МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Основы проектирования машин»

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Методические рекомендации к практическим занятиям для студентов специальности 1-53 01 05 «Автоматизированные электроприводы» дневной формы обучения

Часть 2

КИНЕМАТИКА

Могилев 2020

УДК 531
ББК 30.12
Т 33

Рекомендовано к изданию
учебно-методическим отделом
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Основы проектирования машин» «15» января 2020 г., протокол № 7

Составитель Е. С. Лустенкова

Рецензент канд. техн. наук, доц. И. В. Лесковец

Методические рекомендации к практическим занятиям предназначены для студентов специальности 1-53 01 05 «Автоматизированные электроприводы» дневной формы обучения.

Учебно-методическое издание

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Часть 2

Ответственный за выпуск А. П. Прудников

Корректор И. В. Голубцова

Компьютерная верстка Н. П. Полевничая

Подписано в печать . Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Печать трафаретная. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 50 экз. Заказ №

Издатель и полиграфическое исполнение:
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования
«Белорусско-Российский университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/156 от 07.03.2019.
Пр-т Мира, 43, 212022, Могилев.

Содержание

Введение

Раздел «Кинематика» в курсе теоретической механики изучается после статики и предваряет динамику. Кинематика изучает движение тел с чисто геометрической точки зрения. Для студентов специальности 1-53 01 05 «Автоматизированные электроприводы» важным является освоение основ кинематики для определения скоростей и ускорений точек, особенно применительно к вращающимся телам. Данные методические рекомендации охватывают практический курс кинематики и включают такие важные темы, как кинематика точки и механической системы, определение скоростей и ускорений в различных случаях движения тела.

Проведению практического занятия, как правило, предшествует лекционное занятие по соответствующей тематике. Перед началом практического занятия студент ознакомляется с краткими теоретическими сведениями, представленными в данных методических рекомендациях либо в источниках, взятых за основу при подготовке материала [1, 2]. На базе этих сведений и лекционного материала студенты отвечают на контрольные вопросы. Далее совместно с преподавателем разбирается задача, решение которой приведено в разделе «Решение задач». Остальные задачи студенты решают самостоятельно в аудитории либо в виде домашнего задания. Далее будут приведены задачи из [2].

Все отчеты оформляются на листах бумаги формата А4 с титульным листом, на котором указывается следующее: учебное заведение; кафедра; дисциплина; наименование темы индивидуального задания; фамилия и инициалы студента; фамилия, инициалы и должность преподавателя; год оформления отчета.

Отчет содержит исходные данные к расчету (в том числе схему), ход решения задач с обязательной расшифровкой принятых обозначений, необходимые пояснения к задаче. После проведения расчетов приводится ответ.

Методические рекомендации можно использовать для подготовки к зачету по дисциплине «Теоретическая механика» и для ее самостоятельного изучения. Для более детального усвоения курса студентам следует обращаться к [3, 4].

1 Кинематика

1.1 Кинематика точки. Способы задания движения точки

Контрольные вопросы

1 Как задается движение точки векторным способом?

2 Какими уравнениями задается движение точки координатным способом?

3 Какие параметры нужно указать при задании движения точки естественным способом?

4 Как определяются скорость и ускорение точки?

5 Как определить скорость точки, зная ее ускорение (функцию по времени)?

Краткие теоретические сведения

Пусть точка *M* движется по отношению к некоторой системе отсчета *OXYZ* (рисунок 1).

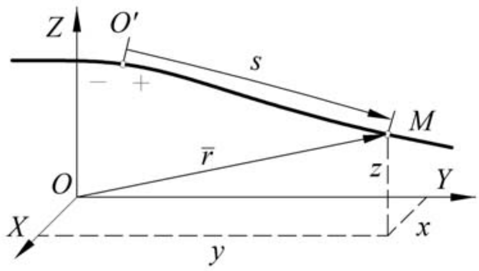

Рисунок 1

Положение этой точки в любой момент времени можно определить, задав ее радиус-вектор $\vec{r}$, проведенный из точки *O* в точку *M*. Он является переменным вектором (вектор-функцией), зависящим от времени *t*:

$$\vec{r} = \vec{r}(t).$$

Данное равенство определяет закон движения точки в векторной форме, т. к. оно позволяет в любой момент времени построить соответствующий радиус-вектор и найти положение движущейся точки. Это и есть **векторный способ** задания движения.

Если зависимость $\vec{r} = \vec{r}(t)$ спроецировать на оси координат, то будут заданы координаты *x*, *y* и *z* точки как функции времени.

$$x = f_1(t);\ \ y = f_2(t);\ \ z = f_3(t).$$

Такой способ задания движения точки будет называться **координатным.**

Если движение точки происходит в одной плоскости, то, приняв эту плоскость за плоскость *OXY*, получим два уравнения движения:

$$x = f_1(t);\ \ y = f_2(t).$$

При прямолинейном движении точки, направив вдоль ее траектории координатную ось *OX*, движение будет определяться одним уравнением:

$$x = f_1(t).$$

Естественным способом задания движения точки удобно пользоваться в случае, если известна траектория движущейся точки.

Движение точки считается описанным естественным способом, если известны (см. рисунок 1): траектория; дуговая координата $s = s(t)$; начало отсчёта (0′); положительное (+) направление отсчета s. Величина s в уравнении определяет положение движущейся точки на траектории, а не пройденный ею путь.

Определение скорости и ускорения движущейся точки при векторном способе задания ее движения.

Вектор скорости точки равен первой производной от ее радиус-вектора по времени и направлен по касательной к траектории точки в сторону движения:

$$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

Размерность скорости – метр в секунду.

Вектор ускорения точки равен первой производной от вектора скорости или второй производной от радиус-вектора точки по времени:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}.$$

Размерность ускорения – метр на секунду в квадрате.

Определение скорости и ускорения точки при координатном способе задания ее движения.

За основу примем векторный способ. Вектор скорости точки $\vec{\upsilon} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$. При этом $\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z$. Значит, $\vec{\upsilon} = \dfrac{dx}{dt}\vec{i} + \dfrac{dy}{dt}\vec{j} + \dfrac{dz}{dt}\vec{k}$.

Проекции вектора скорости точки на координатные оси равны первым производным от соответствующих координат точки по времени:

$$\upsilon_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x};\ \upsilon_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y};\ \upsilon_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z};$$

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + \upsilon_z^2}.$$

Аналогично определяем координаты, направляющие косинусы и модуль ускорения:

$$a_x = \dot{\upsilon}_x = \ddot{x};\ a_y = \dot{\upsilon}_y = \ddot{y};\ a_z = \dot{\upsilon}_z = \ddot{z};$$

$$\cos(\alpha_a) = a_x / a; \quad \cos(\beta_a) = a_y / a; \quad \cos(\gamma_a) = a_z / a;$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Определение скорости и ускорения точки при естественном способе задания движения.

Заданы траектория точки и закон движения точки вдоль этой траектории в виде $s = f(t)$ (рисунок 2).

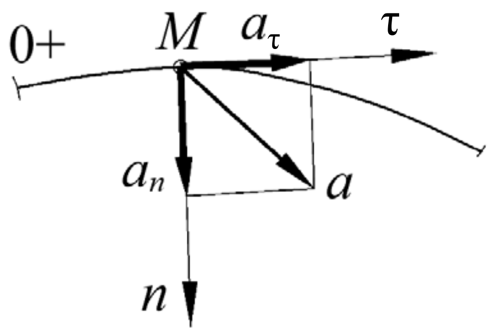

Рисунок 2

Величина скорости точки равна первой производной дуговой координаты точки s по времени:

$$\upsilon = \frac{ds}{dt} = \dot{s}.$$

Скорость точки υ направлена по касательной к траектории в сторону положительного отсчета s, когда $\upsilon > 0$; при $\upsilon < 0$ – в противоположную.

Вектор ускорения точки определяется его касательной $\vec{a}_\tau$ и нормальной $\vec{a}_n$ составляющими:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2},$$

где $a_\tau = d\upsilon / dt$; $a_n = \upsilon^2 / \rho$;

ρ – радиус кривизны траектории в точке M.

При $a_\tau > 0$ вектор $\vec{a}_\tau$ совпадает с направлением оси $M\tau$, а при $a_\tau < 0$ – направлен в противоположную сторону. a_n всегда положительно направлено по главной нормали к центру, относительно которого определяется радиус кривизны.

Зная ускорение (функцию по времени), можно найти скорость и перемещение, проведя математические операции, обратные дифференцированию, – интегрирование, т. е. найти первообразные от функции.

Скорость – это первообразная от ускорения; перемещение (закон движения, радиус-вектор, координаты точки) – вторая первообразная от ускорения или первая первообразная от скорости.

Пример решения задач

Положение точки на плоскости определяется ее радиус-вектором $\vec{r} = 0{,}3t^2 \cdot \vec{i} + 0{,}1t^3 \cdot \vec{j}$. Найти модуль ускорения точки в момент времени $t_1 = 2$ с.

Решение

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}; \qquad \vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt} = 0{,}3t \cdot 2\vec{i} + 0{,}1t^2 \cdot 3\vec{j};$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = 0{,}6\vec{i} + 0{,}3t \cdot 2\vec{j} = 0{,}6\vec{i} + 0{,}6t \cdot \vec{j}.$$

Так как векторы перпендикулярны между собой, то их сумму найдем по теореме Пифагора:

$$\vec{a} = \sqrt{0{,}6^2 + (0{,}6t)^2}\,; \;\; a_1 = \sqrt{0{,}36 + 0{,}36 \cdot 2^2} = \sqrt{1{,}8} = 1{,}34 \text{ м/с}^2.$$

Ответ: $a_1 = 1{,}34$ м/с^2.

Задачи для самостоятельного решения

1 Дано уравнение движения точки $\vec{r} = t^2 \cdot \vec{i} + 2t \cdot \vec{j} + 3\vec{k}$. Определить модуль скорости точки в момент времени $t = 2$ с.

