в4}$ , причем  $F_{в4}$  – сила тяжести водителя и сиденья. Воздействия внешней среды описываются функциями  $v_{в1}^*(t), v_{в2}^*(t)$ , характеризующими микропрофиль поверхности дороги.

Таким образом, приведенная на рисунке 9.1 динамическая модель автомобиля отображает поступательные движения твердых тел массами  $m_1, m_2$  и  $m_4$ , каждое из которых имеет по одной степени свободы, и плоское движение тела массой  $m_3$  с тремя степенями свободы. Общее число степеней свободы колебательной системы в итоге равно шести.

## ***9.2 Порядок выполнения работы***

Сформировать структурно-матричным методом математическую модель технического объекта, динамическая модель которого приведена на рисунке 9.1.

В качестве внешних воздействий  $v_{в1}^*(t), v_{в2}^*(t)$  задать ступенчатые единичные воздействия.

Определить показатели качества переходных процессов в системе виброзащиты водителя и подвеске автомобиля.

### ***Контрольные вопросы***

1 Сколько топологических уравнений нужно составить для описания плоского движения твердого тела?

2 Как определяются значения передаточных чисел трансформаторных элементов при моделировании плоского движения твердого тела?

3 Уравнения Эйлера для определения соотношений между проекциями линейных скоростей точек твердого тела на оси декартовой системы координат и угловыми скоростями его вращения относительно этих осей.

4 Определение деформации упругих элементов, взаимодействующих с твердым телом при плоском движении.

## 10 Лабораторная работа № 10. Планирование и проведение активного полного факторного эксперимента

**Цель работы:** получить навыки планирования, проведения активного полного факторного эксперимента, обработки результатов и выполнения регрессионного анализа результатов.

### 10.1 Общие сведения

Процесс построения экспериментальной факторной модели на основе полного факторного эксперимента (ПФЭ) состоит из следующих этапов:

- формирование матрицы спектра плана и матрицы базисных функций;
- проведение опытов в соответствии с матрицей спектра плана;
- выполнение регрессионного анализа результатов эксперимента.

В свою очередь, регрессионный анализ включает три основных этапа:

- 1) статистический анализ результатов эксперимента;
- 2) получение коэффициентов регрессионной модели (параметров модели);
- 3) оценка адекватности и работоспособности полученной экспериментальной факторной модели технического объекта.

#### **Формирование матрицы спектра плана и матрицы базисных функций.**

Спектр плана ПФЭ содержит все возможные комбинации нормированных значений факторов  $x_j$  на всех уровнях их варьирования. Количество точек  $N$  спектра плана ПФЭ определяется по формуле

$$N = 2^n, \quad (10.1)$$

где  $n$  – количество факторов.

Для формирования матрицы спектра плана  $X$  и матрицы базисных функций  $f(\vec{X})$  можно использовать специализированное программное обеспечение.

**Проведение эксперимента.** В лабораторной работе выполняются вычислительные эксперименты на базе математической модели разгона автомобиля с имитацией дорожных условий, учитывающих случайный микропрофиль опорной поверхности дороги. При реализации активного эксперимента осуществляется варьирование трех важнейших параметров автомобиля: полной массы  $m_a$ , максимальной мощности двигателя  $P_{\max}$  и передаточного числа главной передачи  $u_0$ . Эти параметры принимаются в качестве факторов эксперимента. Функциями отклика используются выходные параметры – время разгона до заданной скорости  $t_v$ , время разгона на участке пути 1000 м  $t_{1000}$  и расход топлива на участке 2000 м  $Q_p$ .

Так как микропрофиль дороги представляет собой случайную функцию, то исходная математическая модель является вероятностной. Поэтому все заезды автомобиля повторяются  $m$  раз. Это необходимо для снижения уровня случайных погрешностей эксперимента и повышения точности получаемой регрессионной модели. В результате во время эксперимента будет проведено  $L = Nm$  опытов.



Значения каждой принятой функции отклика будут представлять собой матрицу размерности  $L = N \times m$ .

**Статистический анализ результатов эксперимента.** Результаты эксперимента подвергаются статистическому анализу с целью выявления возможных ошибок опытов. Определяют дисперсии воспроизводимости опытов в каждой точке спектра плана и оценивают их однородность.

Вначале вычисляются выборочные средние опытов во всех точках спектра плана по формуле

$$\bar{y}_i = \frac{1}{m} \sum_{u=1}^m y_{iu}; \quad i = \overline{1, N}, \quad (10.2)$$

где  $u$  – номер параллельного опыта;

$y_{iu}$  – значение функции отклика в  $u$ -м параллельном опыте  $i$ -й точки спектра плана.

