

МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Высшая математика»

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА. МАТЕМАТИКА

*Методические рекомендации к практическим занятиям
для студентов всех специальностей и направлений
подготовки дневной и заочной форм обучения*

**РЯД ФУРЬЕ. ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ.
ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ**



Могилев 2020

УДК 517.5
ББК 22.161.5
В 93

Рекомендовано к изданию
учебно-методическим отделом
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Высшая математика» «24» сентября 2020 г.,
протокол № 1

Составители: Т. Ю. Орлова;
А. А. Романенко

Рецензент канд. техн. наук И. Д. Камчицкая

Методические рекомендации содержат необходимые теоретические сведения по темам «Ряд Фурье», «Интеграл Фурье». «Операционное исчисление», примеры с решениями и примеры для самостоятельной работы.

Учебно-методическое издание

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА. МАТЕМАТИКА

Ответственный за выпуск	В. Г. Замураев
Корректор	Т. А. Рыжикова
Компьютерная верстка	Е. В. Ковалевская

Подписано в печать . Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Печать трафаретная. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 56 экз. Заказ №

Издатель и полиграфическое исполнение:
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования
«Белорусско-Российский университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/156 от 07.03.2019.
Пр-т Мира, 43, 212022, Могилев.

© Белорусско-Российский
университет, 2020

Содержание

1	Периодические функции и периодические колебания	4
2	Ортогональные системы функций	5
3	Обобщенные ряды Фурье по ортогональным системам функций	7
4	Тригонометрический ряд Фурье для функции периода $T = 2l$	7
5	Ряд Фурье для четных и нечетных функций	9
6	Ряд Фурье для непериодических функций.	10
7	Амплитудно-частотный спектр периодического сигнала.	10
8	Комплексная форма ряда Фурье..	18
9	Интеграл Фурье в комплексной форме. Преобразование Фурье..	20
10	Интеграл Фурье в действительной форме	25
11	Косинус- и синус-преобразования Фурье	26
12	Преобразование Лапласа. Оригинал и изображение	28
13	Свойства преобразования Лапласа	31
14	Таблица оригиналов и их изображений	34
15	Свертка оригиналов. Изображение свертки. Восстановление оригиналов по их изображениям.	37
16	Применение преобразования Лапласа к решению линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и их систем	42
	Список литературы	46

1 Периодические функции и периодические колебания

Периодические процессы (колебания) – это процессы, которые повторяются через определённые промежутки времени (периоды), встречаются в радиотехнике, электронике, связи и т. п. Такие процессы описываются периодическими функциями того же периода.

Если для функции $f(t)$ выполняется равенство $f(t) = f(t \pm T) = f(t \pm 2T) = \dots = f(t \pm nT)$ для любых t ($n \in \mathbb{N}$), то она называется периодической периода T . В качестве примера, на рисунке 1 изображён график периодической функции периода $T = 2$.

Приведем необходимые в дальнейшем некоторые свойства периодических функций.

1 Если $f(t)$ интегрируемая и имеет период T , то

$$\int_a^{a+T} f(t) dt = \int_b^{b+T} f(t) dt = \int_0^T f(t) dt,$$

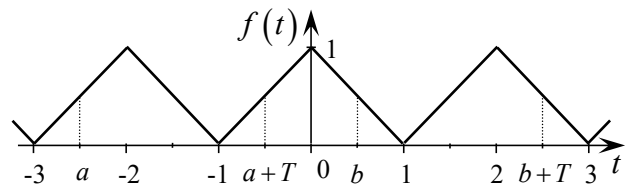


Рисунок 1

где a и b – любые числа.

Данное свойство легко доказывается исходя из геометрического смысла определенного интеграла, равенства соответствующих площадей (рисунок 1).

2 Если $f(t) = f(t \pm nT)$, т. е. функция $f(t)$ – периодическая периода T , то функция $f(\alpha t + \beta)$ имеет период T' ,

который связан с периодом T функции $f(t)$ соотношением $T' = \frac{T}{\alpha}$, где $\alpha \neq 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Так, например, функция $y = \sin t$ имеет период $T = 2\pi$, а функции $y = \sin 2t$ и $y = \sin 0,5t$ имеют периоды $T' = \pi$ и $T' = 4\pi$ соответственно (рисунок 2).

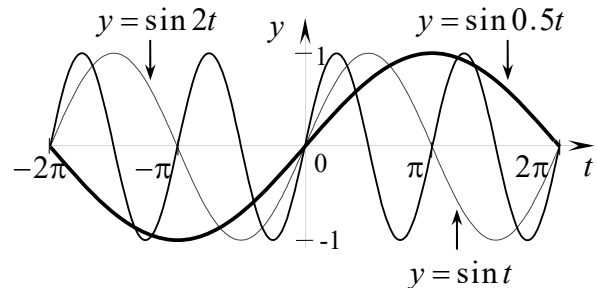


Рисунок 2

3 Алгебраическая сумма периодических функций, имеющих период T , есть периодическая функция периода T .

Простейшие периодические функции есть тригонометрические функции $\sin t$ и $\cos t$, а колебания, которые они описывают, называют гармоническими или гармоническим процессом. Этот процесс описывается функциями более общего вида:

$$y = A \cos(\omega t + \varphi_0); \quad (1)$$

$$y = A \sin(\omega t + \varphi_0). \quad (2)$$

При этом A называют амплитудой колебаний, $(\omega t + \varphi_0)$ – фазой колебаний, φ_0 – начальной фазой, ω – циклической частотой колебаний, которая свя-

зана с частотой колебаний $\nu = \frac{1}{T}$ соотношением $\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$. Период функций (1), (2) есть $T = \frac{2\pi}{\omega}$, поскольку $\sin t$ и $\cos t$ имеют период $T = 2\pi$.

Функции вида (1) и (2) называют простыми гармониками. Используя формулы тригонометрии

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta, \quad \sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta,$$

формулы (1) и (2) можно записать иначе, а именно:

$$y = A\cos(\omega t + \varphi_0) = A\cos\omega t \cos\varphi_0 - A\sin\omega t \sin\varphi_0 = a\cos\omega t + b\sin\omega t, \quad (3)$$

где $a = A\cos\varphi_0$, $b = -A\sin\varphi_0$ – числа, при этом $A = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\operatorname{tg}\varphi_0 = -\frac{b}{a}$;

$$y = A\sin(\omega t + \varphi_0) = A\sin\omega t \cos\varphi_0 + A\cos\omega t \sin\varphi_0 = c\sin\omega t + d\cos\omega t, \quad (4)$$

где $c = A\cos\varphi_0$, $d = A\sin\varphi_0$ – числа, при этом $A = \sqrt{c^2 + d^2}$, $\operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{d}{c}$.

Таким образом, простое гармоническое колебание описывается функциями вида (1), (3) или (2), (4).

Теоретически доказано и экспериментально подтверждено, что сложное гармоническое колебание представляет собой результат наложения конечного или бесконечного числа простых гармоник вида (1), (3) или (2), (4) разных периодов (частот) и амплитуд.

2 Ортогональные системы функций

Скалярным произведением двух функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ на отрезке $[a, b]$ называется число, равное значению интеграла и обозначаемое $(\varphi(x), \psi(x))$:

$$(\varphi(x), \psi(x)) = \int_a^b \varphi(x)\psi(x)dx.$$

Две функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ называются ортогональными на отрезке $[a, b]$, если их скалярное произведение равно нулю, т. е.

$$(\varphi(x), \psi(x)) = \int_a^b \varphi(x)\psi(x)dx = 0.$$

Так, например, функции $\varphi(x) = x$, $\psi(x) = x^2$ ортогональны на $[-1; 1]$. Действительно $(\varphi(x), \psi(x)) = \int_{-1}^1 x \cdot x^2 dx = \int_{-1}^1 x^3 dx = \frac{x^4}{4} \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{4}(1^4 - (-1)^4) = \frac{1}{4}(1 - 1) = 0$.

Система функций $\{\varphi_n(x)\} = \{\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), \dots\}$ (конечная или бесконечная) называется ортогональной на отрезке $[a, b]$, если все функции этой системы попарно ортогональны на $[a, b]$, т. е.

$$(\varphi_n(x), \varphi_m(x)) = \int_a^b \varphi_n(x) \varphi_m(x) dx = 0 \quad \text{для любых } n \neq m \quad (n, m \in N).$$

Примеры ортогональных систем функций. Система функций вида

$$\left\{ 1, \sin \frac{\pi x}{l}, \cos \frac{\pi x}{l}, \sin \frac{2\pi x}{l}, \cos \frac{2\pi x}{l}, \sin \frac{3\pi x}{l}, \cos \frac{3\pi x}{l}, \dots, \sin \frac{n\pi x}{l}, \cos \frac{n\pi x}{l}, \dots \right\} = \\ = \left\{ 1, \sin \frac{n\pi x}{l}, \cos \frac{n\pi x}{l} \right\} \quad (n = \overline{1, \infty}) \quad (5)$$

называется основной тригонометрической системой функций ортогональных на промежутке $[-l, l]$, где l – любое число, $n = 1, 2, \dots$. Докажем их попарную ортогональность.

Для $\left(1, \sin \frac{n\pi x}{l} \right) = \int_{-l}^l 1 \cdot \sin \frac{n\pi x}{l} dx = 0$ для любых $(\forall) n = 0, 1, 2, \dots$ в силу нечетности подынтегральной функции и симметрии пределов интегрирования.

Для $\left(1, \cos \frac{n\pi x}{l} \right)$ при $n = 0$, $\cos \frac{0\pi x}{l} = \cos 0 = 1$ имеем

$$(1, 1) = \int_{-l}^l (1 \cdot 1) dx = \int_{-l}^l dx = x \Big|_{-l}^l = (l - (-l)) = 2l.$$

При $n \neq 0$, $(n = 1, 2, 3, \dots)$ скалярное произведение

$$\left(1, \cos \frac{n\pi x}{l} \right) = \int_{-l}^l 1 \cdot \cos \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{l}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{l} \Big|_{-l}^l = \frac{l}{n\pi} \left(\sin \frac{n\pi l}{l} - \sin \frac{n\pi(-l)}{l} \right) = \frac{2l}{n\pi} \sin n\pi = 0.$$

Таким образом, получили $\int_{-l}^l 1 \cdot \cos \frac{n\pi x}{l} dx = \begin{cases} 0, & \text{для } \forall n \neq 0, \\ 2l, & \text{для } n = 0. \end{cases}$

Аналогично $\left(\cos \frac{n\pi x}{l}, \sin \frac{n\pi x}{l} \right) = \int_{-l}^l \cos \frac{n\pi x}{l} dx \cdot \sin \frac{n\pi x}{l} dx = 0$ для $\forall n = 0, 1, 2, \dots$

Далее

$$\int_{-l}^l \cos \frac{n\pi x}{l} \cdot \cos \frac{m\pi x}{l} dx = \frac{1}{2} \int_{-l}^l \left(\cos(n+m) \frac{\pi x}{l} + \cos(n-m) \frac{\pi x}{l} \right) dx = \dots = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ l, & n = m. \end{cases}$$

$$\int_{-l}^l \sin \frac{n\pi x}{l} \cdot \sin \frac{m\pi x}{l} dx = \dots = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ l, & n = m. \end{cases} \quad (\text{получить самостоятельно}).$$

Системы функций вида

$$\left\{ 1, \cos \frac{\pi x}{l}, \cos \frac{2\pi x}{l}, \cos \frac{3\pi x}{l}, \dots, \cos \frac{n\pi x}{l}, \dots \right\} = \left\{ \cos \frac{n\pi x}{l} \right\} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (6)$$

и вида

$$\left\{ \sin \frac{\pi x}{l}, \sin \frac{2\pi x}{l}, \sin \frac{3\pi x}{l}, \dots, \sin \frac{n\pi x}{l}, \dots \right\} = \left\{ \sin \frac{n\pi x}{l} \right\} \quad n=1,2,\dots \quad (7)$$

ортогональны на промежутке $[0, l]$, где l – любое число (убедиться самостоятельно).

3 Обобщенные ряды Фурье по ортогональным системам функций

Пусть система функций $\{\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), \dots\} = \{\varphi_n(x)\}$ ортогональная на $[a, b]$ ($n \in N, n = \overline{0, \infty}$) и на $[a, b]$ задана некоторая функция $f(x)$.

Выражение

$$f(x) = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \dots + c_n\varphi_n(x) + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\varphi_n(x) \quad (8)$$

называется обобщенным рядом Фурье по ортогональной системе функций $\{\varphi_n(x)\}$ ($n \in N, n = \overline{0, \infty}$) на $[a, b]$, где c_n – действительные числа называемые коэффициентами ряда. Тогда возникает вопрос: как найти коэффициенты ряда (8), т. е. c_n ? Ответ. Умножая поочередно левую и правую части (8) на $\varphi_n(x)$ ($n = \overline{0, \infty}$) и интегрируя от a до b с учетом, что система функций $\{\varphi_n(x)\}$ ортогональна на $[a, b]$, получаем значение c_n ($n = \overline{0, \infty}$). Действительно,

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx &= c_0 \int_a^b \varphi_0(x)\varphi_n(x)dx + c_1 \int_a^b \varphi_1(x)\varphi_n(x)dx + \\ &+ c_2 \int_a^b \varphi_2(x)\varphi_n(x)dx + \dots + c_n \int_a^b \varphi_n(x)\varphi_n(x)dx + \dots \end{aligned}$$

С учетом того, что $\int_a^b \varphi_n(x)\varphi_m(x)dx = 0$ ($n \neq m$), получаем

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx &= c_0 \cdot 0 + c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 + \dots + c_n \int_a^b \varphi_n^2(x)dx + \dots + 0 + \dots \\ c_n &= \frac{\int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx}{\int_a^b \varphi_n^2(x)dx}. \end{aligned} \quad (9)$$

Таким образом, получили формулу для вычисления коэффициентов ряда (8).

4 Тригонометрический ряд Фурье для функции периода $T=2l$

Изучение периодических процессов и их преобразований устройствами, проводят, раскладывая функции, которые их описывают, в тригонометрический ряд Фурье, представляющий собой бесконечную сумму синусов и косинусов (простых гармоник) разных периодов (частот) и амплитуд.

