МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Основы проектирования машин»

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Методические рекомендации к практическим занятиям для студентов специальности 1-53 01 05 «Автоматизированные электроприводы» дневной формы обучения

Часть 1

СТАТИКА

Могилев 2020

УДК 531
ББК 30.12
Т33

Рекомендовано к изданию
учебно-методическим отделом
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Основы проектирования машин» «15» января 2020 г., протокол № 7

Составитель Е. С. Лустенкова

Рецензент канд. техн. наук, доц. И. В. Лесковец

Методические рекомендации к практическим занятиям предназначены для студентов специальности 1-53 01 05 «Автоматизированные электроприводы» дневной формы обучения.

Учебно-методическое издание

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Часть 1

Ответственный за выпуск А. П. Прудников

Корректор И. В. Голубцова

Компьютерная верстка Н. П. Полевничая

Подписано в печать . Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Печать трафаретная. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 50 экз. Заказ №

Издатель и полиграфическое исполнение:
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования
«Белорусско-Российский университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/156 от 07.03.2019.
Пр-т Мира, 43, 212022, Могилев.

Содержание

Введение

Раздел «Статика» является первым в курсе теоретической механики. Для студентов специальности 1-53 01 05 «Автоматизированные электроприводы» важно освоение основ статического анализа для последующего успешного изучения кинематики и динамики. В статике изучается равновесие тел под действием сил. Данные методические рекомендации охватывают практический курс статики и включают такие важные темы, как равновесие плоской и пространственной систем сил, преобразование систем сил, равновесие с учетом сил трения и т. д.

Проведению практического занятия, как правило, предшествует лекционное занятие по соответствующей тематике. Перед началом практического занятия студент ознакомляется с краткими теоретическими сведениями, представленными в данных методических рекомендациях либо в источниках, взятых за основу при подготовке материала [1, 2]. На базе этих сведений и лекционного материала студенты отвечают на контрольные вопросы. Далее совместно с преподавателем разбирается задача, решение которой приведено в разделе «Решение задач». Остальные задачи студенты решают самостоятельно в аудитории либо в виде домашнего задания. Далее будут приведены задачи из [2].

Все отчеты оформляются на листах бумаги формата А4 с титульным листом, на котором указывается следующее: учебное заведение; кафедра; дисциплина; наименование темы индивидуального задания; фамилия и инициалы студента; фамилия, инициалы и должность преподавателя; год оформления отчета.

Отчет содержит исходные данные к расчету (в том числе схему), ход решения задач с обязательной расшифровкой принятых обозначений, необходимые пояснения к задаче. После проведения расчетов приводится ответ.

Методические рекомендации можно использовать для подготовки к зачету по дисциплине «Теоретическая механика» и для ее самостоятельного изучения. Для более детального усвоения курса студентам следует обращаться к [3, 4].

1 Статика

1.1 Введение в статику

Контрольные вопросы

1 Дайте определение понятия «сила». Какими параметрами характеризуется?

2 Проекция силы на ось и плоскость: нужно умножать модуль силы на синус или косинус угла между направлением силы и осью (плоскостью)?

3 Распределенные нагрузки и сосредоточенные силы: в каких единицах измеряются?

4 Как направлены реакции стержня и нерастяжимой нити?

5 Если сила F стремится повернуть рычаг (плечо) против хода часовой стрелки относительно точки O, то момент силы F относительно этой точки положителен или отрицателен?

6 Пара сил: силы, ее составляющие, параллельны или перпендикулярны?

Краткие теоретические сведения

Проекция силы на ось и плоскость.

Сила – векторная величина, мера взаимодействия между телами (рисунок 1). Характеризуется точкой приложения, направлением (линией) действия и модулем. Измеряется в ньютонах и килоньютонах.

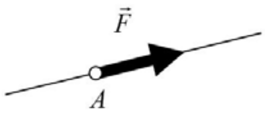


Рисунок 1

Чтобы определить проекцию силы F на ось (F_x, F_y), нужно умножить модуль силы на косинус угла, образованного между направлениями силы и оси (рисунок 2).

