МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Транспортные и технологические машины»

ОСНОВЫ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Методические рекомендации к лабораторным работам для студентов направления подготовки 23.03.02 «Наземные транспортно-технологические комплексы» очной формы обучения

Могилев 2020

УДК 539.3
ББК 30.121
О75

Рекомендовано к изданию
учебно-методическим отделом
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Транспортные и технологические машины» «31» августа 2020 г., протокол № 1

Составитель ст. преподаватель Ю. С. Романович

Рецензент канд. техн. наук, доц. И. Д. Камчицкая

Методические рекомендации разработаны в соответствии с учебной программой дисциплины «Основы теории упругости» для студентов направления подготовки 23.03.02 «Наземные транспортно-технологические комплексы» очной формы обучения и предназначены для использования при выполнении лабораторных работ.

Учебно-методическое издание

ОСНОВЫ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Ответственный за выпуск И. В. Лесковец

Корректор Т. А. Рыжикова

Компьютерная верстка Н. П. Полевничая

Подписано в печать . Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Печать трафаретная. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 56 экз. Заказ №

Издатель и полиграфическое исполнение:
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования
«Белорусско-Российский университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/156 от 07.03.2019.
Пр-т Мира, 43, 212022, Могилев.

© Белорусско-Российский
университет, 2020

Содержание

Введение 4
1 Лабораторная работа № 1. Основные настройки SolidWorks Simulation 5
2 Лабораторная работа № 2. Исследование напряженно-деформированного состояния балки при растяжении 8
3 Лабораторная работа № 3. Закон Гука 10
4 Лабораторная работа № 4. Эффект Пуассона. Связь деформаций и напряжений 11
5 Лабораторная работа № 5. Исследование напряженно-деформированного состояния балки при растяжении с изгибом 14
6 Лабораторная работа № 6. Расчет напряженно-деформированного состояния в точке 17
7 Лабораторная работа № 7. Перемещения в балке при растяжении, растяжении с изгибом 22
8 Лабораторная работа № 8. Относительные деформации в балке. Связь перемещений и деформаций 23
9 Лабораторная работа № 9. Принцип Сен-Венана 25
10 Лабораторная работа № 10. Концентрация напряжений 27
11 Лабораторная работа № 11. Кручение круглого стержня. НДС в цилиндрической системе координат 29
12 Лабораторная работа № 12. Чистый изгиб 35
13 Лабораторная работа № 13. Энергия и работа деформации 41
14 Лабораторная работа № 14. Исследование плоского напряженного состояния 42
15 Лабораторная работа № 15. Исследование плоского деформированного состояния 43
16 Лабораторная работа № 16. Решение осесимметричных задач 46
Список литературы 48

Введение

Целью учебной дисциплины «Основы теории упругости» является приобретение обучающимися знаний в области формирования напряженного состояния твердого тела под действием внешних нагрузок, а также навыков решения задач механики деформируемого твердого тела с помощью аналитических и численных методов.

Материал дисциплины изучается в лекционном курсе, закрепляется при выполнении лабораторных работ.

По результатам выполнения лабораторной работы обучающийся формирует отчет, который содержит цель работы, расчетные схемы, теоретические выкладки, полученные результаты и выводы. Также отчет может быть выполнен в электронном виде и содержать файлы моделей с результатами расчетов, таблицы и т. д.

1 Лабораторная работа № 1. Основные настройки SolidWorks Simulation

Цель работы: изучить методику решения задач методом конечных элементов; получить навыки пользовательской настройки программного комплекса SolidWorks Simulation.

1.1 Общие сведения

В общем случае методика выполнения анализа конструкций методом конечных элементов с использованием любого программного обеспечения включает следующие этапы:

– построение геометрической модели объекта исследования с помощью инструментов SolidWorks либо импортирование готовой геометрической модели, созданной сторонними инструментами;

– создание нового исследования определенного типа;

– выбор моделей материалов и задание их свойств;

– определение характера взаимодействия компонентов (деталей сборки, тел детали) и задание контактов;

– задание граничных условий, которые определяют характер взаимодействия модели с окружающей средой;

– задание внешних нагрузок, действующих на модель со стороны окружающей среды;

– построение сетки конечных элементов и анализ ее качества;

– выполнение расчета;

– анализ результатов расчета, построение требуемых эпюр и графиков.

Большинство действий, необходимых для постановки и решении задачи анализа, выполняются с помощью пунктов контекстного меню дерева исследования (рисунок 1.1) или с помощью соответствующей панели инструментов Simulation (рисунок 1.2).

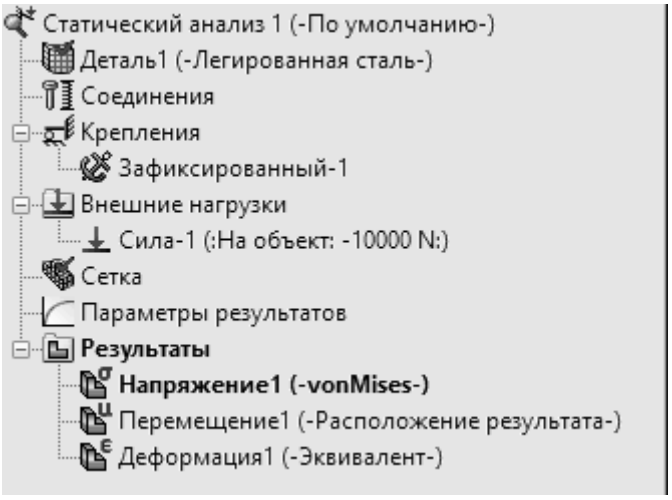

Рисунок 1.1 – Внешний вид дерева исследования SolidWorks Simulation

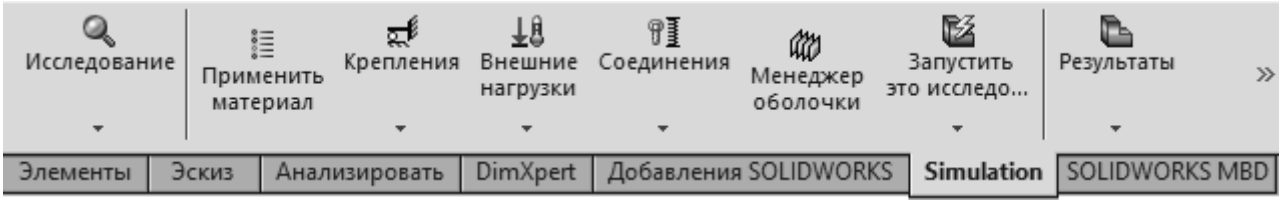

Рисунок 1.2 – Панель инструментов SolidWorks Simulation

И дерево исследования, и панель инструментов становятся доступными только после создания нового исследования Simulation.

Настройки пользователя можно изменить с помощью пункта меню *Simulation – Настройки*. В появившемся диалоговом окне (рисунок 1.3) пользователь получает доступ к настройкам исследований. На второй вкладке «Настройки по умолчанию» (рисунок 1.4) собраны настройки единиц измерения, формат отображения граничных условий, параметры расчетной сетки, стиль отображения результатов, содержание отчета и др.

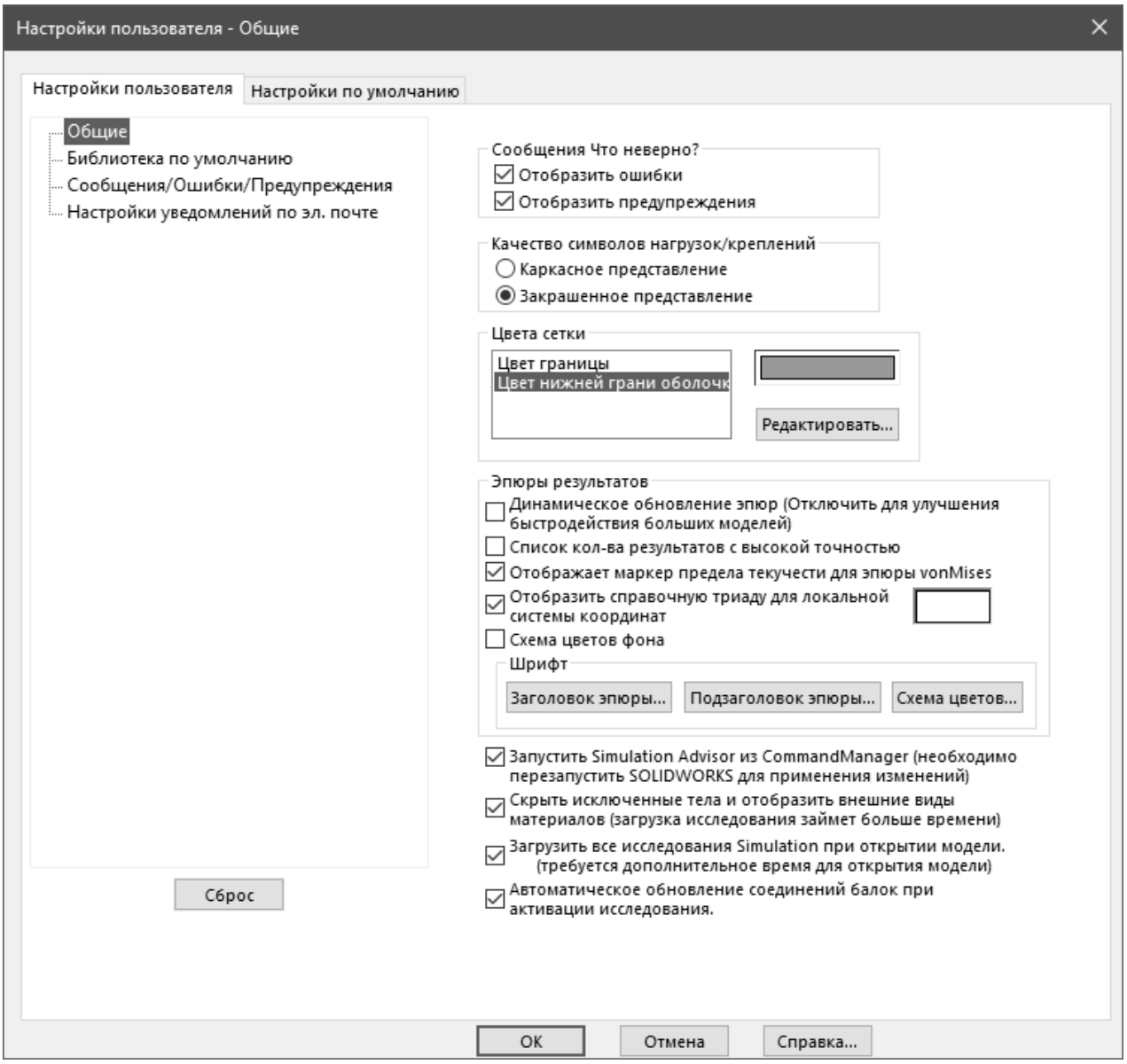

Рисунок 1.3 – Диалоговое окно настроек пользователя SolidWorks Simulation

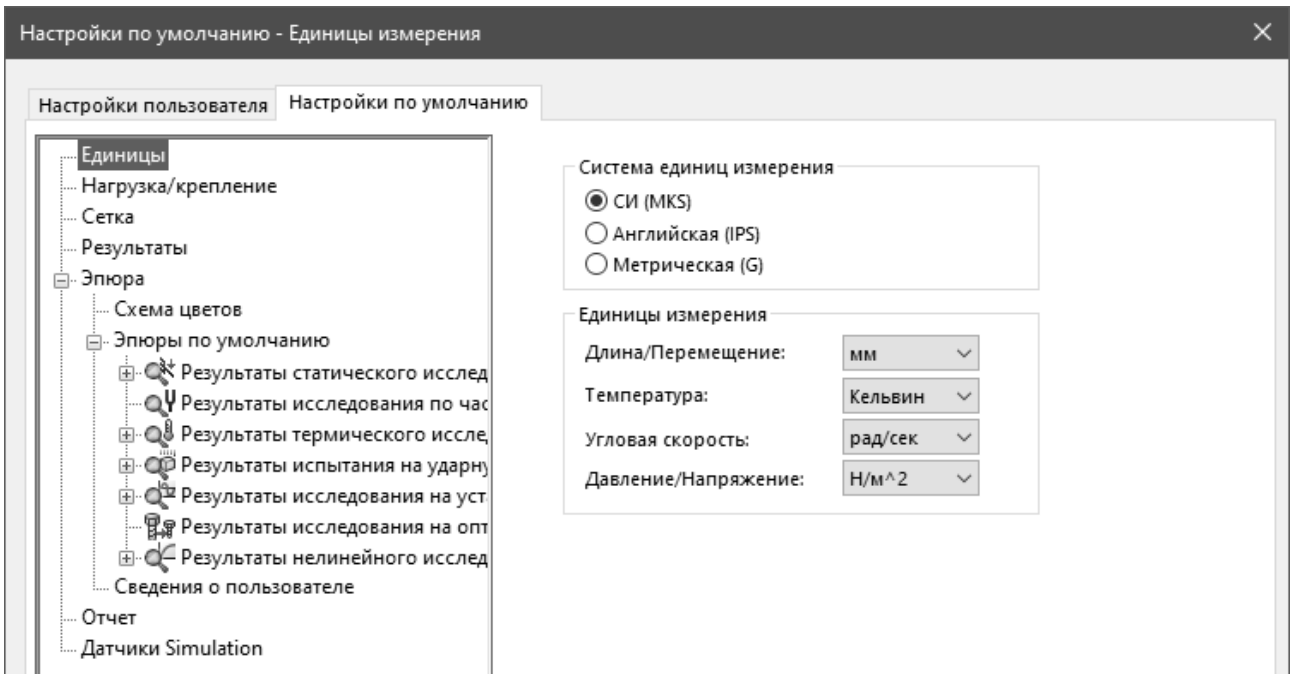

Рисунок 1.4 – Диалоговое окно настроек по умолчанию для исследований SolidWorks Simulation

1.2 Порядок выполнения работы

Подключить программный модуль Simulation.

Открыть диалоговое окно параметров, изучить состав и назначение каждого параметра. Для пояснений можно воспользоваться справочной системой, вызываемой при нажатии кнопки «Справка…».

Выполнить настройки по умолчанию (по желанию).

Оформить отчет.

Контрольные вопросы

1 Назначение основных настроек пользователя Simulation.

2 Настройки внешнего вида символов граничных условий и внешних воздействий для новых исследований.

3 Настройки внешнего вида эпюр по умолчанию.

4 Настройки содержания отчета об исследовании Simulation.

2 Лабораторная работа № 2. Исследование напряженно-деформированного состояния балки при растяжении

Цель работы: получить навыки постановки, решения и анализа результатов задач одноосного растяжения.

2.1 Общие сведения

Для одноосного напряженного состояния напряжения можно определить, отнеся величину внешней силы F к площади поперечного сечения A:

$$\sigma = F/A.$$

В теории при одноосном растяжении напряжения будут одинаковы по всему телу. Однако в более сложных случаях возникает необходимость определения направления действующих напряжений.

Напряжения можно описать как внутренние удельные силы (силы, отнесенные к площади), действующие в центрах граней бесконечно малого параллелепипеда, выделенного в теле. Грани элементарного параллелепипеда обычно параллельны осям системы координат.

В общем случае напряженное состояние в точке тела описывается тензором напряжений, который представляет собой квадратную матрицу третьего порядка:

$$\{\sigma\} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix}. \qquad (2.1)$$

Следует обратить внимание на то, что тензор напряжений симметричен относительно главной диагонали.

2.2 Порядок выполнения работы

Геометрическая модель представляет собой балку поперечным сечением 20 × 10 мм и длиной 100 мм. Левая торцевая поверхность жестко закреплена, а на правую действует растягивающая сила величиной 10 кН (рисунок 2.1).

В этом случае напряжения в среднем сечении балки

$$\sigma = F/A = 10000/(0{,}01 \cdot 0{,}02) = 50 \text{ МПа}.$$

Создайте новый документ детали SolidWorks. В плоскость «Справа» вставьте эскиз и создайте прямоугольник размерами 20 × 10 мм из центра. Вытяните полученный контур на 100 мм.

Подключите программный модуль Simulation с помощью главного меню Инструменты/Добавления … .

Создайте новое статическое исследование Simulation.

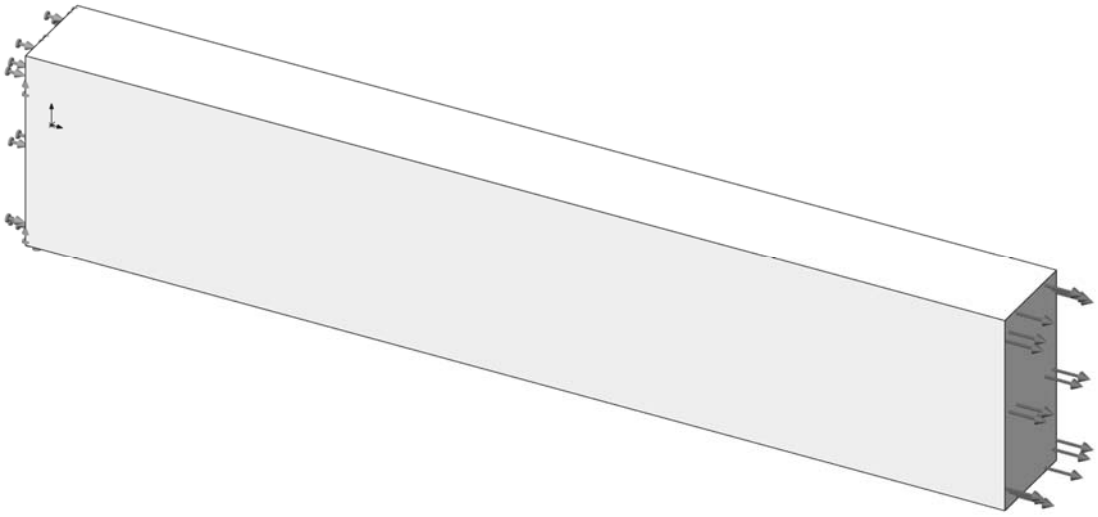

Рисунок 2.1 – Модель балки с граничными условиями и нагрузкой

С помощью контекстного меню дерева исследования или кнопок соответствующей панели инструментов задайте детали стандартный материал «Легированная сталь».