Если в качестве ортогональной системы функций использовать основную тригонометрическую систему функций (5), то ряд (8) принимает следующий вид:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \left(a_1 \cos \frac{\pi x}{l} + b_1 \sin \frac{\pi x}{l} \right) + \left(a_2 \cos \frac{2\pi x}{l} + b_2 \sin \frac{2\pi x}{l} \right) + \dots + \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right) + \dots = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right), \quad (10)$$

а коэффициенты этого ряда, согласно (9), находятся по формулам

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx; \quad (11)$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n=1,2,\dots; \quad (12)$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n=1,2,\dots \quad (13)$$

Ряд (10), коэффициенты которого определяются по формулам (11) – (13), называется **тригонометрическим рядом Фурье** для функции $f(x)$.

Из (10) видно, что основная гармоника ряда (10) ($n=1$)

$$a_1 \cos \frac{\pi x}{l} + b_1 \sin \frac{\pi x}{l} = a_1 \cos \omega_1 x + b_1 \sin \omega_1 x$$

имеет циклическую частоту $\omega_1 = \frac{\pi}{l}$, которая связана с периодом T_1 выражением

$\omega_1 = \frac{\pi}{l} = \frac{2\pi}{2l} = \frac{2\pi}{T_1}$, где $T_1 = 2l$, и его называют основным периодом, а $\frac{1}{T_1} = \nu_1$ – основной частотой колебаний. Остальные гармоники, соответственно, имеют периоды, кратные основному периоду: $T'_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = \frac{2\pi}{\frac{n\pi}{l}} = \frac{2l}{n} = \frac{T_1}{n}$.

Первое слагаемое ряда $\frac{a_0}{2}$ является константой, а постоянной функции можно приписать любой период или сказать, что она не имеет периода. Эту константу называют нулевой гармоникой. Очевидно, что сумма ряда (10) будет периодической функцией периода $T = T_1 = 2l$. А поскольку сумма ряда должна быть равна $f(x)$, то можно заключить, что в тригонометрический ряд Фурье раскладываются периодические функции. Тем не менее остаётся вопрос: для каких функций $f(x)$ ряд Фурье будет сходиться к $f(x)$, т. е. для каких функций сумма ряда $S(x)$ будет равна $f(x)$? Ответ даёт теорема [1].

Теорема Дирихле. Если функция $f(x)$ и ее производная на промежутке $[-l, l]$ являются непрерывными или имеют конечное число точек разрыва первого рода, то в точках непрерывности сумма ряда $S(x)$ равна $f(x)$, а в точках разрыва первого рода сумма ряда равна среднему арифметическому пределов функции $f(x)$ слева и справа, т. е. $S(x) = \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}$, где $f(x-0) = \lim_{x \rightarrow x-0} f(x)$, а $f(x+0) = \lim_{x \rightarrow x+0} f(x)$.

5 Ряд Фурье для четных и нечетных функций

Отметим некоторые необходимые свойства четных и нечетных функций и интегралов от них в симметричных пределах.

1 Произведение двух четных или двух нечетных функций является четной функцией.

2 Произведение четной и нечетной функций есть нечетная функция.

$$3 \int_{-l}^l f(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{если } f(x) \text{ — нечетная,} \\ 2 \int_0^l f(x) dx, & \text{если } f(x) \text{ — четная.} \end{cases}$$

То есть интеграл от нечетной функции в симметричных пределах равен нулю, а от четной — удвоенному значению интеграла по полупромежутку.

Напомним, что график четной функции симметричен относительно оси Oy , нечетной — относительно начала координат. График функции, не обладающей свойством четности-нечетности, не имеет осевой и центральной симметрий.

Если $f(x)$ — **четная** $2l$ периодическая функция удовлетворяет условиям теоремы Дирихле, то ряд Фурье для неё имеет вид:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l}, \quad (14)$$

где $a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx$ ($n=0, 1, 2, \dots$), а $b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx = 0$ в силу симметрии пределов интегрирования и нечетности подынтегральной функции.

Если $f(x)$ — **нечетная** $2l$ периодическая функция удовлетворяет условиям теоремы Дирихле, то ряд Фурье для неё имеет вид:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad (15)$$

где $b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx$ ($n=1,2,\dots$), а $a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx = 0$ в силу симметрии пределов интегрирования и нечетности подынтегральной функции.

Из изложенного следует, что:

- четные функции раскладываются в ряд Фурье по четным функциям, т. е. по системе (6);
- нечетные – по нечетным функциям, т. е. по системе (7);
- функции, не обладающие свойством четности-нечетности раскладываются по полной тригонометрической системе (5).

Если $f(x)$ задана на интервале $(0,l)$, то для разложения в ряд Фурье ее необходимо продолжить (доопределить) на $(-l,0)$. Это можно сделать двумя способами, продолжив ее четным (рисунок 3, а) или нечетным (рисунок 3, б) образом (тонкие пунктирные линии), а затем воспользоваться формулами (14) или (15) соответственно.

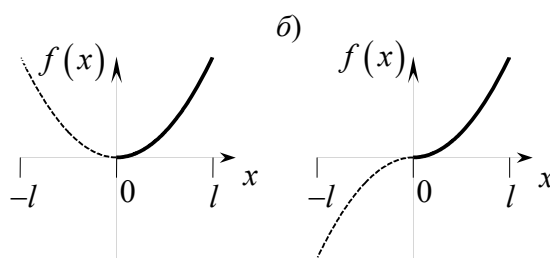


Рисунок 3

6 Ряд Фурье для непериодических функций

Если функция $f(x)$ непериодическая и задана на (a,b) (рисунок 4), то она также может быть представлена рядом Фурье на (a,b) , где $b-a=2l$, $l=\frac{(b-a)}{2}$. При этом сумма этого ряда $S(x)$ будет совпадать с $f(x)$ на (a,b) , т. е. $S(x)=f(x)$, вне (a,b) сумма ряда $S(x)$ и исходная функция $f(x)$ – совершенно разные функции, т. е. $S(x) \neq f(x)$, поскольку $S(x)$ есть периодическая функция.

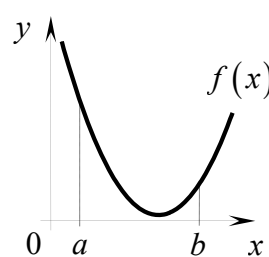


Рисунок 4

7 Амплитудно-частотный спектр периодического сигнала

Совокупность величин $\left\{ \omega_n = \frac{n\pi}{l}, A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \right\}$ ($n=0,1,2,\dots$) называют

амплитудно-частотным спектром периодического сигнала. Соответствие $\omega_n \rightarrow A_n$ принято изображать графически (рисунок 5). При этом квадрат амплитуды A_n характеризует энергию, переносимую гармоникой с частотой ω_n . Следовательно, амплитудно-частотный спектр содержит информацию об энергии периодического сигнала и показывает, как она распределена по частотам. Спектр периодической функции линейчатый, а частоты равноотстоящие

$$\Delta\omega = \omega_{n+1} - \omega_n = \frac{\pi}{l}.$$

Разложение периодических функций в ряды Фурье, т. е. нахождение коэффициентов ряда и, соответственно, амплитудно-частотного спектра периодического сигнала называют **гармоническим анализом**. Сложение отдельных гармоник и получение результирующего колебания называют **гармоническим синтезом**. Большинство функций, которые встречаются в математике, удовлетворяют условиям теоремы Дирихле, раскладываются в ряд Фурье.

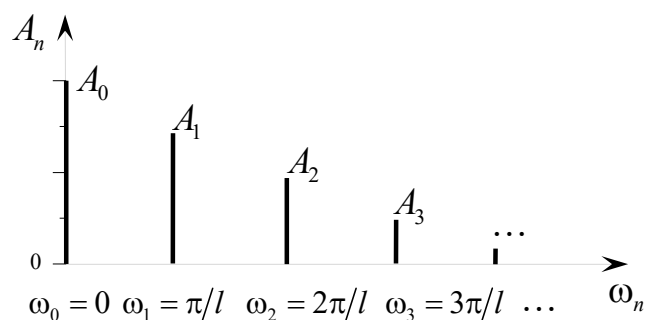


Рисунок 5

Пример 1 – Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)=|x|$ на промежутке $-1 < x \leq 1$ и построить амплитудно-частотный спектр периодического сигнала.

Решение

Поскольку $l=1$, то период $T=2l=2$.

Ее график $f(x)=|x| = \begin{cases} -x, & x \in (-l, 0] = (-1, 0], \\ x, & x \in (0, l] = (0, 1] \end{cases}$ изображен на рисунке 6.

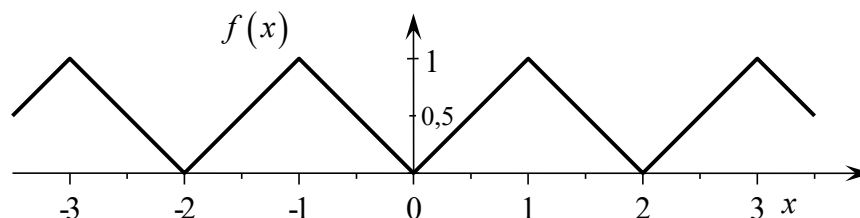


Рисунок 6

Функция удовлетворяет условиям теоремы Дирихле, значит, её можно разложить в ряд Фурье. Кроме того она является четной, следовательно, для её разложения следует воспользоваться формулой (14), т. е.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l},$$

где $a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx$ ($n=0,1,2,\dots$), $b_n = 0$.

Найдем коэффициенты ряда. Для $n=0$ имеем

$$a_0 = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) dx = \frac{2}{1} \int_0^1 x dx = \frac{2}{1} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = 1.$$

Для нахождения a_n ($n=1,2,\dots$) используем формулу интегрирования по частям $\int_a^b u dv = u \cdot v \Big|_a^b - \int_a^b v du$:

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{2}{1} \int_0^1 x \cos n\pi x dx =$$

$$= \left[\begin{array}{l} u = x, \quad du = dx; \\ dv = \cos n\pi x dx, \quad v = \int \cos n\pi x dx = \frac{1}{n\pi} \sin n\pi x \end{array} \right] =$$

$$= 2 \left(\frac{x}{n\pi} \sin n\pi x \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{n\pi} \sin n\pi x dx \right) = 2 \left(\frac{1}{n\pi} \sin n\pi + \frac{1}{n^2 \pi^2} \cos n\pi x \Big|_0^1 \right) = \frac{2}{n^2 \pi^2} ((-1)^n - 1) =$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{при четном } n = 2k, k = 1, 2, 3, \dots, \\ -\frac{4}{n^2 \pi^2}, & \text{при нечетном } n = 2k + 1, k = 0, 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

Видно, что амплитуды четных гармоник равны нулю.

Таким образом, ряд Фурье для функции $f(x) = |x|$ принимает вид:

$$|x| = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)\pi x}{(2k+1)^2} =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \cos \pi x - \frac{4}{3^2 \pi^2} \cos 3\pi x - \frac{4}{5^2 \pi^2} \cos 5\pi x - \dots - \frac{4}{(2k+1)^2 \pi^2} \cos(2k+1)\pi x - \dots \quad (16)$$

На рисунке 7 представлены графики нескольких гармоник: $y_0 = 0,5$ – нулевая гармоника, $y_1 = \frac{4}{\pi^2} \cos \pi x$ – первая гармоника, $y_3 = \frac{4}{3^2 \pi^2} \cos 3\pi x$ – третья гармоника, $y_5 = \frac{4}{5^2 \pi^2} \cos 5\pi x$ – пятая гармоника.

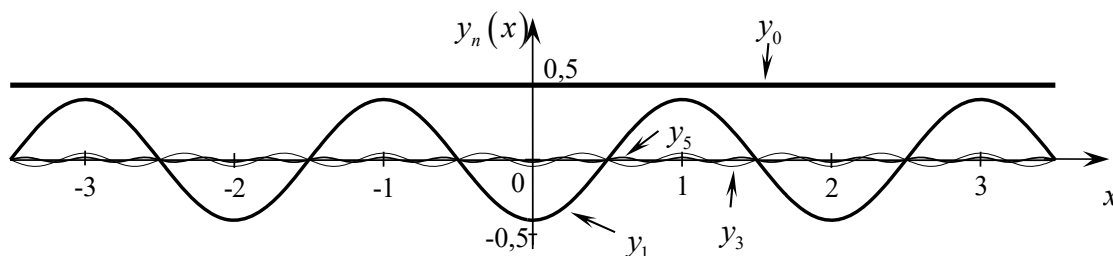


Рисунок 7

Убедимся в сходимости ряда к функции на частных значениях аргумента x . Видно, что при $x = \frac{1}{2}$ из представления (*) имеем $\left| \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2} - 0$, поскольку

$\cos(2k+1)\frac{\pi}{2}=0$ при любом k . Для других значений x требуются компьютер.

Для наглядной демонстрации сходимости построим графики исходной функции и нескольких частичных сумм ряда. На рисунке 8 изображены графики исходной функции $f(x)=|x|$ и частичной суммы ряда $S_2(x)=\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\cos\pi x$, состоящей из первых двух гармоник, а на рисунке 9 – графики $f(x)=|x|$ и частичной суммы первых четырех гармоник ряда $S_4(x)=\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\cos\pi x-\frac{4}{3^2\pi^2}\cos3\pi x-\frac{4}{5^2\pi^2}\cos5\pi x$.