2 Даны два уравнения движения точки: $x = 0{,}3t^3$; $y = 2t^2$, где x и y измеряются в метрах. Определить, в какой момент времени t_1 ускорение точки равно 7 м/с^2.

3 Даны два уравнения движения точки: $x = 0{,}01t^3$; $y = 200 - 10t$. Определить ускорение в момент времени, когда точка пересекает ось Ox.

4 Задано уравнение движения по криволинейной траектории $s = 0{,}2t^2 + 0{,}3t$. Определить полное ускорение точки в момент времени $t_1 = 3$ с, если в этот момент радиус кривизны траектории $\rho_1 = 1{,}5$ м.

5 По окружности, радиус которой $r = 7$ м, движется точка согласно уравнению $s = 0{,}3t^2$. Определить время, когда нормальное ускорение точки $a_n = 1{,}5$ м/с^2.

6 По окружности радиусом $r = 1$ м движется точка согласно уравнению $s = 0{,}1t^3$. Определить полное ускорение точки в момент времени $t = 2$ с.

7 Ускорение прямолинейно движущейся точки есть функция $a = t^2$. Определить, какое расстояние прошла точка за время $t = 2$ с, если она начала двигаться из состояния покоя.

8 Точка движется по окружности радиусом $r = 200$ м из состояния покоя с постоянным касательным ускорением $a_\tau = 1$ м/с^2. Определить полное ускорение точки в момент времени $t = 20$ с.

1.2 Кинематика поступательного и вращательного движений твердого тела

Контрольные вопросы

1 Какое движение называется поступательным?

2 Как отличаются скорости и ускорения двух точек поступательно движущегося тела?

3 Как определить угловую скорость и угловое ускорение вращающегося тела?

4 Чему равна скорость точки вращающегося тела?

5 Из каких составляющих состоит ускорение точки вращающегося тела?

6 Как определяется передаточное отношение в паре зацепляющихся зубчатых колес?

Краткие теоретические сведения

Поступательным движением называется такое движение, при котором любая прямая, проходящая через две точки твердого тела, все время остается параллельной своему первоначальному направлению (рисунок 3).

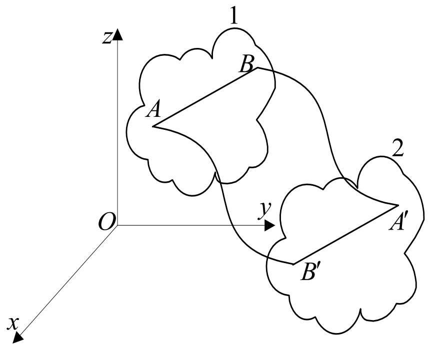

Рисунок 3

При поступательном движении траектории всех точек одинаковы. В каждый последующий момент времени скорости и ускорения всех точек твердого тела равны по модулю и направлению:

$$\vec{\upsilon}_B = \vec{\upsilon}_A,\ \vec{\upsilon}'_B = \vec{\upsilon}'_A;\ \vec{a}_A = \vec{a}_B,\ \vec{a}'_A = \vec{a}'_B.$$

Движение любой точки тела (чаще всего центра масс C, но допустимо и любой другой) описывается уравнениями

$$x_C = f_1(t);\ y_C = f_2(t);\ z_C = f_3(t).$$

Данные уравнения являются кинематическими уравнениями поступательного движения.

Таким образом, кинематика поступательного движения сводится к кинематике точки.

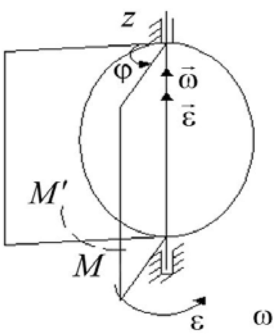

Рисунок 4

При поступательном движении точки могут совершать как прямолинейное, так и криволинейное движение.

Вращательное движение твердого тела.

Вращательным движением называется такое движение, при котором тело имеет две неподвижные точки (рисунок 4). Прямая, проходящая через эти точки, – *ось вращения*.

Траектория всех точек вращающегося тела – окружности, кроме точек, лежащих на оси вращения (они неподвижны).

φ – угол поворота. Размерность $[\varphi]$ – радианы. $\varphi = f(t)$ – кинематическое уравнение вращательного движения.

Угловой скоростью вращающегося тела называется первая производная от угла поворота по времени:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}.$$

Единица измерения – радианы в секунду.

Кроме угловой скорости, есть еще и *частота вращения*. Размерность $[n]$ – обороты в минуту.

$$\omega = \frac{\pi \cdot n}{30}.$$

Угловое ускорение – это первая производная от угловой скорости по времени или вторая производная от угла поворота по времени:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$

Единица измерения – радианы в секунду в квадрате.

Угловую скорость и ускорение можно представить в виде векторов, направленных по оси вращения. Эти векторы скользящие (рисунок 5). Направление определяется по правилу правого винта (буравчика): если глядеть в острие вектора, поворот соответствующей стрелки ω и ε должен происходить против хода часовой стрелки.

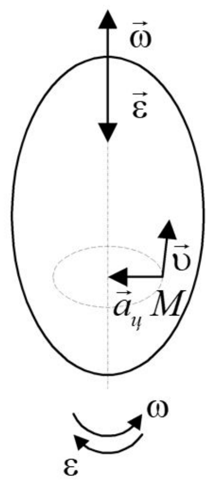

Рисунок 5

Определение скоростей и ускорений точек тела, совершающего вращательное движение.

Скорость точки

$$\upsilon = \omega \cdot R.$$

Нормальное ускорение точки во вращательном движении называется *центростремительным*: $a_ц = a_n = \dfrac{\upsilon^2}{\rho} = \omega^2 \cdot \rho$.

Ускорение a_τ при вращательном движении называется *касательным*. Так как траекторией движения точки является окружность, скорость направлена по касательной к этой окружности в сторону вращения ω: $a_\tau = \varepsilon \cdot R$ и направлена в сторону вращения ε.

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}.$$

Преобразование движений.

С помощью зубчатых механизмов можно изменять кинематические параметры, а также преобразовывать один вид движения в другой, например вращательное в поступательное и наоборот (рисунок 6).

Входным звеном является ведущий вал. Ему сообщаются начальные параметры (угловая скорость ω_1). Выходное звено – ведомый вал. На нем получаем результат преобразования движения.

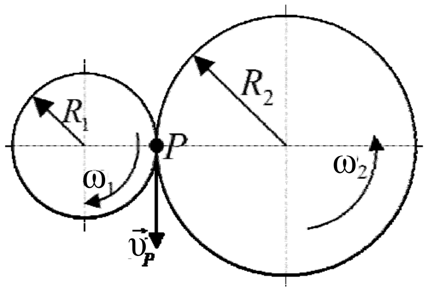

Рисунок 6

$$\upsilon_p = \omega_1 \cdot R_1; \quad \upsilon_P = \omega_2 \cdot R_2; \quad \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{R_2}{R_1}.$$

Передаточным отношением зубчатой передачи называется отношение угловой скорости (частоты вращения) ведущего вала к угловой скорости (частоте вращения) ведомого вала:

$$i = \omega_1/\omega_2 = n_1/n_2.$$

Передаточное отношение по модулю равно передаточному числу, которое можно найти как отношение радиусов, диаметров или чисел зубьев колес:

$$u = |i| = D_2 / D_1 = R_2 / R_1 = z_2 / z_1.$$

Пример решения задач

Цилиндр (R = 2 м) начал вращаться относительно оси, проходящей через центр масс, являющейся осью симметрии, из состояния покоя согласно закону $\varphi = 3 \cdot t^2 - 2 \cdot t + 4$. Определить скорость и ускорение точки, лежащей на наружной поверхности цилиндра, после трех секунд с начала движения.

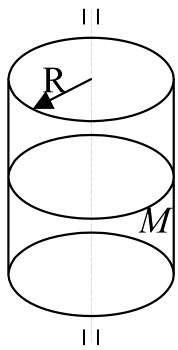

Рисунок 7

Решение

$$\omega = \dot{\varphi} = 6 \cdot t - 2 = 16 \text{ рад/с}^2;$$

$$\varepsilon = 6 \text{ рад/с}^2;$$

$$\upsilon = \omega \cdot R = 32 \text{ м/с};$$

$$a_\tau = \varepsilon \cdot R = 12 \text{ м/с}^2;$$

$$a_n = \omega^2 \cdot R = 512 \text{ м/с}^2;$$

$$a = \sqrt{a_n^{\ 2} + a_\tau^{\ 2}} = 512{,}14\ \text{м/с}^2.$$

Ответ: a = 512,14 м/с^2.

Задачи для самостоятельного решения

1 На двух кривошипах: *1* и *2* одинаковой длины: $OA = O_1B$ = 0,2 м закреплен стержень *3*, совершающий движение в плоскости Oxy (рисунок 8). Точка A движется по закону $s = 0{,}2 \cdot \pi \cdot t$. Определить ускорение средней точки C стержня при t = 0, если AB = 0,36 м.

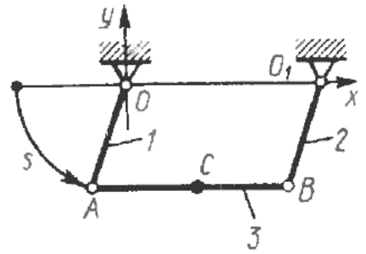

Рисунок 8

2 К ползунам *1* и *2*, перемещающимся вдоль оси Ox по общей направляющей, прикреплено тело *3* (рисунок 9). Точка A движется по закону $x_A = 0{,}1 \cdot t^2$. При t = 10 с определить скорость точки C, если расстояния $AB = BC$ = 0,3 м и угол α = 75°.

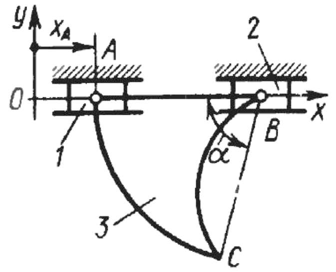

Рисунок 9

3 Квадратная пластина $ABCD$ совершает поступательное движение в плоскости Oxy (рисунок 10). Определить ускорение точки C, если известно, что нормальное ускорение точки A a_A^n = 4 м/с^2, а касательное ускорение точки B a_B^τ = 3 м/с^2.