Жестко закрепите левую торцевую грань детали, а на правую приложите нормальную растягивающую силу величиной 10 кН.

Постройте сетку конечных элементов, в качестве среднего размера элемента введите значение 2,5 мм.

Сохраните проект и запустите исследование на расчет.

По окончании расчета отобразите эпюру нормальных напряжений σ_x. С помощью инструмента «Зондирование» измерьте величины напряжений в нескольких точках в средней части модели вдали от мест закрепления и приложения нагрузки (рисунок 2.2). Сравните полученные значения с теоретическими.

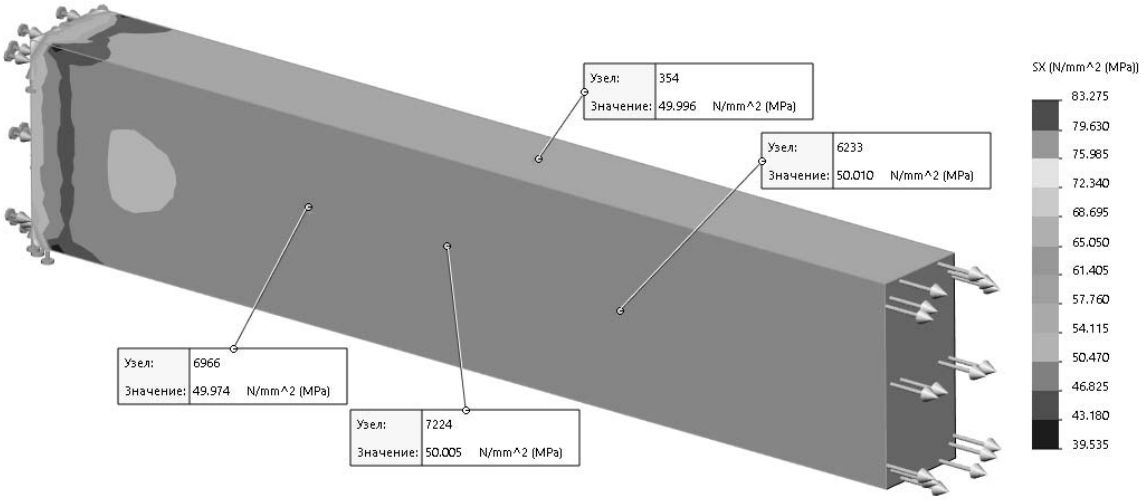

Рисунок 2.2 – Значения нормальных напряжений σ_x в средней части модели

Отредактируйте эпюру нормальных напряжений, установив в разделе «Дополнительные параметры» флажок «Отобразить как эпюру вектора» (рисунок 2.3) и проанализируйте направление нормальных напряжений.

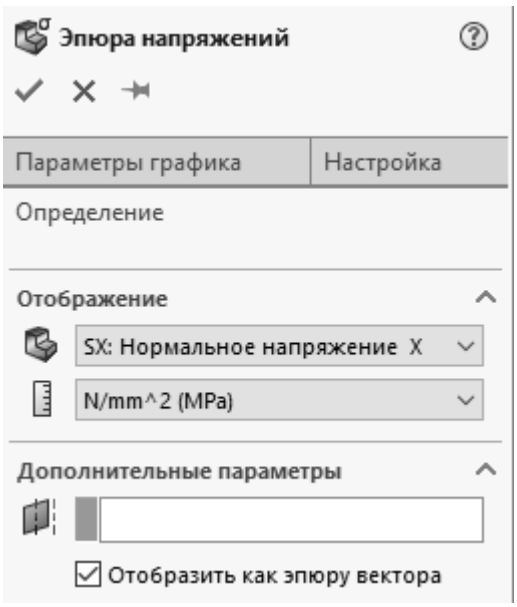

Рисунок 2.3 – Настройка эпюры нормальных напряжений

Для выбранного узла модели измерьте остальные компоненты напряжений и составьте тензор.

Сделайте выводы. Оформите отчет.

Контрольные вопросы

1 Компоненты напряжений на гранях элементарного параллелепипеда.
2 Тензор напряжений. Главные напряжения.
3 Шаровой тензор и девиатор напряжений. Интенсивность напряжений.

3 Лабораторная работа № 3. Закон Гука

Цель работы: изучить связь между напряжениями и относительными деформациями в твердом теле.

3.1 Общие сведения

В общем случае пространственного нагружения конструкции в ней возникают ненулевые значения напряжений и относительных деформаций, которые связаны следующими соотношениями:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \mu\frac{\sigma_y}{E} - \mu\frac{\sigma_z}{E}; \quad \varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \mu\frac{\sigma_z}{E} - \mu\frac{\sigma_x}{E}; \quad \varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \mu\frac{\sigma_x}{E} - \mu\frac{\sigma_y}{E}. \qquad (3.1)$$

Касательные напряжения и сдвиговые деформации связаны следующими соотношениями:

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}; \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}; \quad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}. \qquad (3.2)$$

Выражения (3.1) и (3.2) называются законом Гука для линейного изотропного материала.

Проверим эти соотношения путем моделирования.

3.2 Порядок выполнения работы

Для выполнения работы будет использоваться модель из лабораторной работы № 2.

Для любой точки среднего сечения балки записать тензор напряжений (2.1).

Вычислить по формулам (3.1), (3.2) компоненты относительных деформаций и записать тензор деформаций в виде

$$\{\varepsilon\} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \frac{1}{2}\gamma_z \end{pmatrix}.$$

Для той же точки с помощью инструмента «Зондирование» измерить компоненты относительных деформаций и сравнить их значения с вычисленными.

Сделать выводы. Оформить отчет.

Контрольные вопросы

1 Основные уравнения теории упругости.
2 Закон Гука в прямой и обратной формах.
3 Тензор деформаций.

4 Лабораторная работа № 4. Эффект Пуассона. Связь деформаций и напряжений

Цель работы: изучить связь между продольными и поперечными деформациями твердого тела.

4.1 Общие сведения

При растяжении тела его поперечные размеры обычно уменьшаются, а при сжатии – увеличиваются. Это явление называется эффектом Пуассона. Отношение поперечной деформации к продольной определяется коэффициентом Пуассона μ, который может варьироваться для разных материалов в диапазоне от 0 до 0,5. Для сталей $\mu \approx 0{,}3$, для резины $\mu \approx 0{,}5$. Коэффициент Пуассона является одной из важных характеристик материалов.

4.1 Порядок выполнения работы

Создать геометрическую модель куба размером 10 × 10 × 10 мм.

Подключить модуль SolidWorks Simulation, создать новое исследование.

Из библиотеки материалов SolidWorks Simulation выбрать легированную сталь и применить к модели. Следует обратить внимание на значение коэффициента Пуассона для этого материала.

Зафиксировать три грани куба граничным условием «Ролик/ползун» (рисунок 4.1).

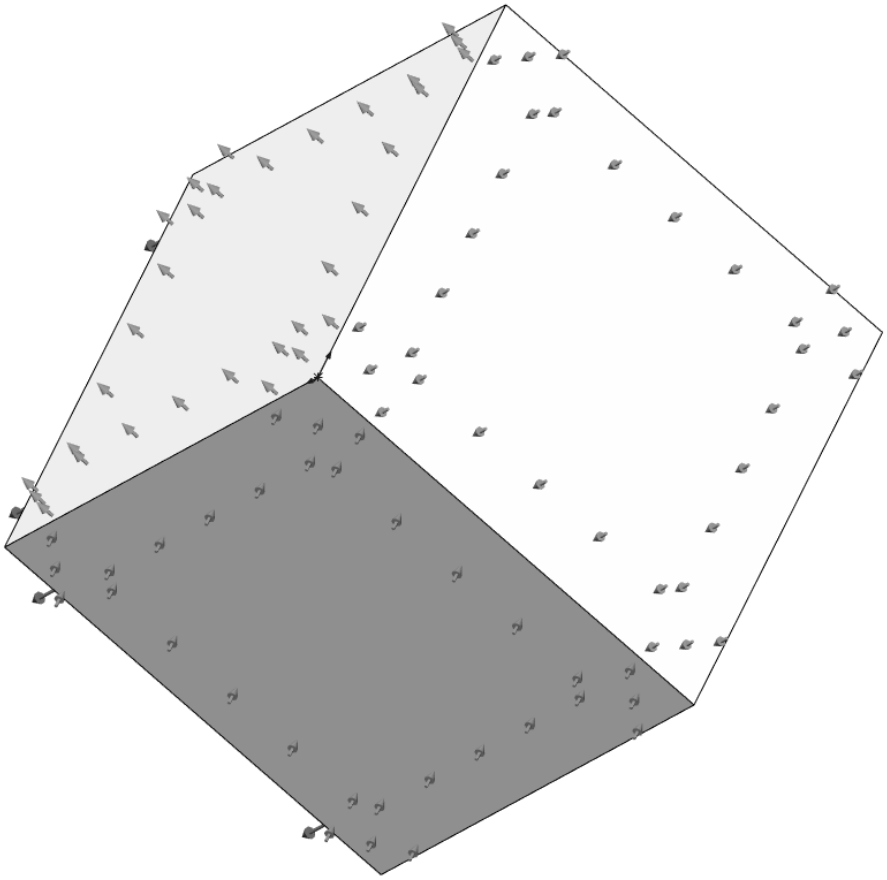

Рисунок 4.1 – Зафиксированные грани куба

На переднюю грань куба приложить растягивающую силу вдоль оси *X* величиной 2000 Н (рисунок 4.2).

Построить расчетную сетку с параметрами по умолчанию. Сохранить проект и запустить исследование на расчет.

По окончании расчета построить эпюру относительной деформации ε_x, инструментом «Зондирование» измерить ее величину примерно в центре одной из граней куба (рисунок 4.3). Записать это значение.

Аналогично в той же самой точке измерить и записать значения поперечных деформаций ε_y и ε_z.

По определению, коэффициент Пуассона – это отношение поперечных деформаций к продольной, т. е.

$$\mu = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} = -\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_x}. \tag{4.1}$$

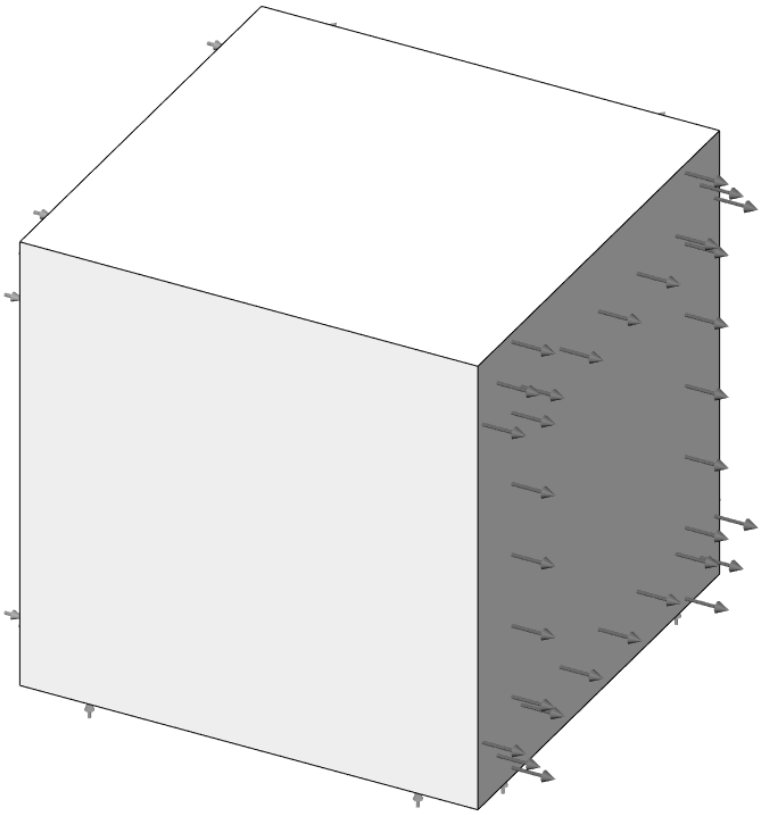

Рисунок 4.2 – Растягивающая сила на передней грани куба

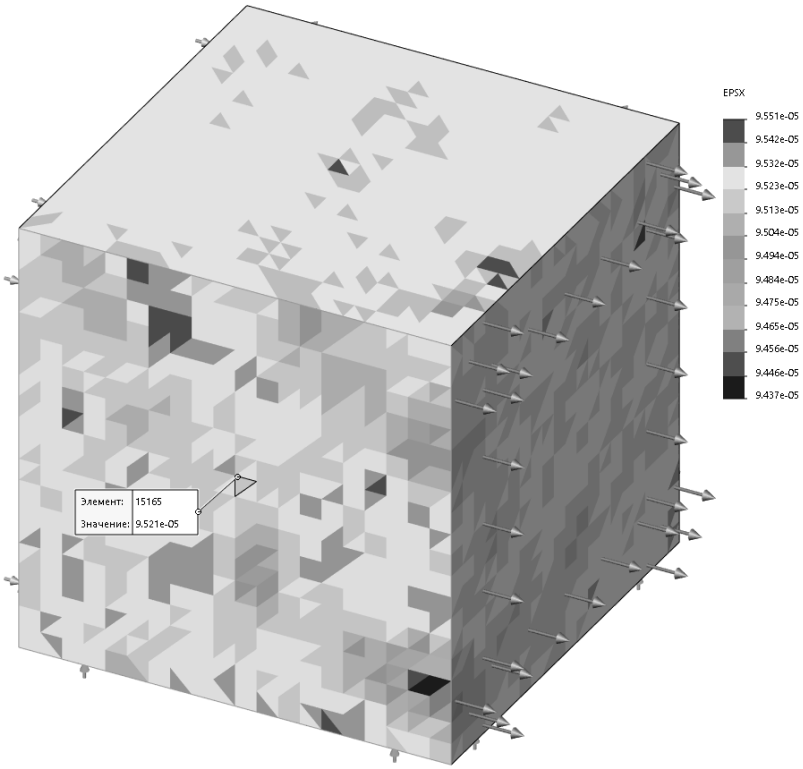

Рисунок 4.3 – Измерение продольной деформации на грани куба

Вычислить значение коэффициента Пуассона по формуле (4.1) и сравнить полученное значение с коэффициентом Пуассона для легированной стали из библиотеки материалов SolidWorks Simulation.

Сделать выводы. Оформить отчет.

Контрольные вопросы

1 Физический смысл коэффициента Пуассона.
2 Связь модуля Юнга, модуля сдвига и коэффициента Пуассона.
3 Модуль объемной деформации твердого тела.

5 Лабораторная работа № 5. Исследование напряженно-деформированного состояния балки при растяжении с изгибом

Цель работы: получить навыки исследования напряженно-деформированного состояния тела при растяжении с изгибом.

5.1 Общие сведения

В общем случае пространственные конструкции испытывают объемное напряженно-деформированное состояние, которое определяется шестью компонентами: тремя нормальными напряжениями σ_x, σ_y, σ_z и тремя касательными τ_{xy}, τ_{yz}, τ_{zx}.

5.2 Порядок выполнения работы

Для работы используйте проект из лабораторной работы № 2. Для ее выполнения можно продублировать выполненное ранее исследование и отредактировать его. К растягивающей нагрузке в данном случае добавлено равномерно распределенное по верхней грани давление величиной 1 МПа (рисунок 5.1).

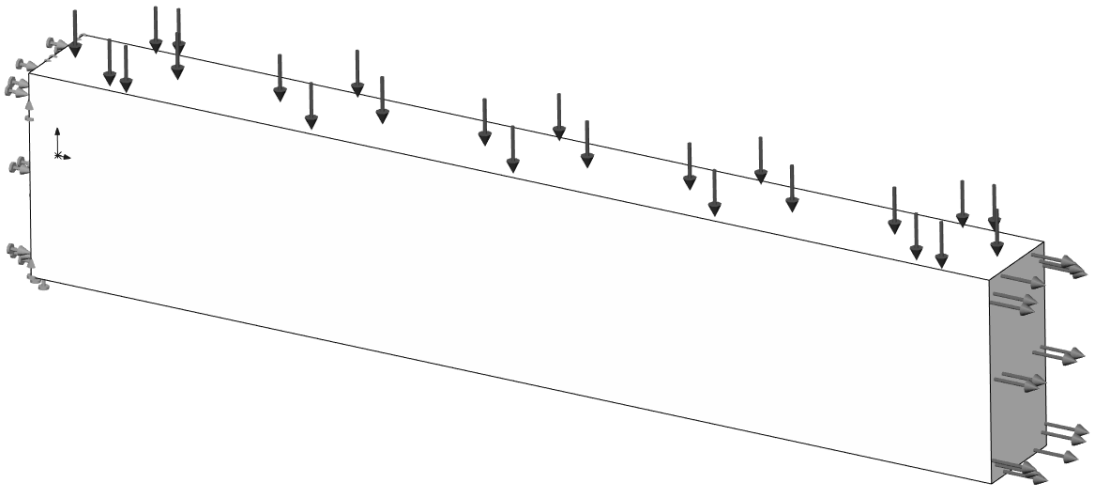

Рисунок 5.1 – Модель параллелепипеда с граничными условиями и нагрузками

Постройте сетку конечных элементов со средним размером 2,5 мм и запустите исследование на выполнение.