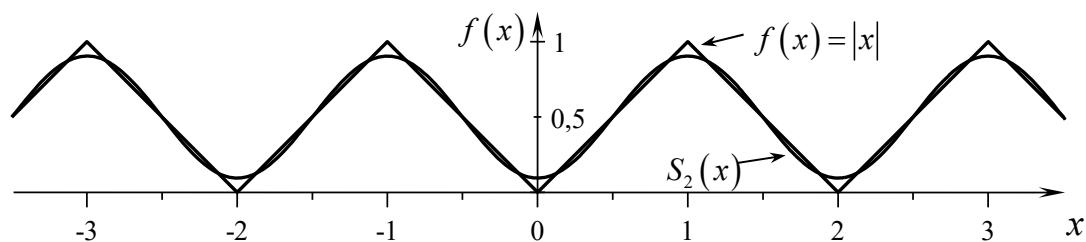


Рисунок 8

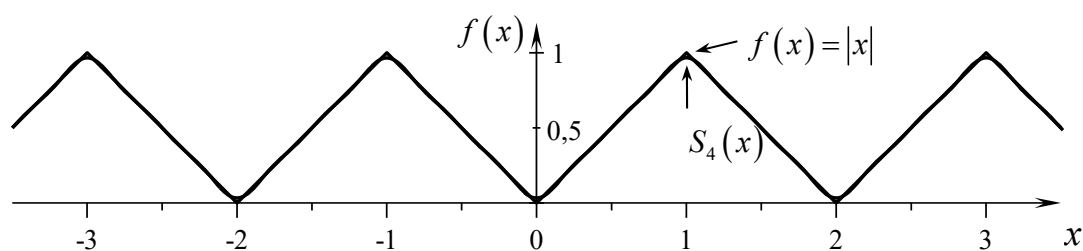


Рисунок 9

Из графиков видно, что частичные суммы $S_n(x)$ ряда Фурье все точнее и точнее представляют функцию $f(x)$ при $n \rightarrow \infty$.

Построим теперь амплитудно-частотный спектр

$$\left\{ \omega_n = \frac{n\pi}{l} = n\pi, A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \sqrt{a_n^2 + 0} = |a_n| \right\} \quad (n=0,1,3,5,\dots).$$

В данном случае $l=1$, $b_n=0$.

Для $n=0$, $\omega_0=0$ $A_0=|a_0|=1$ – нулевая гармоника.

В общем случае для нечетных $n=2k+1$ ($k=0,1,2,\dots$) имеем

$$\omega_n = (2k+1)\pi, A_n = |a_n| = \left| -\frac{4}{(2k+1)^2 \pi^2} \right| = \frac{4}{\pi^2 (2k+1)^2}.$$

Последовательно придавая значения $k=0,1,2,3,\dots$, получаем:

– для $k=0$ $n=1$, $\omega_1=\pi$ $A_1=|a_1|=\frac{4}{\pi^2} \approx 0,4$ – первая гармоника;

– для $k=1$ $n=3$, $\omega_3=3\pi$ $A_3=|a_3|=\frac{4}{9\pi^2} \approx 0,04$ – третья гармоника;

– для $k=2$ $n=5$, $\omega_5 = 5\pi$ $A_5 = |a_5| = \left| -\frac{4}{25\pi^2} \right| = \frac{4}{25\pi^2} \approx 0,016$ – пятая гармоника,

и т. д. для более высоких порядков гармоник.

Изобразим спектр наглядно, графически (рисунок 10). Как указывалось ранее, амплитуды четных гармоник равны нулю.

Из графиков частичных сумм и амплитудно-частотного спектра (амплитуды гармоник резко убывают) видно, что тригонометрический ряд сходится к функции очень быстро.

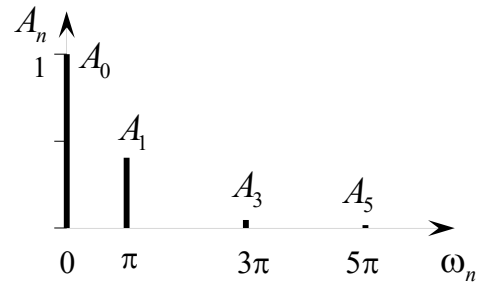


Рисунок 10

Замечание 1 – Ряды Фурье позволяют находить суммы числовых рядов. Так, например, при $x=1$ из представления (16) имеем равенство

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2} \left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{(2k+1)^2} + \dots \right),$$

а в скобках имеем ряд типа Дирихле $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$. Очевидно, что сумма ряда равна $S = \frac{\pi^2}{8}$.

Пример 2 – Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x \leq 0, \\ 1, & 0 < x \leq \pi \end{cases}$ с пе-

риодом $T = 2\pi$ ($l = \pi$).

Решение

Изобразим график исходной функции (рисунок 11). Функция удовлетворяет условиям теоремы Дирихле, значит, её можно разложить в ряд Фурье. Кроме того, она является нечетной функцией (график симметричен относительно начала координат), следовательно, для её разложения следует воспользоваться формулой (15), т. е.

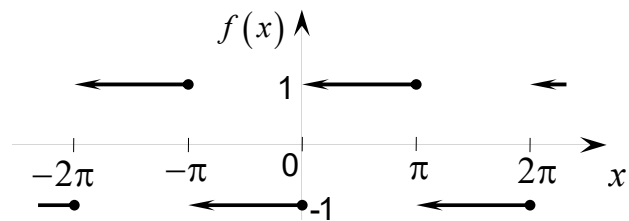


Рисунок 11

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l},$$

где $b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx$ ($n=1,2,\dots$), $a_n = 0$ ($n=0,1,2,\dots$).

Вычислим коэффициенты ряда b_n :

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin nx dx = -\frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{n} \cos nx \Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi n} (1 - (-1)^n) =$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{если } n = 2k, \\ \frac{4}{\pi n}, & \text{если } n = 2k + 1, \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

Амплитуды четных гармоник равны нулю. В результате получаем ряд

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)x}{2k+1} = \frac{4}{\pi} \left(\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \dots + \frac{1}{2k+1} \sin(2k+1)x + \dots \right) = \\ &= \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \dots + \frac{1}{2k+1} \sin(2k+1)x + \dots = \begin{cases} -1, & -\pi < x \leq 0, \\ 1, & 0 < x \leq \pi. \end{cases} \end{aligned}$$

Убедимся в сходимости ряда к функции. В частности, проверим положение теоремы Дирихле $S(x) = \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}$ для точек разрыва $x = \pm k\pi$ ($k = 0, 1, 2, \dots$). В этих точках все синусы обращаются в ноль, т. е. $S(\pm k\pi) = 0$, а $\frac{f(\pm k\pi - 0) + f(\pm k\pi + 0)}{2} = \frac{\pi + (-\pi)}{2} = 0$. Для других точек наложим графики частичных сумм ряда на график исходной функции в пределах одного периода.

На рисунке 12 изображены график исходной функции $f(x)$ и графики частичной суммы ряда: частичная сумма $S_5(x)$, состоящая из первых трех нечетных гармоник (а), частичная сумма $S_{21}(x)$, состоящая из первых 10 нечетных гармоник ряда (б).

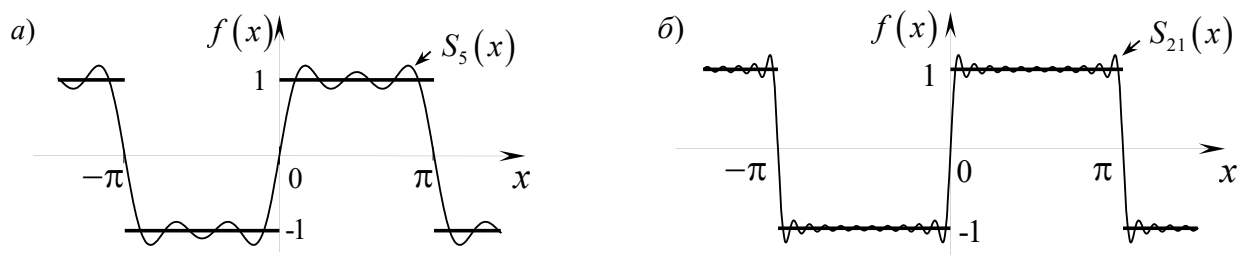


Рисунок 12

Из рисунка 12 видно, что с увеличением n частичные суммы $S_n(x)$ ряда Фурье все точнее представляют функцию $f(x)$.

Замечание 2 – Если функция $f(x)$ имеет точку разрыва 1-го рода, например, в x_0 , то частичные суммы $S_n(x)$ ряда Фурье в окрестности этой точки (слева и справа) имеют выбросы, которые стремятся к вертикальной прямой $x = x_0$. Такое поведение частичных сумм называется **явлением Гиббса**. Скачок превышает на 18 % значение функции в этой точке, и ряд в окрестности этой точки не сходится к функции (см. рисунок 12, б).

Построим амплитудно-частотный спектр. В данном случае $l = \pi$, $a_n = 0$ и для $n = 2k + 1$ имеем

$$\left\{ \omega_n = \frac{n\pi}{l} = n = 2k + 1, A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \sqrt{0 + b_n^2} = |b_n| = \left| \frac{4}{\pi n} \right| = \frac{4}{\pi(2k + 1)} \right\} \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Последовательно придавая значения $k = 0, 1, 2, \dots$, получаем:

– для $k = 0$ $n = 1$, $\omega_1 = 1$ $A_1 = |b_1| = \frac{4}{\pi} \approx 1,28$ – первая гармоника;

– для $k = 1$ $n = 3$, $\omega_3 = 3$ $A_3 = |b_3| = \left| \frac{4}{3\pi} \right| = \frac{4}{3\pi} \approx 0,42$ – третья гармоника;

– для $k = 2$ $n = 5$, $\omega_5 = 5$ $A_5 = |b_5| = \left| \frac{4}{5\pi} \right| = \frac{4}{5\pi} \approx 0,26$ – пятая гармоника,

и т. д. для более высоких порядков гармоник.

Изобразим спектр наглядно, графически (рисунок 13). Как указывалось ранее, амплитуды четных гармоник равны нулю. Из графиков частичных сумм и амплитудно-частотного спектра (амплитуды гармоник плавно убывают) видно, что тригонометрический ряд сходится к функции очень медленно.

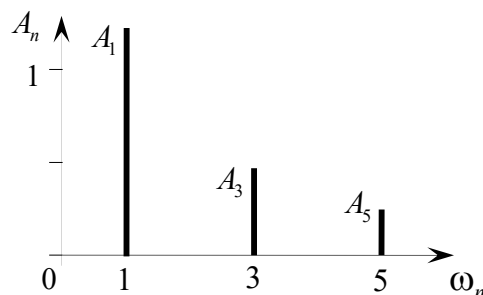


Рисунок 13

Пример 3 – Разложить периодическую функцию $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } -\pi \leq x < 0, \\ x, & \text{при } 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$ в ряд Фурье $T = 2\pi$ ($l = \pi$) (рисунок 14).

Решение

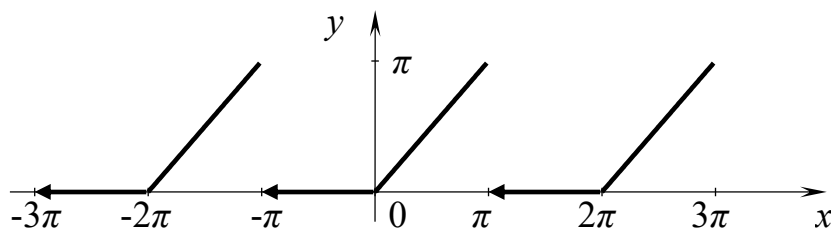


Рисунок 14

Функция удовлетворяет условиям теоремы Дирихле, значит, её можно разложить в ряд Фурье. Она не обладает свойством четности-нечетности, т. е. является функцией общего вида, следовательно, для её разложения следует воспользоваться формулами (10) – (13).

Найдём коэффициенты ряда. Учитывая, что $f(x) = 0$ для $x \in (-\pi, 0)$, получаем

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2\pi} = \frac{\pi}{2};$$

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx \, dx = \left[\begin{array}{l} u = x, \quad du = dx; \\ dv = \cos nx \, dx, \quad v = \frac{1}{n} \sin nx \end{array} \right] = \\
 &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{x}{n} \sin nx \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{1}{n} \sin nx \, dx \right) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi}{n} \sin n\pi + \frac{1}{n^2} \cos nx \Big|_0^{\pi} \right) = \frac{1}{\pi n^2} ((-1)^n - 1); \\
 b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx \, dx = \left[\begin{array}{l} u = x, \quad du = dx; \\ dv = \sin nx \, dx, \quad v = -\frac{1}{n} \cos nx \end{array} \right] = \\
 &= \frac{1}{\pi} \left(-\frac{x}{n} \cos nx \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{1}{n} \cos nx \, dx \right) = \frac{1}{\pi} \left(-\frac{\pi}{n} \cos n\pi + \frac{1}{n^2} \sin nx \Big|_0^{\pi} \right) = (-1)^{n-1} \frac{1}{n}.
 \end{aligned}$$

Таким образом, ряд Фурье для заданной функции принимает вид:

$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\pi n^2} ((-1)^n - 1) \cos nx + \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin nx \right) \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Ряд сходится к заданной функции при всех $x \neq (2n-1)\pi$. В точках разрыва $x = (2n-1)\pi$ сумма ряда равна $\frac{\pi}{2}$ и равна среднеарифметическому значений пределов функции слева и справа в этих точках. Например, для $x = \pi$ имеем

$$\begin{aligned}
 f(\pi) &= \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\pi n^2} ((-1)^n - 1) \cos n\pi + \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin n\pi \right) = \\
 &= \frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi} \left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{(2k+1)^2} + \dots \right) = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi}{2}.
 \end{aligned}$$

Сумма ряда в скобках получена в *замечании 1*. Графики частичных сумм и амплитудно-частотный спектр следует построить самостоятельно.

Замечание 3 – Тригонометрические ряды Фурье имеют ряд приложений, в частности, в акустике. Известно, что высота ноты определяется частотой основной гармоник. Однако одна и та же нота, взятая на разных музыкальных инструментах, имеет разный тембр, т. е. «окраску». Это связано с тем, что высшие гармоники на разных инструментах имеют разные амплитуды. Это и придает при сложении гармоник характерные окраски звучания одних и тех же нот на разных инструментах.