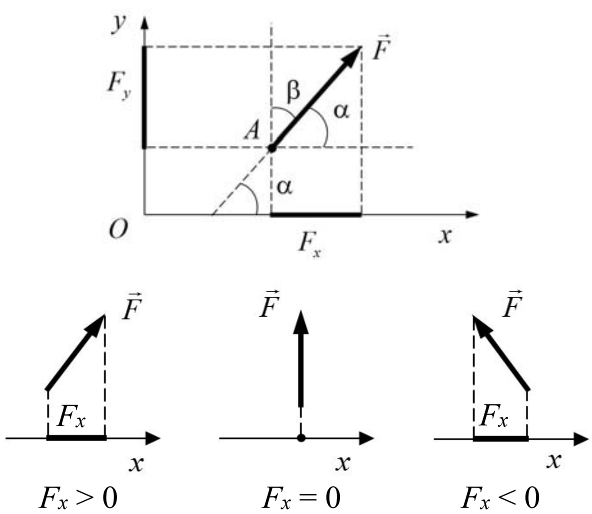


Рисунок 2

Проекции силы на оси

$$F_x = F \cdot \cos(\alpha) \;\text{ или }\; F_x = F \cdot \sin(\beta);$$

$$F_y = F \cdot \sin(\alpha) = F \cdot \cos(\beta).$$

Модуль силы $F = \sqrt{F_x^{\,2} + F_y^{\,2}}$.

Вектор силы можно представить в следующем виде: $\vec{F} = F_x \cdot \vec{i} + F_y \cdot \vec{j} + F_z \cdot \vec{k}$, где $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ – единичные векторы (орты), направленные вдоль соответствующих координатных осей (рисунок 3).

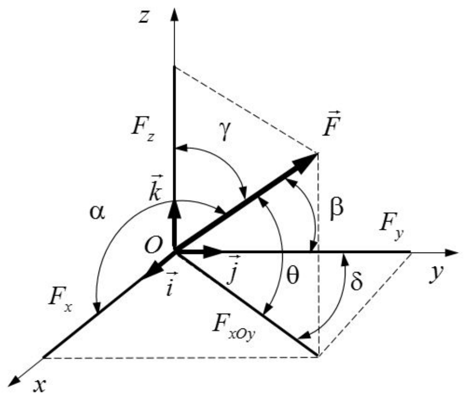
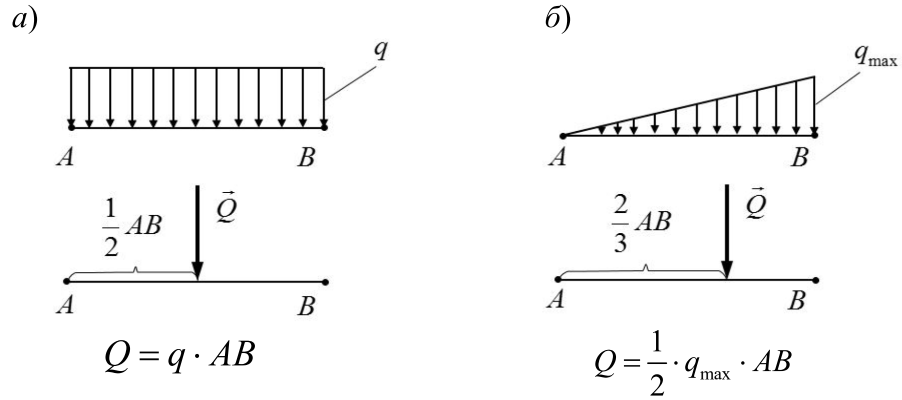


Рисунок 3

Проекции вектора силы *F* на координатные оси

$$F_x = F \cdot \cos(\alpha);\;\; F_y = F \cdot \cos(\beta);\;\; F_z = F \cdot \cos(\gamma).$$

Распределенные нагрузки характеризуются величиной *q* – интенсивностью распределения нагрузки. Единицы измерения *q* – ньютоны делить на метр или ньютоны делить на миллиметр. Для приведения системы сил к более простому виду необходимо распределенную нагрузку заменить сосредоточенной силой *Q* (рисунок 4).