Отобразите эпюру нормального напряжения σ_x. Создайте ограничение сечения тремя взаимно перпендикулярными плоскостями, как показано на рисунке 5.2. Сечение, выполненное плоскостью «Справа», сместите от торца на величину 10 мм.

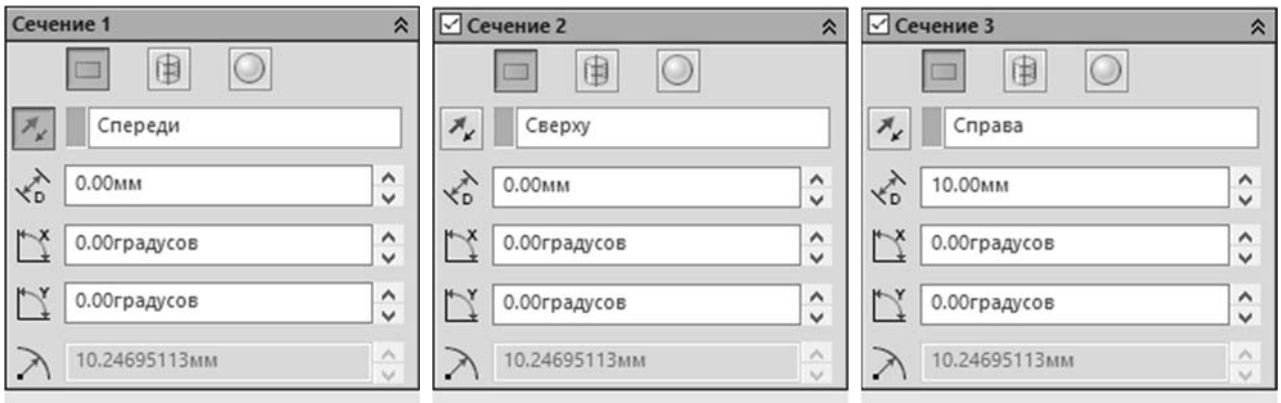

Рисунок 5.2 – Настройка ограничения сечения

С помощью инструмента «Зондирование» выберите 8…10 точек на верхней кромке сечения продольной плоскостью (рисунок 5.3) и постройте график распределения нормального напряжения σ_x (рисунок 5.4).

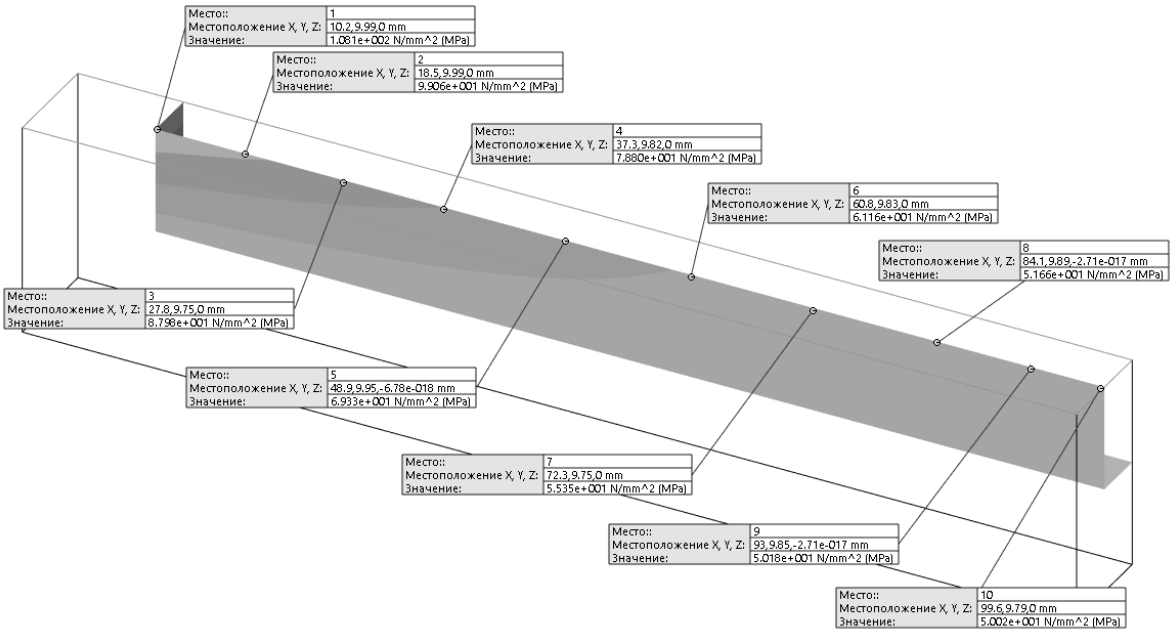

Рисунок 5.3 – Выбор точек на ограничении сечения

В диалоговом окне «Ограничение сечения» отключите сечение плоскостью «Сверху» и аналогичным образом постройте график распределения нормального напряжения σ_x по нижней кромке сечения.

Постройте распределение нормального напряжения σ_x по вертикальной кромке сечения плоскостью «Справа», смещенной от торца на 10 мм, выбрав пять–восемь точек (рисунок 5.5).

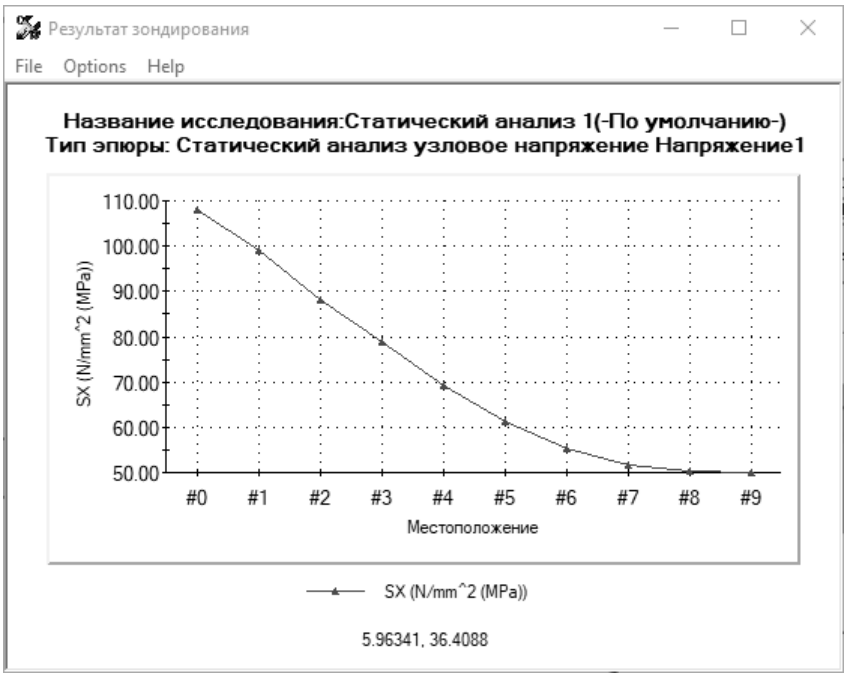

Рисунок 5.4 – График распределения нормального напряжения σ_x

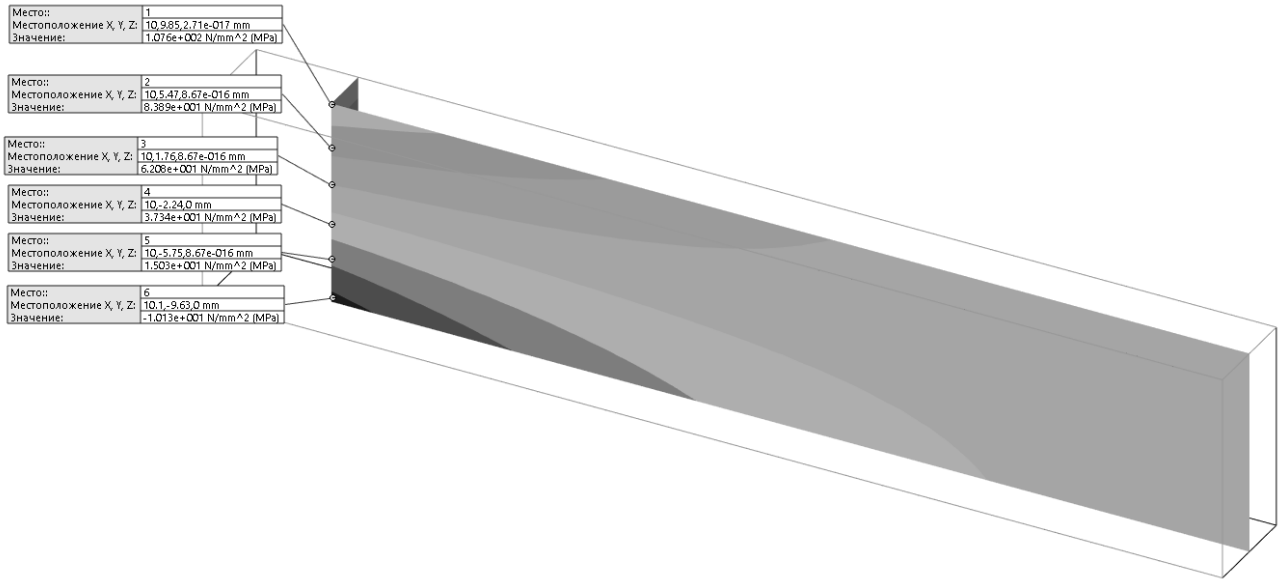

Рисунок 5.5 – Выбор точек на ограничении сечения

Отобразите эпюру касательного напряжения τ_{xy} и постройте график распределения его по вертикальной кромке, как в предыдущем случае.

Проанализируйте полученные результаты, сделайте вывод о характере распределения компонентов напряжений.

Оформите отчет.

Контрольные вопросы

1 Геометрические уравнения теории упругости.
2 Продольные и сдвиговые деформации.
3 Обобщенный закон Гука для ортотропного тела.

6 Лабораторная работа № 6. Расчет напряженно-деформированного состояния в точке

Цель работы: получить навыки определения напряженно-деформированного состояния тела аналитическим путем.

6.1 Общие сведения

В таблице 6.1 приведены значения компонентов напряжений, действующих в некоторой точке твердого тела.

При расчетах принять $E = 2\cdot10^5$ МПа; $\mu = 0{,}3$; $[\sigma] = 210$ МПа; $[\sigma_{сдв}] = 0{,}5[\sigma]$.

Для выбранного варианта задания необходимо:

– указать направление напряжений на гранях бесконечно малого параллелепипеда;

– определить главные напряжения и положение главных площадок;

– вычислить относительное изменение объема и удельную потенциальную энергию деформации;

– выполнить проверку прочности материала по III и VI теориям.

6.2 Пример выполнения задания

Дано: $\sigma_x = 20$ МПа, $\sigma_y = 30$ МПа, $\sigma_z = 20$ МПа, $\tau_{xy} = 10$ МПа, $\tau_{yz} = 10$ МПа, $\tau_{zx} = 20$ МПа.

Вычислим инварианты напряжений по формулам:

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 20 + 30 + 40 = 90 \text{ МПа};$$

$$I_2 = \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 =$$

$$= 20\cdot30 + 30\cdot40 + 40\cdot20 - (10^2 + 20^2 + 10^2) = 2000 \text{ МПа}^2;$$

$$I_3 = \sigma_x\sigma_y\sigma_z - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{zx}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2 + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} =$$

$$= 20\cdot30\cdot40 - 20\cdot10^2 - 30\cdot20^2 - 40\cdot10^2 + 2\cdot10\cdot10\cdot20 = 10000 \text{ МПа}^3.$$

Таблица 6.1 – Варианты заданий

Буква	Вариант	Напряжение, МПа			Буква	Вариант	Напряжение, МПа		
		σ_x	τ_{xy}	τ_{yz}			σ_y	σ_z	τ_{zx}
A	1	80	100	60	D	1	60	160	80
	2	100	50	100		2	120	80	50
	3	90	60	60		3	90	120	100
	4	90	80	65		4	100	80	105
	5	100	100	75		5	–90	–120	110
	6	160	100	90		6	80	60	60
	7	100	120	50		7	80	–50	50
	8	100	100	80		8	150	80	100
	9	150	90	85		9	70	120	60
	10	140	60	100		10	–60	–100	90
B	1	150	100	50	E	1	90	60	50
	2	130	90	100		2	100	70	90
	3	70	120	65		3	–130	–100	85
	4	85	105	60		4	65	–165	75
	5	105	100	85		5	100	–85	100
	6	155	95	45		6	75	–80	55
	7	125	75	90		7	40	140	15
	8	105	35	80		8	125	–50	110
	9	180	25	15		9	–95	50	45
	10	125	45	75		10	–60	–75	65
C	1	75	95	55	F	1	75	75	75
	2	65	95	35		2	35	–45	25
	3	135	45	45		3	155	–125	55
	4	155	35	65		4	–120	–80	85
	5	145	65	15		5	105	100	100
	6	115	25	25		6	80	–65	35
	7	105	35	85		7	–80	–85	55
	8	85	75	95		8	95	–40	45
	9	95	65	40		9	–95	–75	65
	10	100	95	50		10	85	90	80

Решая кубическое уравнение

$$\sigma^3 - 90\sigma^2 + 2000\sigma - 10000 = 0,$$

получим главные напряжения:

$$\sigma_1 = 58{,}9511; \quad \sigma_2 = 23{,}9730; \quad \sigma_3 = 7{,}0760 \text{ МПа}.$$

Выполним проверку, вычислив инварианты I_1, I_2, I_3 через найденные главные напряжения:

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 58{,}9511 + 23{,}9730 + 7{,}0760 = 90{,}0001 \text{ МПа};$$

$$I_2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1 =$$

$$= 58{,}9511 \cdot 23{,}9730 + 23{,}9730 \cdot 7{,}0760 + 7{,}0760 \cdot 58{,}9511 = 2000{,}005 \text{ МПа}^2;$$

$$I_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3 = 58{,}9511 \cdot 23{,}9730 \cdot 7{,}0760 = 10000{,}049 \text{ МПа}^3.$$

Главные напряжения найдены верно.

Определим положение первой главной площадки, вычислив направляющие косинусы l_1, m_1, n_1. Для этого представим систему уравнений

$$\begin{cases} (\sigma_x - \sigma_1) l_1 + \tau_{xy} m_1 + \tau_{xz} n_1 = 0; \\ \tau_{yx} l_1 + (\sigma_y - \sigma_1) m_1 + \tau_{yz} n_1 = 0; \\ \tau_{zx} l_1 + \tau_{zy} m_1 + (\sigma_z - \sigma_1) n_1 = 0 \end{cases}$$

и условие перпендикулярности главных площадок $l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1$ в виде

$$\begin{cases} (\sigma_x - \sigma_1)\dfrac{l_1}{n_1} + \tau_{xy}\dfrac{m_1}{n_1} = -\tau_{xz}; \\ \tau_{yx}\dfrac{l_1}{n_1} + (\sigma_y - \sigma_1)\dfrac{m_1}{n_1} = -\tau_{yz}; \\ \left(\dfrac{l_1}{n_1}\right)^2 + \left(\dfrac{m_1}{n_1}\right)^2 + 1 = \dfrac{1}{n_1^2}. \end{cases} \tag{6.1}$$

Решая два первых уравнения системы (6.1) относительно l_1/n_1 и m_1/n_1, получим

$$l_1/n_1 = 0{,}6607; \quad m_1/n_1 = 0{,}5736.$$

Тогда из третьего уравнения системы (6.1) найдем $n_1 = 0{,}7526$. В итоге находим значения l_1 и m_1:

$$l_1 = 0{,}6607 \cdot 0{,}7526 = 0{,}4972;$$

$$m_1 = 0{,}5736 \cdot 0{,}7526 = 0{,}4317.$$

Выполним проверку по условию перпендикулярности

$$0{,}4972^2 + 0{,}4317^2 + 0{,}7526^2 = 0{,}99998 \approx 1.$$

Направляющие косинусы для первой главной площадки найдены верно. Аналогично находим положение второй и третьей главных площадок. Результаты сведем в таблицу 6.2.

Таблица 6.2 – Направляющие косинусы главных площадок

Площадка	l	m	n
ν_1	0,4972	0,4317	0,7526
ν_2	0,0758	–0,8857	0,4579
ν_3	–0,8642	0,1705	0,4734

Таким образом, тензор главных напряжений имеет вид:

$$T = \begin{pmatrix} 58{,}9511 & 0 & 0 \\ 0 & 23{,}9730 & 0 \\ 0 & 0 & 7{,}0760 \end{pmatrix}.$$

Шаровой тензор и девиатор напряжений следует записать самостоятельно.