Примеры для самостоятельной работы

Разложить в ряд Фурье с $T = 2l$ периодическую функцию $f(x)$ и построить амплитудно-частотный спектр периодического сигнала.

$$\begin{array}{ll}
1) f(x) = \begin{cases} -1, & -l < x < 0, \\ 2, & 0 \leq x \leq l, \end{cases} & l=2; & 6) f(x) = \begin{cases} -1, & -l < \delta < 0, \\ 0, & 0 \leq \delta \leq l, \end{cases} & l=\pi; \\
2) f(x) = x, & -l < \delta \leq l, & l=1; & 7) f(x) = -|x|, & -l < \delta < l, & l=1; \\
3) f(x) = \begin{cases} 1, & -l \leq \delta < 0, \\ x, & 0 \leq \delta < l, \end{cases} & l=1; & 8) f(x) = \begin{cases} 2x, & -l \leq \delta < 0, \\ -x, & 0 \leq \delta < l, \end{cases} & l=\pi; \\
4) f(x) = |x| - 0,5, & -l < \delta < l, & l=1; & 9) f(x) = -|x| + 0,5, & -l < \delta < l, & l=1; \\
5) f(x) = \begin{cases} 0, & -l \leq \delta < 0, \\ 2, & 0 \leq \delta < l, \end{cases} & l=2; & 10) f(x) = \begin{cases} -2, & l \leq \delta < 0, \\ 1, & 0 \leq \delta < l, \end{cases} & l=\pi.
\end{array}$$

8 Комплексная форма ряда Фурье

Ряд Фурье на промежутке $(-l, l]$ периода $T = 2l$ в действительной форме имеет вид:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right), \quad (17)$$

а коэффициенты ряда находят по формулам

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx; \quad a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx; \quad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx; \quad n=1, 2, \dots \quad (18)$$

Используя формулы Эйлера

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi; \quad e^{-i\varphi} = \cos \varphi - i \sin \varphi,$$

можем записать

$$\cos \varphi = \frac{1}{2}(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}); \quad \sin \varphi = \frac{1}{2i}(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}). \quad (19)$$

Подставляя (19) в (17) после тождественных преобразований, получаем

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_n e^{i \frac{n\pi x}{l}} + c_{-n} e^{-i \frac{n\pi x}{l}} \right), \quad (20)$$

где

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n); \quad c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n). \quad (21)$$

Найдём теперь явные выражения для c_n и c_{-n} на основании (18) с использованием формул (19). После соответствующих подстановок и тождественных преобразований получаем

$$c_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) dx; \quad c_n = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) e^{-i \frac{n\pi x}{l}} dx; \quad c_{-n} = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) e^{i \frac{n\pi x}{l}} dx \quad n=1, 2, \dots \quad (22)$$

В результате ряд (20) можем записать в компактной форме:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_n e^{i \frac{n\pi x}{l}} + c_{-n} e^{-i \frac{n\pi x}{l}} \right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i \frac{n\pi x}{l}}, \quad (23)$$

где

$$c_n = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) e^{-i \frac{n\pi x}{l}} dx, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (24)$$

Правую часть равенства (23) называют комплексной формой ряда Фурье, слагаемые ряда $c_n e^{i \frac{n\pi x}{l}}$ – комплексными гармониками, c_n – комплексными коэффициентами ряда Фурье, т. е. комплексными амплитудами гармоник, а соответственно $\left\{ \omega_n = \frac{n\pi}{l}, |c_n| \right\}$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) – амплитудно-частотным спектром. В

физике частоты $\omega_n = \frac{n\pi}{l}$ часто называют также волновыми числами. График амплитудно-частотного спектра схематически представлен на рисунке 15.

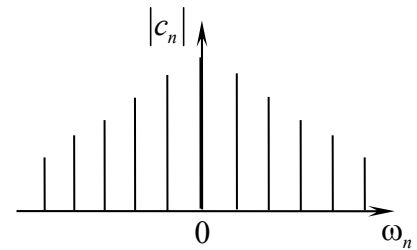


Рисунок 15

Замечание 4 – Отрицательные частоты $\omega_{-n} = -\frac{n\pi}{l}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) не имеют физического смысла. Их появление в комплексной форме ряда Фурье обеспечивает компактную форму записи ряда и существенно уменьшает объем вычислительной работы. При необходимости можно вернуться к действительной форме, при этом $a_n = 2\operatorname{Re}c_n$, $b_n = -2\operatorname{Im}c_n$, $a_0 = 2c_0$, а спектральный состав функции $f(x)$ оказывается в диапазоне $\omega \in [0, \infty)$.

Пример – Представить рядом Фурье в комплексной форме периодическую функцию $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-1, 0], \\ 1, & x \in (0, 1], \end{cases}$ где $l = 1$, $T = 2l = 2$ (рисунок 16).

Решение

Найдём комплексные коэффициенты ряда.

Для $n = 0$ имеем

$$c_0 = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 1 dx = \frac{1}{2} x \Big|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Для $n \neq 0$ имеем

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) e^{-i \frac{n\pi x}{l}} dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(x) e^{-in\pi x} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-in\pi x} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{-in\pi} e^{-in\pi x} \Big|_0^1 = \\ &= -\frac{1}{2in\pi} (e^{-in\pi} - e^{-in\pi \cdot 0}) = -\frac{1}{2in\pi} (\cos(n\pi) - i \sin(n\pi) - 1) = \frac{i}{2n\pi} ((-1)^n - 1), \quad n \neq 0. \end{aligned}$$

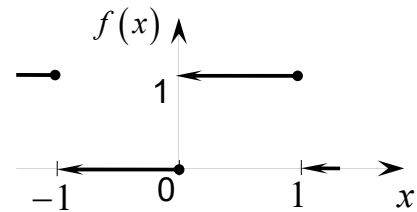


Рисунок 16

В результате ряд Фурье принимает вид:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} c_n e^{i \frac{n\pi x}{l}} = \frac{1}{2} + \frac{i}{2\pi} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n} e^{in\pi x} = \\
 &= \frac{1}{2} + \frac{i}{2\pi} \left(\frac{-2}{-1} e^{-i\pi x} + \frac{-2}{1} e^{i\pi x} \right) + \frac{i}{2\pi} \left(\frac{0}{-2} + \frac{0}{2} \right) + \frac{i}{2\pi} \left(\frac{-2}{-3} e^{-i3\pi x} + \frac{-2}{3} e^{i3\pi x} \right) + \dots = \\
 &= \frac{1}{2} - \frac{2i}{2\pi} \left((e^{i\pi x} - e^{-i\pi x}) + \frac{1}{3} (e^{i3\pi x} - e^{-i3\pi x}) + \dots \right) = \frac{1}{2} - \frac{i}{\pi} \left((e^{i\pi x} - e^{-i\pi x}) + \frac{1}{3} (e^{i3\pi x} - e^{-i3\pi x}) + \dots \right).
 \end{aligned}$$

Вернемся к действительной форме ряда Фурье. На основании приведенных выше формул или, что равносильно использованию формул Эйлера, после тождественных преобразований получаем действительную форму ряда Фурье

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left(\sin \pi x + \frac{1}{3} \sin 3\pi x + \dots \right) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)} \sin(2k+1)\pi x \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Получить самостоятельно.

Примеры для самостоятельной работы

Записать ряд Фурье в комплексной форме для $T = 2l$ периодической функции $f(x)$ и построить амплитудно-частотный спектр.

- | | |
|--|---|
| 1) $f(x) = x, \quad x \in [-l, l), \quad l = \pi;$ | 6) $f(x) = -x + 1, \quad x \in [-l, l), \quad l = \pi;$ |
| 2) $f(x) = -x, \quad x \in [-l, l), \quad l = \pi;$ | 7) $f(x) = -x - 1, \quad x \in [-l, l), \quad l = \pi;$ |
| 3) $f(x) = 2x, \quad x \in [-l, l), \quad l = \pi;$ | 8) $f(x) = -2x, \quad x \in [-l, l), \quad l = \pi;$ |
| 4) $f(x) = x + 1, \quad x \in [-l, l), \quad l = \pi;$ | 9) $f(x) = - x , \quad x \in [-l, l), \quad l = \pi;$ |
| 5) $f(x) = x - 1, \quad x \in [-l, l), \quad l = \pi;$ | 10) $f(x) = 0.5x, \quad x \in [-l, l), \quad l = \pi.$ |

9 Интеграл Фурье в комплексной форме. Преобразование Фурье

В разделах 1 – 8 рассмотрена задача представления рядом Фурье $2l$ периодической функции $f(x)$, заданной на отрезке конечной длины $[-l, l]$. В научно-технической деятельности часто возникает необходимость подобных представлений непериодических функций, заданных на всей числовой оси $(-\infty, \infty)$. Подобные представления также возможны. Непериодическую функцию $f(x)$ можно рассмотреть как периодическую с периодом $T = 2l \rightarrow \infty$, т. е. в формулах ряда Фурье необходимо выполнить предельный переход при $l \rightarrow \infty$. Сделаем это. При этом воспользуемся компактной комплексной формой ряда Фурье.

Пусть функция $f(x)$ кусочно-непрерывная на всей числовой оси и абсолютно интегрируемая, т. е. сходится несобственный интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx = M < \infty.$$

На любом отрезке $(-l, l]$ функция $f(x)$ представима рядом Фурье:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i \frac{n\pi}{l} x}, \quad (25)$$

где $c_n = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) e^{-i \frac{n\pi}{l} t} dt$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). При этом формально изменим переменную интегрирования в c_n с x на t . Подставим c_n в (25) и преобразуем:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2l} \left(\int_{-l}^l f(t) e^{-i \frac{n\pi}{l} t} dt \right) e^{i \frac{n\pi}{l} x} = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) e^{i \frac{n\pi}{l} (x-t)} dt = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Delta\omega_n \int_{-l}^l f(t) e^{i\omega_n(x-t)} dt,$$

где $\omega_n = \frac{n\pi}{l}$, $\Delta\omega_n = \omega_{n+1} - \omega_n = \frac{\pi}{l} = \Delta\omega$. При $l \rightarrow \infty$, $\Delta\omega = \frac{\pi}{l} \rightarrow 0$, а сумма в правой части полученной формулы для $f(x)$ является интегральной для функции $\int_{-l}^l f(t) e^{i\omega_n(x-t)} dt$ по переменной ω . Следовательно, можем записать

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \lim_{\substack{l \rightarrow \infty \\ \Delta\omega \rightarrow 0}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Delta\omega_n \int_{-l}^l f(t) e^{i\omega_n(x-t)} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega(x-t)} dt. \quad (26)$$

Правую часть формулы (26) называют двойным **интегралом Фурье** в комплексной форме функции $f(x)$. Преобразовав правую часть (26) к виду

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \right) e^{i\omega x} d\omega,$$

можем записать соотношения

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt; \quad (27)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega x} d\omega, \quad (28)$$

которые называют преобразованиями Фурье. При этом формулу (27), т. е. функцию $F(\omega)$ называют прямым преобразованием Фурье функции $f(x)$, а формулу (28) – обратным преобразованием Фурье для функции $f(x)$.

Функцию $F(\omega)$ также называют Фурье-образом функции $f(x)$ или частотным спектром функции $f(x)$, который является непрерывным.

Функции $e^{i\omega x}$ в (28) являются комплексными гармониками функции $f(x)$, а значения $F(\omega)$ – комплексными амплитудами этих гармоник. Функцию $|F(\omega)|$ называют амплитудно-частотным спектром для $f(x)$, а $\varphi(\omega) = -\arg F(\omega)$ – фазово-частотным спектром функции $f(x)$.

Формулы (27), (28) представляют собой разложение непериодических функций $f(x)$ в непрерывную сумму гармонических составляющих $e^{i\omega x}$ с частотами ω , непрерывно изменяющимися от $-\infty$ до ∞ и комплексными амплитудами $F(\omega)$.

Замечание 5 – В точках x_i разрыва первого рода значение выражения (28)

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega x} d\omega = \frac{f(x_i - 0) + f(x_i + 0)}{2},$$

где $f(x_i \mp 0)$ предельные значения $f(x)$ слева и справа в точках разрыва x_i .

Пример 1 – Представить интегралом Фурье в комплексной форме функцию $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ e^{-\alpha x}, & x \geq 0, \end{cases}$, где $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0$, и построить график спектральной характеристики функции.

Решение

На рисунке 17 представлен график исходной функции $f(x)$ для двух значений параметра α . Проверим условие представимости функции интегралом Фурье:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx = \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} dx = \left. \frac{e^{-\alpha x}}{-\alpha} \right|_0^{\infty} = \frac{1}{\alpha} < \infty.$$

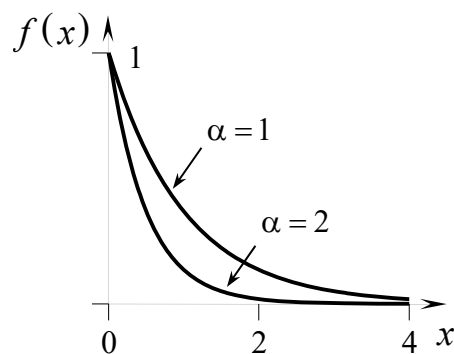


Рисунок 17

Интеграл сходится, Фурье-представление имеет место. Найдём его

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} e^{-i\omega x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-(\alpha+i\omega)x} dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \left. \frac{e^{-(\alpha+i\omega)x}}{-(\alpha+i\omega)} \right|_0^{\infty} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\alpha+i\omega}. \end{aligned}$$

Следовательно, искомое представление имеет вид:

$$e^{-\alpha x} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{i\omega x}}{\alpha + i\omega} d\omega,$$

а амплитудно-частотный спектр, т. е. спектральная характеристика функции или Фурье-образ имеет вид:

$$|F(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \left| \frac{1}{\alpha + i\omega} \right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}}.$$

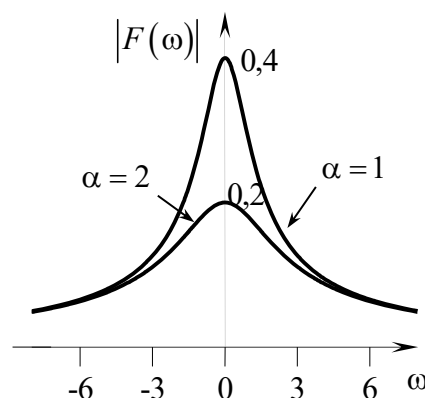


Рисунок 18

На рисунке 18 представлен график этой функции для двух значений параметра α .

Пример 2 – Представить интегралом Фурье в комплексной форме функцию $f(x) = e^{-\alpha x^2}$, где $\alpha > 0, \alpha \in R$, и построить график спектральной характеристики функции.