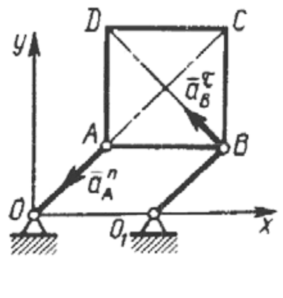

Рисунок 10

4 Тело вращается вокруг неподвижной оси согласно закону $\varphi = 4 + 2 \cdot t^3$. Определить угловое ускорение тела в момент времени, когда угловая скорость $\omega = 6$ рад/с.

5 Угловая скорость тела изменяется согласно закону $\omega = -8 \cdot t$. Определить угол поворота тела в момент времени t = 3 с, если при t_0 = 0 угол поворота φ_0 = 5 рад.

6 Ротор электродвигателя, начав вращаться равноускоренно, сделал за первые 5 с 100 оборотов. Определить угловое ускорение ротора.

7 Груз *1* поднимается с помощью лебедки, барабан *2* которой вращается согласно закону $\varphi = 5 + 2 \cdot t^3$ (рисунок 11). Определить скорость точки *M* барабана в момент времени t = 1 с, если диаметр d = 0,6 м.

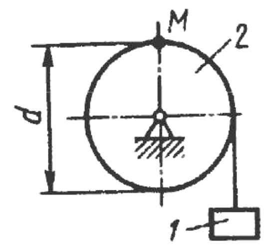

Рисунок 11

8 Ускорение точки *M* диска, вращающегося вокруг неподвижной оси, равно 4 м/с^2 (рисунок 12). Определить угловую скорость этого диска, если его радиус R = 0,5 м, а угол $\gamma = 60°$.

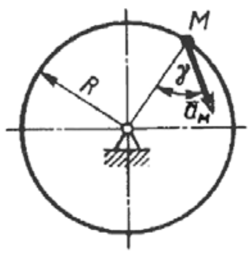

Рисунок 12

9 Определить, с какой угловой скоростью будет вращаться колесо на ведомом валу, если частота вращения ведущего вала n_1 = 1000 мин$^{-1}$, а делительные диаметры колес D_1 = 30 мм, D_2 = 90 мм.

10 Колесо *1* вращается согласно закону $\varphi_1 = 20 \cdot t$ (рисунок 13). Определить число оборотов, совершенных колесом *2* за время t = 3,14 с, если радиусы колес R_1 = 0,8 м, R_2 = 0,5 м.

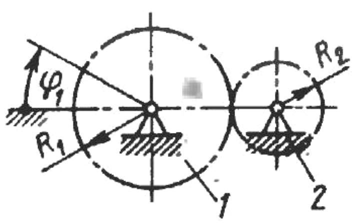

Рисунок 13

1.3 Сложное движение точки

Контрольные вопросы

1 Какое движение точки называют относительным?
2 Какое движение точки называют переносным?
3 Какое движение точки называют абсолютным?
4 Сформулируйте теорему о сложении скоростей при сложном движении точки.
5 Сформулируйте теорему о сложении ускорений при сложном движении точки.
6 Чему равно ускорение Кориолиса?
7 Когда ускорение Кориолиса равно нулю?
8 Как определить направление ускорения Кориолиса?

Краткие теоретические сведения

Рассмотрим движение точки по отношению к двум системам отсчета, из которых одну считаем основной или условно неподвижной, а другую – движущейся по отношению к основной.

Движение, совершаемое точкой, называют сложным. Рассмотрим точку *M*, движущуюся по отношению к подвижной системе отсчета *Oxyz*, которая, в свою очередь, движется относительно основной системы отсчета $O_0x_0y_0z_0$ (рисунок 14).

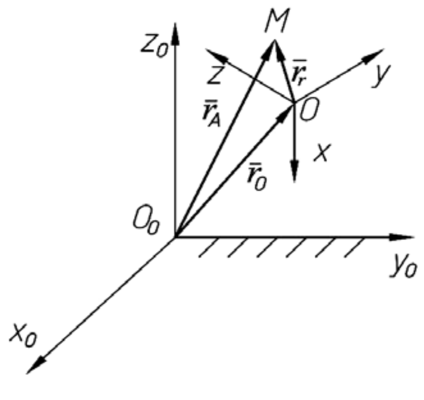

Рисунок 14

Движение, совершаемое точкой *M* по отношению к подвижной системе отсчета, называется относительным $\vec{r}_r$; скорость – относительной скоростью $\vec{\upsilon}_r$, а ускорение – относительным ускорением $\vec{a}_r$.

Движение, совершаемое подвижной системой отсчета (и всеми связанными с нею точками) по отношению к неподвижной системе отсчета, является для точки *M* переносным.

Скорость и ускорение точки, связанной с подвижными осями и с которой в данный момент времени совпадает движущаяся точка *M*, называют переносной скоростью $\vec{\upsilon}_e$ и переносным ускорением $\vec{a}_e$ точки *M*.

Движение, совершаемое точкой по отношению к неподвижной системе отсчета, называется абсолютным $\vec{r}_a$; его скорость и ускорение – абсолютной скоростью $\vec{\upsilon}_a$ и абсолютным ускорением $\vec{a}_a$.

Для решения задач кинематики необходимо установить зависимости между относительными, переносными и абсолютными скоростями и ускорениями точки.

Теорема сложения скоростей при сложном движении точки.

Абсолютная скорость точки равна векторной сумме ее относительной и переносной скоростей:

$$\vec{\upsilon}_a = \vec{\upsilon}_r + \vec{\upsilon}_e.$$

Модуль абсолютной скорости

$$\upsilon_a = \sqrt{\upsilon_e^2 + \upsilon_r^2 + 2 \cdot \upsilon_e \cdot \upsilon_r \cdot \cos(\alpha)},$$

где α – угол между векторами относительной и переносной скоростей точки.

Теорема сложения ускорений при сложном движении точки.

При сложном движении точки ее абсолютное ускорение равно векторной сумме переносного, относительного и кориолисова ускорений:

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e^n + \vec{a}_e^\tau + \vec{a}_r^n + \vec{a}_r^\tau + \vec{a}_C.$$

Ускорение Кориолиса характеризует быстроту изменения переносной скорости в относительном движении и изменение относительной скорости в переносном движении:

$$\vec{a}_c = 2 \cdot \vec{\omega}_e \cdot \vec{\upsilon}_r \quad \text{или} \quad a_c = 2 \cdot \omega_e \cdot \upsilon_r \cdot \sin(\alpha),$$

где α – угол между векторами $\vec{\omega}_e$ и $\vec{\upsilon}_r$ (рисунок 15).

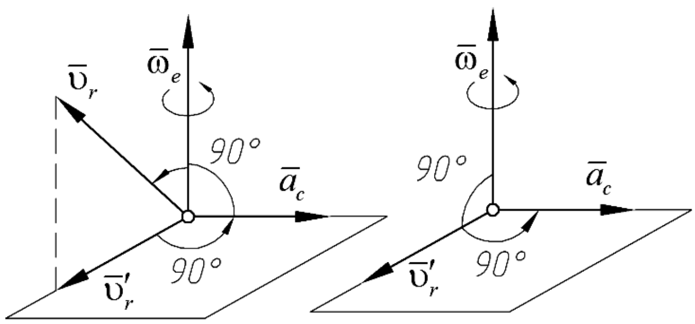

Рисунок 15

Из данной формулы видно, что кориолисово ускорение может обращаться в нуль в следующих случаях:

1) $\omega_e = 0$, т. е. когда переносное движение является поступательным или переносная угловая скорость в данный момент времени обращается в нуль;

2) $\upsilon_r = 0$, т. е. когда относительная скорость в данный момент времени обращается в нуль;

3) $\alpha = 0$ (180º), т. е. когда относительное движение происходит по направлению, параллельному оси переносного вращения.

Направление вектора $\vec{a}_c$ определяется по правилу Жуковского либо по правилу векторного произведения (см. рисунок 15):

– проецируем вектор относительной скорости $\vec{\upsilon}_r$ на плоскость, перпендикулярную оси переносного вращения;

– поворачиваем полученную проекцию на 90º по направлению переносного вращения (по направлению ω_e) – это и есть направление кориолисова ускорения.

По правилу векторного произведения вектор $\vec{a}_c$, перпендикулярный $\vec{\omega}_e$ и $\vec{\upsilon}_r$, направлен так, чтобы поворот от $\vec{\omega}_e$ к $\vec{\upsilon}_r$ на угол α виден происходящим против хода часовой стрелки.

Пример решения задач

Определить абсолютную скорость в момент времени $t = 2$ с точки *M*, которая движется по диагонали прямоугольной пластины *1* по закону $M_0M = 0{,}3 \cdot t^2$. Сама пластина движется вертикально в плоскости рисунка согласно уравнению $s = 1 + 0{,}5 \cdot \sin(\pi \cdot t/2)$. Угол $\alpha = 45°$.

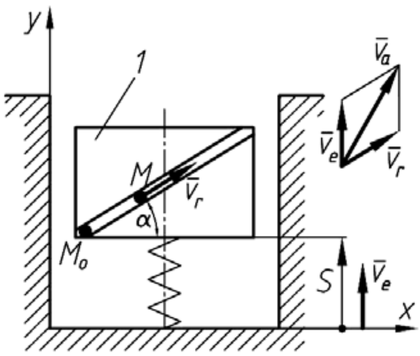

Рисунок 16

Решение

Так как точка *M* совершает сложное движение, то ее скорость состоит из переносной $\vec{\upsilon}_e$ и относительной $\vec{\upsilon}_r$ скоростей.

$$\upsilon_e = \frac{ds}{dt} = 0{,}5 \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot t}{2}\right) \cdot \frac{\pi}{2};$$

$$\upsilon_{e1} = 0{,}5 \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot 2}{2}\right) \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4};$$

$$\upsilon_r = \frac{d(M_0M)}{dt} = 0{,}3t \cdot 2;$$

$$\upsilon_{r1} = 0,3 \cdot 2 \cdot 2 = 1,2 \text{ м/с};$$

$$\upsilon_{a1} = \sqrt{\upsilon_{e1}^2 + \upsilon_{\tau 1}^2 + 2\upsilon_{r1} \cdot \upsilon_{e1} \cdot \cos\alpha} = \sqrt{1,2^2 + \frac{\pi^2}{16} + 2 \cdot 1,2 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \cos 45^\circ} = 1,84 \text{ м/с}.$$

Ответ: $\upsilon_{a1} = 1,84$ м/с.