Затем вычисляется дисперсия воспроизводимости опыта  $S_i^2$  по данным  $m$  параллельных опытов в каждой точке спектра плана:

$$S_i^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{u=1}^m (y_{iu} - \bar{y}_i)^2. \quad (10.3)$$

Однородность дисперсий  $S_i^2$  оценивается по критерию Кохрена  $G$ :

$$G = S_{i_{\max}}^2 / \sum_{i=1}^N S_i^2. \quad (10.4)$$

Значение  $G$  сравнивается с табличным значением критерия Кохрена  $G_T$ , определяемым при числах степеней свободы  $k_1 = m - 1$  и  $k_2 = N$  [1].

Если  $G < G_T$ , гипотеза однородности дисперсий и воспроизводимости опытов принимается. Полученные результаты эксперимента в этом случае могут быть использованы для построения регрессионной модели объекта. При  $G > G_T$  необходимо либо увеличивать количество повторных опытов  $m$ , либо проверить результаты опытов на наличие грубых ошибок по критерию Стьюдента [1].

Если дисперсии  $S_i^2$  однородны, то их усредняют и находят дисперсию воспроизводимости эксперимента:

$$S_y^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N S_i^2. \quad (10.5)$$

**Вычисление коэффициентов регрессионной модели.** Коэффициенты регрессии  $b_j$  при факторах  $x_j$ , включая также свободный член уравнения  $b_0$ , определяют по формуле

$$b_j = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_{ij} \bar{y}_i; \quad j = \overline{0, n}, \quad (10.6)$$

а коэффициенты при взаимодействиях факторов – по формуле

$$b_g = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_{ik} X_{il} X_{im} \dots \bar{y}_i; \quad g = \overline{n+1, d}; k, l, m = \overline{1, n}; k \neq l \neq m, \quad (10.7)$$

где  $n$  – количество факторов.

Полученные значения коэффициентов регрессий – случайные числа. Погрешность их оценивают дисперсией  $S_{bj}^2$ :

$$S_{bj}^2 = \frac{S_y^2}{Nm}. \quad (10.8)$$

Из этой формулы видно, что чем больше повторность опытов  $m$ , тем точнее определяются значения коэффициентов регрессии.

**Оценка адекватности регрессионной модели.** В регрессионной модели, полученной на основе ПФЭ, количество коэффициентов регрессии  $N_b$  всегда равно числу точек плана  $N$ . Поэтому поверхность функции отклика  $y$  проходит через все точки факторного пространства, координаты которых соответствуют средним выборочным значениям функции в этих точках  $\bar{y}_i, i = \overline{1, N}$ . Следовательно, полученная регрессионная модель адекватна по определению.

Для того, чтобы убедиться в ее адекватности, вычисляют по уравнению регрессии значения функции отклика во всех точках спектра плана  $\hat{y}_i, i = \overline{1, N}$  и сравнивают между собой вычисленные значения со значениями  $\bar{y}_i, i = \overline{1, N}$ .

## 10.2 Порядок выполнения работы

По заданным преподавателем основным параметрам автомобиля построить матрицу спектра плана и матрицу базисных функций для проведения активного ПФЭ. Интервалы варьирования параметров принять  $\pm 10\%$  от их номинальных значений.

Провести активный вычислительный эксперимент, приняв повторность опытов  $m = 3$ . Составить матрицы результатов для каждой из принятых функций отклика.

Выполнить статистический анализ результатов, вычислить коэффициенты регрессий. Построить графики зависимостей целевых функций  $y_1 = t_v, y_2 = t_{1000}, y_3 = Q_p$  от нормированных значений факторов  $x_1, x_2, x_3$ .

### Контрольные вопросы

- 1 Этапы построения экспериментальной факторной модели, их содержание.
- 2 Виды экспериментов, проводимых для построений экспериментальных факторных моделей, их свойства и характерные особенности.
- 3 Постулаты регрессионного анализа.
- 4 План ПФЭ и его свойства. Матрица спектра плана.
- 5 Статистический анализ результатов эксперимента, проведенного на исходной вероятностной модели технического объекта.

6 Проверка адекватности и работоспособности регрессионной модели, построенной на основе результатов ПФЭ.

## 11 Лабораторная работа № 11. Планирование и проведение дробного факторного эксперимента

**Цель работы:** получить навыки построения матрицы спектра плана дробного факторного эксперимента, оценки адекватности и работоспособности регрессионной модели.

### 11.1 Общие сведения

Из выражения (10.1) следует, что с увеличением числа факторов  $n$  число точек спектра плана быстро возрастает. Следовательно, увеличивается количество необходимых опытов. В уравнение регрессии, получаемое на основе ПФЭ, входят все возможные комбинации базисных функций: все линейные эффекты  $x_i, i = \overline{1, n}$ ; эффекты взаимодействия факторов  $x_i x_j \dots$  во всех возможных комбинациях и свободный член  $b_0$ , базисная функция которого равна единице.