Решение

На рисунке 19 представлен график исходной функции $f(x)$ для двух значений параметра α . Проверим условие представимости функции интегралом Фурье:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} < \infty \quad (\alpha > 0, \alpha \in R).$$

Это справочный интеграл [1]. Интеграл сходится, Фурье-представление имеет место. Найдём его:

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2 - i\omega x} dx = \otimes$$

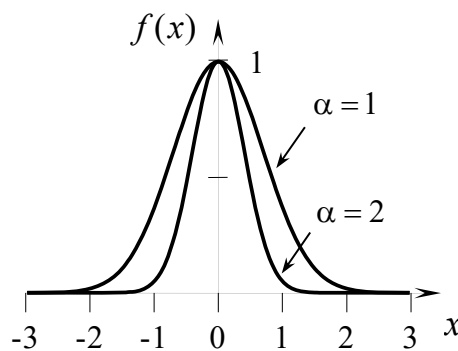


Рисунок 19

Для вычисления интеграла выделим в показателе экспоненты полный квадрат $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$, сделаем замену переменной и воспользуемся справочным интегралом, приведенным выше.

$$\begin{aligned} -\alpha x^2 - i\omega x &= -\alpha \left(x^2 + 2 \frac{i\omega}{2\alpha} x \right) = -\alpha \left(x^2 + 2 \frac{i\omega}{2\alpha} x + \left(\frac{i\omega}{2\alpha} \right)^2 - \left(\frac{i\omega}{2\alpha} \right)^2 \right) = \\ &= -\alpha \left(x^2 + 2 \frac{i\omega}{2\alpha} x + \left(\frac{i\omega}{2\alpha} \right)^2 - \frac{\omega^2}{4\alpha^2} \right) = -\alpha \left(\left(x + \frac{i\omega}{2\alpha} \right)^2 - \frac{\omega^2}{4\alpha^2} \right) = -\alpha \left(x + \frac{i\omega}{2\alpha} \right)^2 - \frac{\omega^2}{4\alpha}. \end{aligned}$$

Продолжаем вычисление интеграла:

$$\begin{aligned} \otimes &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\left(\frac{\omega}{2\alpha}\right)^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha\left(x+\frac{i\omega}{2\alpha}\right)^2} dx = \left| \begin{array}{l} x + \frac{i\omega}{2\alpha} = z \\ dx = dz \end{array} \right| = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\left(\frac{\omega}{2\alpha}\right)^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha z^2} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}}. \end{aligned}$$

Получили $F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}}$. Фурье-образ яв-

ляется действительной четной функцией, её график для двух значений параметра α представлен на рисунке 20, а искомое Фурье представление для исходной функции $f(x) = e^{-\alpha x^2}$ имеет вид:

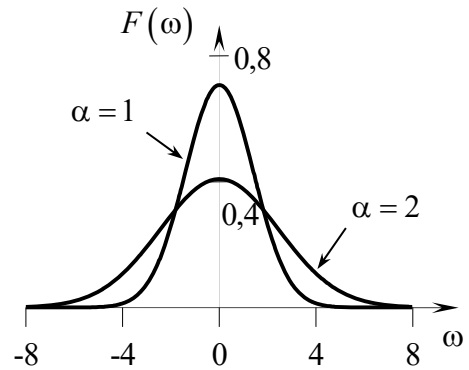


Рисунок 20

$$e^{-\alpha x^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}} e^{i\omega x} d\omega = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\alpha\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha} + i\omega x} d\omega = \frac{1}{\sqrt{\alpha\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}} \cos \omega x d\omega.$$

Из полученного выражения для $F(\omega)$ следует, что исходная функция и ее Фурье-образ описываются одним классом функций. Исходная функция является гауссовой и ее Фурье-образ – гауссова функция. В частности, при $\alpha = \frac{1}{2}$ исходная функция $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ и ее Фурье-образ $F(\omega) = e^{-\frac{\omega^2}{2}}$ совпадают с точностью до обозначения независимой переменной. Для гауссовой функции (колоколообразный вид) введено понятие ширины. За ширину гауссовой функции принимают промежуток значений аргумента, при котором ее высота понижается в $e \approx 2,72$ раз от максимальной. Так, для $f(x) = e^{-\alpha x^2}$ она равна $\Delta x = \frac{2}{\sqrt{\alpha}}$,

а для функции $F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}}$ равна $\Delta \omega = 4\sqrt{\alpha}$. Как видно из приведенных формул и рисунков 19, 20, при изменении значения α одна функция становится уже, а другая шире, при этом их ширины связаны соотношением $\Delta \omega \cdot \Delta x = 8 = \text{const}$, которое называют соотношением неопределенностей. Данный вывод справедлив для любых преобразуемых функций (см., например, рисунки 17, 18).

Самостоятельно рассмотреть предельные случаи $\alpha \rightarrow 0$, $\alpha \rightarrow \infty$ и сделать выводы.

10 Интеграл Фурье в действительной форме

Используя формулы Эйлера для функции $e^{i\omega(x-t)} = \cos\omega(x-t) + i\sin\omega(x-t)$, формулу (26) можно представить в виде

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega(x-t)} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) (\cos\omega(x-t) + i\sin\omega(x-t)) dt.$$

Если учесть, что внешний интеграл по переменной ω от нечетной части подынтегральной функции ($\sin\omega(x-t)$) в симметричных пределах равен нулю, а от четной ($\cos\omega(x-t)$) – удвоенному значению интеграла по половине этого промежутка, то последнюю формулу можно записать в виде

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos\omega(x-t) dt, \quad (29)$$

её называют двойным интегралом Фурье в действительной форме.

Используя формулы тригонометрии $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$, формулу (29) можно представить в виде

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} [A(\omega) \cos\omega x + B(\omega) \sin\omega x] d\omega; \quad (30)$$

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos\omega t dt; \quad (31)$$

$$B(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin\omega t dt. \quad (32)$$

Эти формулы также называют преобразованиями Фурье или представлением функции $f(x)$ интегралом Фурье в действительной форме. Из них видна аналогия между рядом и интегралом Фурье. В обоих случаях $f(x)$ раскладывается на сумму гармонических составляющих. При этом в ряде Фурье суммирование идет по дискретным значениям n , частоты дискретные $\omega_n = \frac{\pi n}{l}$, а в интеграле Фурье интегрирование идет по непрерывной переменной ω , т. е. частоты непрерывно заполняют всю полуось $\omega \in [0, \infty)$.

11 Косинус- и синус-преобразования Фурье

1 Если $f(x)$ – четная, то $B(\omega)=0$, а Фурье-представление функции принимает вид:

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} A(\omega) \cos \omega x d\omega; \quad (33)$$

$$A(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \cos \omega t dt. \quad (34)$$

2 Если $f(x)$ – нечетная, то $A(\omega)=0$, а Фурье-представление функции принимает вид:

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} B(\omega) \sin \omega x d\omega; \quad (35)$$

$$B(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \sin \omega t dt. \quad (36)$$

Формулы (35), (37) называют соответственно прямыми косинус- и синус-преобразованиями Фурье функции $f(x)$, а формулы (34), (36) – обратными косинус- и синус-преобразованиями Фурье.

Замечание 6 – Косинус- и синус-преобразования Фурье можно подвергать и функции, заданные на полуоси $[0, \infty)$, которые не обладают свойством четности и нечетности. Это будет означать, что мы мысленно продолжаем функцию на всю числовую ось четным или нечетным образом (аналогия с тригонометрическими рядами Фурье для функций, заданных на $[0, l]$). При этом Фурье-образы четных функций являются чисто действительными функциями, а нечетных – чисто мнимыми. В связи с этим следует понимать, что в формуле (37) $B(\omega)$ есть $iB(\omega)$. Отметим также, что при нахождении косинус- и синус-преобразований Фурье часто удобно использовать комплексную форму интегралов Фурье (27), (28) (проще находить интегралы), а затем вернуться к действительной. Это продемонстрировано в примере 2 (см. раздел 9).

Пример – Найти прямые и обратные косинус- и синус-преобразования Фурье функции $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < a, \\ 0, & x \geq a, \end{cases} \quad (a > 0, a \in R).$

Решение

Функция задана на полуоси $[0 \leq x < \infty)$. Для разложения в ряд Фурье ее следует доопределить на всю числовую ось $(-\infty < x < \infty)$. При четном продол-

жении (рисунок 21, а) будем иметь косинус-, а при нечетном (рисунок 21, б) – синус-преобразование Фурье (пунктирные линии).

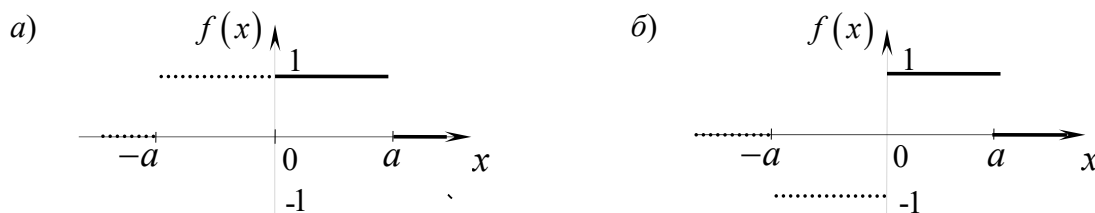


Рисунок 21

Соответствующие интегралы легко находятся в действительной форме. Прямые косинус- и синус-преобразования Фурье имеют вид:

$$A(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \cos \omega t dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a 1 \cdot \cos \omega t dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\sin a\omega}{\omega};$$

$$B(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \sin \omega t dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a 1 \cdot \sin \omega t dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1 - \cos a\omega}{\omega}.$$

Аналогично примерам 5 и 6 строятся графики этих спектральных функций. Обратные косинус- и синус-преобразования Фурье принимают вид:

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} A(\omega) \cos \omega x d\omega = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin a\omega}{\omega} \cos \omega x d\omega = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < a, \\ 0, & x \geq a. \end{cases}$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} B(\omega) \sin \omega x d\omega = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1 - \cos a\omega}{\omega} \sin \omega x d\omega = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < a, \\ 0, & x \geq a. \end{cases}$$

Замечание 7 – Преобразования Фурье позволяют находить некоторые неберущиеся интегралы. Так, например, из предпоследней формулы при $x=0$ имеем $\int_0^{\infty} \frac{\sin a\omega}{\omega} d\omega = \frac{\pi}{2}$. Преобразования Фурье применяют при решении дифференциальных и интегральных уравнений, а также при решении ряда прикладных задач, например, распознавании образов, моделировании оптических фильтров, при коррективке изображений и т. д.

Примеры для самостоятельной работы

1 Представить интегралом Фурье функцию $f(x)$ и построить график спектральной характеристики функции:

а) $f(x) = e^{-\alpha|x|}$, $\alpha > 0$. Ответ: $f(x) = \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos \omega x}{\alpha^2 + \omega^2} d\omega$;

$$\begin{aligned} \text{б) } f(x) &= xe^{-x^2}. & \text{Ответ: } f(x) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \omega e^{-\frac{\omega^2}{4}} \sin \omega x d\omega; \\ \text{в) } f(x) &= \begin{cases} e^{ix}, & |x| \leq \pi, \\ 0, & |x| > \pi. \end{cases} & \text{Ответ: } f(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega \pi}{1 - \omega} e^{i\omega x} d\omega. \end{aligned}$$

2 Найти косинус- и синус-преобразования Фурье функции $f(x)$, соответственно продолжив ее на всю числовую ось четным или нечетным образом:

$$\begin{aligned} \text{а) } f(x) &= e^{-\alpha x}, x \geq 0 \quad (\alpha > 0). & \text{Ответ: } A(\omega) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}, \quad B(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\omega}{\alpha^2 + \omega^2}; \\ \text{б) } f(x) &= \begin{cases} \sin x, & 0 \leq x \leq \pi, \\ 0, & x > \pi. \end{cases} & \text{Ответ: } A(\omega) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1 + \cos \omega \pi}{1 - \omega^2}, \quad B(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\sin \omega \pi}{1 - \omega^2}; \\ \text{в) } f(x) &= \begin{cases} \cos x, & 0 \leq x \leq \pi/2, \\ 0, & x > \pi/2. \end{cases} & \text{Ответ: } & \begin{cases} A(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\cos \omega \pi/2}{1 - \omega^2}, \\ B(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\omega(1 + \sin \omega \pi/2)}{1 - \omega^2}. \end{cases} \end{aligned}$$

3 Найти функцию $g(z)$, если $\int_0^{\infty} g(z) \sin zx dz = f(x)$, где

$$\text{а) } f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \sin x, & 0 \leq x \leq \pi, \\ 0, & x > \pi; \end{cases} \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \cos x, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0, & x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

4 Доказать равенства:

$$\text{а) } \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{a}{a^2 + x^2} \cos \omega x d\omega = e^{-a|x|}, \quad -\infty \leq x \leq \infty;$$

$$\text{б) } \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 \omega}{\omega^2} \cos 2\omega x d\omega = \begin{cases} 1 - x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

12 Преобразование Лапласа. Оригинал и изображение

Оригиналом называется функция $f(t)$ действительного аргумента t , которая удовлетворяет следующим условиям:

$$1) f(t) = 0 \text{ при } t < 0;$$

2) $f(t)$ кусочно-непрерывная при $t \geq 0$, т. е. на любом конечном отрезке $[a; b] \subset [0; +\infty)$ функция непрерывна или имеет конечное число точек разрыва первого рода;

3) $f(t)$ имеет ограниченный рост, т. е. возрастает не быстрее показательной функции: $\exists M > 0, s \geq 0$, что $\forall t \geq 0 \Rightarrow |f(t)| \leq M \cdot e^{st}$.

Минимальное из всех чисел s , для которых справедливо неравенство $|f(t)| \leq M \cdot e^{st}$, называется **показателем роста функции** $f(t)$.

Функция $f(t)$ может быть комплексной функцией действительной переменной, т. е. иметь вид $f(t) = f_1(t) + if_2(t)$. Она будет оригиналом, если функции $f_1(t)$ и $f_2(t)$ – оригиналы, т. е. удовлетворяют условиям 1–3.