Задачи для самостоятельного решения

1 Определить абсолютную скорость точки *M* в момент времени $t = 1$ с, если ее движение по квадратной пластине *1* задано уравнением $BM = 0,1 \cdot t^2$ (рисунок 17). Кривошипы *AB* = *CD* = 0,5 м вращаются по закону $\varphi = 0,25 \cdot \pi \cdot t$.

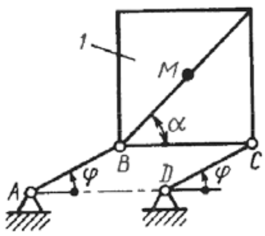

Рисунок 17

2 По грани призмы, движущейся со скоростью $\overline{\upsilon}_e$, скользит конец стержня *AB* (рисунок 18). При каком угле α в градусах абсолютная скорость точки *A* будет равна скорости призмы υ_e?

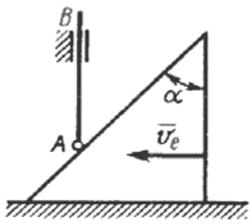

Рисунок 18

3 Точка *M* движется по ободу диска, радиус которого *R* = 0,1 м, согласно уравнению $OM = 0,3 \cdot t$ (рисунок 19). Определить абсолютную скорость точки *M* в указанном положении, если закон вращения диска $\varphi = 0,4 \cdot t$.

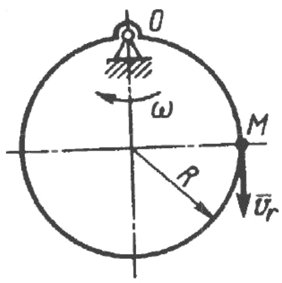

Рисунок 19

4 Пластина $ABCD$ вращается вокруг оси Oz с угловой скоростью $\omega = 4 \cdot t$ (рисунок 20). По ее стороне BC в направлении от B к C движется точка M с постоянной скоростью 9 м/с. Определить модуль абсолютной скорости точки M в момент времени $t = 3$ с, если длина AB = 1 м.

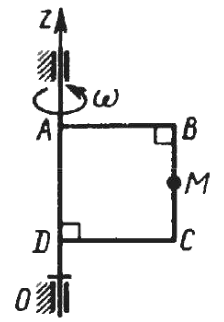

Рисунок 20

5 Пластина ABC вращается вокруг оси Oz по закону $\varphi = 5 \cdot t^2$, а по ее стороне AC движется точка M согласно уравнению $AM = 4 \cdot t^3$ (рисунок 21). Определить ускорение Кориолиса точки M в момент времени t_1 = 0,5 с.

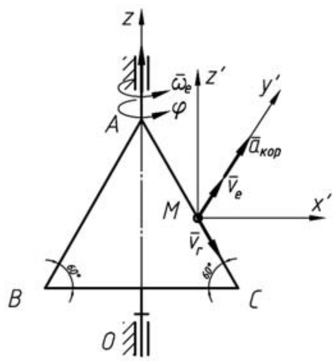

Рисунок 21

6 Кабина лифта поднимается с постоянным ускорением a_e = 5 м/с^2 (рисунок 22). Внутри кабины в плоскости чертежа движется точка M по закону $x_1 = 0,5 \cdot t^2$ и $y_1 = 0,3 \cdot t^2$. Определить абсолютное ускорение точки M.

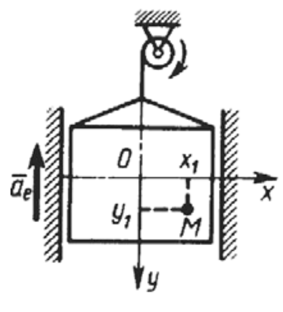

Рисунок 22

7 Ползун *1* движется по горизонтальным направляющим с постоянным ускорением a_1 = 4 м/с^2 (рисунок 23). Точка *2* перемещается по отношению к ползуну с ускорением a_2 = 3 м/с^2. Определить абсолютное ускорение точки.

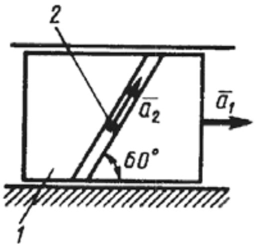

Рисунок 23

8 Трубка вращается вокруг оси OO_1 с угловой скоростью ω = 1,5 рад/с (рисунок 24). Шарик M движется вдоль трубки по закону $M_0M = 4 \cdot t$. Найти модуль ускорения Кориолиса шарика.

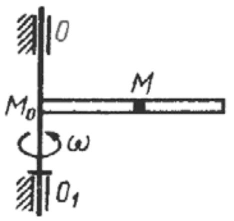

Рисунок 24

9 Диск вращается вокруг оси Oz по закону $\varphi = 4 \cdot \sin(0,25 \cdot \pi \cdot t)$ (рисунок 25). По ободу диска движется точка M согласно уравнению $AM = 0,25 \cdot \pi \cdot R \cdot t^2$. Определить ускорение Кориолиса точки M в момент времени t = 1 с, если радиус R = 0,4 м.

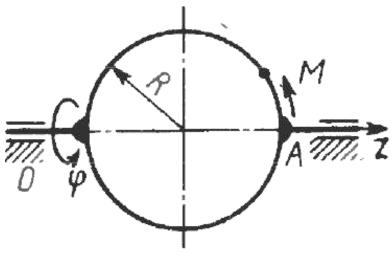

Рисунок 25

10 Точка M движется с постоянной скоростью $\upsilon = 2$ м/с по кольцу радиусом r = 0,5 м, который вращается с постоянной угловой скоростью ω = 4 рад/с (рисунок 26). Определить модуль абсолютного ускорения точки M в указанном положении.

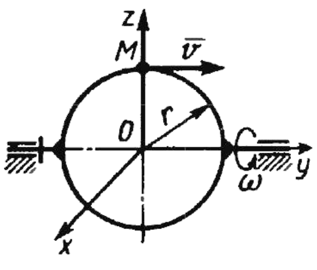

Рисунок 26

1.4 Сложное движение твердого тела

Контрольные вопросы

1 Какое движение называют плоскопараллельным?

2 Назовите кинематические уравнения плоскопараллельного движения.

3 Как определяются скорости точек тела, совершающего плоскопараллельное движение?

4 Сформулируйте теорему о скоростях двух точек тела, движущегося плоскопараллельно.

5 Что такое мгновенный центр скоростей?

6 Как определяется ускорение точек тела, движущегося плоскопараллельно?

Краткие теоретические сведения

Плоскопараллельным (или плоским) называется такое движение твердого тела, при котором все его точки перемещаются параллельно некоторой неподвижной плоскости (рисунок 27).

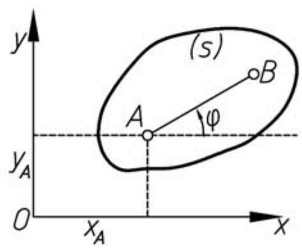

Рисунок 27

Положение отрезка *AB* можно определить, зная координаты x_A и y_A точки *A* и угол φ, который отрезок *AB* образует с осью *Ox*. Точку *A*, выбранную для определения положения фигуры *S*, будем в дальнейшем называть полюсом.

Для задания плоского движения тела достаточно задать положение полюса *A* – x_A, y_A и угла φ. Кинематические уравнения плоскопараллельного движения

$$x_A = f_1(t); \quad y_A = f_2(t); \; \varphi = f_3(t).$$

Первые два уравнения определяют поступательное движение вместе с полюсом *A*; третье – вращательное движение вокруг оси, проходящей через полюс (ось *Az*).

Таким образом, плоскопараллельное движение можно рассматривать как сложное движение тела – поступательное (переносное) вместе с полюсом и вращательное (относительное) вокруг полюса.

Скорость и ускорение поступательного движения полюса

$$\upsilon_{xA} = \dot{x}_A; \quad \upsilon_{yA} = \dot{y}_A; \quad a_{xA} = \ddot{x}_A; \quad a_{yA} = \ddot{y}_A .$$

Угловая скорость и угловое ускорение вращательного движения вокруг полюса

$$\omega = \dot{\varphi}; \quad \varepsilon = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}.$$

Скорость произвольной точки *M* фигуры определим как сумму скоростей, которые точка получает при поступательном движении вместе с полюсом и вращательном движении вокруг полюса (рисунок 28):

$$\vec{\upsilon}_M = \vec{\upsilon}_A + \vec{\upsilon}_{MA}. \qquad (1)$$

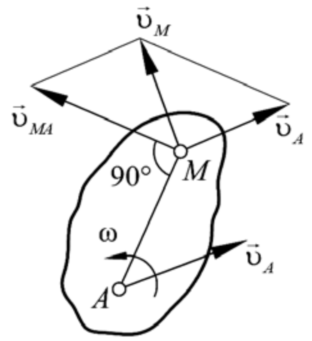

Рисунок 28

При этом скорость

$$\upsilon_{MA} = \omega \cdot MA,$$

где ω – угловая скорость плоской фигуры.

Теорема о проекциях скоростей двух точек тела, движущегося плоскопараллельно: проекции скоростей двух точек твердого тела на ось, проходящую через эти точки, равны (рисунок 29).