При большом количестве факторов возникают сложные комбинации их взаимодействия. Отображаемую ими физическую сущность сложно представить исследователю. Поэтому при построении многофакторной регрессионной модели обычно ограничиваются линейными эффектами и парными взаимодействиями факторов. В этом случае ПФЭ оказывается избыточным, т. к. число точек спектра плана  $N$  значительно превышает количество определяемых коэффициентов регрессии  $N_b$ . В результате появляется возможность сокращения числа опытов. Ограничением является лишь необходимость выполнения условия

$$N \geq N_b. \quad (11.1)$$

При трех принятых в лабораторной работе № 10 факторах полное уравнение регрессии имеет вид:

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_4 x_1 x_2 + b_5 x_1 x_3 + b_6 x_2 x_3 + b_7 x_1 x_2 x_3. \quad (11.2)$$

Если не учитывать влияние взаимодействующих факторов на функцию отклика, то уравнение (11.2) можно упростить:

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3. \quad (11.3)$$

Это уравнение содержит только линейные эффекты от факторов, а определению подлежат четыре коэффициента регрессии. При этом условие (11.1) выполняется, следовательно, можно провести дробный факторный эксперимент, количество точек спектра которого вычисляются по формуле

$$N = 2^{n-p},$$

где  $p$  – степень дробности.

Принимая  $p = 1$ , получаем  $N = 4$ .

Дробный факторный эксперимент обозначают ДФЭ $2^{n-p}$ . В общем случае процедура построения спектра плана ДФЭ $2^{n-p}$  содержит четыре этапа.

**Этап 1.** Выбор структуры уравнения регрессии и определение степени дробности ДФЭ, выполняя соотношение (11.1).

**Этап 2.** Выбор ведущих факторов и построение для них матрицы спектра плана полного факторного эксперимента ПФЭ $2^k$ . Число ведущих факторов определяют из соотношения  $k = n - p$ .

**Этап 3.** Построение матрицы  $X$  спектра плана ДФЭ $2^{n-p}$ . Часть этой матрицы составляет матрица спектра плана ПФЭ $2^k$ , а во вторую часть должны войти столбцы матрицы для остальных факторов  $x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n$ . Столбцы матрицы, соответствующие этим факторам, получают перемножением соответствующих ведущих факторов. Для этого используют *генерирующие соотношения* – алгебраические выражения, устанавливающие связь между одним из факторов  $x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n$  и произведением какой-либо комбинации ведущих факторов  $x_1, x_2, \dots, x_k$ , из которых составлено выражение генерирующего соотношения. Выражения генерирующих соотношений не должны совпадать с выражениями базисных функций.

**Этап 4.** Проверка пригодности полученного спектра плана ДФЭ $2^{n-p}$ . Для этого необходимо построить матрицу базисных функций  $f(\vec{X})$ . В ней должны отсутствовать совпадающие столбцы. Это обеспечит выполнение требования ортогональности столбцов, что является одним из постулатов регрессионного анализа. Далее при выполнении работы проводятся те же процедуры, что и в лабораторной работе № 10.

Рассмотрим пример. Предположим, что при построении регрессионной модели выбрано четыре фактора и принята следующая структура модели:

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4 + b_5x_1x_2 + b_6x_3x_4. \quad (11.4)$$

Количество точек спектра плана при степени дробности плана  $p = 1$  будет равно  $N = 2^{n-p} = 2^{4-1} = 8$ . При построении плана ДФЭ $2^{n-p}$  примем  $x_1, x_2, x_3$  в качестве ведущих факторов. Для составления столбца матрицы спектра плана  $f_4 = x_4$  необходимо выбрать генерирующее соотношение, составив его из произведения ведущих факторов. Выражение генерирующего соотношения не должно совпадать с входящими в уравнение регрессии базисными функциями. В данном случае можно использовать одно из следующих выражений:  $x_4 = x_1x_3$ ;  $x_4 = x_2x_3$ ;  $x_4 = x_1x_2x_3$ . Используем последнее выражение. В таблице 11.1 приведена полученная матрица базисных функций.

Очевидно, что столбцы таблицы, соответствующие базисным функциям  $f_5 = x_1x_2$  и  $f_6 = x_3x_4$ , совпадают. Следовательно, полученная матрица не отвечает требованиям ортогональности столбцов. В этом случае оценки коэффициентов регрессии  $b_5$  и  $b_6$  не будут различаться.