Изображением оригинала $f(t)$ называется функция комплексной переменной $p = s + i\sigma$, определяемая интегралом

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt.$$

Операция перехода от оригинала $f(t)$ к изображению $F(p)$ называется **преобразованием Лапласа**, а процесс нахождения оригинала по известному изображению – **операционным исчислением**.

Обозначение $F(p) = L[f(t)]$, $F(p) \overset{\cdot}{=} f(t)$ или $f(t) \overset{\cdot}{=} F(p)$ читается как « $F(p)$ – изображение $f(t)$ », « $f(t)$ – оригинал $F(p)$ ».

Смысл введения изображений заключается в том, что с их помощью можно упростить решение многих задач, в частности, свести решение ДУ к проведению алгебраических операций для нахождения изображения. Зная изображение, можно найти оригинал или по таблице, или методами, изложенными ниже.

Теорема существования изображения. Для всякого оригинала $f(t)$ изображение $F(p)$ определено в полуплоскости $\operatorname{Re} p = s > s_0$, где s_0 – показатель роста $f(t)$, причем функция $F(p)$ является аналитической в этой полуплоскости.

Необходимый признак существования изображения. Если функция $F(p)$ является изображением функции $f(t)$, то $\lim_{p \rightarrow \infty} F(p) = 0$.

Теорема о единственности оригинала. Если две непрерывные функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ имеют одно и то же изображение $F(p)$, то $\varphi(t) \equiv \psi(t)$.

Пример 1 – Найти изображение единичной функции Хевисайда

$$1(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Решение

Это оригинал, т. к.:

- 1) $f(t) = 1(t)$ определена $\forall t \in \mathbb{R}$;
- 2) $f(t) = 1(t)$ непрерывна $\forall t \geq 0$;
- 3) $f(t) = 1(t) \leq Me^{0t} = M, M \geq 1, s_0 = 0$.

$$F(p) = \int_0^{+\infty} 1 \cdot e^{-pt} dt = -\frac{1}{p} e^{-pt} \Big|_0^{+\infty} = -\frac{1}{p} \lim_{A \rightarrow +\infty} e^{-pA} + \frac{1}{p} e^0 = \frac{1}{p} - 0 = \frac{1}{p}, \text{ т. к. при}$$

$$\operatorname{Re} p > 0 \quad \lim_{A \rightarrow +\infty} e^{-pA} = 0.$$

Имеем

$$1(t) \stackrel{\cdot}{=} \frac{1}{p}.$$

Замечание 8 – Очевидно, что умножение функции $\varphi(t)$ на $1(t)$ «гасит» эту функцию для $t < 0$ и оставляет без изменения для $t \geq 0$, т. е.

$$f(t) = \varphi(t) \cdot 1(t) = \begin{cases} \varphi(t), & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Для простоты будем опускать множитель $1(t)$, т. е.

$$e^{\alpha t} = e^{\alpha t} \cdot 1(t) = \begin{cases} e^{\alpha t}, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0 \end{cases} \text{ и т. д.}$$

Для большинства функций изображение находится непосредственным интегрированием.

Пример 2 – Найти изображение функции $f(t) = e^{\alpha t}$.

Решение

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} e^{\alpha t} dt = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A e^{-(p-\alpha)t} dt = -\lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{p-\alpha} e^{-(p-\alpha)t} \Big|_0^A = \frac{1}{p-\alpha},$$

если $\operatorname{Re}(p - \alpha) > 0$, т. е.

$$e^{\alpha t} \stackrel{\cdot}{=} \frac{1}{p-\alpha}.$$

13 Свойства преобразования Лапласа

1 Свойство линейности. Если $f(t) \stackrel{\cdot}{=} F(p)$, $\varphi(t) \stackrel{\cdot}{=} \Phi(p)$, $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$, то $c_1 f(t) + c_2 \varphi(t) \stackrel{\cdot}{=} c_1 F(p) + c_2 \Phi(p)$.

Свойство распространяется на конечное число слагаемых, преобразование Лапласа представляет собой линейный оператор.

2 Теорема подобия. Если $f(t) \stackrel{\cdot}{=} F(p)$, $\lambda > 0$, то $f(\lambda t) \stackrel{\cdot}{=} \frac{1}{\lambda} F\left(\frac{p}{\lambda}\right)$,

т. е. умножение аргумента оригинала на положительное число приводит к делению изображения и его аргумента на это число.

3 Теорема смещения. Если $f(t) \stackrel{\cdot}{=} F(p)$, то $\forall \alpha \in \mathbb{C}$ и $e^{\alpha t} \cdot f(t) \stackrel{\cdot}{=} F(p - \alpha)$, т. е. умножение оригинала на $e^{\alpha t}$ влечет за собой «смещение» переменной p изображения на α .

4 Теорема запаздывания. Если $f(t) \stackrel{\cdot}{=} F(p)$, $\tau > 0$, то $f(t - \tau) \stackrel{\cdot}{=} e^{-p\tau} \cdot F(p)$, т. е. «запаздывание» оригинала на положительную величину τ приводит к умножению изображения оригинала без запаздывания на функцию $e^{-p\tau}$.

Пример 1 – Найти изображение функции $f(t) = \sin(t - 2) \cdot 1(t - 2)$.

Решение

$$\sin(t - 2) \cdot 1(t - 2) = \left[\begin{array}{l} t - 2 \geq 0 \Rightarrow t \geq 2, \\ \tau = 2 > 0 \end{array} \right] \stackrel{\cdot}{=} e^{-2p} \cdot \frac{1}{p^2 + 1}.$$

Пример 2 – Найти изображение функции $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ 1, & 0 \leq t < 3; \\ 0, & t \geq 3. \end{cases}$

Решение

$$f(t) = 1(t) - 1(t - 3) \stackrel{\cdot}{=} \frac{1}{p} - \frac{1}{p} \cdot e^{-3p} = F(p).$$

5 Дифференцирование оригинала. Если $f(t) \stackrel{\cdot}{=} F(p)$ и функции $f'(t), f''(t), \dots, f^{(n)}(t)$ являются оригиналами, то

$$f'(t) \stackrel{\cdot}{=} p \cdot F(p) - f(0);$$

$$f''(t) \stackrel{\cdot}{=} p^2 \cdot F(p) - p \cdot f(0) - f'(0);$$

$$f'''(t) \dot{=} p^3 \cdot F(p) - p^2 \cdot f(0) - p \cdot f'(0) - f''(0);$$

$$f^{(n)}(t) \dot{=} p^n \cdot F(p) - p^{n-1} \cdot f(0) - p^{n-2} \cdot f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0),$$

где $f^{(k)}(0) = \lim_{t \rightarrow +0} f^{(k)}(t)$, $k = \overline{0, n-1}$.

Пример 3 – Найти изображение функции $f(t) = te^t$.

Решение

$$f(t) = te^t \dot{=} F(p);$$

$$f'(t) = e^t + te^t \dot{=} \frac{1}{p-1} + F(p) = pF(p) - f(0);$$

$$f(0) = 0e^0 = 0 \Rightarrow pF(p) - 0 = \frac{1}{p-1} + F(p) \Rightarrow F(p) = \frac{1}{(p-1)^2}.$$

Пример 4 – Найти изображение функции $f(t) = t \cos t$.

Решение

$$f(t) = t \cos t \dot{=} F(p);$$

$$f'(t) = \cos t - t \sin t;$$

$$f''(t) = -\sin t - \sin t - t \cos t \dot{=} \frac{-2}{p^2+1} - F(p) = p^2 F(p) - pf(0) - f'(0);$$

$$f(0) = 0 \cos 0 = 0; f'(0) = 1 - 0 = 1 \Rightarrow$$

$$p^2 F(p) - 1 = \frac{-2}{p^2+1} - F(p) \Rightarrow F(p) = \frac{p^2 - 1}{(p^2 + 1)^2}.$$

6 Дифференцирование изображения. Если $f(t) \dot{=} F(p)$, то $F^{(n)}(p) \dot{=} (-t)^n \cdot f(t)$, т. е. дифференцирование изображения приводит к умножению оригинала на $(-t)$.

Пример 5 – Найти изображение функции $f(t) = t \cos \omega t$.

Решение

$$t \cos \omega t = -(-t) \cos \omega t \dot{=} - \left(\frac{p}{p^2 + \omega^2} \right)' = \frac{p^2 - \omega^2}{(p^2 + \omega^2)^2}.$$

7 Интегрирование оригинала. Если $f(t) \doteq F(p)$, то $\int_0^t f(\tau) d\tau \doteq \frac{F(p)}{p}$,

т. е. интегрирование оригинала на отрезке $[0; t]$ приводит к делению изображения на величину p .

Пример 6 – Найти изображение функции $\int_0^t e^\tau d\tau$.

Решение

$$\int_0^t e^\tau d\tau \doteq \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{p-1} = \frac{1}{p(p-1)}.$$

8 Интегрирование изображения. Если $f(t) \doteq F(p)$ и $\int_p^\infty F(\rho) d\rho$ сходится, то $\int_p^\infty F(\rho) d\rho \doteq \frac{f(t)}{t}$, т. е. интегрирование изображения на $[p; \infty)$ равносильно делению оригинала на t .

Пример 7 – Найти изображение функции $f(t) = \frac{\sin t}{t}$.

Решение

$$\frac{\sin t}{t} \doteq \int_p^{+\infty} \frac{d\rho}{\rho^2 + 1} = \operatorname{arctg} \rho \Big|_p^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} p = \operatorname{arctg} p.$$

Пример 8 – Найти изображение функции $f(t) = \frac{\cos t}{t}$.

Решение

$$\frac{\cos t}{t} \doteq \int_p^{+\infty} \frac{\rho d\rho}{\rho^2 + 1} = \frac{1}{2} \ln(\rho^2 + 1) \Big|_p^{+\infty} = \infty, \text{ т. к. } \frac{\cos t}{t} \text{ не является оригиналом}$$

(при $t = 0$ имеем разрыв второго рода).

14 Таблица оригиналов и их изображений

Для многих функций изображения посчитаны и приведены в таблице:

- | | |
|--|---|
| 1) $1(t) \stackrel{\cdot}{=} \frac{1}{p}$; | 12) $e^{\alpha t} \operatorname{ch} \omega t \stackrel{\cdot}{=} \frac{p - \alpha}{(p - \alpha)^2 - \omega^2}$; |
| 2) $e^{\alpha t} \stackrel{\cdot}{=} \frac{1}{p - \alpha}$; | 13) $t^n \stackrel{\cdot}{=} \frac{n!}{p^{n+1}}, n \in \mathbb{Z}, n \geq 0$; |
| 3) $t \stackrel{\cdot}{=} \frac{1}{p^2}$; | 14) $t^n e^{\alpha t} \stackrel{\cdot}{=} \frac{n!}{(p - \alpha)^{n+1}}, n \in \mathbb{Z}, n \geq 0$; |
| 4) $c \stackrel{\cdot}{=} \frac{c}{p}$; | 15) $t \sin \omega t \stackrel{\cdot}{=} \frac{2p\omega}{(p^2 + \omega^2)^2}$; |
| 5) $\sin \omega t \stackrel{\cdot}{=} \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$; | 16) $t \cos \omega t \stackrel{\cdot}{=} \frac{p^2 - \omega^2}{(p^2 + \omega^2)^2}$; |
| 6) $\cos \omega t \stackrel{\cdot}{=} \frac{p}{p^2 + \omega^2}$; | 17) $t \cdot \operatorname{sh} \omega t \stackrel{\cdot}{=} \frac{2p\omega}{(p^2 - \omega^2)^2}$; |
| 7) $\operatorname{sh} \omega t \stackrel{\cdot}{=} \frac{\omega}{p^2 - \omega^2}$; | 18) $t \cdot \operatorname{ch} \omega t \stackrel{\cdot}{=} \frac{p^2 + \omega^2}{(p^2 - \omega^2)^2}$; |
| 8) $\operatorname{ch} \omega t \stackrel{\cdot}{=} \frac{p}{p^2 - \omega^2}$; | 19) $e^{\alpha t} \cdot t \cdot \sin \omega t \stackrel{\cdot}{=} \frac{2\omega(p - \alpha)}{\left((p - \alpha)^2 + \omega^2\right)^2}$; |
| 9) $e^{\alpha t} \sin \omega t \stackrel{\cdot}{=} \frac{\omega}{(p - \alpha)^2 + \omega^2}$; | 20) $e^{\alpha t} \cdot t \cdot \cos \omega t \stackrel{\cdot}{=} \frac{(p - \alpha)^2 - \omega^2}{\left((p - \alpha)^2 + \omega^2\right)^2}$. |
| 10) $e^{\alpha t} \cos \omega t \stackrel{\cdot}{=} \frac{p - \alpha}{(p - \alpha)^2 + \omega^2}$; | |
| 11) $e^{\alpha t} \operatorname{sh} \omega t \stackrel{\cdot}{=} \frac{\omega}{(p - \alpha)^2 - \omega^2}$; | |

Примеры для самостоятельной работы

1 Найти изображения следующих оригиналов (по определению):

а) $f(t) = e^{-2t}$;

б) $f(t) = t$.

2 Найти изображения следующих оригиналов, используя свойства линейности, подобия, теоремы смещения или запаздывания:

а) $f(t) = e^{-it} - 3 + 5 \cos t$.