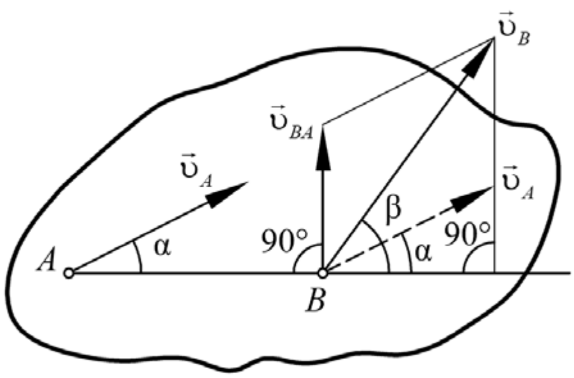

Рисунок 29

Мгновенным центром скоростей называется точка, связанная с плоской фигурой, скорость которой в данный момент времени равна нулю.

Если найти положение мгновенного центра скоростей, то плоскопараллельное движение можно рассматривать как мгновенно вращательное. В этом случае формула (1) упрощается:

$$\vec{\upsilon}_M = \vec{\upsilon}_A + \vec{\upsilon}_{MA} = \upsilon_{MA},$$

т. к. $\upsilon_A = 0$, если выбрать в качестве полюса точку A и она окажется мгновенным центром скоростей.

Как находится мгновенный центр скоростей.

1 Если известны направления скоростей двух точек тела, то мгновенный центр скоростей находится на пересечении перпендикуляров к скоростям в этих точках (рисунок 30).

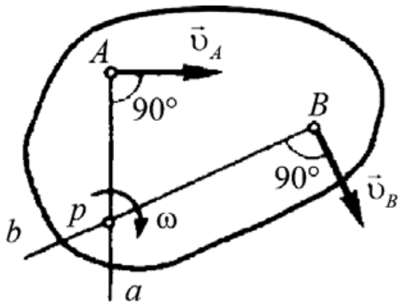

Рисунок 30

2 Если плоскопараллельное движение осуществляется путем качения без скольжения одного цилиндрического тела по поверхности другого – неподвижного, то точка P касания этих тел является мгновенным центром скоростей (рисунок 31).

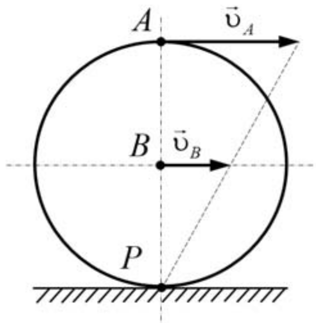

Рисунок 31

3 Если скорости точек A и B плоской фигуры параллельны друг другу и при этом линия AB перпендикулярна скоростям этих точек, то мгновенный центр скоростей P лежит на пересечении прямых, соединяющих начало и концы векторов $\vec{\upsilon}_A$ и $\vec{\upsilon}_B$ (рисунок 32).

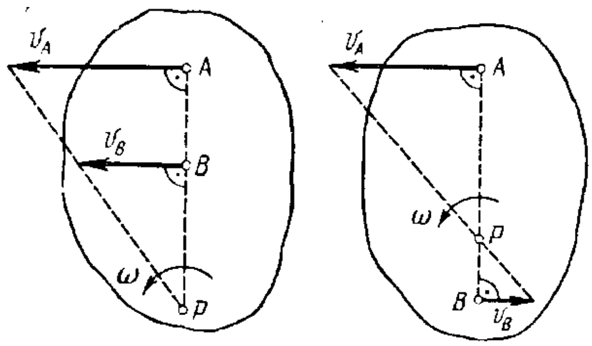

Рисунок 32

Угловая скорость тела

$$\omega = \frac{\vec{\upsilon}_A}{AP} = \frac{\vec{\upsilon}_B}{BP} = \frac{\vec{\upsilon}_A + \vec{\upsilon}_B}{AB}.$$

4 Если скорости точек A и B плоской фигуры параллельны и одинаково направлены, причем отрезок AB не перпендикулярен данным скоростям, то мгновенный центр скоростей лежит в бесконечности и скорости всех точек тела равны (рисунок 33). Угловая скорость тела ω в этот момент времени равна нулю. Тело совершает мгновенно поступательное движение.

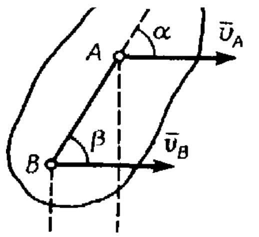

Рисунок 33

Ускорение любой точки M плоской фигуры геометрически складывается из ускорения какой-нибудь другой точки A, принятой за полюс, и ускорения, которое точка M получает при вращении фигуры вокруг этого полюса (рисунок 34).

Вектор a_{MA} заменяют его касательной a_{MA}^{τ} и нормальной a_{MA}^{n} составляющими и представляют равенство в виде

$$a_M = a_A + a_{MA}^{\tau} + a_{MA}^{n}.$$

При этом $a_{MA}^{\tau} = AM \cdot \varepsilon$; $a_{MA}^{n} = AM \cdot \omega^2$.

Если полюс A движется не прямолинейно, то его ускорение можно тоже представить как сумму касательной и нормальной составляющих:

$$a_M = a_A^{\tau} + a_A^{n} + a_{MA}^{\tau} + a_{MA}^{n}.$$

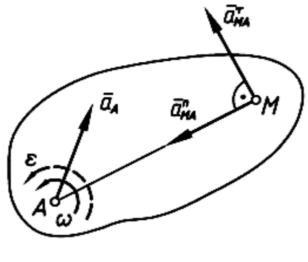

Рисунок 34

Для определения модуля ускорения точки a_M необходимо спроецировать последнее уравнение на координатные оси. В результате этого получим проекции ускорения точки M на указанные оси. Модуль ускорения точки M находим по следующей формуле:

$$a_M = \sqrt{\left(a_{Mx}\right)^2 + \left(a_{My}\right)^2}.$$

Пример решения задач

Определить скорость точки A, если скорость центра катка равна 5 м/с, угловая скорость катка $\omega = 25$ рад/с. Радиус катка r = 0,2 м, угол α = 45°. Каток катится без скольжения.

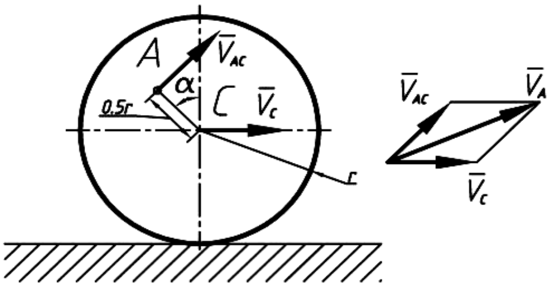

Рисунок 35

Решение

Так как тело совершает плоскопараллельное движение, то скорость точки A будет состоять из скорости полюса (точка C) и скорости, полученной точкой A при вращении вокруг полюса C.

$$\vec{\upsilon}_A = \vec{\upsilon}_C + \vec{\upsilon}_{AC};$$

$$\upsilon_{AC} = \omega \cdot 0{,}5r = 25 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}2 = 2{,}5 \text{ м/с};$$

$$\upsilon_A = \sqrt{\upsilon_{AC}^2 + \upsilon_C^2 + 2\upsilon_C \cdot \upsilon_{AC} \cdot \cos\alpha} = \sqrt{2{,}5^2 + 5^2 + 2 \cdot 2{,}5 \cdot 5 \cdot \cos 45°} = 6{,}99 \text{ м/с}.$$

Ответ: $\upsilon_A = 6{,}99$ м/с.

Задачи для самостоятельного решения

1 Стержень AB скользит по гладкой стене вниз и гладкому полу, скорость точки A υ_A = 5 м/с, угол между полом и стержнем AB равен 30º (рисунок 36). Определить скорость точки B.

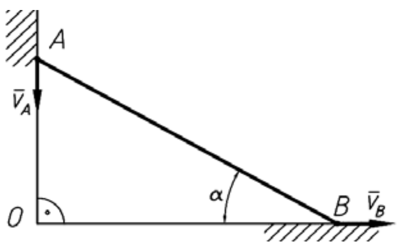

Рисунок 36

2 Для заданного положения шарнирного четырехзвенника определить скорость точки B, если точка A имеет скорость 1 м/с (рисунок 37).

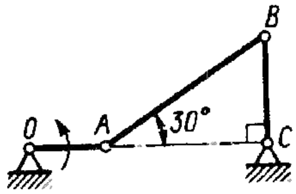

Рисунок 37

3 Кривошип OA длиной 0,2 м вращается равномерно с угловой скоростью $\omega = 8$ рад/с (рисунок 38). К шатуну AB в точке C шарнирно прикреплен шатун CD. Для заданного положения механизма определить скорость точки D ползуна, если угол $\alpha = 20°$.

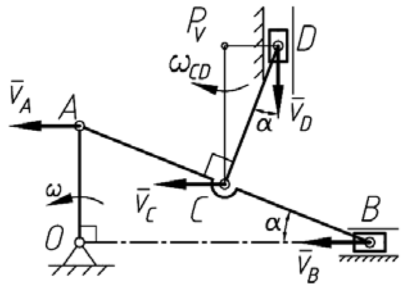

Рисунок 38

4 Кривошип OA механизма, вращаясь равномерно, образует в данный момент времени с направлением OB угол $\varphi = 90°$ (рисунок 39). Определить расстояние от мгновенного центра скоростей шатуна AB до ползуна B.

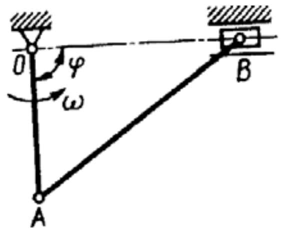

Рисунок 39

5 Определить скорость точки B колеса, если точка A колеса имеет скорость 2 м/с (рисунок 40).

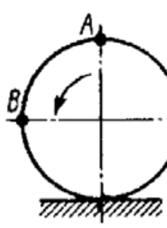

Рисунок 40

6 Угловая скорость барабана $\omega = 1$ рад/с (рисунок 41). Определить скорость точки M ступенчатого катка, катящегося без скольжения, если радиусы $r = 0,1$ м, $R = 0,3$ м.