Таким образом, использовать в уравнении (11.4) базисную функцию  $f_6 = x_3x_4$  нельзя. Необходимо ее заменить другой функцией или исключить из уравнения. Удовлетворительный вариант достигается заменой ее на функцию  $f_6 = x_2x_3$ .

Таблица 11.1 – Матрица базисных функций уравнения регрессии (11.4)

Номер опыта	Базисная функция						
	$f_0 = 1$	$f_1 = x_1$	$f_2 = x_2$	$f_3 = x_3$	$f_4 = x_4$	$f_5 = x_1x_2$	$f_6 = x_3x_4$
1	+1	-1	-1	-1	-1	+1	+1
2	+1	+1	-1	-1	+1	-1	-1
3	+1	-1	+1	-1	+1	-1	-1
4	+1	+1	+1	-1	-1	+1	+1
5	+1	-1	-1	+1	+1	+1	+1
6	+1	+1	-1	+1	-1	-1	-1
7	+1	-1	+1	+1	-1	-1	-1
8	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1

Так как количество коэффициентов регрессии в уравнении (11.4)  $N_b < N$ , то условие (11.1) выполняется и можно использовать план ДФЭ $2^{n-p}$ . Однако при этом поверхность функции отклика не будет проходить через все точки факторного пространства с координатами  $\bar{y}_i, i = \overline{1, N}$ . В результате вычисляемые значения функции отклика в этих точках  $\hat{y}_i, i = \overline{1, N}$  не будут совпадать с  $\bar{y}_i, i = \overline{1, N}$ . В этом случае возникает необходимость оценки адекватности полученной регрессионной модели.

Отклонения  $\hat{y}_i$  от  $\bar{y}_i$  оцениваются дисперсией адекватности, вычисляемой по формуле

$$S_{\text{ад}}^2 = \frac{m}{N - N_b} \sum_{i=1}^N (\hat{y}_i - \bar{y}_i)^2,$$

где  $m$  – количество параллельных опытов;

$N_b$  – количество коэффициентов регрессии.

Проверку гипотезы об адекватности регрессионной модели выполняют по критерию Фишера:

$$F = S_{\text{ад}}^2 / S_y^2,$$

где  $S_y^2$  – дисперсия воспроизводимости эксперимента, вычисляемая по формуле (10.5).

Вычисленное значение  $F$  сравнивают с табличным значением критерия Фишера, определяемым в зависимости от уровня значимости  $q$  и чисел степеней свободы  $k_1$  и  $k_2$ , с которыми определялись дисперсии  $S_{\text{ад}}^2$  и  $S_y^2$ :

$$k_1 = N - N_b, \quad k_2 = N(m - 1).$$

При  $F < F_T$  полученная модель адекватно описывает физические свойства объекта. Если  $F > F_T$ , гипотеза адекватности модели отвергается и рассматриваются различные варианты проведения повторных опытов.

Для проверки работоспособности регрессионной модели используют коэффициент детерминации  $R^2$ , представляющий собой числовую интегральную характеристику точности уравнения регрессии. Его значение вычисляют по формуле

$$R^2 = 1 - \frac{(N - N_b) S_{ад}^2 + N(m - 1) S_y^2}{m \sum_{i=1}^N (\bar{y}_i - \bar{y})^2 + N(m - 1) S_y^2},$$

где  $\bar{y}$  – среднее значение отклика:

$$\bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \bar{y}_i.$$

Модель считается работоспособной при  $R^2 \geq 0,75$ .

### ***11.2 Порядок выполнения работы***

Выбрать структуру уравнения регрессии, определить степень дробности ДФЭ с учетом выражения (11.1).

Выбрать ведущие факторы, построить для них матрицу спектра плана ПФЭ. Подобрать генерирующие соотношения, соблюдая требование к ортогональности столбцов матрицы спектра плана ДФЭ.

Провести активный вычислительный эксперимент, аналогично лабораторной работе № 10. Обработать его результаты. Выполнить проверку адекватности и работоспособности полученной регрессионной модели.

### ***Контрольные вопросы***

- 1 Назначение дробного факторного эксперимента.
- 2 Этапы построения спектра плана ДФЭ и их содержание.
- 3 Генерирующие соотношения и правила их выбора.
- 4 Назначение матрицы базисных функций при проведении ДФЭ.
- 5 Проверка адекватности и работоспособности регрессионной модели, построенной на основе результатов ДФЭ.

## 12 Лабораторная работа № 12. Планирование, проведение эксперимента и построение квадратичных регрессионных моделей

**Цель работы:** получить навыки построения регрессионных моделей второго порядка на основе результатов вычислительного эксперимента.

### 12.1 Общие сведения

Для выполнения работы будет использована теоретическая математическая модель разгона автомобиля, аналогично лабораторной работе № 10. Поскольку исходная математическая модель вероятностная, то опыты в каждой точке спектра плана необходимо дублировать.