Ответ: $\frac{1}{p+i} - \frac{3}{p} + \frac{5p}{p^2+1}$;

$$\text{б) } f(t) = \sin 2t \cdot \cos 5t.$$

$$\text{Ответ: } \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{p^2 + 49} - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{p^2 + 9};$$

$$\text{в) } f(t) = \operatorname{ch} 5t \cdot \sin 3t.$$

$$\text{Ответ: } \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{(p-5)^2 + 9} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{(p+5)^2 + 9};$$

$$\text{г) } f(t) = \cos^4 t - \sin^4 t.$$

$$\text{Ответ: } \frac{p}{p^2 + 4};$$

$$\text{д) } f(t) = e^{-t} \cdot t^3.$$

$$\text{Ответ: } \frac{3!}{(p+1)^4};$$

$$\text{е) } f(t) = e^t \cdot \operatorname{sh} t.$$

$$\text{Ответ: } \frac{1}{(p-1)^2 - 1};$$

$$\text{ж) } f(t) = e^{3t} \cdot \sin^2 t.$$

$$\text{Ответ: } \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{p-3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{p-3}{(p-3)^2 + 4};$$

$$\text{з) } f(t) = e^{-3t} \cdot \cos 3t \cdot \sin t.$$

$$\text{Ответ: } \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{(p+3)^2 + 16} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{(p+3)^2 + 4};$$

$$\text{и) } f(t) = (t-1)^2 \cdot 1(t-1).$$

$$\text{Ответ: } \frac{2e^{-p}}{p^3};$$

$$\text{к) } f(t) = \sin(t-b) \cdot 1(t-b).$$

$$\text{Ответ: } \frac{e^{-bp}}{p^2 + 1};$$

$$\text{л) } f(t) = \cos^2(t-b) \cdot 1(t-b).$$

$$\text{Ответ: } \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{-bp}}{p} + \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{-bp} \cdot p}{p^2 + 4};$$

$$\text{м) } f(t) = e^{t-2} \cdot 1(t-1).$$

$$\text{Ответ: } \frac{e^{-p-1}}{p-1};$$

$$\text{н) } f(t) = e^{t-2} \cdot \sin(t-2) \cdot 1(t-1).$$

$$\text{Ответ: } \frac{e^{-p-1}(\cos 1 - p \sin 1 + \sin 1)}{(p-1)^2 + 1}.$$

3 Используя свойство дифференцирования изображения, найти изображения следующих оригиналов:

$$\text{а) } f(t) = t \cdot \cos \beta t.$$

$$\text{Ответ: } \frac{p^2 - \beta^2}{(p^2 + \beta^2)^2};$$

$$\text{б) } f(t) = t^2 \cdot \operatorname{sh} 3t.$$

$$\text{Ответ: } \frac{18p^2 + 54}{(p^2 - 9)^3};$$

$$\text{в) } f(t) = 2t - 3t^4.$$

$$\text{Ответ: } \frac{2}{p^2} - \frac{72}{p^5};$$

г) $f(t) = t^2 \cdot \cos 3t$. Ответ: $\frac{2p^3 - 54p}{(p^2 + 9)^3}$;

д) $f(t) = (t + 1) \cdot \sin 2t$. Ответ: $\frac{2p^2 + 4p + 8}{(p^2 + 4)^2}$;

е) $f(t) = t(e^t + \operatorname{ch} t)$. Ответ: $\frac{2p^2 + 2p + 2}{(p^2 - 1)^2}$.

4 Используя теорему о дифференцировании оригинала, найти изображения следующих оригиналов:

а) $f(t) = \sin^2 t$. Ответ: $\frac{2}{p(p^2 + 4)}$;

б) $f(t) = \sin^3 t$. Ответ: $\frac{6}{(p^2 + 9)(p^2 + 1)}$;

в) $f(t) = \cos^4 t$. Ответ: $\frac{p^4 + 16p^2 + 24}{p(p^2 + 4)(p^2 + 16)}$.

5 Используя свойство интегрирования оригиналов, найти изображения следующих оригиналов:

а) $f(t) = \int_0^t \sin \tau \cdot d\tau$. Ответ: $\frac{1}{p(p^2 + 1)}$;

б) $f(t) = \int_0^t (\tau + 1) \cos \omega \tau \cdot d\tau$. Ответ: $\frac{p^3 + p^2 + p\omega - \omega^2}{p(p^2 + \omega^2)^2}$;

в) $f(t) = \int_0^t \cos^2 \omega \tau \cdot d\tau$. Ответ: $\frac{p^2 + 2\omega^2}{p^2(p^2 + 4\omega^2)}$;

г) $f(t) = \int_0^t \tau^2 \cdot e^{-\tau} \cdot d\tau$. Ответ: $\frac{2}{p(p + 1)^3}$.

6 Используя свойство интегрирования изображений, найти изображения следующих оригиналов:

а) $f(t) = \frac{e^t - 1}{t}$. Ответ: $\ln \left| \frac{p}{p - 1} \right|$;

б) $f(t) = \frac{\sin^2 t}{t}$. Ответ: $\frac{1}{4} \ln \frac{p^2 + 4}{p^2}$;

$$\text{в) } f(t) = \frac{\cos t - \cos 2t}{t}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{1}{2} \ln \frac{p^2 + 4}{p^2 + 1};$$

$$\text{г) } f(t) = \frac{e^t - 1 - t}{t}.$$

$$\text{Ответ: } \ln \left| \frac{p}{p-1} \right| - \frac{1}{p};$$

$$\text{д) } f(t) = \frac{2 \sin^2 t}{t} \cdot e^{-3t}.$$

$$\text{Ответ: } \ln \frac{\sqrt{p^2 + 6p + 13}}{p + 3}.$$

15 Свертка оригиналов. Изображение свертки. Восстановление оригиналов по их изображениям

Сверткой оригиналов $f(t)$ и $\varphi(t)$ называют функцию, обозначаемую $f(t) * \varphi(t)$ и определяемую равенством

$$f(t) * \varphi(t) = \int_0^t f(\tau) \cdot \varphi(t - \tau) d\tau.$$

Свертка обладает свойством $f(t) * \varphi(t) = \varphi(t) * f(t)$.

Теорема Бореля (теорема умножения изображений). Если $f(t) \stackrel{\cdot}{=} F(p)$ и $\varphi(t) \stackrel{\cdot}{=} \Phi(p)$, то $F(p) \cdot \Phi(p)$ – изображение свертки $f(t) * \varphi(t)$, т. е.

$$f(t) * \varphi(t) \stackrel{\cdot}{=} F(p) \cdot \Phi(p) \stackrel{\cdot}{=} \int_0^t f(\tau) \cdot \varphi(t - \tau) d\tau.$$

Следствие (формула Дюамеля). Если $f(t) \stackrel{\cdot}{=} F(p)$, $\varphi(t) \stackrel{\cdot}{=} \Phi(p)$ и $\varphi'(t)$ – оригинал, то

$$p \cdot F(p) \cdot \Phi(p) \stackrel{\cdot}{=} f(0) \cdot \varphi(t) + \int_0^t f'(\tau) \cdot \varphi(t - \tau) d\tau,$$

где $f(0) = \lim_{t \rightarrow +0} f(t)$.

Пример 1 – Найти свертку оригиналов $f(t) = 1 - 2t$, $\varphi(t) = e^{2t}$. Указать изображение полученной свертки.

Решение

$$\begin{aligned} (1 - 2t) * e^{2t} &= \int_0^t (1 - 2\tau) e^{2(t-\tau)} d\tau = \left[\begin{array}{l} u = 1 - 2\tau, du = -2d\tau; \\ dv = e^{2(t-\tau)} d\tau, v = -\frac{1}{2} e^{2(t-\tau)} \end{array} \right] = \\ &= (1 - 2\tau) \left(-\frac{1}{2} e^{2(t-\tau)} \right) \Big|_0^t - \frac{1}{2} \cdot 2 \int_0^t e^{2(t-\tau)} d\tau = (1 - 2t) \left(-\frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} e^{2t} + \frac{1}{2} e^{2(t-\tau)} \Big|_0^t = t. \end{aligned}$$

Найдем изображение свертки: $t \cdot \frac{1}{p^2}$.

Изображение свертки также можно было найти по теореме Бореля:

$$f(t) = 1 - 2t \cdot \frac{1}{p} - \frac{2}{p^2} = \frac{p-2}{p^2}, \quad \varphi(t) = e^{2t} \cdot \frac{1}{p-2} \Rightarrow$$

$$(1-2t) * e^{2t} \cdot \frac{1}{p^2} = \frac{p-2}{p^2} \frac{1}{p-2} = \frac{1}{p^2}.$$

Пример 2 – Найти оригинал изображения $\frac{p^3}{(p^2+1)(p^2+4)}$.

Решение

Используя теорему Бореля, получим

$$\begin{aligned} \frac{p^3}{(p^2+1)(p^2+4)} &= \frac{p}{p^2+1} \cdot \frac{p^2+4-4}{p^2+4} = \frac{p}{p^2+1} \cdot \left(1 - \frac{4}{p^2+4}\right) = \\ &= \frac{p}{p^2+1} - 2 \cdot \frac{p}{p^2+1} \cdot \frac{2}{p^2+4} = \left[\begin{array}{l} \frac{p}{p^2+1} \cdot \cos t; \\ \frac{2}{p^2+4} \cdot \sin 2t \end{array} \right] \cdot \cos t - 2 \cdot \cos t * \sin 2t = \\ &= \cos t - 2 \int_0^t \cos(t-\tau) \cdot \sin 2\tau d\tau = \cos t - \int_0^t (\sin(t+\tau) + \sin(3\tau-t)) d\tau = \\ &= \cos t + \cos(t+\tau) \Big|_0^t + \frac{1}{3} \cos(3\tau-t) \Big|_0^t = \cos t + \cos 2t - \cos t + \frac{1}{3} \cos 2t - \frac{1}{3} \cos t = \\ &= \frac{4}{3} \cos 2t - \frac{1}{3} \cos t. \end{aligned}$$

Пример 3 – Найти оригинал изображения $\frac{2p^2}{(p^2+1)^2}$.

Решение

Используя формулу Дюамеля, получим

$$\begin{aligned} \frac{2p^2}{(p^2+1)^2} &= p \cdot \frac{2}{p^2+1} \cdot \frac{p}{p^2+1} = \left[\begin{array}{l} \frac{2}{p^2+1} \cdot \dot{=} 2 \sin t; \\ \frac{p}{p^2+1} \cdot \dot{=} \cos t \end{array} \right] \cdot \dot{=} \\ &\dot{=} 2 \sin 0 \cdot \cos t + \int_0^t 2 \cos \tau \cdot \cos(t-\tau) d\tau = \int_0^t (\cos t + \cos(2\tau-t)) d\tau = \\ &= t \cos t + \frac{1}{2} \sin(2\tau-t) \Big|_0^t = t \cos t + \frac{1}{2} \sin t + \frac{1}{2} \sin t = t \cos t + \sin t. \end{aligned}$$

Теорема разложения. Если $F(p)$ – изображение и p_1, p_2, \dots, p_n – её изолированные особые точки, то функция-оригинал имеет вид:

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{p=p_k} (F(p)e^{pt}),$$

где сумма вычетов берется по всем изолированным особым точкам функции $F(p)$.

Следствие 1. Если $F(p) = \frac{Q(p)}{R(p)}$ – правильная рациональная дробь и p_1, p_2, \dots, p_n – её простые полюсы, то функция $f(t) = \sum_{k=1}^n \frac{Q(p_k)}{R'(p_k)} \cdot e^{p_k t}$ является оригиналом, имеющим изображение $F(p)$. ($\operatorname{Res}_{p=p_k} \frac{Q(p)}{R(p)} e^{pt} = \frac{Q(p_k)}{R'(p_k)} e^{p_k t}$).

Следствие 2. Если $F(p) = \frac{Q(p)}{R(p)}$ – правильная рациональная дробь и p_1, p_2, \dots, p_n – её полюсы кратности r_1, r_2, \dots, r_n , то функция

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(r_k-1)!} \lim_{p \rightarrow p_k} \left(\frac{Q(p)}{R(p)} \cdot e^{pt} \cdot (p-p_k)^{r_k} \right)^{(r_k-1)}$$

является оригиналом, имеющим изображение $F(p)$.

Пример 4 – Найти оригинал изображения $\frac{2p^2-3p}{p^4-1}$.

Решение

Разложим дробь на сумму простейших дробей:

$$\frac{2p^2 - 3p}{p^4 - 1} = \frac{2p^2 - 3p}{(p^2 + 1)(p - 1)(p + 1)} = \frac{3p}{2(p^2 + 1)} + \frac{1}{p^2 + 1} - \frac{1}{4(p - 1)} - \frac{5}{4(p + 1)} \stackrel{\cdot}{=} \frac{3}{2} \cos t + \sin t - \frac{1}{4} e^t - \frac{5}{4} e^{-t}.$$

Задачу можно решить иначе:

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{k=1}^4 \frac{2p_k^2 - 3p_k}{4p_k^3} e^{p_k t} = [p_{1,2} = \pm 1, p_{3,4} = \pm i] = \frac{2-3}{4} e^t + \frac{2+3}{-4} e^{-t} + \frac{-2-3i}{-4i} e^{it} + \\ &+ \frac{-2+3i}{4i} e^{-it} = -\frac{1}{4} e^t - \frac{5}{4} e^{-t} + \frac{1}{4} ((3-2i)(\cos t + i \sin t) + (3+2i)(\cos t - i \sin t)) = \\ &= \frac{3}{2} \cos t + \sin t - \frac{1}{4} e^t - \frac{5}{4} e^{-t}. \end{aligned}$$

Пример 5 – Найти оригинал изображения $\frac{p}{p^4 - 1}$.

Решение

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{k=1}^4 \frac{p_k}{4p_k^3} e^{p_k t} = [p_{1,2} = \pm 1, p_{3,4} = \pm i] = \\ &= \frac{1}{4} e^t + \frac{-1}{-4} e^{-t} + \frac{i}{-4i} e^{it} + \frac{-i}{4i} e^{-it} = \frac{e^t - e^{-t}}{4} - \frac{e^{it} + e^{-it}}{4} = \frac{1}{2} \operatorname{ch} t - \frac{1}{2} \cos t. \end{aligned}$$

Пример 6 – Найти оригинал изображения $\frac{p^2 + 2}{p^4 + 4}$.