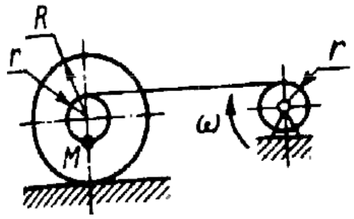

Рисунок 41

7 Определить угловую скорость кривошипа OA в указанном положении, если скорость ползуна υ_B = 2 м/с, а длина кривошипа OA = 0,1 м (рисунок 42).

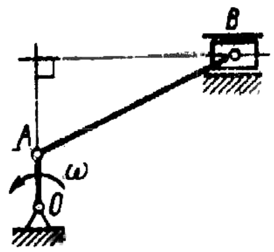

Рисунок 42

8 Для данного положения механизма определить ускорение ползуна B, если колесо *1* радиусом R = 50 см катится с постоянной скоростью его центра $\upsilon_O = 5$ м/с, а угол α = 30° (рисунок 43).

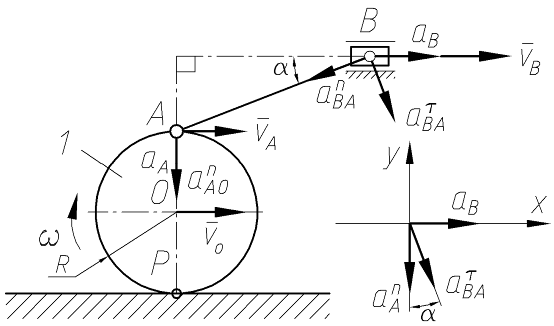

Рисунок 43

9 Колесо радиусом r = 0,1 м катится без скольжения. Определить ускорение точки B, если центр колеса A перемещается с постоянной скоростью υ_A = 2 м/с (рисунок 44).

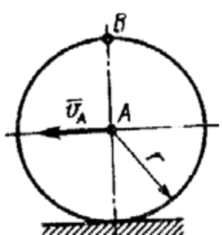

Рисунок 44

10 Барабан *1* вращается по закону $\varphi = 0{,}1 \cdot t^2$. Определить ускорение груза *2*, если радиус r = 0,2 м (рисунок 45).

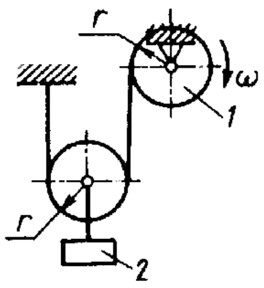

Рисунок 45

1.5 Различные случаи движения тела

Контрольные вопросы

1 Какое движение называется сферическим?

2 Как называются три угла, описывающие сферическое движение?

3 Сформулируйте кинематические уравнения сферического движения.

4 Как определяется угловая скорость тела, участвующего во вращении вокруг пересекающихся осей?

5 Как определяется угловая скорость тела, участвующего во вращении вокруг параллельных осей?

6 Какое движение твердого тела называют свободным?

7 Сколько уравнений можно составить для свободно движущегося тела?

Краткие теоретические сведения

Сферическим движением твердого тела называют такое движение, при котором одна его точка все время остается неподвижной. Все точки тела, совершающего сферическое движение, движутся по траекториям, которые располагаются на сферах соответствующего радиуса (рисунок 46).

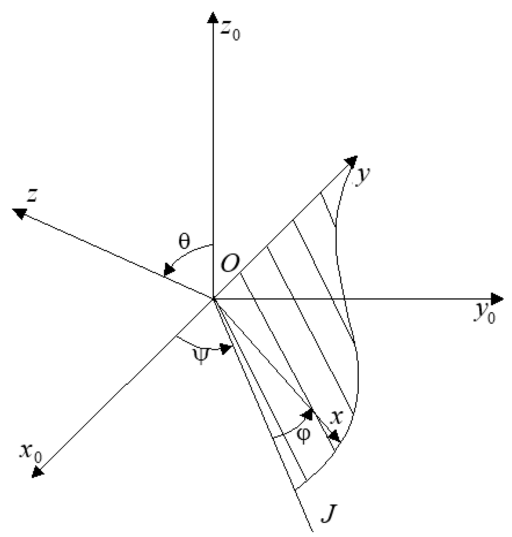

Рисунок 46

Сферически движущееся тело обладает тремя степенями свободы.

$X_0Y_0Z_0O$ – неподвижная система отсчета.

$XYZO$ – подвижная система отсчета, связанная со сферически движущимся телом.

Плоскость XOY пересекает плоскость $X_0Y_0Z_0O$ по линии OJ. Эта линия называется *линией узлов*.

Угол между осью x_0 и линией узлов OJ называется *углом прецессии* – ψ. Соответственно, ось z_0, вокруг которой происходит изменение угла прецессии, – *ось прецессии*.

Угол, характеризующий изменение положения оси z относительно оси z_0, называется *углом нутации* – θ. Ось OJ, вокруг которой происходит изменение этого угла, кроме названия *линия узлов*, имеет название *ось нутации*.

Угол, характеризующий изменение положения оси x относительно линии узлов OJ, называется *углом собственного вращения*. Соответственно, ось z, вокруг которой происходит изменение этого угла, – *ось собственного вращения*. Углы ψ, θ, φ ввел Леонард Эйлер, и поэтому они называются эйлеровыми углами. Эйлеровы углы полностью определяют положение тела в пространстве во время сферического движения. Поэтому выражения $\psi = f_1(t)$; $\theta = f_2(t)$; $\varphi = f_3(t)$ называются кинематическими уравнениями сферического движения.

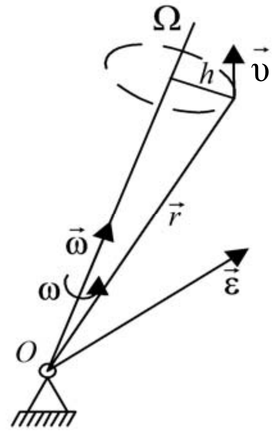

Рисунок 47

Теорема Эйлера-Д’Аламбера.

Перемещение тела, совершающего сферическое движение, можно представить как совокупность вращений (поворотов) вокруг мгновенных осей (рисунок 47).

То есть сферическое движение, как и плоскопараллельное, можно рассматривать как мгновенно вращательное, следует найти лишь положение мгновенной оси в данный момент времени.

Мгновенная ось обозначается Ω и является геометрическим местом точек, скорости которых в данный момент времени равны нулю. Мгновенная ось вращения проходит через неподвижную (закрепленную) точку (рисунок 48).

Формулы для определения составляющих угловой скорости при сферическом движении (кинематические формулы Эйлера)

$$\omega_x = \dot{\psi} \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\varphi) + \dot{\theta} \cdot \cos(\varphi);$$

$$\omega_y = \dot{\psi} \cdot \sin(\theta) \cdot \sin(\varphi) - \dot{\theta} \cdot \sin(\varphi);$$

$$\omega_z = \dot{\psi} \cdot \cos(\theta) + \dot{\varphi};$$

$$\omega = \sqrt{\omega_x{}^2 + \omega_y{}^2 + \omega_z{}^2}.$$

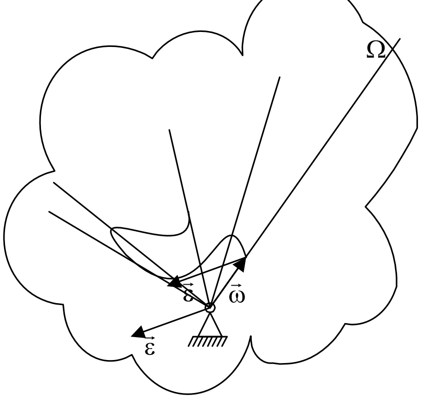

Рисунок 48

Линейная скорость и ускорение тела, совершающего сферическое движение.

Формулы Эйлера для скоростей

$$\upsilon_x = \omega_y \cdot z - \omega_z \cdot y; \ \upsilon_y = \omega_z \cdot x - \omega_x \cdot z; \ \upsilon_z = \omega_x \cdot y - \omega_y \cdot x.$$

Скорость точки $\upsilon = \omega \cdot h$.

При сферическом движении тела линейное ускорение точки находится как геометрическая сумма тангенциального (касательного) и нормального ускорений:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_A{}^{\tau} + \vec{a}_A{}^{n};\ \ \vec{a}_A{}^{\tau} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r};\ \ \vec{a}_A{}^{n} = \vec{\omega} \times \vec{\upsilon}.$$

$a_A{}^{\tau} = \varepsilon \cdot h^{*}$; $\vec{a}_A{}^{n} = \varepsilon \cdot h$, где h – перпендикуляр от точки до мгновенной оси вращения, а h^{*} – перпендикуляр от точки до оси, по которой направлен вектор $\vec{\varepsilon}$.

Нормальное ускорение всегда направлено от точки к мгновенной оси; тангенциальное – по касательной к окружности с радиусом h* в сторону изменения ε.

Способ нахождения углового ускорения.

В процессе сферического движения мгновенная ось вместе с рассматриваемой точкой перемещается в пространстве. Так же в пространстве перемещается и вектор угловой скорости. Конец вектора $\vec{\omega}$ описывает некоторую прямую, которая называется годографом угловой скорости. Касательная к этому годографу в каждый конкретный момент времени будет являться направлением вектора $\vec{\varepsilon}$.