При тех же условиях, что и в лабораторной работе № 10 необходимо получить регрессионную модель вида

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_1x_2 + b_5x_1x_3 + b_6x_2x_3 + b_7x_1^2 + b_8x_2^2 + b_9x_3^2. \quad (12.1)$$

Полином (12.1) содержит основные эффекты, все парные взаимодействия и квадратичные эффекты. Количество коэффициентов  $b_j$  квадратичного уравнения регрессии

$$N_b = \frac{(n+1)(n+2)}{2},$$

что в  $(n+2)/2$  раз больше, чем в линейной модели при таком же количестве факторов. Соответственно возрастает и минимально необходимое количество точек спектра плана. Для получения квадратичной модели используется план второго порядка, варьирование факторов в которых осуществляется на трех уровнях. План второго порядка содержит ядро и звездные точки. В качестве ядра выбирают план первого порядка ПФЭ $2^n$  или ДФЭ $2^{n-p}$  и дополняют его звездными точками в количестве  $2n$ . Такой план называется композиционным.

Если ядром плана выбран план ПФЭ $2^n$ , то число точек спектра плана определяют по формуле

$$N = 2^n + 2n,$$

а, если ядро составляет план ДФЭ $2^{n-p}$ , то

$$N = 2^{n-p} + 2n.$$

В таблице 12.1 приведена матрица спектра плана, предназначенная для проведения эксперимента при построении квадратичной модели (12.1).

Первые восемь точек составляют ядро плана, соответствующее плану ПФЭ $2^n$ , а остальные – звездные точки. В звездных точках варьируется только один из факторов  $x_i$  на нижнем или верхнем уровнях, а остальные находятся в центре плана эксперимента и их нормированные значения равны нулю.

Таблица 12.1 – Матрица спектра плана второго порядка

Номер опыта	Фактор			Номер опыта	Фактор		
	$x_1$	$x_2$	$x_3$		$x_1$	$x_2$	$x_3$
1	-1	-1	-1	9	-1	0	0
2	+1	-1	-1	10	+1	0	0
3	-1	+1	-1	11	0	-1	0
4	+1	+1	-1	12	0	+1	0
5	-1	-1	+1	13	0	0	-1
6	+1	-1	+1	14	0	0	+1
7	-1	+1	+1				
8	+1	+1	+1				

На основе результатов эксперимента определяются коэффициенты регрессий второго порядка по формулам:

$$b_0 = \frac{1}{2(n-1)} \left( \sum_{i=N_1+1}^N \bar{y}_i - \frac{1}{2^{n-p-1}} \sum_{i=1}^{N_1} \bar{y}_i \right); \quad (12.2)$$

$$b_j = \frac{1}{2 + 2^{n-p}} \sum_{i=1}^N X_{ij} \bar{y}_i; \quad (12.3)$$

$$b_{jk} = \frac{1}{2^{n-p}} \sum_{i=1}^N X_{ij} X_{ik} \bar{y}_i; \quad (12.4)$$

$$b_{jj} = \frac{1}{2} \sum_{i=N_1+1}^N X_{ij}^2 \bar{y}_i - b_0, \quad (12.5)$$

где  $n$  – количество факторов;

$N$  – количество точек спектра плана;

$N_1$  – число точек ядра спектра плана,  $N_1 = 2^{n-p}$ ;

$p$  – степень дробности плана при использовании ДФЭ.

### 12.2 Порядок выполнения работы

На основании матрицы спектра плана (см. таблицу 12.1) построить матрицу базисных функций уравнения (12.1).

Провести вычислительный эксперимент на основе теоретической математической модели разгона автомобиля, приняв степень дублирования опытов  $m = 4$ . В процессе проведения эксперимента составить таблицу результатов, в которую занести получаемые значения всех функций отклика в каждом опыте.

Определить коэффициенты уравнений регрессии второго порядка для каждой функции отклика по формулам (12.2)–(12.5). Оценить адекватность и работоспособность построенной регрессионной модели второго порядка. Построить



графики зависимостей целевых функций  $y_1 = t_v$ ,  $y_2 = t_{1000}$ ,  $y_3 = Q_p$  от нормированных значений факторов  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$ .

Сравнить графики с аналогичными, полученными при выполнении лабораторной работы № 10. Дать оценку результатов.

### ***Контрольные вопросы***

- 1 Виды планов экспериментов и их свойства.
- 2 Выбор плана эксперимента при построении регрессионной модели второго порядка.
- 3 Структура регрессионной модели второго порядка.
- 4 Матрица спектра плана второго порядка и правила ее построения. Определение количества опытов.
- 5 Проверка адекватности и работоспособности регрессионной модели второго порядка.