а – «прямоугольный» закон распределения нагрузки; б – «треугольный» закон распределения нагрузки

Рисунок 4

Момент силы относительно точки.

Моментом силы F относительно точки (центра, полюса) O называется векторное произведение радиус-вектора r, соединяющего полюс с точкой приложения силы, и вектора силы:

$$\overline{M}_O^{(F)} = \overline{r} \times \overline{F}.$$

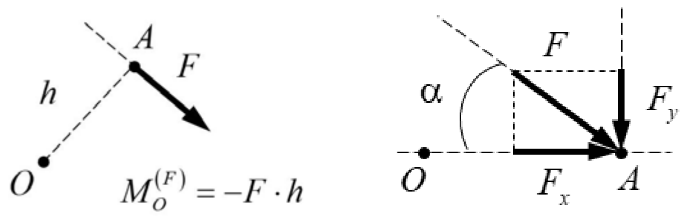
Плечо – кратчайшее расстояние от точки (центра, полюса), относительно которой определяется момент, до линии действия силы.

Таким образом, момент силы относительно точки равен произведению силы F на плечо h:

$$M_O^{(F)} = \pm F \cdot h.$$

Знак «плюс» – если сила стремится повернуть плечо как рычаг против хода часовой стрелки относительно рассматриваемой точки O; знак «минус» – если по ходу часовой стрелки.

Два способа определения момента силы относительно точки представлены на рисунке 5.



$$M_O^{(F)} = -M_O^{(F_x)} - M_O^{(F_y)} =$$
$$= F_x \cdot 0 - F_y \cdot OA = -F_y \cdot OA =$$
$$= -F \cdot \cos(\alpha) \cdot OA$$

Рисунок 5

Парой сил называют систему двух равных по модулю и противоположных по направлению параллельных сил: $\overline{F}_1 = -\overline{F}_2$ (рисунок 6).

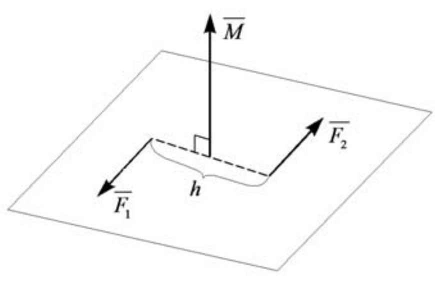


Рисунок 6

Пара сил не является уравновешенной системой сил.

Плоскость, в которой действуют силы F_1 и F_2, называется *плоскостью действия пары.*

Основной характеристикой пары сил является ее момент. Момент пары сил равен произведению одной из сил пары на расстояние между линиями действия двух сил:

$$M = \pm F_{1(2)} \cdot h\,,$$

где h – плечо пары сил – кратчайшее расстояние между линиями их действия.

Момент пары считается положительным, если стремится вращать плоскость действия пары против хода часовой стрелки.

Вектор момента пары направлен перпендикулярно к плоскости ее действия так, чтобы, глядя в его острие, поворот плоскости происходил также против хода часовой стрелки.

Момент пары сил является полной характеристикой действия пары, и при решении задач на чертежах вместо пары сил рисуют знак момента .

Свойства пар сил.

1 Момент пары сил можно произвольно переносить в любую точку плоскости ее действия и поворачивать пару сил в этой плоскости на любой угол, не изменяя его действия на тело.

2 Момент пары сил можно произвольно переносить в любую плоскость, параллельную плоскости действия пары, не изменяя его действия на тело. Таким образом, вектор момента пары сил является свободным вектором.

3 Можно изменять значения сил, составляющих пару, и плеч, не изменяя значения момента пары и его действия на тело.