Определим главные деформации:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}\left[\sigma_1 - \mu\left(\sigma_2 + \sigma_3\right)\right] = \frac{1}{2 \cdot 10^5}\left[58{,}9511 - 0{,}3\left(23{,}9730 + 7{,}0760\right)\right] = 2{,}5 \cdot 10^{-4};$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E}\left[\sigma_2 - \mu\left(\sigma_3 + \sigma_1\right)\right] = \frac{1}{2 \cdot 10^5}\left[23{,}9730 - 0{,}3\left(7{,}0760 + 58{,}9511\right)\right] = 2{,}1 \cdot 10^{-5};$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E}\left[\sigma_3 - \mu\left(\sigma_1 + \sigma_2\right)\right] = \frac{1}{2 \cdot 10^5}\left[7{,}0760 - 0{,}3\left(58{,}9511 + 23{,}9730\right)\right] = -8{,}9 \cdot 10^{-5}.$$

Найдем относительное изменение объема материала:

$$\theta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 2{,}5 \cdot 10^{-4} + 2{,}1 \cdot 10^{-5} - 8{,}9 \cdot 10^{-5} = 1{,}82 \cdot 10^{-4}.$$

Выполним проверку, вычислив относительное изменение объема материала через главные напряжения:

$$\theta = \frac{1-2\mu}{E}\left(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3\right) = \frac{1-2\cdot 0{,}3}{2\cdot 10^5}\left(58{,}9511+23{,}9730+7{,}0760\right) = 1{,}80\cdot 10^{-4}.$$

Удельная потенциальная энергия деформации вычисляется по формуле

$$u = \frac{1}{2E}\left[\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2-2\mu\left(\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_3+\sigma_3\sigma_1\right)\right].$$

Подставив данные, получим $u = 7{,}25\cdot 10^{-3}$ МДж/м^3.
Выполним проверку прочности по третьей теории:

$$\sigma^{\text{III}} = \frac{1}{2}\left(\sigma_1-\sigma_3\right) = \frac{1}{2}\left(58{,}9511-7{,}0760\right) = 25{,}9376 \text{ МПа}.$$

Прочность по третьей теории обеспечена, т. к. $\sigma^{\text{III}} < [\sigma_{\text{сдв}}]$.
По четвертой теории

$$\sigma^{\text{IV}} = \sqrt{\frac{1}{2}\left[\left(\sigma_1-\sigma_2\right)^2+\left(\sigma_2-\sigma_3\right)^2+\left(\sigma_1-\sigma_3\right)^2\right]} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}\left[\left(58{,}9511-23{,}9730\right)^2+\left(23{,}9730-7{,}0760\right)^2+\left(58{,}9511-7{,}0760\right)^2\right]} =$$

$$= 45{,}8257 \text{ МПа}.$$

Поскольку $\sigma^{\text{IV}} < [\sigma]$, прочность по четвертой теории также обеспечена.

Контрольные вопросы

1 Основные теории прочности.
2 Прямая и обратная задача теории упругости.
3 Главные напряжения и главные площадки.

7 Лабораторная работа № 7. Перемещения в балке при растяжении, растяжении с изгибом

Цель работы: получить навыки оценки перемещений при решении задач методом конечных элементов.

7.1 Общие сведения

Перемещения точки твердого тела при его деформации под действием внешних сил можно описать вектором, соединяющим точку тела до его деформации и после. Поскольку это векторная величина, то ее можно разложить на составляющие в трехмерном пространстве:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_x & u_y & u_z \end{pmatrix}.$$

Каждая точка тела имеет свой вектор перемещений, который, как и напряжения, является функцией координат. Зная компоненты перемещений, можно вычислить суммарное перемещение:

$$u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}.$$

7.2 Порядок выполнения работы

Для работы понадобятся проекты, выполненные в лабораторных работах № 2 и 5.

Откройте проект лабораторной работы № 2. Постройте эпюру суммарных перемещений. Поскольку на балку действует только растягивающая сила, то суммарные перемещения будут такими же, как и перемещения по оси *X*.

С помощью инструмента «Зондирование» постройте график изменения суммарного перемещения для одной из продольных кромок балки (рисунок 7.1).

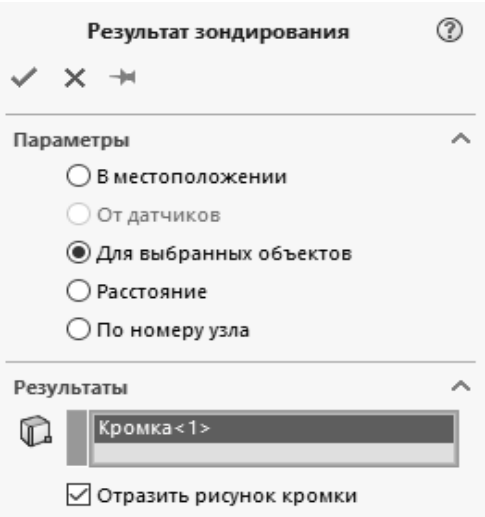

Рисунок 7.1 – Настройки инструмента «Зондирование» для продольной кромки

Отметьте линейный характер изменения перемещения от нуля до максимального значения 0,02373 мм. График должен быть одинаков для любой из продольных кромок.

Откройте проект, выполненный в лабораторной работе № 5. Создайте эпюру суммарного перемещения и с помощью инструмента «Зондирование» постройте графики для верхней и нижней продольных кромок.

Создайте эпюру перемещения вдоль оси X и для тех же кромок постройте графики. Аналогично постройте графики для вертикального перемещения u_y. Отметьте нелинейных характер изменения перемещений из-за наличия изгиба балки.

Сделайте выводы. Оформите отчет.

Контрольные вопросы

1 Вектор перемещений точек твердого тела.
2 Геометрические уравнения теории упругости.
3 Тензор деформаций. Инварианты тензора деформаций.

8 Лабораторная работа № 8. Относительные деформации в балке. Связь перемещений и деформаций

Цель работы: получить навыки исследования относительных деформаций твердого тела.

8.1 Общие сведения

Относительные деформации являются величинами, определяемыми отношением изменения размера (абсолютной деформации) Δl к соответствующим начальным размерам тела L:

$$\varepsilon = \Delta l / L.$$

Другими словами, относительные деформации показывают, насколько изменился размер тела в сравнении с его размерами до нагружения.

В общем случае деформации тела описываются вектором, состоящим из шести элементов – трех линейных и трех угловых деформаций:

$$\{\varepsilon\} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_y & \varepsilon_z & \gamma_{xy} & \gamma_{yz} & \gamma_{zx} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}.$$

8.2 Порядок выполнения работы

Открыть проект, созданный в лабораторной работе № 2.

Построить эпюру относительных деформаций вдоль оси X. С помощью инструмента «Зондирование» измерить относительную деформацию в одной из точек среднего сечения балки и записать это значение.

Построить эпюру перемещения балки вдоль оси X. Инструментом «Зонди-

рование» измерить перемещения в двух точках (рисунок 8.1). Записать продольные координаты этих точек и значения перемещений в них.

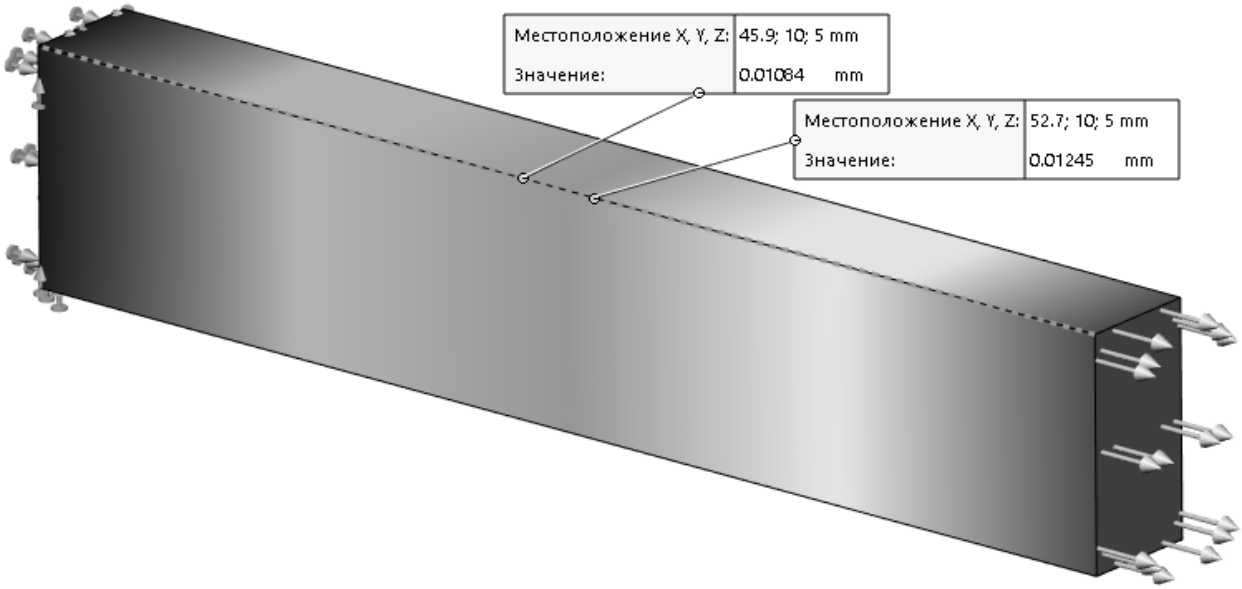

Рисунок 8.1 – Значения перемещений в двух точках балки

Вычислить относительную деформацию через перемещения и координаты выбранных точек:

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta u_x}{\Delta X} = \frac{0,01245 - 0,01084}{52,7 - 45,9} = 2,36765 \cdot 10^{-4}.$$

Сравнить полученное значение относительной деформации с измеренным ранее и вычислить погрешность. Точность измерения и расчета можно повысить, если взять координаты точек не с экрана, а из таблицы инструмента «Зондирование», где они отображаются с большим числом знаков после запятой.

Сделать выводы. Оформить отчет.

Контрольные вопросы

1 Уравнения совместности деформаций.

2 Прямая и обратная задачи теории упругости.

9 Лабораторная работа № 9. Принцип Сен-Венана

Цель работы: исследовать влияние способа приложения нагрузок и граничных условий на величину напряжений, действующих в конструкции.

9.1 Общие сведения

Принцип Сен-Венана в теории упругости – положение, согласно которому уравновешенная система сил, приложенная к некоторой части твердого тела, вызывает в нем появление неравномерности распределения напряжений, которая быстро уменьшается по мере удаления от этой части. На расстояниях, больших максимального линейного размера зоны приложения нагрузок, неравномерность распределения напряжения и деформации оказываются пренебрежительно малыми. Сформулирован Сен-Венаном в 1855 г. Строгого доказательства этого принципа для общего случая нет, однако он подтверждается экспериментом, численными методами решения задач и строгими аналитическими решениями частных случаев.

Иногда принцип Сен-Венана формулируют таким образом: в сечениях, достаточно удаленных от мест приложения нагрузки, деформация тела не зависит от конкретного способа нагрузки и определяется лишь статическим эквивалентом нагрузки. Таким образом, этот принцип позволяет одни граничные условия (действующие силы) заменять другими (удобными для статического расчета) при условии, что равнодействующая и главный момент новой заданной системы сил не изменяются. Принцип используется также и при упругопластической деформации.

9.2 Порядок выполнения работы

Открыть файл lab_09.sldprt. Геометрическая модель представляет собой ступенчатую пластину с острыми кромками в месте перехода.

Создать новое статическое исследование Simulation. В качестве материала детали выбрать легированную сталь из стандартной библиотеки.

Приложить к левой торцовой грани пластины давление величиной 10 МПа, а к правой – величиной 20 МПа. Векторы давления должны быть направлены наружу детали (рисунок 9.1).

Поскольку в модели отсутствуют закрепления, в свойствах исследования установить флажок «Использовать незакаленную пружину для стабилизации модели».

Запустить исследование на расчет. Проанализировать эпюры эквивалентных напряжений и суммарных перемещений. Отметить равномерность распределения напряжений по сечению детали, а также их повышение (концентрацию) в месте изменения сечения. Максимально значение эквивалентного напряжения составит примерно 49 МПа.

Создать копию исследования. Удалить приложенные давления. Жестко зафиксировать левый торец детали, а на правый к вершинам приложить силы суммарной величиной 10 кН (рисунок 9.2).

Запустить исследование на расчет. По окончании расчета отредактировать максимальное значение, отображаемое на шкале эквивалентных напряжений.

Установить его значение равное максимальному напряжению, полученному в предыдущем расчете.

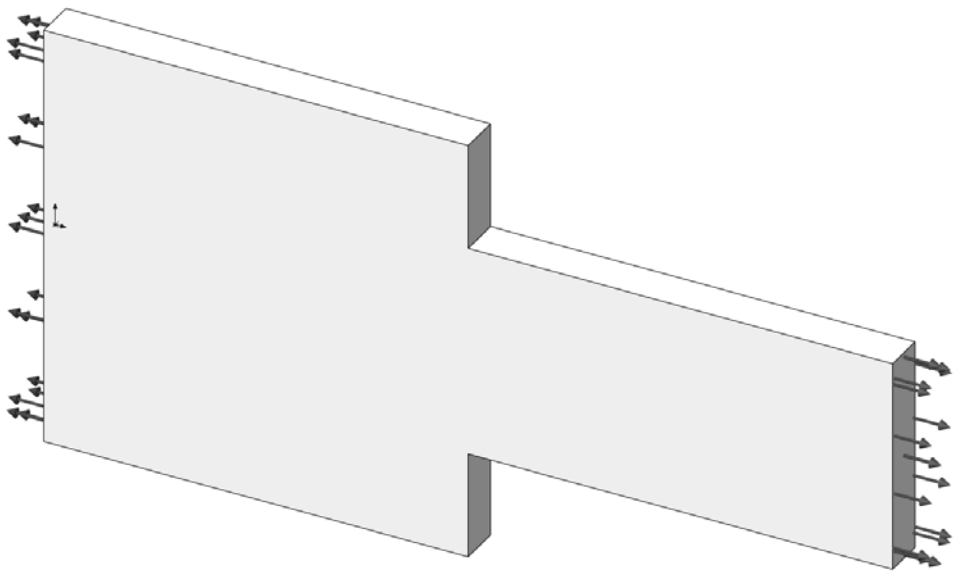

Рисунок 9.1 – Модель с давлением в качестве внешнего воздействия

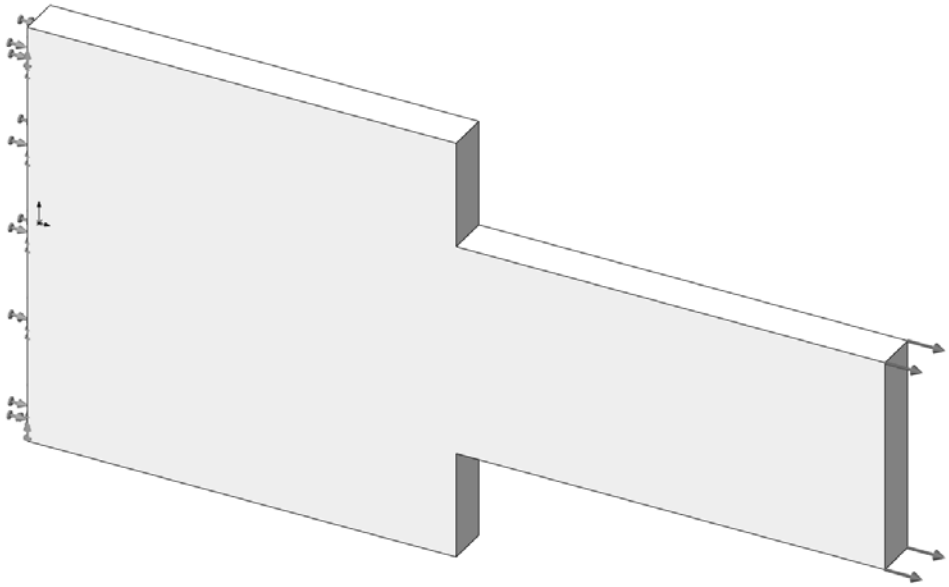

Рисунок 9.2 – Модель с закреплением и сосредоточенными силами

Сравнить эпюры эквивалентных напряжений для двух расчетных случаев. Сделать выводы о влиянии граничных условий на результат. Оформить отчет.

Контрольные вопросы

1 Принцип Сен-Венана.

2 Влияние способа приложения нагрузок и задания граничных условий на результаты расчета.

10 Лабораторная работа № 10. Концентрация напряжений

Цель работы: исследовать влияние радиуса скругления на величину максимальных напряжений.

10.1 Общие сведения

В работе требуется изучить влияние радиуса скругления на величину напряжений в месте концентрации при растяжении плоского образца переменного сечения.

10.2 Порядок выполнения работы

Открыть файл lab_10.sldprt. Геометрическая модель представляет собой ступенчатую пластину с острыми кромками в месте перехода.

Создать новое статическое исследование Simulation. В качестве материала детали выбрать легированную сталь из стандартной библиотеки.

Поскольку модель симметрична относительно стандартной плоскости «Сверху», то для расчета можно использовать половину модели. Разделить модель плоскостью, оставив верхнюю часть. Скруглить острую кромку в месте перехода сечений радиусом 2,5 мм (рисунок 10.1).