## **13 Лабораторная работа № 13. Поиск безусловного экстремума аналитической целевой функции**

**Цель работы:** получить навыки постановки и решения задач безусловной оптимизации с помощью MATLAB.

### ***13.1 Общие сведения***

Поиск экстремума целевой функции (оптимизация) называют *безусловным*, если на аргумент не наложено никаких ограничений. MATLAB имеет в своем составе несколько функций, реализующих различные подходы к безусловной оптимизации.

В одной из функций – `fminsearch` – используется так называемый алгоритм симплексного поиска, идея которого заключается в следующем. В окрестности стартовой точки  $n$ -мерного пространства строится симплекс –  $(n+1)$  точка в общем положении (никакие 3 точки не лежат на одной прямой, никакие 4 точки не лежат в одной плоскости). Целевая функция в этих точках и та точка, в которой значение функции максимально, отбрасывается, а вместо нее в симплекс по определенным правилам вставляется другая точка. Процесс завершается, когда диаметр симплекса меньше заданного порога. Целевая функция может быть негладкой или даже разрывной.

В простейшем случае обращение к этой функции имеет вид:

$$x = \text{fminsearch}(\text{fun}, x_0).$$

Аргумент `fun` может быть задан одним из способов:

- как формула с неизвестным  $x$ , заключенным в апострофы;
- как имя  $m$ -файла (в апострофах и без расширения `.m`);

- как указатель на функцию (например, @fun\_name);
- как указатель на анонимную функцию (например, fun\_handle).

При этом важно помнить, что формула, заключенная в апострофы, в качестве независимой переменной может содержать только  $x$ . Использование независимой переменной с другим именем вызовет сообщение об ошибке.

Кроме того, функция `fminsearch` может возвращать дополнительные параметры:

$$[x, fv, flag, info] = \text{fminsearch}(\text{fun}, x0),$$

где `fv` – значение целевой функции в точке минимума;

`flag` – причина окончания поиска;

`info` – структура с дополнительной информацией о процессе поиска экстремума.

В случае, когда целевая функция является достаточно гладкой, для поиска ее минимума можно воспользоваться функцией MATLAB `fminunc`. Идея поиска минимума с помощью производных заключается в следующем: градиент целевой функции  $f(x)$  в любой точке  $x$  есть вектор  $g$ , направленный в сторону наибольшего локального увеличения функции. Следовательно, для достижения минимума надо двигаться в направлении наискорейшего спуска  $-g$ . В более развитом варианте этого алгоритма используются также вторые производные, которые образуют матрицу Гессе (гессиан)  $H$ .

В простейшем случае вызова функции `fminunc` ее аргументами являются указатель на функцию `fun` и начальная точка поиска `x0`:

$$x = \text{fminunc}(\text{fun}, x0).$$

Более полный вариант вызова имеет вид:

$$[x, fv, flag, info, grad, hess] = \text{fminunc}(\text{fun}, x0, \text{options}).$$

Дополнительные параметры `grad` и `hess` содержат соответственно значения градиента (первой производной) и гессиана (второй производной) целевой функции в точке найденного минимума. Структура `options` содержит дополнительные параметры алгоритма оптимизации.

Более подробно методы поиска безусловного экстремума целевой функции изложены в [1, глава 12].

### 13.2 Порядок выполнения работы

Найти локальный минимум следующих аналитических целевых функций:

$$z = 5(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2;$$

$$z = x_1^3 + x_2^3 - 3x_1x_2.$$

Перед решением задачи оптимизации построить поверхности целевых функций, выбрать начальное приближение. По результатам решения нанести на поверхность полученное решение. Оценить результат оптимизации путем вывода и анализа дополнительных параметров.

### **Контрольные вопросы**

- 1 Классификация методов поиска экстремума целевой функции.
- 2 Сущность симплекс метода и метода градиентного спуска для поиска экстремума целевой функции.
- 3 Основные настройки функций `fminsearch` и `fminunc` для поиска экстремума целевой функции.
- 4 Определение градиента целевой функции и матрицы Гессе по заданному выражению целевой функции.

## **14 Лабораторная работа № 14. Поиск условного экстремума целевой функции при наличии ограничений**

**Цель работы:** получить навыки постановки и решения задач оптимизации с учетом ограничений на аргументы целевой функции.

### **14.1 Общие сведения**

Если при поиске экстремума целевой функции на ее аргумент наложены ограничения в виде уравнений и/или неравенств, то говорят об *условной оптимизации*. Основным методом решения таких задач основан на использовании множителей Лагранжа. Каждое неравенство вида  $g(x) \leq 0$  превращается в уравнение  $g(x) + v^2 = 0$  (слагаемое  $v^2$  заведомо неотрицательное). Затем левая часть каждого уравнения добавляется к целевой функции с некоторым множителем, эти множители и величины  $v$  включаются в число переменных. Для модифицированной таким образом функции решается задача *безусловной оптимизации*.