4 Несколько пар сил можно привести к одной паре, момент которой будет равен сумме моментов пар. Это равенство для пространственной системы сил векторное, для плоской – алгебраическое.

$$\bar{M}_{(R-R)} = \sum_{i=1}^{n} \bar{M}_{(Fi-Fi)}\,.$$

Пример решения задач

Освободить от связей балку весом G, лежащую на двух опорах (рисунок 7, *а*).

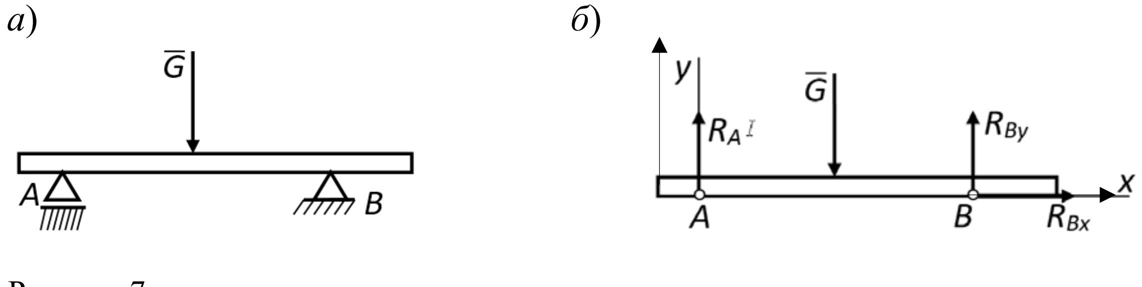


Рисунок 7

Решение

Связями являются шарнирно подвижная A и шарнирно-неподвижная B опоры. Предварительно нужно выбрать направление осей x и y. Результат освобождения от связей показан на рисунке 7, *б*.

Задачи для самостоятельного решения

1 Определить проекции силы F на оси Ox и Oy. Модуль силы $F = 28$ кН (рисунок 8).

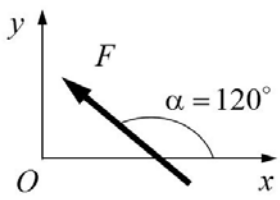


Рисунок 8

2 Определить проекции силы F на оси Ox, Oy, если значение угла $\gamma = \pi/6$ рад, а $F = 30$ Н (рисунок 9).

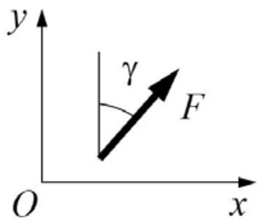


Рисунок 9

3 Найти составляющие силы F, если ее модуль $F = 36$ Н, а угол $\alpha = 60°$ (рисунок 10).

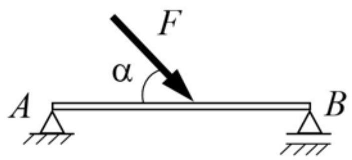


Рисунок 10

4 Определить значение угла между вектором силы P и осью Oy в градусах (и радианах) на плоскости, если известно, что модуль силы $P = 40$ Н, а его проекция на ось Ox $P_x = 16$ Н.

5 Определить угол между осью Ox и силой F, если сила задана вектором $\vec{F} = 45 \cdot \vec{i} + 12 \cdot \vec{j} + 18 \cdot \vec{k}$.

6 Определить значения сосредоточенной силы Q, эквивалентной распределенной нагрузке, показанной на рисунке, и ее проекции на ось Oy, если $AB = 4$ м, $q_{\max} = 20$ Н/м, угол $\alpha = 20°$ (рисунок 11).

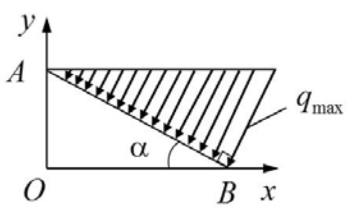


Рисунок 11

7 К вершине A квадратной пластины, длины сторон которой равны 0,2 м, приложена сила F = 150 Н (рисунок 12). Определить момент этой силы относительно точки B.