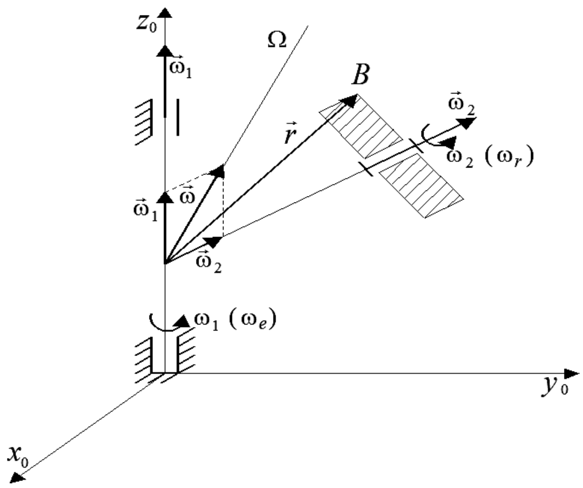

Рисунок 49

При решении задачи вектор $\vec{\varepsilon}$ параллельно переносим в неподвижную точку и уже от этой оси ведут отсчет h*. Абсолютное линейное ускорение точки сферически движущегося тела определяется по формуле

$$a = \sqrt{a_{\tau}^{2} + a_{n}^{2} + 2 \cdot a_{\tau} \cdot a_{n} \cdot \cos\left(a_{\tau} \hat{;} a_{n}\right)}.$$

Сложение вращательных движений.

Для того чтобы сложить вращения, нужно привести их векторы угловой скорости в точку пересечения осей (рисунок 49). Результатом сложения двух вращательных движений вокруг пересекающихся осей будет также вращательное движение относительно мгновенной оси Ω. Мгновенная ось представляет собой геометрическое место точек, скорости которых равны нулю.

$$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_{Be} + \vec{\upsilon}_{Br};\ \ \vec{\omega} \times \vec{r} = \vec{\omega}_e \times \vec{r} + \vec{\omega}_r \times \vec{r};\ \ \vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2;$$

$$\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + 2 \cdot \omega_1 \cdot \omega_2 \cdot \cos(\alpha)}.$$

Если тело участвует в n вращениях ($n > 2$), то аналогично можно записать формулу $\omega = \sum_{i=n}^{n} \omega_i$.

Сферическое движение тела можно рассматривать как сложное движение тела (рисунок 50).

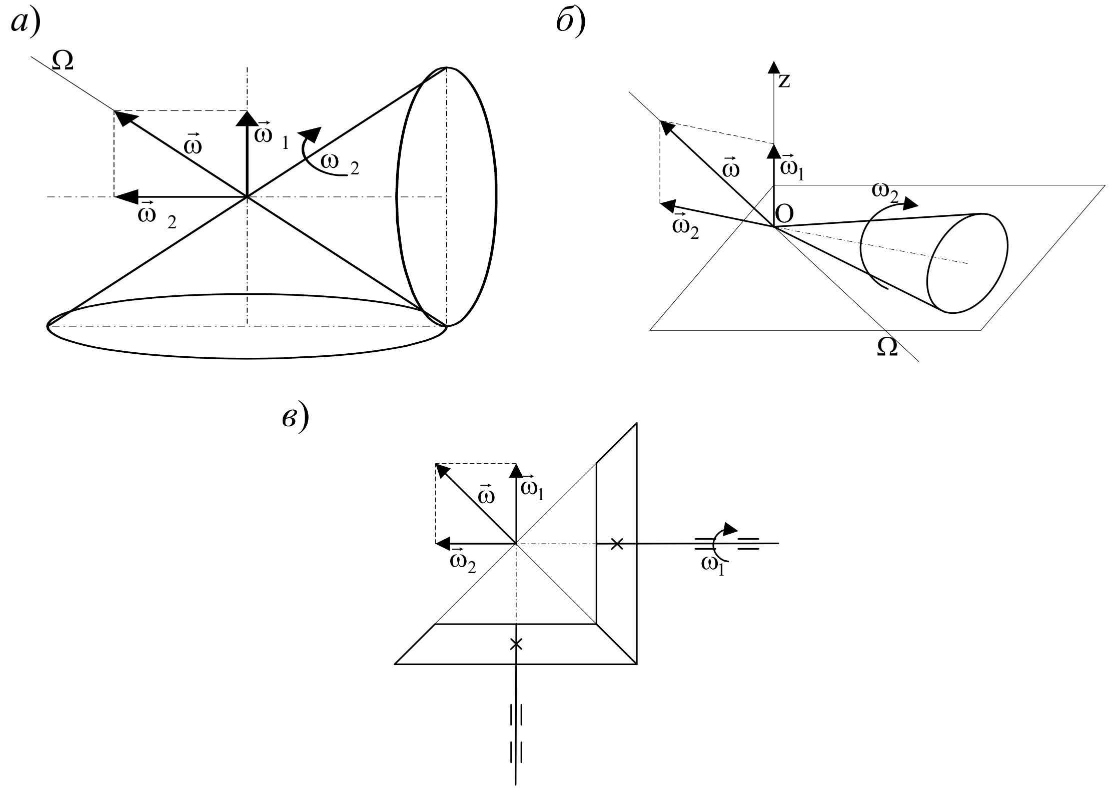

Рисунок 50

Сферическое движение конуса можно рассматривать как сложное движение: сложение двух движений вокруг пересекающихся осей.

Сложение вращений вокруг параллельных осей.

Сложение вращений вокруг параллельных осей, имеющих одинаковые направления.

Диск установлен на стержень AB и вращается вокруг точки B (относительное вращение) с угловой скоростью ω_r. При этом стержень вращается относительно оси z (переносное вращение) с угловой скоростью ω_1 (рисунки 51 и 52).

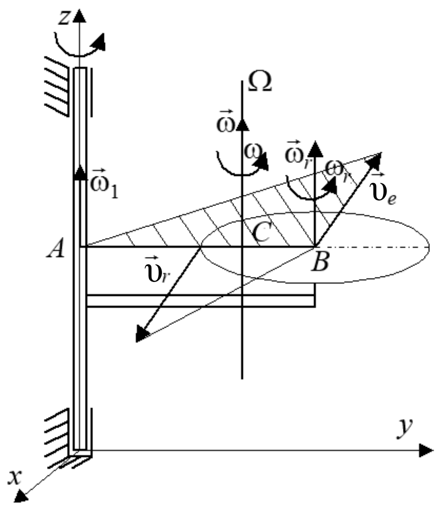

Рисунок 51

Это сложное движение диска можно рассматривать как мгновенно вращательное относительно оси, проходящей через точку C, с результирующей угловой скоростью ω.

Результирующая угловая скорость ω определяется алгебраическим сложением составляющих ее скоростей: $\omega = \omega_1 + \omega_2$. Ее вектор направлен туда же, куда и составляющие скорости. Точка приложе-

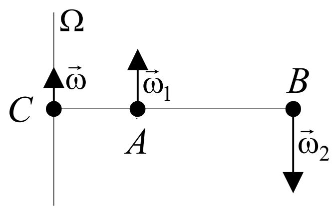

Рисунок 52

ния $\vec{\omega}$ – C (ее ось). Точка C находится путем обратно пропорционального деления отрезка AB внутренним способом:

$$\frac{\omega_1}{BC}=\frac{\omega_2}{AC}=\frac{\omega_1+\omega_2}{BC+AC}\Rightarrow\frac{\omega_1}{BC}=\frac{\omega_2}{AC}=\frac{\omega}{AB}.$$

Сложение вращений вокруг параллельных осей с разными направлениями.

Результатом будет вращение вокруг мгновенной оси с угловой скоростью $\omega=\omega_1-\omega_2$ (рисунок 53). Вектор $\vec{\omega}$ будет направлен в сторону большего по модулю вектора угловой скорости:

$$\frac{\omega_1}{BC}=\frac{\omega_2}{AC}=\frac{\omega}{AB}.$$

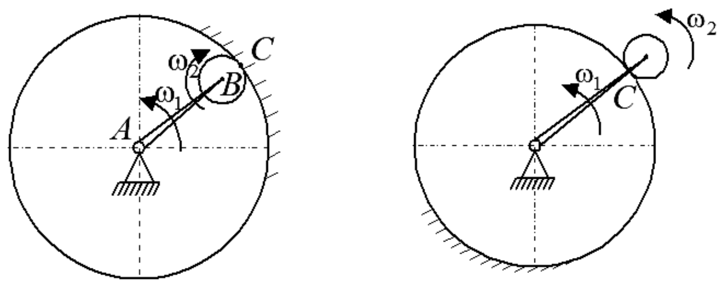

Рисунок 53

Свободным движением твердого тела называется такое движение, при котором тело может произвольно перемещаться в пространстве. Это наиболее общий вид движения. Тело, совершающее свободное движение, имеет шесть степеней свободы (рисунок 54).

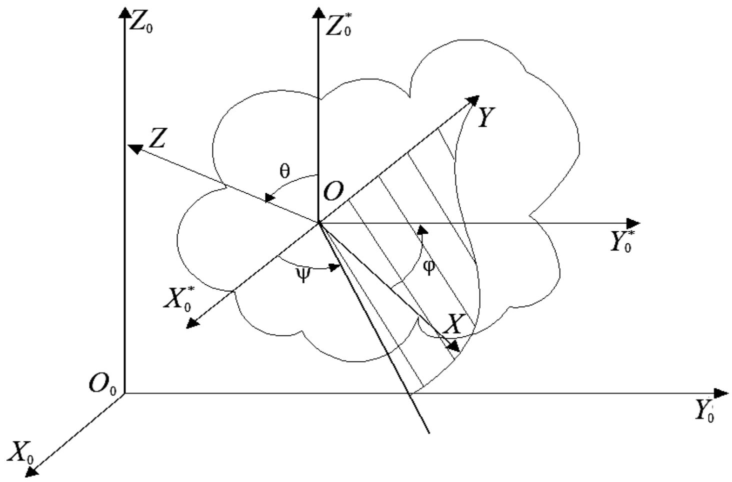

Рисунок 54

$X_0Y_0Z_0O_0$ – неподвижная система отсчета. $X_0^*Y_0^*Z_0^*O_0^*$ – подвижная система отсчета, связанная с точкой O тела, движущейся относительно неподвижной системы отсчета поступательно. $XYZO$ – подвижная система отсчета, связанная с телом.