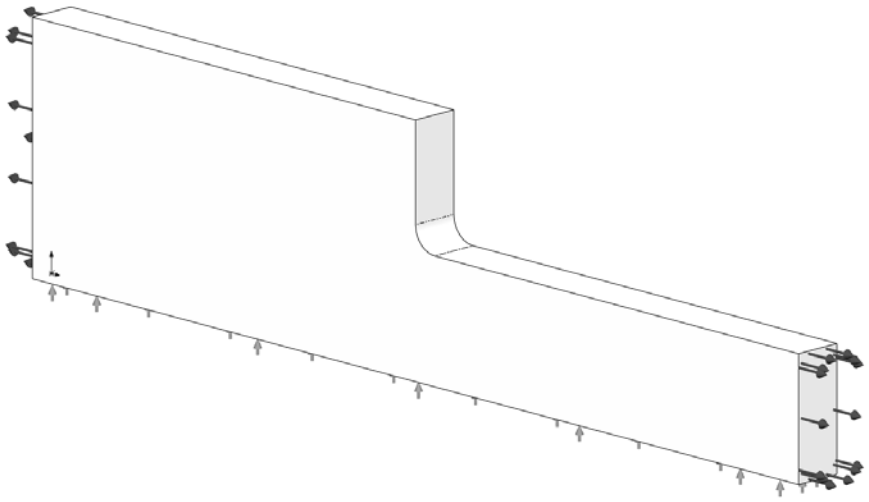

Рисунок 10.1 – Геометрическая модель с граничными условиями

Приложить к левой торцовой грани пластины давление величиной 10 МПа, а к правой грани – величиной 20 МПа. Векторы давления должны быть направлены наружу детали.

Построить сетку конечных элементов со средним размером 2,5 мм. К поверхности скругления применить элемент управления сеткой со средним размером 0,5 мм и коэффициентом роста 1,5 (рисунок 10.2).

Поскольку в модели отсутствуют закрепления, в свойствах исследования установить флажок «Использовать незакаленную пружину для стабилизации модели».

Запустить исследование на расчет. По окончании расчета вывести эпюру эквивалентных напряжений и отметить максимальное значение.

Среднее значение напряжения в меньшем сечении следует определить по формуле

$$\sigma = F / A,$$

где F – сила, действующая на деталь;

A – площадь поперечного сечения.

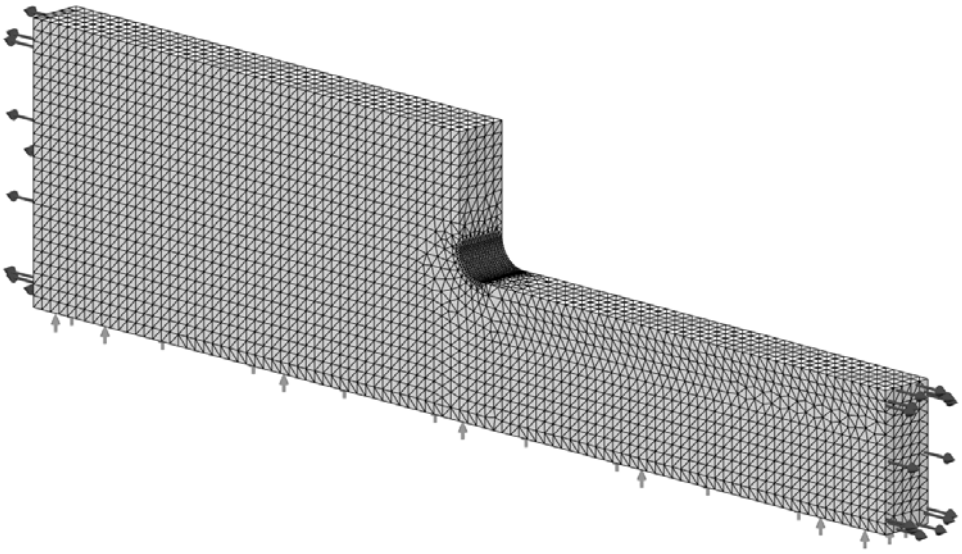

Рисунок 10.2 – Конечно-элементная модель, готовая к расчету

Вычислить коэффициент концентрации напряжений K_σ, отнеся максимальное значение напряжения к его среднему значению.

Изменить радиус скругления на 5 мм. Повторить расчет и вычислить новое значение коэффициента концентрации напряжений.

Варьируя значение радиуса скругления с шагом 2,5 мм до значения 20 мм, построить график зависимости $K_\sigma = f(R)$.

Сделать вывод относительно влияния радиуса скругления на величину максимального напряжения. Оформить отчет.

Контрольные вопросы

1 Основные причины концентрации напряжений.

2 Особенности одноосного напряженно-деформированного состояния.

3 Настройки сеточного генератора для анализа конструкций с концентраторами напряжений. Сингулярные точки.

11 Лабораторная работа № 11. Кручение круглого стержня. НДС в цилиндрической системе координат

Цель работы: получить навыки постановки и решения задач кручения, анализа результатов в цилиндрической системе координат.

11.1 Общие сведения

При кручении круглого стержня максимальные касательные напряжения возникают на его периферии и определяются по формуле

$$\tau_{\max} = \frac{Tr}{J_p},$$

где T – крутящий момент;

r – радиус стержня;

J_p – полярный момент инерции сечения, $J_p = \pi r^4 / 2$.

Угол закручивания стержня определяется как

$$\varphi = \frac{TL}{J_p G},$$

где L – длина стержня;

G – модуль сдвига.

Модель для исследования представляет собой круглый стержень диаметром 100 мм и длиной 1000 мм. Один из концов стержня жестко закреплен, а на другом приложен крутящий момент величиной 10000 Н·м (рисунок 11.1).

Рисунок 11.1 – Модель круглого стержня

Материал детали – легированная сталь с модулем сдвига $G = 7{,}9 \cdot 10^{10}$ Па.

Тогда

$$J_p = \pi r^4 / 2 = \pi \cdot 0{,}05^4 / 2 = 9{,}8175 \cdot 10^{-6} \text{ м}^4.$$

$$\tau_{\max} = \frac{Tr}{J_p} = \frac{10000 \cdot 0.05}{9{,}8175 \cdot 10^{-6}} = 50{,}93 \cdot 10^6 \text{ Па}.$$

$$\varphi = \frac{TL}{J_p G} = \frac{10000 \cdot 1}{9{,}8175 \cdot 10^{-6} \cdot 7{,}9 \cdot 10^{10}} = 0{,}01289 \text{ рад.}$$

Проверим эти соотношения путем моделирования.

11.2 Порядок выполнения работы

Создать модель стержня в SolidWorks. Ось стержня должна быть расположена вдоль оси *X* глобальной системы координат.

Создать новое статическое исследование SolidWorks Simulation. Из библиотеки материалов выбрать легированную сталь и применить к модели.

Жестко закрепить один из торцов стержня. На другой торец приложить вращающий момент. В качестве направления для момента выбрать цилиндрическую грань стержня (рисунок 11.2).

Рисунок 11.2 – Задание крутящего момента на торце стержня

Для исключения изгиба вала из-за неравномерности сетки конечных элементов на цилиндрической грани стержня задать граничное условие «Ролик / ползун» (рисунок 11.3).

Рисунок 11.3 – Задание граничного условия «Ролик / ползун

Создать сетку конечных элементов со средним размером 8…10 мм. Сохранить модель и запустить исследование на расчет.

По окончании расчета вывести эпюру касательных напряжений τ_{xy} (рисунок 11.4).

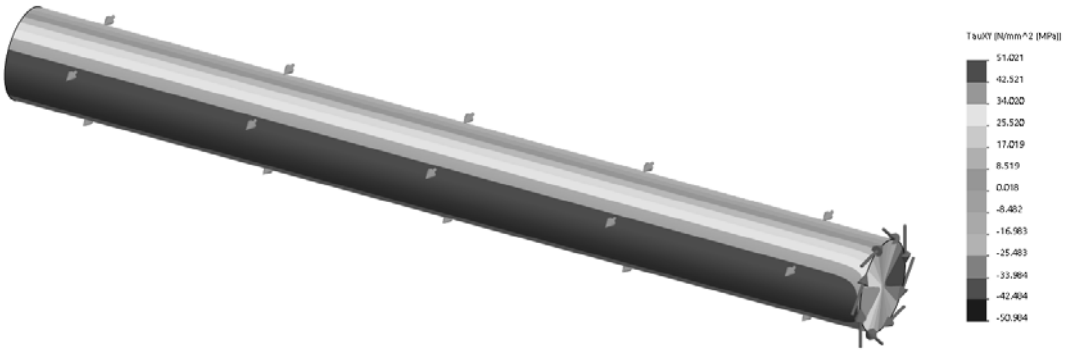

Рисунок 11.4 – Эпюра касательных напряжений

Сравнить максимальные значения напряжений с теоретическими. Вычислить погрешность, приняв теоретическое значение за базовое.

Исследовать распределение напряжений по среднему сечению вала. Для этого в контекстном меню эпюры (по клику правой клавишей мыши) выбрать пункт «Ограничение сечения…» (рисунок 11.5).

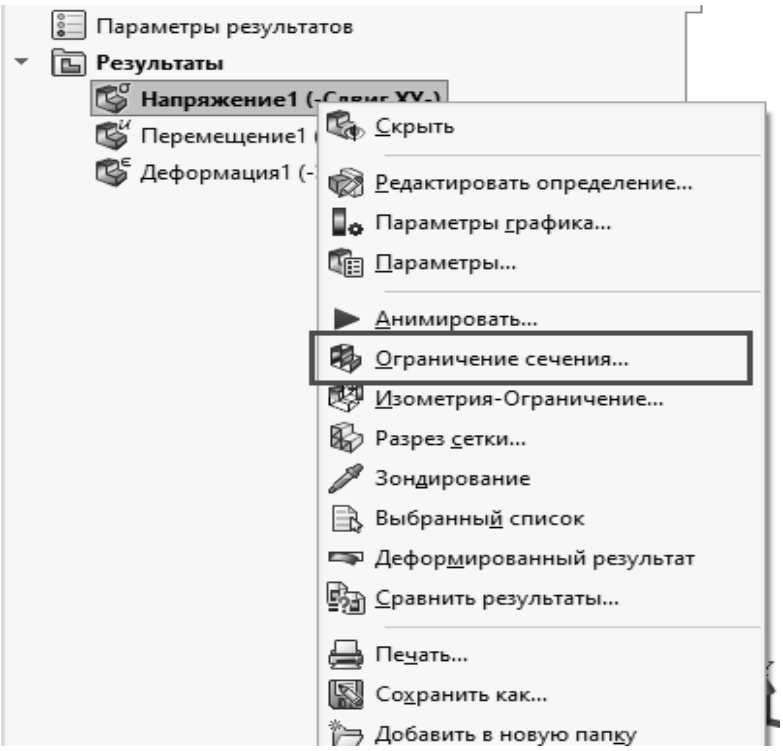

Рисунок 11.5 – Создание ограничения сечения

Создать сечения модели плоскостями «Сверху» и «Справа» (рисунок 11.6).

Инструментом «Зондирование» выбрать последовательно 5…7 точек на линии пересечения секущих плоскостей (рисунок 11.7).

Построить график распределения касательных напряжений по сечению стержня (рисунок 11.8).

Отметить линейный характер изменения напряжений по диаметру и величину касательного напряжения в центре стержня.

Для определения угла закручивания стержня построить эпюру перемещений вдоль оси Y (рисунок 11.9).

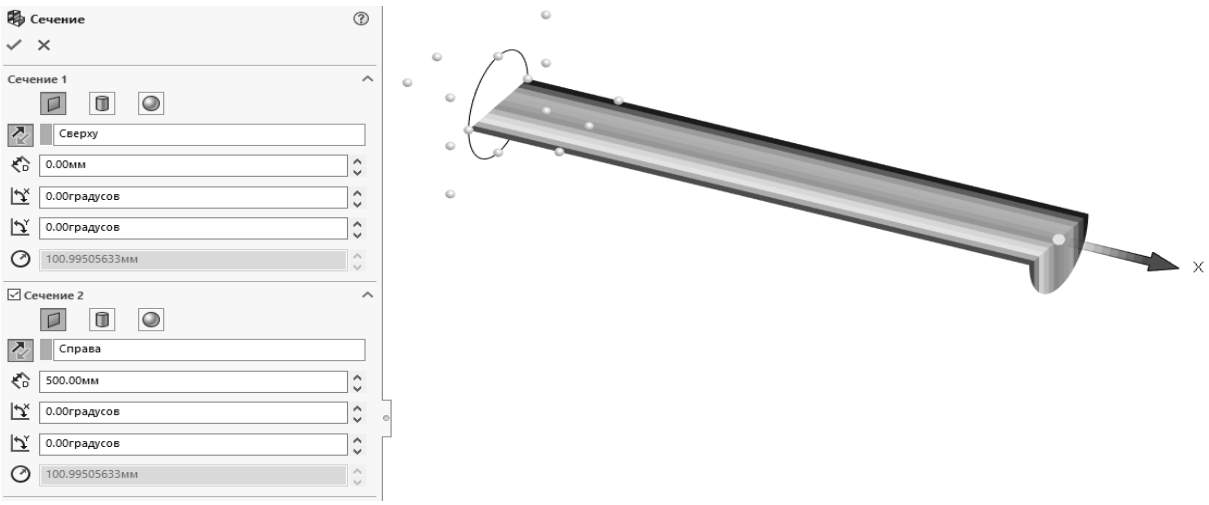

Рисунок 11.6 – Сечения модели плоскостями «Сверху» и «Справа»

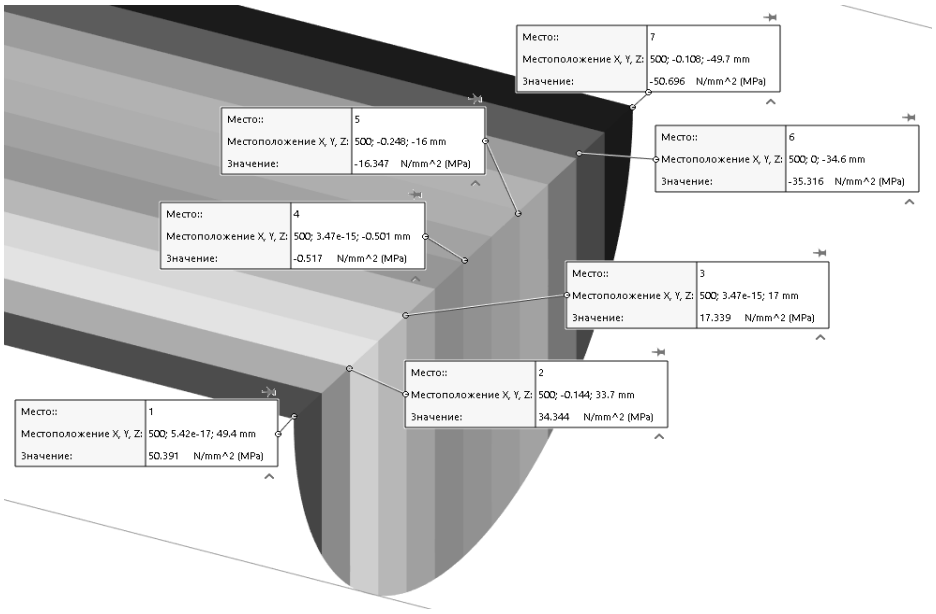

Рисунок 11.7 – Выбор точек для построения графика распределения касательных напряжений

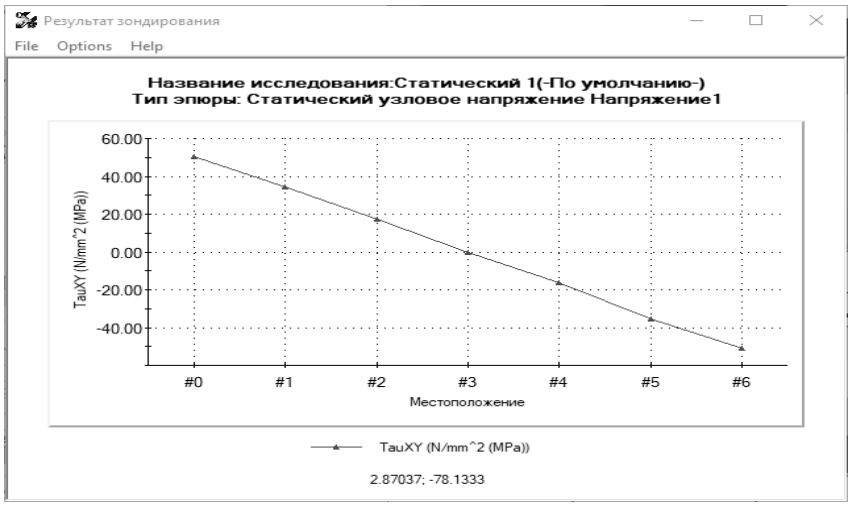

Рисунок 11.8 – График распределения касательных напряжений по диаметральному сечению стержня

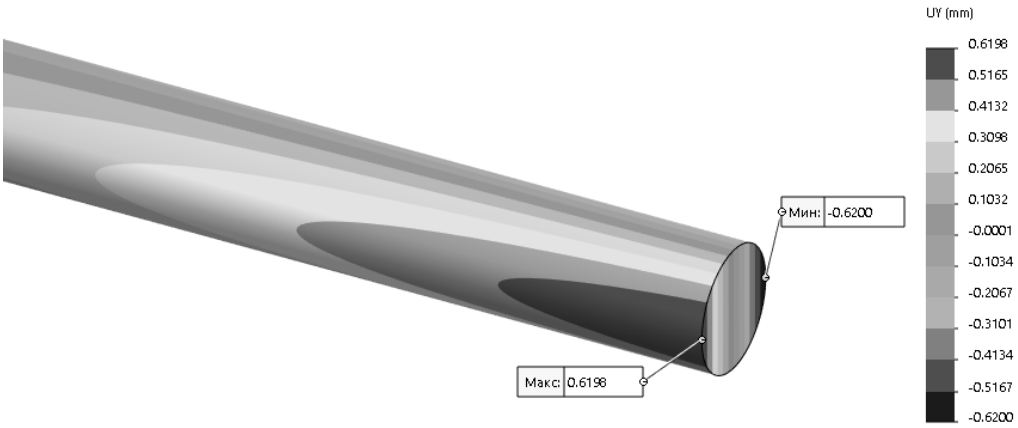

Рисунок 11.9 – Эпюра вертикальных перемещений

Точки с максимальным и минимальным перемещениями расположены диаметрально противоположно. Считая эти перемещения малыми величинами по сравнению с диаметром, угол закручивания стержня можно определить следующим образом:

$$\varphi = \frac{|u_{\min}| + u_{\max}}{2r} = \frac{0,6200 + 0,6198}{100} = 0,012398 \text{ рад.}$$

Сравнить это значение с теоретическим и вычислить относительную погрешность.