Для решения задачи условной оптимизации функции  $f(x)$  при наличии линейных ограничений вида  $Ax \leq b$  ( $A$  – матрица,  $b$  – вектор) используется функция MATLAB `fmincon`, обращение к которой требует начальной точки  $x_0$ :

$$x = \text{fmincon}(\text{fun}, x_0, A, b).$$

Функция `fmincon` допускает наложение дополнительных ограничений вида:  $A_{eq}x \leq b_{eq}$  – линейные уравнения ( $A_{eq}$  – матрица,  $b_{eq}$  – вектор);  $lb \leq x \leq ub$  – ограничения на координаты ( $lb, ub$  – векторы).

Тогда простейшие варианты обращения к функции `fmincon` будут выглядеть следующим образом:

$$x = \text{fmincon}(\text{fun}, x_0, A, b, A_{eq}, b_{eq});$$

$$x = \text{fmincon}(\text{fun}, x_0, A, b, A_{eq}, b_{eq}, lb, ub).$$

Еще одно нелинейное условие может быть задано с помощью двухкомпонентной функции  $[c, c_{eq}] = \text{nonlcon}(x)$ , для которой искомая точка минимума должна удовлетворять двум ограничениям:  $c(x) \leq 0$  и  $c_{eq}(x) = 0$ . В этом случае к списку аргументов функции `fmincon` добавляется указатель на функцию `nonlcon`:

```
x = fmincon(fun, x0, A, b, Aeq, beq, lb, ub, nonlcon).
```

Если какой-то из перечисленных аргументов не используется, вместо него задается пустой аргумент (`[]`).

### ***14.2 Порядок выполнения работы***

Найти локальный минимум функции Розенброка  $z = 5(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$ :

– при ограничении  $x_1 - x_2 + 4 \leq 0$ , задающем полуплоскость;

– при ограничении  $(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 \leq 1$ , задающем ограничение в виде единичного круга с центром в точке (1, 1).

Перед решением задачи оптимизации построить поверхности целевых функций, выбрать начальное приближение. По результатам решения нанести на поверхность полученное решение. Оценить результат оптимизации путем вывода и анализа дополнительных параметров.

### ***Контрольные вопросы***

- 1 Математическая формулировка задачи условной оптимизации.
- 2 Виды ограничений при решении задачи условной оптимизации параметров технического объекта.
- 3 Формирование целевой функции при ограничениях-равенствах.
- 4 Формирование целевой функции при ограничениях-неравенствах.

## 15 Лабораторная работа № 15. Определение оптимальных параметров автомобиля

**Цель работы:** получить навыки многокритериальной оптимизации параметров технического объекта при наличии ограничений.

### 15.1 Общие сведения

Математические модели технических объектов позволяют осуществлять анализ процессов их функционирования, получать оценки выходных параметров различных предлагаемых вариантов технических решений и сравнивать их между собой. Но конечной целью проектирования является получение наилучшего технического решения из числа возможных альтернатив, обеспечивающего высокие показатели эффективности и качества создаваемого объекта. Это достигается в процессе решения задачи синтеза, которая направлена на определение структуры и оптимальных параметров объекта.

Методология автоматизированного проектирования основана на системном подходе. Основные принципы этой методологии – декомпозиция, иерархичность, итеративность, локальная оптимизация и комплексное осуществление процесса проектирования.

При декомпозиции сложной технической системы выделяется несколько иерархических уровней, обусловленных различной степенью абстрагирования при описании ее физических свойств. Система расчленяется на отдельные части – блоки, процесс проектирования подразделяется на стадии и этапы. Различают уровневую, блочную и этапную декомпозиции, сочетание которых приводит к иерархической структуре системы автоматизированного проектирования. Каждый компонент этой структуры воплощается в соответствующем маршруте проектирования, в котором реализуется принцип локальной оптимизации.

Сущность локальной оптимизации заключается в том, что на каждом уровне декомпозиции применяются свои критерии оптимальности и осуществляется оптимизация лишь некоторой части параметров технического объекта, относящихся к внутренним параметрам проектируемого блока. Критериями при этом являются выходные параметры блока, представляющие собой параметры элементов объекта. В свою очередь, внутренние параметры проектируемого блока – это выходные параметры его элементов, получаемых при дальнейшей декомпозиции блока. В результате оказывается, что при проектировании любого элемента объекта используемые критерии получены как результат оптимизации параметров более крупного блока. По существу, декомпозиция объекта приводит к декомпозиции критериев. Следовательно, критерии на всех уровнях декомпозиции объекта взаимосвязаны и подчинены конечной цели – достижению высоких показателей эффективности и качества функционирования технического объекта.