Свободное движение твердого тела в общем случае можно разложить на два движения: поступательное движение полюса и сферическое движение вокруг полюса. Для того чтобы определить положение любой точки свободно движущегося тела, нужно задать шесть уравнений, которые являются кинематическими уравнениями свободного движения:

$$x_0 = f_1(t);\; y_0 = f_2(t);\; z_0 = f_3(t)$$
$$\psi = f_4(t);\; \theta = f_5(t);\; \varphi = f_6(t).$$

Скорость и ускорение точек тела, совершающего свободное движение,

$$\vec{\upsilon}_A = \vec{\upsilon}_O + \vec{\upsilon}_{AO} = \vec{\upsilon}_O + \vec{\omega} \times \vec{r}.$$

Скорость произвольной точки равна геометрической сумме скоростей полюса и скорости в сферическом движении вокруг полюса:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_O + \vec{a}_{AO} = \vec{a}_O + \vec{a}_{AO}{}^{\tau} + \vec{a}_{AO}{}^{n}.$$

Ускорение произвольной точки произвольно движущегося тела равно геометрической сумме ускорения полюса и ускорения точки в сферическом движении вокруг полюса.

Пример решения задач

Конус обкатывается по горизонтальной поверхности вокруг неподвижной точки O. Известны: скорость его точки C $\upsilon_C = 60$ м/с; $R = CA = 20$ м; угол $\alpha = 30°$. Определить угловую скорость, угловое ускорение конуса, а также скорости и ускорения точек A, B, C.

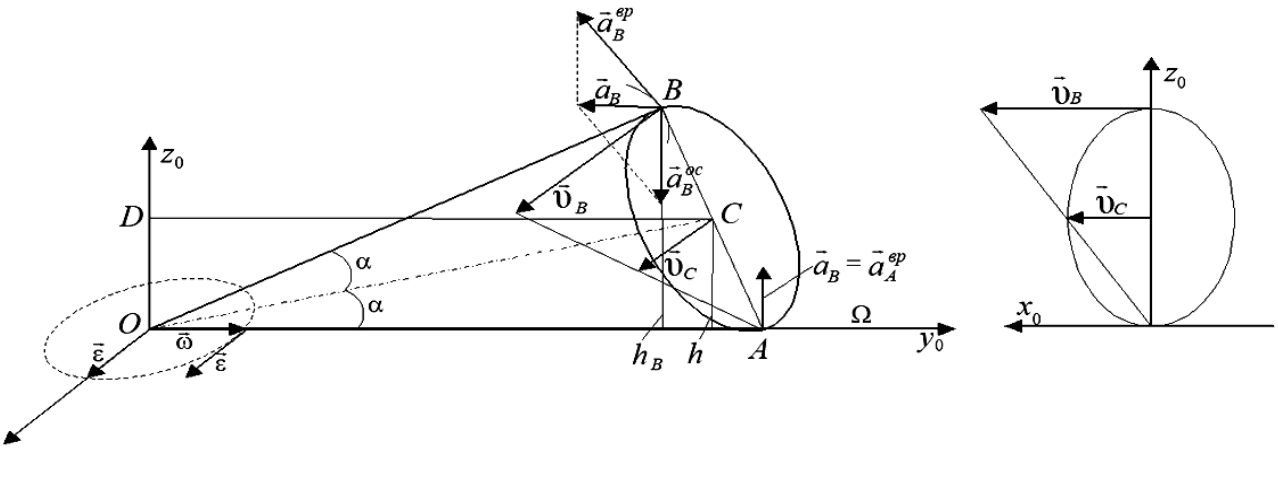

Рисунок 55

Решение

Мгновенной осью вращения является прямая OA.

$$\upsilon_C = \omega \cdot h;\; \omega = \frac{\upsilon_C}{h} = \frac{\upsilon_C}{CA \cdot \sin 60^{\circ}} = 3{,}5 \text{ рад/с}.$$

Модуль углового ускорения ε фактически равен скорости, с которой вращается конец вектора ω:

$$\varepsilon=\upsilon^*=\omega^*\cdot h^*=\omega^*\cdot\omega=\frac{\upsilon_C}{CD}\cdot\omega=\left|\frac{h}{OC}=\sin\alpha;\ OC=\frac{h}{\sin\alpha}\right|=\frac{\upsilon_C}{\dfrac{h}{\sin\alpha}\cdot\cos\alpha}\cdot\omega=7\ \text{рад}/\text{с}^2.$$

$$\upsilon_A=0;\ \upsilon_B=\omega\cdot h_B=2\cdot\upsilon_C=120\ \text{м}/\text{с}.$$

$$\vec{a}_A=\vec{a}_A^{\tau}+\vec{a}_A^{n};$$

$$a_A^n=\omega^2\cdot h=\omega^2\cdot 0=0;$$

$$a_A^{\tau}=\varepsilon\cdot h^*=\varepsilon\cdot OA=\varepsilon\cdot\frac{CA}{\sin\alpha}=280\ \text{м}/\text{с}^2;$$

$$a_A=\sqrt{\left(a_A^{\tau}\right)^2+\left(a_A^{n}\right)^2+2\cdot a_A^{\tau}\cdot a_A^{n}\cdot\cos(a_A^{\tau}\hat{;}a_A^{n})}=a_A^{\tau}=280\ \text{м}/\text{с}^2.$$

$$\vec{a}_B=\vec{a}_B^{\tau}+\vec{a}_B^{n};$$

$$a_B^n=\omega^2\cdot h_B=\omega^2\cdot 2h=424\ \text{м}/\text{с}^2;$$

$$a_B^{\tau}=h_B{}^*\varepsilon=\varepsilon\cdot OB=\varepsilon\cdot OA=280\ \text{м}/\text{с}^2;$$

$$a_B=\sqrt{\left(a_B^{\tau}\right)^2+\left(a_B^{n}\right)^2+2\cdot a_B^{\tau}\cdot a_B^{n}\cdot\cos(a_B^{\tau}\hat{;}a_B^{n})}=229\ \text{м}/\text{с}^2.$$

Задачи для самостоятельного решения

1 Закон сферического движения тела задан уравнениями $\psi=\pi\cdot t;\ \theta=\pi/3;$ $\varphi=\pi\cdot t$. Определить модуль угловой скорости тела.

2 При качении конуса без скольжения по неподвижной горизонтальной плоскости вектор мгновенной угловой скорости $\omega = 2\cdot\pi$ вращается вокруг вертикальной оси Oz с угловой скоростью ω_1 = 2 рад/с (рисунок 56). Определить модуль углового ускорения конуса.

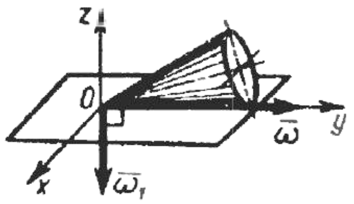

Рисунок 56

3 При сферическом движении тела проекции его угловой скорости заданы выражениями $\omega_x=\pi\cdot\sin(t)$; $\omega_y=\pi\cdot\cos(t)$; $\omega_z=0$. Определить скорость точ-

ки A тела в момент времени (с) $t = \pi$, если при этом ее координаты $x_A = 0{,}4$ м; $y_A = 0{,}5$ м; $z_A = 0{,}3$ м.

4 Основание *1* подъемного крана поворачивается согласно уравнению $\varphi = 0{,}2 \cdot t$ (рисунок 57). Угловая скорость подъема стрелы *2* $d\gamma/dt = 0{,}3$ рад/с. Определить модуль абсолютной угловой скорости стрелы.

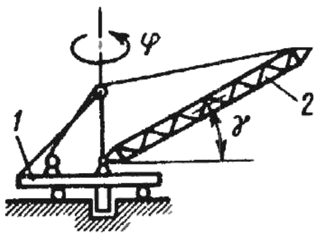

Рисунок 57

5 Вращение кривошипа OA плоского механизма определяется уравнением $\varphi = \cos(2 \cdot t)$ (рисунок 58). Колесо вращается относительно кривошипа с угловой скоростью $\omega = 3$ рад/с. Определить модуль абсолютной угловой скорости колеса в момент времени $t = 2$ с.

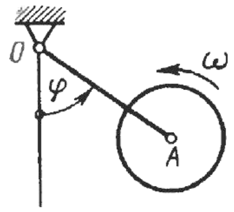

Рисунок 58

6 Платформа *1*, совершая колебательное движение, имеет угловую скорость ω_1 (рисунок 59). Якорь *2* двигателя вращается относительно статора с угловой скоростью $\omega_2 = \omega_1$. Определить расстояние в сантиметрах от мгновенной оси вращения якоря до точки O, если $a = 40$ см, $b = 30$ см.

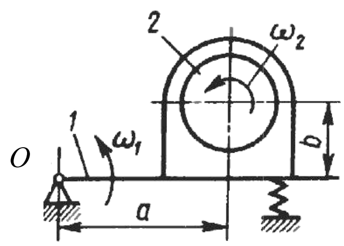

Рисунок 59

7 Тело движется в пространстве согласно уравнениям $x_M = 0$; $y_M = 20t$; $z_M = 20t - 4{,}9 \cdot t^2$; $\theta = 0{,}5$ рад; $\psi = 3$ рад; $\varphi = 12 \cdot (1 - e^{-0{,}25t})$. Определить модуль угловой скорости тела в момент времени $t = 4$ с.

Список литературы

1 Теоретическая механика. Статика – кинематика [Электронный ресурс] : метод. рекомендации к практ. занятиям для студентов / Сост. Ю. В. Машин, Н. А. Леванович, И. В. Трусов, Л. Г. Доконов. – Могилев: Белорус.-Рос. ун-т, 2019. – Ч. 1. – 36 с.

2 Сборник коротких задач по теоретической механике: учебное пособие / О. Э. Кепе [и др.]; под ред. О. Э. Кепе. – Санкт-Петербург; Москва; Краснодар: Лань, 2016. – 368 с.

3 **Цывильский, В. Л.** Теоретическая механика: учебник / В. Л. Цывильский. – 5-е изд., перераб. – Москва: КУРС; ИНФРА-М, 2018. – 368 с.

4 **Никитин, Н. Н.** Курс теоретической механики: учебник для вузов / Н. Н. Никитин. – 8-е изд., стер. – Санкт-Петербург; Москва; Краснодар: Лань, 2011. – 720 с.: ил.