Решение

Найдем изолированные особые точки:

$$p = \sqrt[4]{-4} \Rightarrow p_0 = 1 + i, p_1 = -1 + i, p_2 = -1 - i, p_3 = 1 - i \text{ – простые полюсы.}$$

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{k=0}^3 \frac{p_k^2 + 2}{(p_k^4 + 4)'} \cdot e^{p_k t} = \sum_{k=0}^3 \frac{p_k^2 + 2}{4p_k^3} \cdot e^{p_k t} = \frac{(1+i)^2 + 2}{4(1+i)^3} \cdot e^{(1+i)t} + \frac{(-1+i)^2 + 2}{4(-1+i)^3} \cdot e^{(-1+i)t} + \\ &+ \frac{(-1-i)^2 + 2}{4(-1-i)^3} \cdot e^{(-1-i)t} + \frac{(1-i)^2 + 2}{4(1-i)^3} \cdot e^{(1-i)t} = \operatorname{ch} t \cdot \sin t. \end{aligned}$$

Примеры для самостоятельной работы

1 Найти свертку оригиналов и указать изображение полученной свертки:

а) $\cos 2t * \sin t$. Ответ: $\frac{1}{3} \cos t - \frac{1}{3} \cos 2t; \frac{p}{(p^2 + 4)(p^2 + 1)}$;

б) $t * \cos t$. Ответ: $1 - \cos t; \frac{1}{p(p^2 + 1)}$.

2 Найти оригиналы по их изображениям:

а) $F(p) = \frac{1}{p^2 - 4} + \frac{3p - 2}{(p - 1)^2 + 3}$. Ответ: $\frac{1}{2} \operatorname{sh} 2t + 3e^t \cos \sqrt{3}t + \frac{1}{\sqrt{3}} e^t \sin \sqrt{3}t$;

б) $F(p) = \frac{p - 3}{2p^2 - 6p - 1}$. Ответ: $\frac{1}{2} e^{\frac{3}{2}t} \operatorname{ch} \frac{\sqrt{11}}{2}t - \frac{3}{2\sqrt{11}} e^{\frac{3}{2}t} \operatorname{sh} \frac{\sqrt{11}}{2}t$;

в) $F(p) = \frac{2e^{-p}}{p^3}$. Ответ: $(t - 1)^2 \cdot 1(t - 1)$;

г) $F(p) = \frac{e^{-2p}}{p - 1}$. Ответ: $e^{t-2} \cdot 1(t - 2)$;

д) $F(p) = \frac{1}{p^2 + 4p + 3}$. Ответ: $\frac{1}{2}(e^t - e^{-3t})$;

е) $F(p) = \frac{p}{(p + 1)^2}$. Ответ: $(1 - t)e^{-t}$;

ж) $F(p) = \frac{2p + 3}{p^3 + 4p^2 + 5p}$. Ответ: $\frac{3}{5} - \frac{1}{5} e^{-2t} (3 \cos t - 4 \sin t)$;

з) $F(p) = \frac{e^{-3p}}{(p + 1)^2}$. Ответ: $(t - 3)e^{-(t-3)} \cdot 1(t - 3)$;

и) $F(p) = \frac{e^{-p}}{p(p - 1)}$. Ответ: $e^{t-1} \cdot 1(t - 1) - 1(t - 1)$;

к) $F(p) = \frac{p}{(p^2 + 1)(p^2 + 4)}$. Ответ: $\frac{1}{3} \cos t - \frac{1}{3} \cos 2t$;

л) $F(p) = \frac{2}{p(p - 1)}$. Ответ: $2e^t - 2$;

м) $F(p) = \frac{1}{(p + 3)(p^2 + 4)}$. Ответ: $\frac{1}{13} e^{-3t} - \frac{1}{13} \cos 2t + \frac{3}{26} \sin 2t$;

н) $F(p) = \frac{p^2}{(p^2 + 1)(p^2 + 2)}$. Ответ: $\sqrt{2} \sin \sqrt{2}t - \sin t$;

о) $F(p) = \frac{p}{(p - 1)(p^2 + 1)}$. Ответ: $\frac{1}{2}(\sin t - \cos t + e^t)$.

16 Применение преобразования Лапласа к решению линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и их систем

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами

$$a_0 x'' + a_1 x' + a_2 x = f(t),$$

где $a_0, a_1, a_2 - \text{const}$, $a_0 \neq 0$;

$f(t)$ – функция-оригинал.

$x_0 = x(0)$, $x_1 = x'(0)$ – начальные условия.

Пусть $x(t) \stackrel{\cdot}{=} X(p)$, $f(t) \stackrel{\cdot}{=} F(p)$. Тогда, применяя к обеим частям уравнения преобразование Лапласа и используя теоремы о дифференцировании оригинала и свойство линейности преобразования Лапласа, получаем

$$\begin{aligned} x(t) &\stackrel{\cdot}{=} X(p); \\ x'(t) &\stackrel{\cdot}{=} pX(p) - x(0) = pX(p) - x_0; \\ x''(t) &\stackrel{\cdot}{=} p^2 X(p) - px(0) - x'(0) = p^2 X(p) - px_0 - x_1; \\ f(t) &\stackrel{\cdot}{=} F(p). \end{aligned}$$

Сделав соответствующие замены в дифференциальном уравнении $a_0 x'' + a_1 x' + a_2 x = f(t)$, получаем операторное уравнение

$$\begin{aligned} a_0 (p^2 X(p) - px_0 - x_1) + a_1 (pX(p) - x_0) + a_2 X(p) &= F(p); \\ (a_0 p^2 + a_1 p + a_2) X(p) - (a_0 px_0 + a_0 x_1 + a_1 x_0) &= F(p). \end{aligned}$$

Выражаем $X(p) = \frac{F(p) + a_0 px_0 + a_0 x_1 + a_1 x_0}{a_0 p^2 + a_1 p + a_2}$ – операторное решение.

Находя по $X(p)$ оригинал $x(t)$, мы тем самым найдем функцию $x(t)$ – решение задачи Коши исходного уравнения при заданных начальных условиях.

Замечание 9 – Решение задачи Коши для ДУ с постоянными коэффициентами выше второго порядка получается аналогично.

Замечание 10 – Требование, чтобы начальные условия были заданы в точке $t = 0$, несущественно, т. к. можно ввести линейную замену независимой переменной t :

$$t = \tau + t_0 \Rightarrow \tau_0 = 0.$$

Замечание 11 – Решение систем ЛДУ с постоянными коэффициентами производится по той же схеме, что и решение одного ЛДУ.

Пример 1 – Решить операторным методом уравнение при заданных начальных условиях $x'' + x = 2 \cos t$, $x(0) = 0, x'(0) = -1$.

Решение

$$x(t) \stackrel{.}{=} X(p);$$

$$x'(t) \stackrel{.}{=} pX(p) - x(0) = pX(p);$$

$$x''(t) \stackrel{.}{=} p^2X(p) - px(0) - x'(0) = p^2X(p) + 1;$$

$$\cos t \stackrel{.}{=} \frac{p}{p^2 + 1} \Rightarrow p^2X(p) + 1 + X(p) = \frac{2p}{p^2 + 1} \Rightarrow X(p) = \frac{2p}{(p^2 + 1)^2} - \frac{1}{p^2 + 1}.$$

$$\frac{2p}{(p^2 + 1)^2} \stackrel{.}{=} t \sin t; \quad \frac{1}{p^2 + 1} \stackrel{.}{=} \sin t \Rightarrow x(t) = t \sin t - \sin t.$$

Пример 2 – Решить операторным методом уравнение при заданных начальных условиях $x'' + x' = t$, $x(1) = 1, x'(1) = 0$.

Решение

Пусть $t = \tau + 1 \Rightarrow \tau_0 = 0$, тогда из $x(t) = \tilde{x}(\tau)$, $x'(t) = \tilde{x}'(\tau)$, $x''(t) = \tilde{x}''(\tau) \Rightarrow \tilde{x}'' + \tilde{x}' = \tau + 1$.

$$\tilde{x} \stackrel{.}{=} X(p), \quad \tilde{x}' \stackrel{.}{=} pX(p) - 1, \quad \tilde{x}'' \stackrel{.}{=} p^2X(p) - p.$$

$$\begin{aligned} \tau + 1 \stackrel{.}{=} \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p} \Rightarrow p^2X(p) - p + pX(p) - 1 &= \frac{1+p}{p^2} \Rightarrow X(p) = \frac{\frac{1+p}{p^2} + p + 1}{p^2 + p} = \\ &= \frac{p+1}{p^3(p+1)} + \frac{p+1}{p(p+1)} = \frac{1}{p^3} + \frac{1}{p}. \end{aligned}$$

$$\frac{2!}{2p^3} \stackrel{.}{=} \frac{\tau^2}{2}; \quad \frac{1}{p} \stackrel{.}{=} 1 \Rightarrow \tilde{x}(\tau) = 1 + \frac{\tau^2}{2} \Rightarrow x(t) = 1 + \frac{(t-1)^2}{2}.$$

Пример 3 – Решить операторным методом систему уравнений при заданных начальных условиях:

$$\begin{cases} x' = 2x - y + z, \\ y' = x + z, \\ z' = -3x + y - 2z, \end{cases} \quad x(0) = 1, y(0) = 1, z(0) = 0.$$

Решение

Перейдем к операторной системе:

$$x \dot{=} X(p), y \dot{=} Y(p), z \dot{=} Z(p); x' \dot{=} pX - 1, y' \dot{=} pY - 1, z' \dot{=} pZ \Rightarrow$$

$$\begin{cases} pX - 1 = 2X - Y + Z, \\ pY - 1 = X + Z, \\ pZ = -3X + Y - 2Z; \end{cases} \begin{cases} (p-2)X + Y - Z = 1, \\ X - pY + Z = -1, \\ 3X - Y + (p+2)Z = 0; \end{cases} \quad \text{— линейная система относи-}$$

тельно X, Y, Z .

Имеем

$$\begin{cases} X = Y = \frac{p+2}{p(p+1)}, \\ Z = -\frac{2}{p(p+1)}. \end{cases}$$

$$X = Y = \frac{p+2}{p(p+1)} = \frac{2}{p} - \frac{1}{p+1} \dot{=} 2 - e^{-t} = x = y;$$

$$Z = -\frac{2}{p(p+1)} = -\frac{2}{p} + \frac{2}{p+1} \dot{=} -2 + 2e^{-t} = z.$$

Примеры для самостоятельной работы

1 Решить следующие дифференциальные уравнения при заданных начальных условиях:

а) $x' + x = e^{-t}$,

$x(0) = 1$.

Ответ: $x(t) = e^{-t}(t+1)$;

б) $x' + 2x = \sin t$,

$x(0) = 0$.

Ответ: $x(t) = \frac{1}{5}(e^{-2t} - \cos t + 2 \sin t)$;

в) $x'' + 3x' = e^t$,

$x(0) = 0, x'(0) = -1$.

Ответ: $x(t) = \frac{1}{4}e^t + \frac{5}{12}e^{-3t} - \frac{2}{3}$;

г) $x'' - 9x = 2 - t$,

$x(0) = 0, x'(0) = 1$.

Ответ: $x(t) = \frac{7}{27}e^{3t} - \frac{1}{27}e^{-3t} - \frac{2}{9} + \frac{t}{9}$;

д) $x'' + 4x = 2 \cos 2t$,

$$x(0) = 0, x'(0) = 4.$$

$$\text{ОТВЕТ: } x(t) = \left(2 + \frac{t}{2}\right) \sin 2t;$$

$$\text{е) } x'' + x = \cos t \cdot \cos 2t,$$

$$x(0) = 0, x'(0) = 0.$$

$$\text{ОТВЕТ: } x(t) = \frac{1}{16}(4t \sin t + \cos t - \cos 3t);$$

$$\text{ж) } x''' + x' = 1,$$

$$x(0) = x'(0) = x''(0) = 0.$$

$$\text{ОТВЕТ: } x(t) = t - \sin t;$$

$$\text{з) } x''' + x' = t,$$

$$x(0) = 0, x'(0) = -1, x''(0) = 0.$$

$$\text{ОТВЕТ: } x(t) = \frac{t^2}{2} - 1 + \cos t - \sin t;$$

$$\text{и) } x^{IV} + 2x'' + x = \cos t,$$

$$x(0) = x'(0) = x''(0) = x'''(0) = 0.$$

$$\text{ОТВЕТ: } \frac{1}{8}t(\sin t - t \cos t).$$

2 Решить следующие системы дифференциальных уравнений при заданных начальных условиях:

$$\text{а) } \begin{cases} x' + y = 0, \\ y' + x = 0; \end{cases}$$

$$x(0) = 1, y(0) = -1.$$

$$\text{ОТВЕТ: } \begin{cases} x(t) = e^t, \\ y(t) = -e^t; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} x' + x = y + e^t, \\ y' + y = x + e^t; \end{cases}$$

$$x(0) = y(0) = 1.$$

$$\text{ОТВЕТ: } \begin{cases} x(t) = e^t, \\ y(t) = e^t; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} x' - y' - 2x + 2y = 1 - 2t, \\ x'' + 2y' + x = 0; \end{cases}$$

$$x(0) = x'(0) = y(0) = 0.$$

$$\text{ОТВЕТ: } \begin{cases} x(t) = 2 - 2e^{-t} - 2te^{-t}, \\ y(t) = 2 - t - 2e^{-t} - 2te^{-t}; \end{cases}$$

$$\text{г) } \begin{cases} x' = -y - z, \\ y' = -x - z, \\ z' = -x - y; \end{cases}$$

$$x(0) = -1, y(0) = 0, z(0) = 1.$$

$$\text{ОТВЕТ: } \begin{cases} x(t) = -e^t, \\ y(t) = 0, \\ z(t) = e^t. \end{cases}$$

Список литературы

1 **Кудрявцев, Л. Д.** Краткий курс математического анализа. Т. 1. Дифференциальное и интегральное исчисления функций одной переменной. Ряды: учебник / Л. Д. Кудрявцев. – 4-е изд. – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2015. – 444 с.

2 **Антипова, И. А.** Интегральные преобразования: учебное пособие / И. А. Антипова, Е. Н. Михалкин, А. К. Цих. – Красноярск: Сиб. федер. ун-т, 2018. – 58 с.

3 **Литвин, Д. Б.** Ряды: учебное пособие / Д. Б. Литвин. – Ставрополь: Сервисшкола, 2017. – 88 с.

4 **Фихтенгольц, Г. М.** Курс дифференциального и интегрального исчислений: в 3 т. / Г. М. Фихтенгольц. – 8-е изд. – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – Т. 3. – 728 с.

5 **Пантелеев, А. В.** Теория функций комплексного переменного и операционное исчисление в примерах и задачах / А. В. Пантелеев, А. С. Якимова. – Москва: Высшая школа, 2007. – 448 с.