Проектирование элементов, выделяемых при декомпозиции объекта, основано на моделировании некоторого характерного режима их функционирования. Это может быть переходный процесс, статическое состояние (состояние покоя

или равномерного движения), режим установившихся колебаний, стационарный случайный процесс и др. Система автоматизированного проектирования такого объекта содержит множество маршрутов, отличающихся между собой используемыми математическими моделями. Методы решения систем уравнений этих моделей и способы оценки выходных параметров объектов проектирования существенно различны. Проектные задачи различаются также видами зависимостей критериев от оптимизируемых параметров, количеством используемых критериев и способом формирования целевой функции.

Многообразие исследовательских и проектных задач привело к разработке множества методов оптимизации, обладающих различными свойствами и возможностями поиска экстремума целевой функции с учетом особенностей математических моделей объектов. Проектировщик должен хорошо знать особенности решаемой задачи и свойства существующих методов оптимизации, предвидеть характер изменения целевой функции, что позволит осуществить обоснованный выбор метода и повысить вероятность решения задачи с минимальными затратами.

Под оптимизацией понимается процесс поиска наилучшего варианта решения некоторой задачи в условиях множества альтернатив. При проектировании технических объектов необходимо найти их структуру и параметры, обеспечивающие наилучшее сочетание показателей качества и эффективности. При этом возникает проблема формализации понятия «наилучший». Для выбора наилучшего варианта среди определенного множества необходимо сформулировать некоторое правило предпочтения. Основой такого правила может быть однозначная численная характеристика объекта, представляющая собой скалярную функцию. Эта характеристика содержательно отображает цель поиска, в связи с чем ее называют *целевой функцией*. Она позволяет количественно выразить качество объекта и поэтому называется также *функцией качества*. Таким образом, в основе построения правила предпочтения лежит целевая функция.

Задача параметрической оптимизации технического объекта заключается в поиске параметров, при которых целевая функция достигает экстремального значения. Параметры объекта, доставляющие экстремум целевой функции, называются оптимальными.

Если с повышением качества объекта целевая функция возрастает, оптимальные значения параметров соответствуют ее максимуму, в противном случае – минимуму.

Аргументами целевой функции являются *управляемые параметры*. В качестве управляемых параметров выступают внутренние параметры технического объекта, подлежащие оптимизации. Изменяя соответствующим образом эти параметры в процессе оптимизации, осуществляют поиск экстремума целевой функции. Следует отметить, что часть внутренних параметров объекта задается, и они не подлежат оптимизации (например, параметры стандартизованных или унифицированных элементов, параметры, регламентированные техническим заданием на проектирование, и др.).

## **15.2 Порядок выполнения работы**

На основании полученных в лабораторной работе № 12 квадратичных регрессионных моделей выполнить многофакторную оптимизацию основных параметров автомобиля: максимальной мощности двигателя  $P_{\text{max}}$  и передаточного числа главной передачи  $u_0$ .

В качестве целевых функций использовать функции отклика: время разгона до заданной скорости  $t_v$ , время разгона на участке пути 1000 м  $t_{1000}$  и расход топлива на участке 2000 м  $Q_p$ .

Наложить соответствующие ограничения на управляемые параметры, чтобы не допустить выхода их значений из интервала варьирования, использованного при проведении вычислительного эксперимента.

### **Контрольные вопросы**

1 Сущность решения задач условной оптимизации параметров технического объекта.

2 Математическая формулировка задачи условной оптимизации.

3 Способы задания целевых функций для решения задач оптимизации.

4 Понятие штрафной функции. Способ преобразования задачи условной оптимизации к задаче безусловной оптимизации.

5 Алгоритм метода штрафных функций при поиске условного экстремума целевой функции.

## **Список литературы**

1 **Тарасик, В. П.** Математическое моделирование технических систем: учебник / В. П. Тарасик. – Минск: Новое знание; Москва: ИНФРА-М, 2016. – 592 с.

2 **Тарасик, В. П.** Теория движения автомобиля: учебник для вузов / В. П. Тарасик. – Санкт-Петербург: БХВ-Петербург, 2006. – 476 с.

3 **Молибошко, Л. А.** Компьютерные модели автомобилей: учебник / Л. А. Молибошко – Москва: ИНФРА-М; Новое знание, 2017. – 295 с.

4 **Тарасик, В. П.** Физические основы структурно-матричного метода математического моделирования технических систем / В. П. Тарасик // Вестн. Белорус.-Рос. ун-та. – 2016. – № 1 (50). – С. 87–99.