Для исследования НДС при кручении удобнее использовать не декартову систему координат, а цилиндрическую, в которой ортогональные направления X и Y заменены соответственно на R (радиальное) и θ (окружное или тангенциальное). Направление Z декартовой системы координат соответствует осевому направлению цилиндрической и обозначается таким же образом.

Перейти в цилиндрическую систему координат можно, указав ось стержня в разделе «Дополнительные параметры» эпюры напряжений или перемещений (рисунок 11.10).

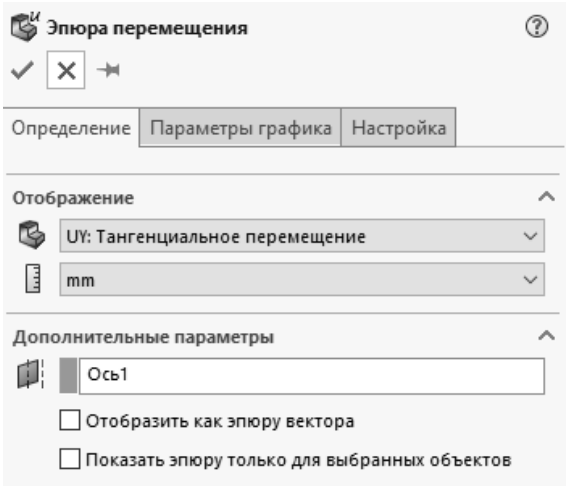

Рисунок 11.10 – Выбор оси для перехода в цилиндрическую систему координат

Создать ось можно через меню SolidWorks *Вставка – Справочная геометрия – Ось…*

Признаком того, что результат выведен в цилиндрической системе координат, является наличие символа в правом нижнем углу рабочей области (рисунок 11.11).

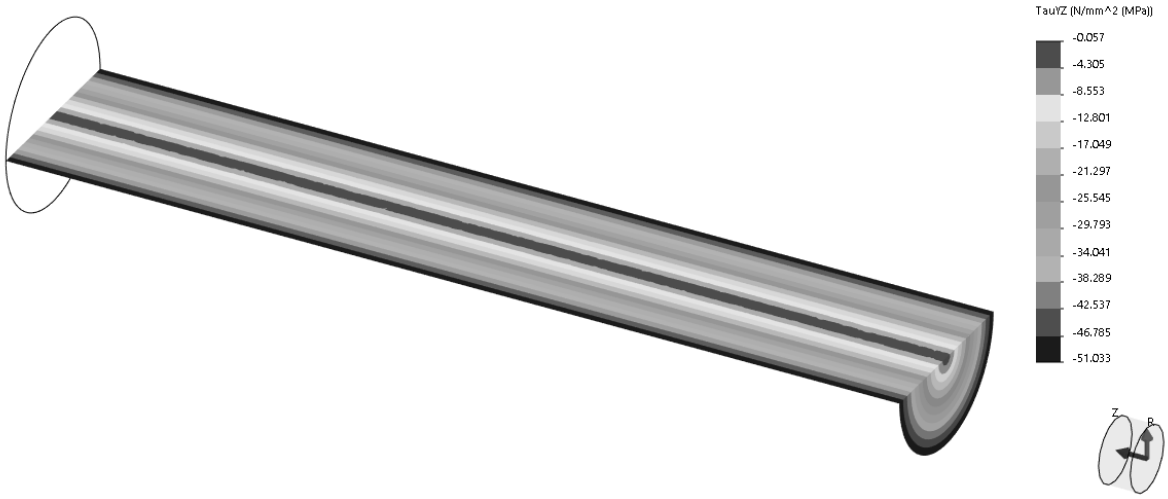

Рисунок 11.11 – Эпюра касательных напряжений в цилиндрической системе координат

На рисунке выше выведена эпюра распределения касательного напряжения τ_{zy}, что соответствует компоненту $\tau_{z\theta}$ в цилиндрической системе координат.

Аналогично можно вывести и эпюру окружных перемещений u_θ (рисунок 11.12).

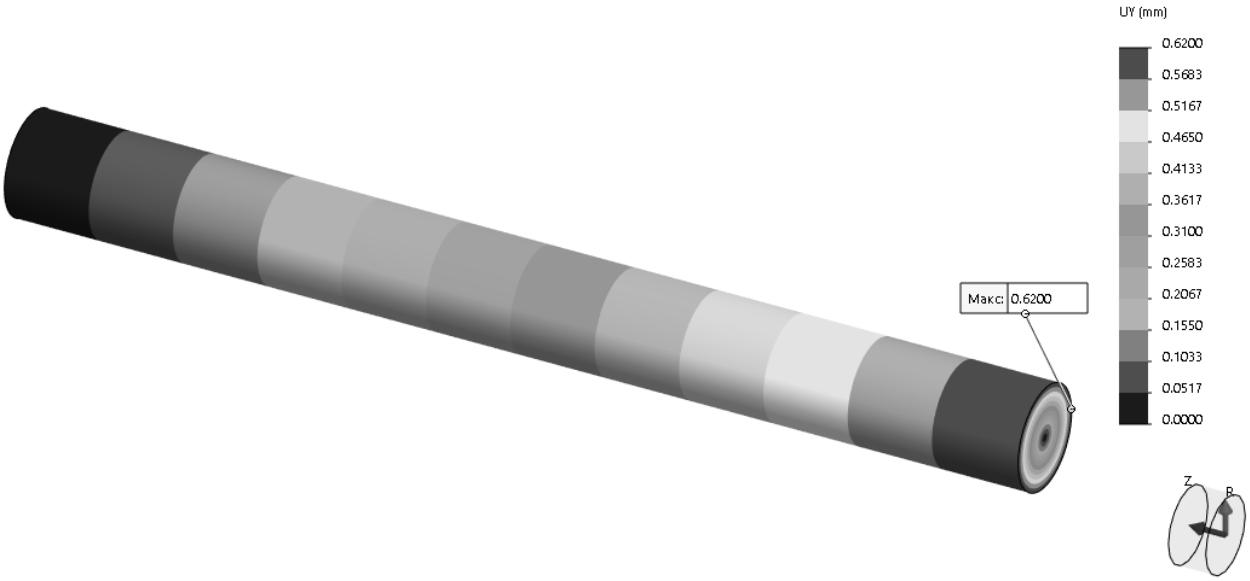

Рисунок 11.12 – Эпюра окружных перемещений в цилиндрической системе координат

Следует обратить внимание на то, что эпюры касательных напряжений и окружных перемещений имеют осесимметричный характер. Это является особенностью при выборе цилиндрической системы координат.

Оформить отчет.

Контрольные вопросы

1 Тензор напряжений при кручении. Характер распределения нормальных и касательных напряжений при кручении.

2 Анализ результатов при кручении в различных сечениях конструкции.

3 Анализ результатов в цилиндрической системе координат.

12 Лабораторная работа № 12. Чистый изгиб

Цель работы: получить навыки анализа напряженно-деформированного состояния чистого изгиба.

12.1 Общие сведения

Рассмотрим балку прямоугольного сечения шириной *b* и высотой *h*, которая подвергается чистому изгибу моментом *M*. В этом случае радиус кривизны изгиба будет постоянным по длине балки, а единственный ненулевой компонент напряжений будет σ_x.

Распределение нормальных напряжений по высоте сечения выражается формулой

$$\sigma_x = -\frac{My}{I}, \tag{12.1}$$

где M – изгибающий момент;

y – расстояние от нейтральной линии до рассматриваемого волокна;

I – момент инерции сечения, $I = bh^3/12$.

Максимальные / минимальные нормальные напряжения возникают на наружных волокнах балки при $y = \pm h/2$:

$$\sigma_{\max/\min} = \pm\frac{Mh}{2I}.$$

По закону Гука компоненты относительных деформаций рассчитываются как

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}; \quad \varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu\frac{\sigma_x}{E}; \quad \gamma_x = \gamma_y = \gamma_z = 0.$$

Кривизна (величина, обратная радиусу) нейтральной линии (на которой $\sigma_x = 0$) будет определяться как

$$k = \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}.$$

Проверим эти соотношения путем моделирования.

Модель для исследования представляет собой балку прямоугольного сечения $b \times h = 10 \times 20$ мм, длиной 100 мм. Изгибающий момент равен 100 Н·м.

Материал детали – легированная сталь.

Тогда

$$I = bh^3 / 12 = 0{,}01 \cdot 0{,}02^3 / 12 = 6{,}6667 \cdot 10^{-9} \text{ м}^4;$$

$$\sigma_{\max/\min} = \pm \frac{Mh}{2I} = \pm \frac{100 \cdot 0{,}02}{2 \cdot 6{,}6667 \cdot 10^{-9}} = \pm 150 \cdot 10^6 \text{ Па};$$

$$(\varepsilon_x)_{\max/\min} = \frac{\sigma_{\max/\min}}{E} = \pm \frac{150 \cdot 10^6}{210 \cdot 10^9} = \pm 7{,}143 \cdot 10^{-4};$$

$$(\varepsilon_y)_{\max/\min} = (\varepsilon_z)_{\max/\min} = \nu(\varepsilon_x)_{\max/\min} = \pm 0{,}28 \cdot 7{,}143 \cdot 10^{-4} = \pm 2{,}00 \cdot 10^{-4}.$$

12.2 Порядок выполнения работы

Создать модель балки в SolidWorks. Ось балки должна быть расположена вдоль оси *X* глобальной системы координат (рисунок 12.1).

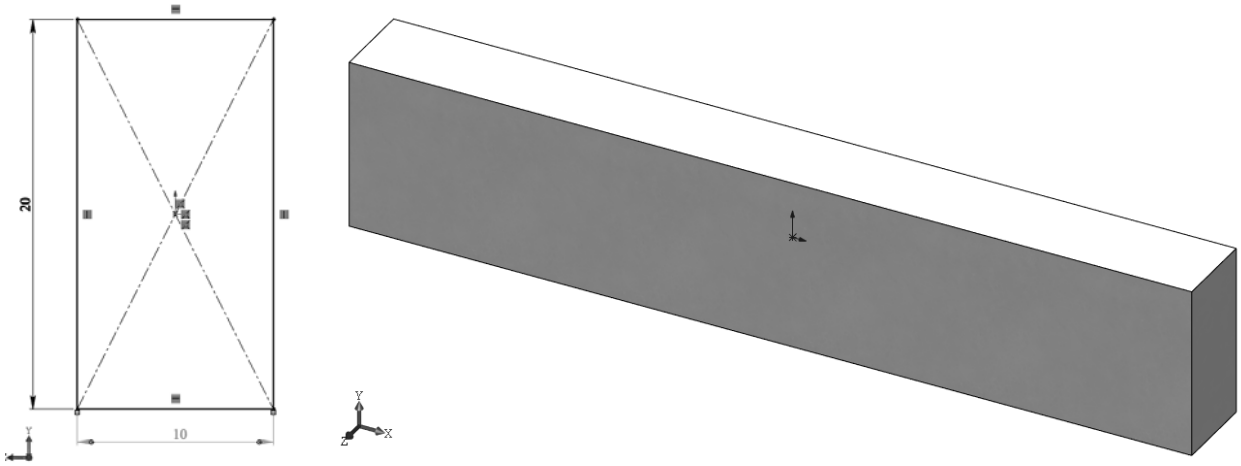

Рисунок 12.1 – Геометрическая модель балки

Создать оси (справочную геометрию) по линиям пересечения торцовых граней балки с плоскостью «Сверху» (рисунок 12.2).

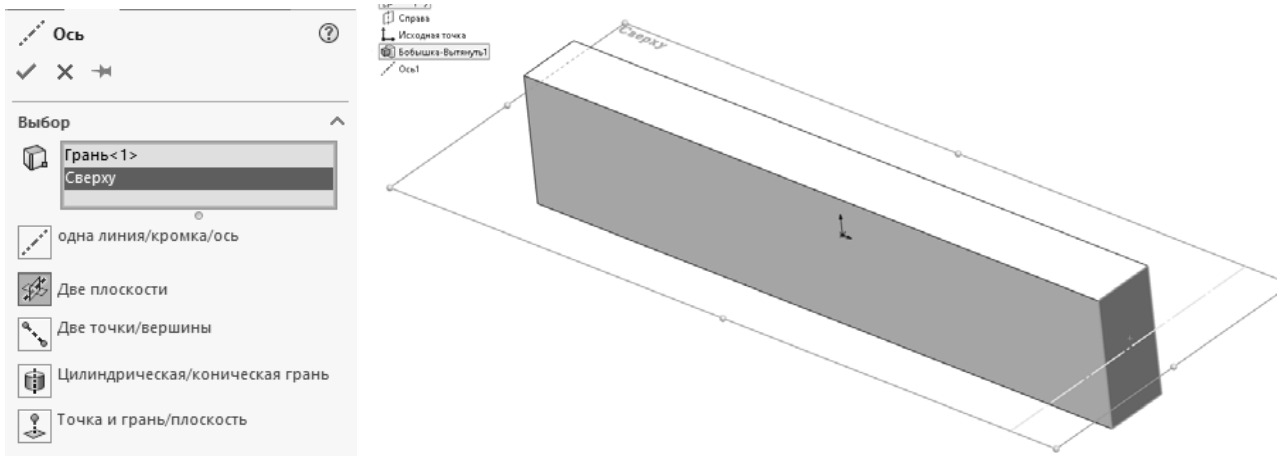

Рисунок 12.2 – Создание справочных осей

Создать новое статическое исследование SolidWorks Simulation. Из библиотеки материалов выбрать легированную сталь и применить к модели.

Зафиксировать нижнюю кромку левой торцовой грани (рисунок 12.3).

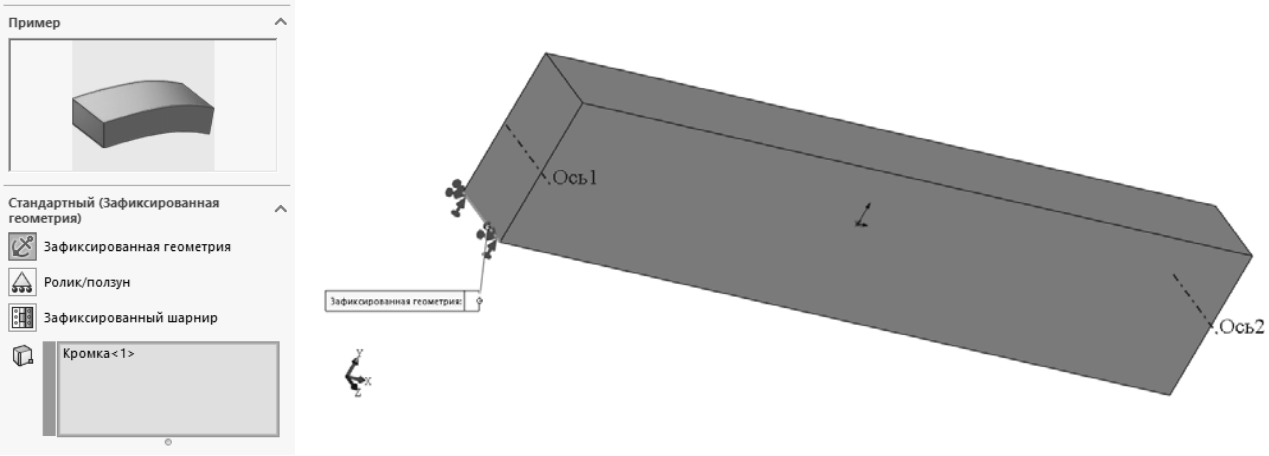

Рисунок 12.3 – Фиксация кромки балки

В контекстном меню раздела «Крепления» выбрать пункт «Расширенные крепления…» и зафиксировать нижнюю кромку правой торцовой грани в нормальном направлении относительно верхней грани балки (рисунок 12.4).

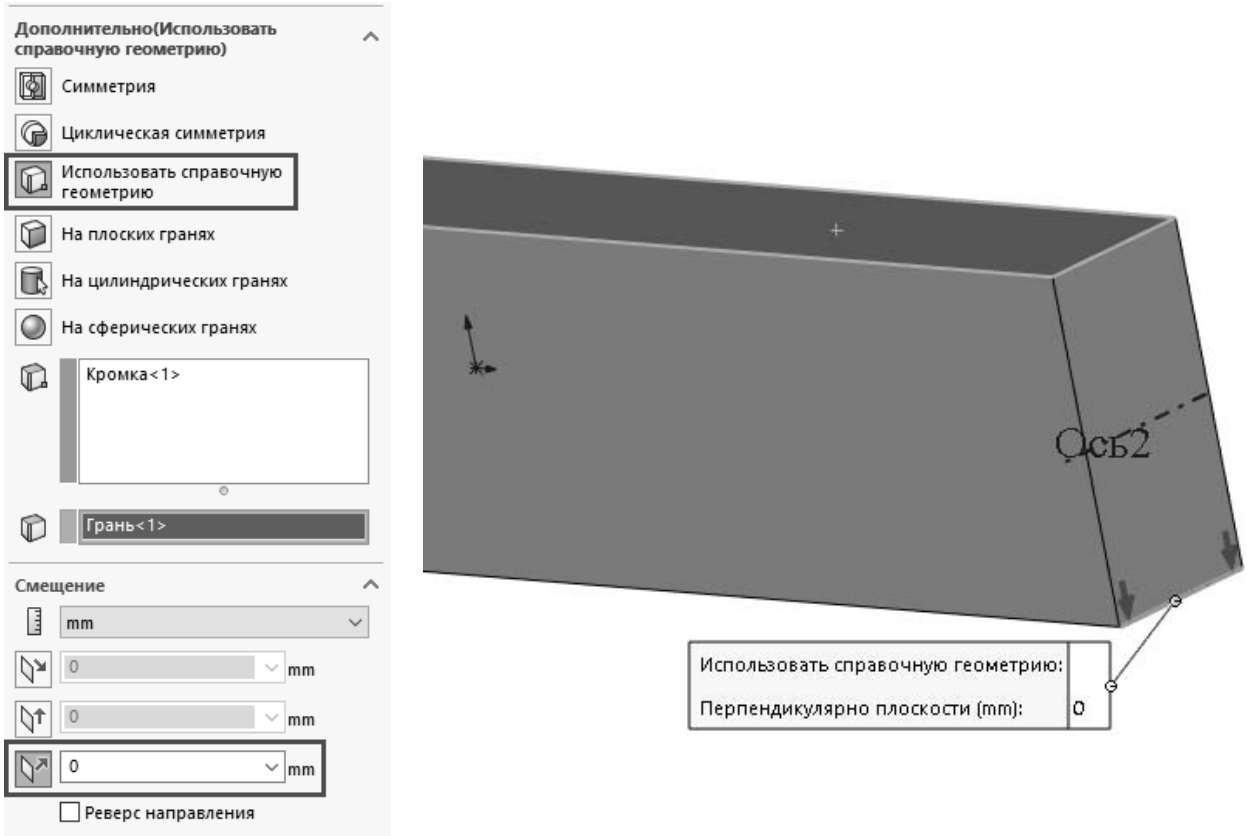

Рисунок 12.4 – Запрет перемещения кромки балки в вертикальном направлении

Приложить к торцовым граням вращающие моменты величиной 100 Н·м относительно справочных осей. Следует обратить внимание на то, что стрелки момента должны сжимать верхнюю часть балки (рисунок 12.5).

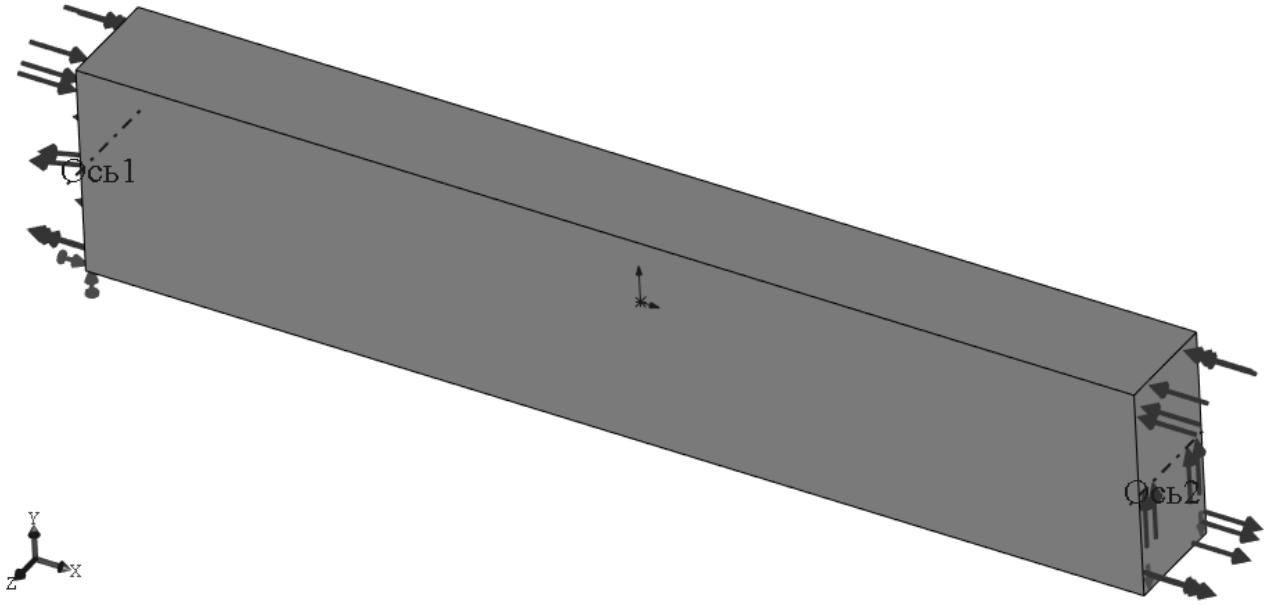

Рисунок 12.5 – Задание изгибающих моментов на торцах балки

Сохранить проект и запустить исследование на расчет. Сетка конечных элементов построится автоматически с настройками по умолчанию.

По окончании расчета построить эпюру нормальных напряжений σ_x (рисунок 12.6).

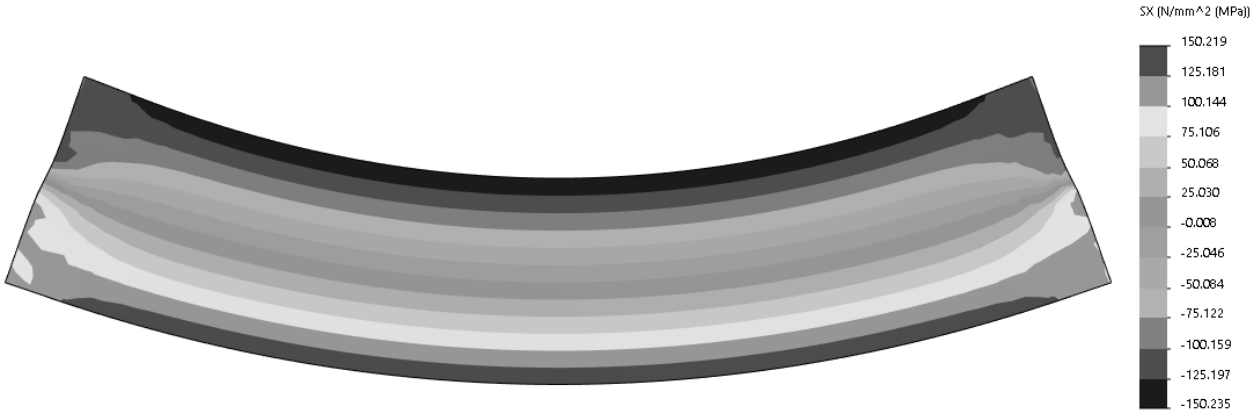

Рисунок 12.6 – Эпюра нормальных напряжений

Как видно, максимальные напряжения возникают на нижних волокнах балки и составляют около 150 МПа (растяжение), а минимальные – на верхних волокнах (сжатие, минус 150 МПа), что соответствует теории.

Согласно уравнению (12.1) нормальные напряжения распределяются линейно по высоте балки. Следует проверить это, создав два сечения и выбрав несколько точек по линии их пересечения (рисунок 12.7).

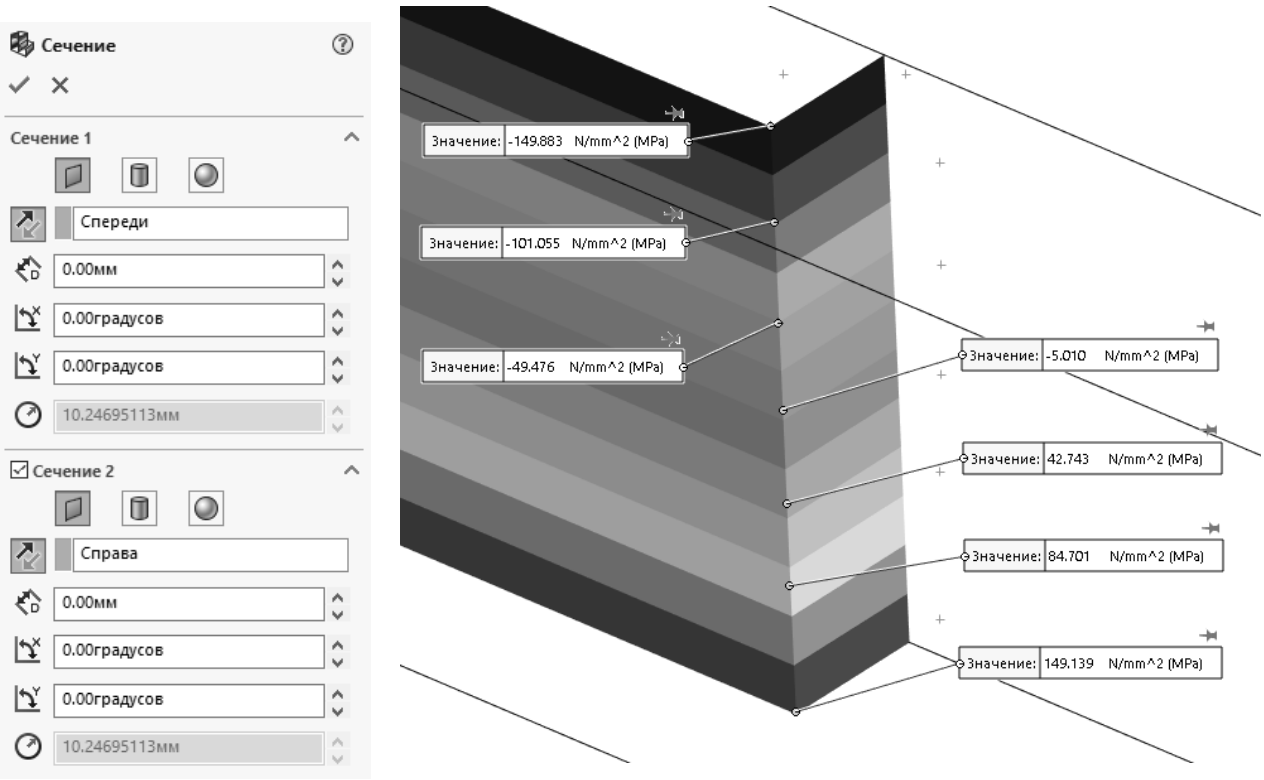

Рисунок 12.7 – Создание сечений и выбор точек для построения графика распределения нормальных напряжений

Построить график распределения нормальных напряжений по высоте балки (рисунок 12.8).

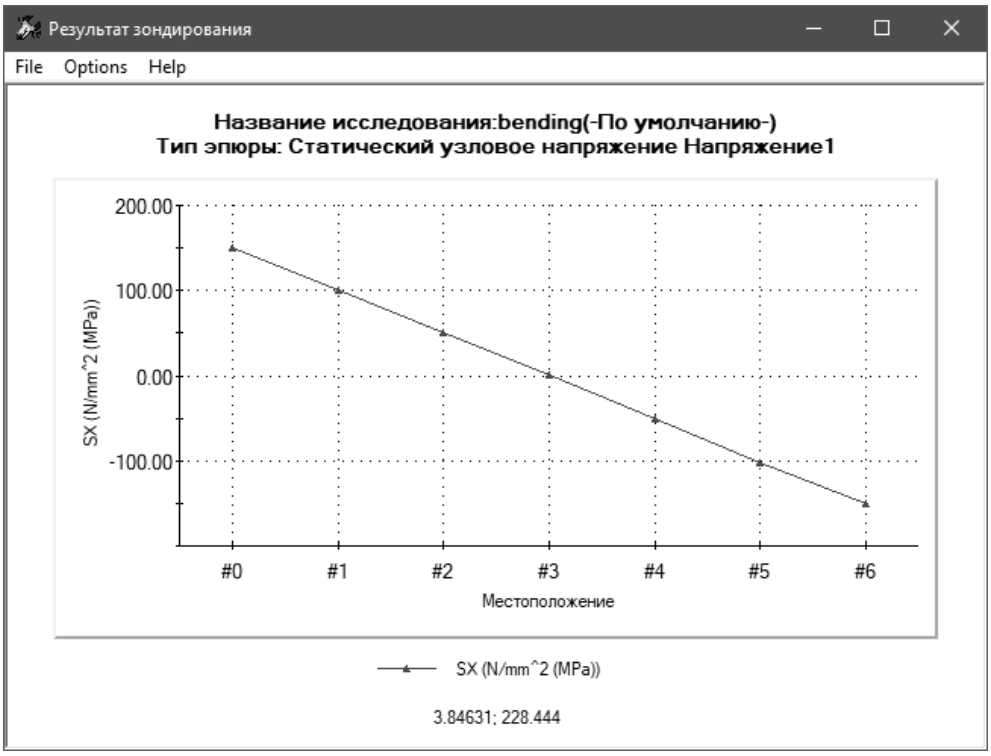

Рисунок 12.8 – График распределения нормальных напряжений

Создать эпюру нормальной относительной деформации ε_x, а на ней – ограничение сечения плоскостью «Справа» (рисунок 12.9).

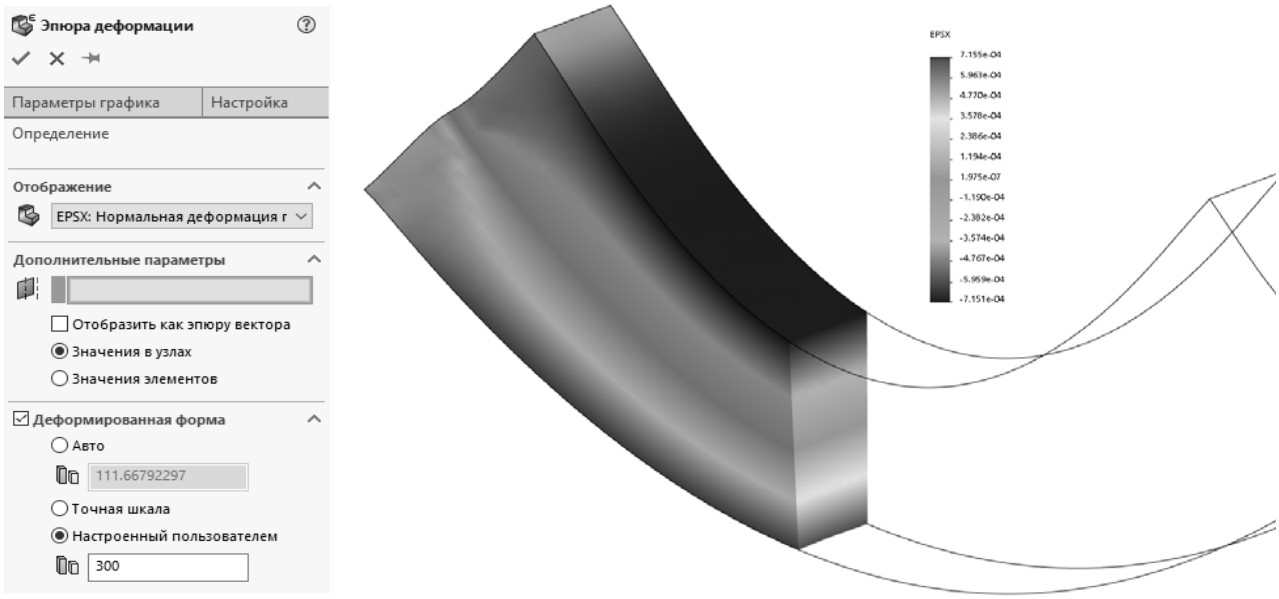

Рисунок 12.9 – Эпюра относительной деформации в поперечном сечении балки

Сравнить полученные значения продольной относительной деформации с теоретическими, вычислить погрешность.

Большой масштаб отображения результата (около 300) позволит увидеть эффект Пуассона, когда при продольной деформации возникает и поперечная.

Вывести эпюру относительной деформации ε_y и в среднем сечении определить максимальное и минимальное значения (рисунок 12.10). Сравнить их с теоретическими, вычислить погрешность.

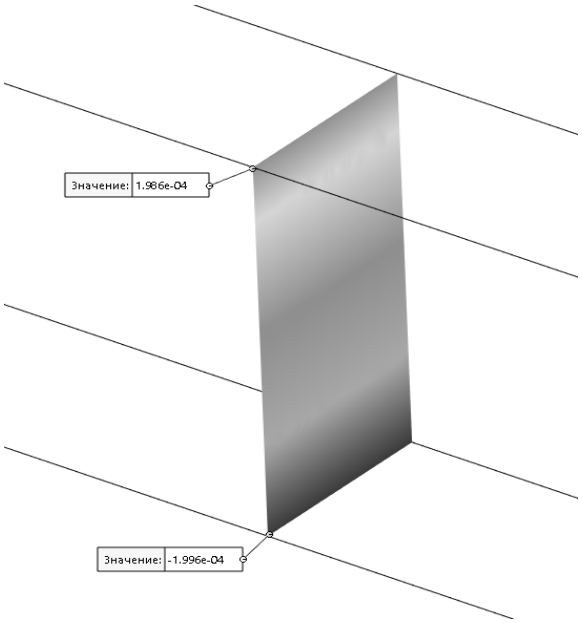

Рисунок 12.10 – Эпюра поперечной деформации в поперечном сечении балки

Сделать выводы. Оформить отчет.

Контрольные вопросы

1 Характер распределения напряжений при изгибе.
2 Определение напряжений и деформаций в стержне при изгибе.
3 Эффект Пуассона при изгибе.

13 Лабораторная работа № 13. Энергия и работа деформации

Цель работы: получить навыки вычисления энергии и работы деформации твердого тела.

13.1 Общие сведения

Внешние силы, приложенные к упругому телу, вызывают его деформацию и приводят к изменению потенциальной энергии тела, которая также называется энергией деформации. Энергия деформации, отнесенная к объему тела, называется плотностью энергии деформации и определяется следующим образом:

$$u_0 = \frac{1}{2}\left(\sigma_x\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_y + \sigma_y\varepsilon_y + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{zx}\gamma_{zx}\right). \quad (13.1)$$

Работа внешней силы, действующей на тело, определяется через величину этой силы F и перемещение тела Δ:

$$W = \frac{1}{2}F\Delta. \quad (13.2)$$

Плотность энергии деформации может быть также определена через отношение выполненной работы W к объему тела V:

$$u_0 = W/V. \quad (13.3)$$

13.2 Порядок выполнения работы

Открыть проект, выполненный в лабораторной работе № 4, и создать копию исследования.

Отредактировать величину приложенной силы, установив значение 10000 Н.

Запустить исследование на расчет. Построить эпюру нормальных напряжений σ_x и записать его среднее значение для тела. Построить эпюру нормальных перемещений Δ_x и записать его максимальное значение.

Вычислить значения работы и плотности энергии деформации по формулам (13.1) – (13.3). Построить эпюру плотности энергии деформации и сравнить ее среднее значение с вычисленным ранее.

Сделать вывод. Оформить отчет.

Контрольные вопросы

1 Энергия деформированного тела как функционал.
2 Плотность энергии деформации.
3 Вариационный принцип Лагранжа.
4 Работа внешних сил.
5 Принцип Кастильяно.

14 Лабораторная работа № 14. Исследование плоского напряженного состояния

Цель работы: получить навыки подготовки и анализа твердых тел, находящихся в плоском напряженном состоянии.

14.1 Общие сведения

Плосконапряженное состояние возникает, когда в твердом теле не возникают напряжения вдоль оси *Z*, т. е.

$$\sigma_z = 0; \quad \tau_{yz} = 0; \quad \tau_{zx} = 0.$$

Задача может рассматриваться как плосконапряженная, если тело в направлении толщины (в направлении *Z*) не имеет граничных условий и нет сил, действующих не в плоскости *XY*.

В этом случае уравнения закона Гука принимают следующий вид:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \mu\frac{\sigma_y}{E}; \quad \varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \mu\frac{\sigma_x}{E}; \quad \varepsilon_z = -\mu\frac{\sigma_x}{E} - \mu\frac{\sigma_y}{E}. \tag{14.1}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}; \quad \gamma_{yz} = 0; \quad \gamma_{zx} = 0. \tag{14.2}$$

Не равное нулю значение ε_z объясняется свободой тела в поперечном направлении.

14.2 Порядок выполнения работы

Открыть файл Lab_14.sldprt. Создать новое статическое исследование, установив флажок «Использовать 2D-упрощение» (рисунок 14.1).

В появившемся диалоговом окне оставить выбранным тип исследования «Плоское напряженное», плоскость для размещения – «Спереди», глубина сечения – 10 мм. Завершить настройку исследования.

Из библиотеки материалов Simulation выбрать и применить к модели легированную сталь.

Жестко зафиксировать левую вертикальную кромку модели, а к правой приложить растягивающую силу величиной 10000 Н.

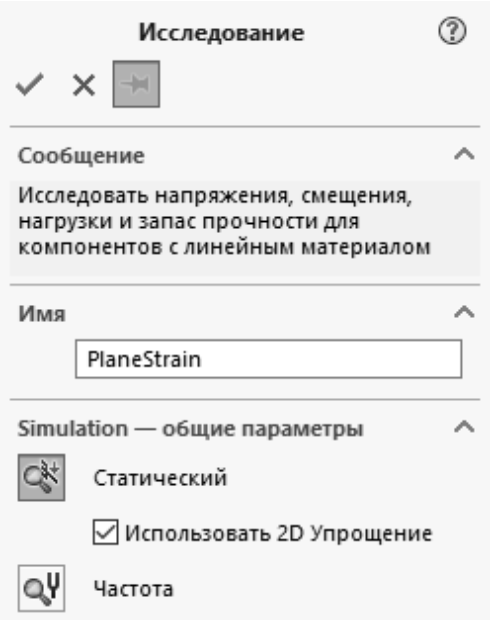

Рисунок 14.1 – Настройки исследования

Создать расчетную сетку на основе кривизны со следующими параметрами: минимальный размер элемента – 1 мм; число элементов в окружности – 32; коэффициент роста – 1,2.

Запустить исследование на расчет. Построить эпюру первых главных напряжений, установив флажок «Отобразить как эпюру вектора». Проанализировать направления главных напряжений на различных участках модели.

Выбрать произвольную точку на модели и проверить, выполняется ли в ней третье уравнение (14.1).

Сделать выводы. Оформить отчет.

Контрольные вопросы

1 Тензор напряжений и деформаций для тела, находящегося в плоском напряженном состоянии.

2 Уравнения закона Гука для плоского напряженного состояния тела.

3 Основные уравнения плоской задачи.

15 Лабораторная работа № 15. Исследование плоского деформированного состояния

Цель работы: получить навыки подготовки и анализа твердых тел, находящихся в плоском деформированном состоянии.

15.1 Общие сведения

Плоское деформированное состояние возникает, когда твердое тело не испытывает деформаций в поперечном направлении (вдоль оси *Z*), т. е.

$$\varepsilon_z = 0; \quad \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0.$$

Уравнения закона Гука в данном случае примут вид:

$$\sigma_x = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)}\left[(1-\mu)\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y\right];$$

$$\sigma_y = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)}\left[(1-\mu)\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x\right]; \qquad (15.1)$$

$$\sigma_z = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)}\left[\mu\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y\right].$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy}; \quad \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0. \qquad (15.2)$$

Типичным примером плоского деформированного состояния является длинная труба, нагруженная внутренним давлением.

Уравнения (15.1) и (15.2) показывают, что все напряжения в направлении Z равны нулю за исключением σ_z, что объясняется фиксацией тела в этом направлении.

12.2 Порядок выполнения работы

Открыть файл Lab_15.sldprt и создать новое статическое исследование. Установить флажок «Использовать 2D-упрощение» (см. рисунок 14.1).

В появившемся диалоговом окне оставить установить тип исследования «Плоское деформированное», плоскость для размещения – «Спереди», глубина сечения – 50 мм. Завершить настройку исследования.

Из библиотеки материалов Simulation выбрать и применить к модели легированную сталь.

Применить к радиальным кромкам модели граничное условие «Ролик / ползун», а к внутренней кромке трубы приложить давление, равное 200 МПа (рисунок 15.1).

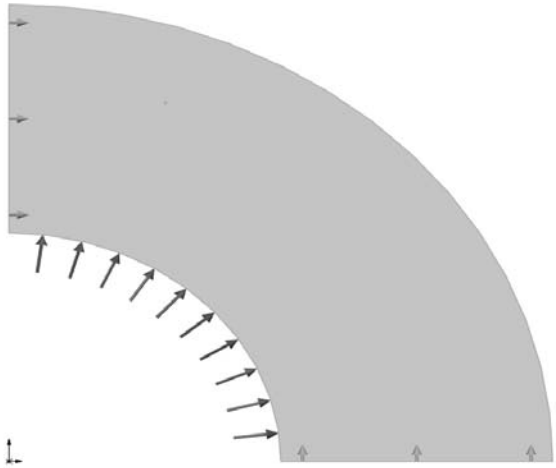

Рисунок 15.1 – Модель трубы с граничными условиями и давлением

Создать расчетную сетку с параметрами по умолчанию, сохранить проект и запустить исследование на расчет.

Построить эпюру радиальных напряжений в трубе. Для этого необходимо выбрать компонент «SX: Нормальное напряжение X», а в разделе «Дополнительные параметры» указать ось трубы для перехода в цилиндрическую систему координат (рисунок 15.2).

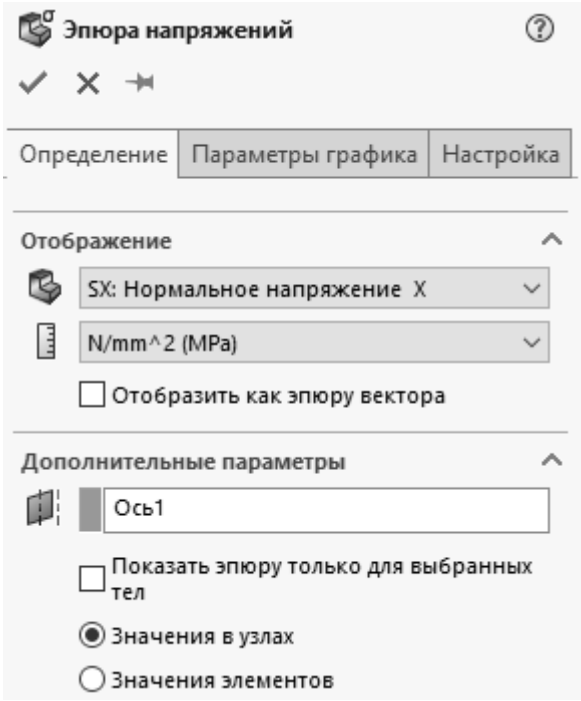

Рисунок 15.2 – Настройки эпюры радиальных напряжений

Построить график изменения радиального напряжения по толщине стенки трубы, выбрав инструментом «Зондирование» одну из радиальных кромок (рисунок 15.3).

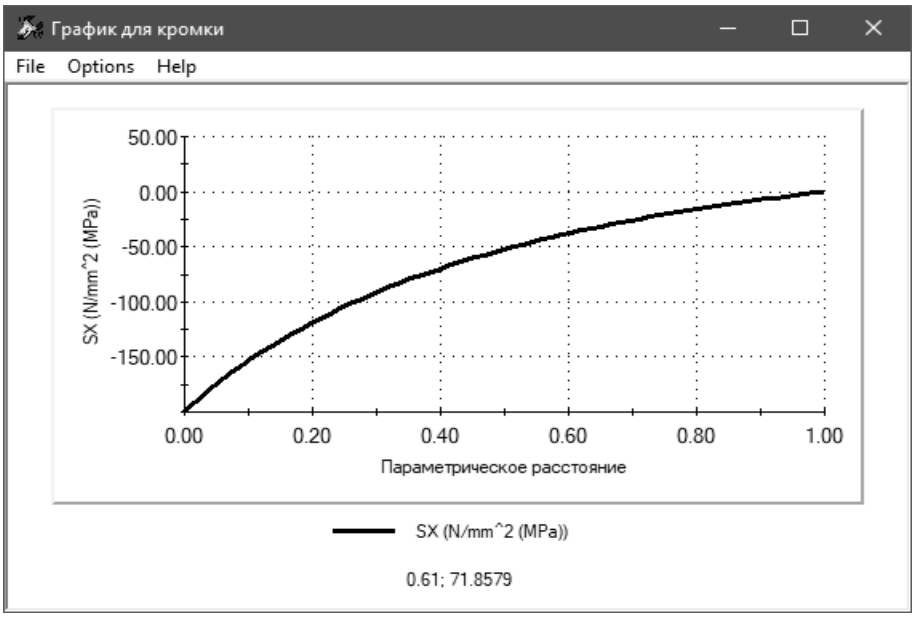

Рисунок 15.3 – График изменения радиальных напряжений по толщине стенки трубы

Построить эпюру окружных напряжений, выбрав компонент «SY: Нормальное напряжение Y». Аналогично построить график изменения окружных напряжений по толщине стенки трубы.

Построить и исследовать эпюры главных напряжений в векторном виде. Для удобства можно установить больший масштаб векторов.

Выбрать произвольную точку на модели и проверить выполнение третьего уравнения (15.1).

Сделать выводы, оформить отчет.

Контрольные вопросы

1 Уравнения закона Гука для плоского деформированного состояния тела.

2 Порядок постановки и решения задачи плоского деформированного состояния тела.

3 Особенности анализа результатов решения задачи с учетом плоского деформированного состояния тела.

16 Лабораторная работа № 16. Решение осесимметричных задач

Цель работы: получить навыки подготовки и решения задач в осесимметричной постановке.

16.1 Общие сведения

В телах вращения, для которых нагрузки и граничные условия симметричны относительно одной из осей (например, *Z*), напряжения и деформации не зависят от окружной координаты θ в цилиндрической системе координат. Это дает возможность исключить окружную координату и рассматривать задачу как плоскую в координатах *r*-*Z*.

В осесимметричных задачах отсутствуют деформации сдвига в окружном направлении, т. е.

$$\gamma_{r\theta} = \gamma_{z\theta} = 0,$$

что приводит к отсутствию касательных напряжений в этом направлении

$$\tau_{r\theta} = \tau_{z\theta} = 0.$$

16.2 Порядок выполнения работы

Открыть проект, созданный в лабораторной работе № 15. Создать новое статическое исследование с установленным флажком «Использовать 2D-упрощение».

Установить тип исследования «Осесимметричное». В качестве плоскости для размещения сечения выбрать нижнюю грань трубы, указать «Ось1» в качестве оси вращения (рисунок 16.1).

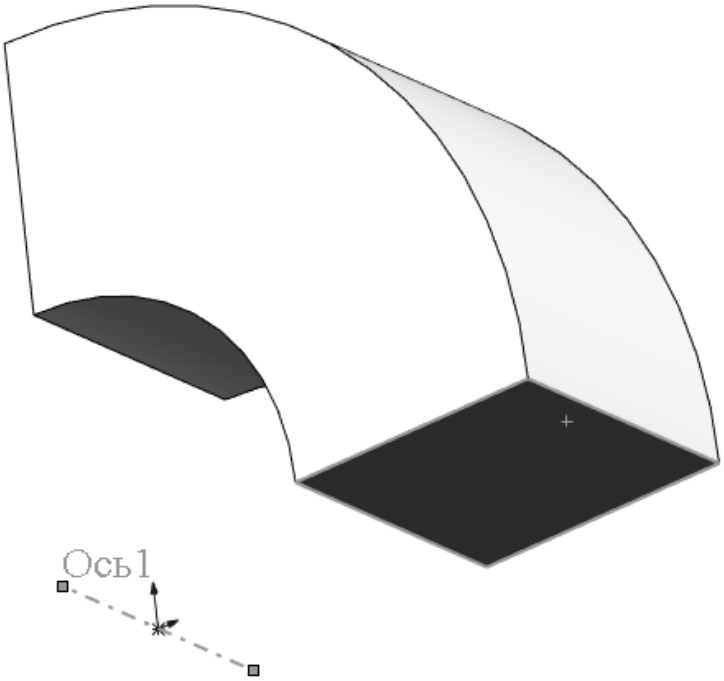

Рисунок 16.1 – Выбор грани и оси вращения

Применить к верхней и нижним кромкам трубы (при взгляде на модель сверху) граничное условие «Ролик / ползун». К левой кромке приложить давление величиной 200 МПа (рисунок 16.2).

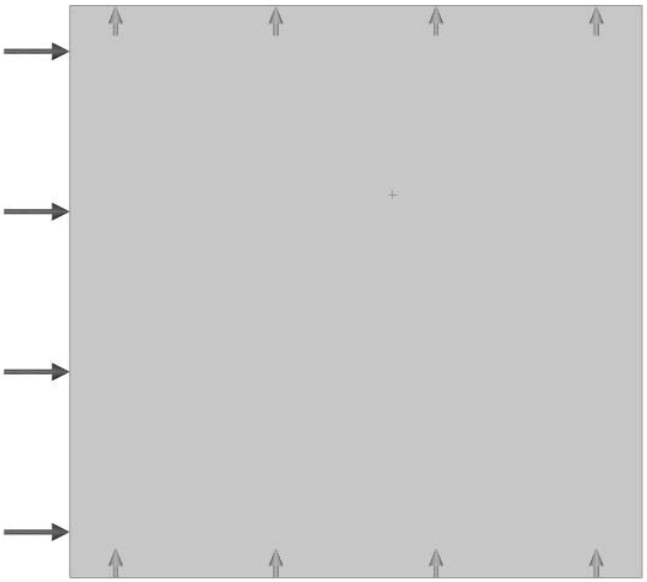

Рисунок 16.2 – Модель трубы с граничными условиями и давлением

Из библиотеки материалов Simulation выбрать и применить к модели легированную сталь.

Построить расчетную сетку с параметрами по умолчанию, сохранить проект и запустить исследование на расчет.

Так же, как и в лабораторной работе № 15, построить эпюры радиальных и окружных напряжений, построить графики их распределения по толщине стенки трубы. Сравнить результаты с результатами лабораторной работы № 15.

Сделать выводы, оформить отчет.

Контрольные вопросы

1 Особенности постановки и решения осесимметричных задач.

2 Признак осевой симметрии задачи.

3 Анализ результатов в цилиндрической системе координат.

Список литературы

1 **Чемодуров, В. Т.** Основы теории упругости, пластичности и ползучести: учебное пособие / В. Т. Чемодуров, С. Г. Ажермачев, К. С. Пшеничная-Ажермачева. – Москва: ИНФРА-М, 2020. – 238 с.

2 **Горшков, А. Г.** Теория упругости и пластичности: учебник для вузов / А. Г. Горшков, Э. И. Старовойтов, Д. В. Тарлаковский. – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 416 с.

3 **Александров, А. В.** Основы теории упругости и пластичности: учебник для строит. спец. вузов / А. В. Александров, В. Д. Потапов. – Москва: Высшая школа, 1990. – 400 с.