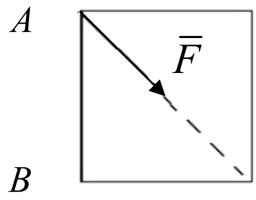


Рисунок 12

8 Сила F = 420 Н, приложенная к точке A, лежит в плоскости Oxy. Определить момент силы относительно точки O, если координаты x_A = 0,2 м, y_A = 0,3 м и угол α = 30° (рисунок 13).

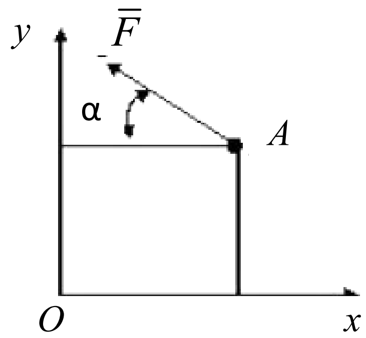


Рисунок 13

9 На вал двигателя действует момент T = 5,0 Н·м. Определить длину рычага L, который нужно было бы установить на вал и подвесить груз массой 4 кг, чтобы обеспечить такой же момент относительно точки O.

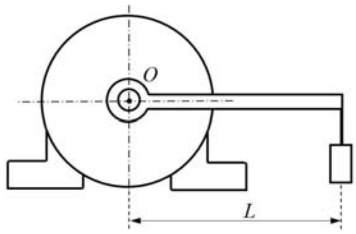


Рисунок 14

1.2 Приведение систем сил. Система сходящихся сил

Контрольные вопросы

1 Что нужно добавить к системе сил при параллельном переносе силы F из одной точки в другую?

2 Как определяются главный вектор и главный момент систем сил?

3 К чему приводится любая система сил?

4 Чем главный вектор отличается от равнодействующей системы сил?

5 Назовите общее условие равновесия сходящейся системы сил.

6 Назовите аналитическое условие равновесия сходящейся системы сил.
7 Назовите геометрическое условие равновесия сходящейся системы сил.
8 Назовите пункты общей методики решения задач статики.

Краткие теоретические сведения

Силу F на плоскости можно переносить параллельно самой себе в любую точку плоскости, добавив при этом пару сил $(\vec{F};\ \vec{F}'')$, момент которой равен моменту переносимой силы $(M = F \cdot d)$ относительно новой точки приведения (рисунок 15).

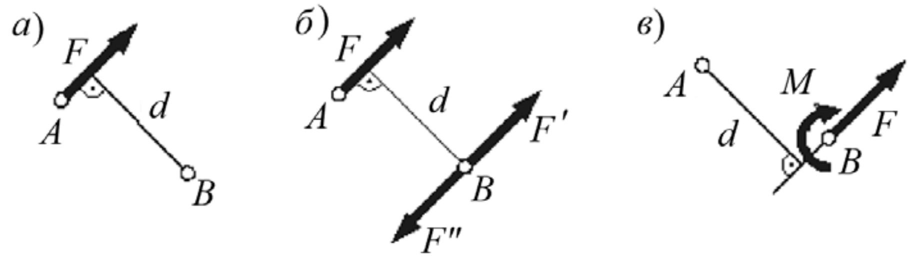


Рисунок 15

Геометрическая сумма всех сил, действующих на точку (систему), называется главным вектором системы сил.

$$\vec{R}_Г = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n = \sum \vec{F}_i .$$

Модуль главного вектора

$$R_Г = \sqrt{R_{Гx}^2 + R_{Гy}^2 + R_{Гz}^2} ,$$

где $R_{Гx}$, $R_{Гy}$, $R_{Гz}$ – проекции главного вектора на соответствующие оси координат,

$$R_{Гx} = \sum F_{ix}; \quad R_{Гy} = \sum F_{iy}; \quad R_{Гz} = \sum F_{iz}.$$

Направление главного вектора определяется направляющими косинусами

$$\cos(\alpha_R) = \frac{R_{Гx}}{R_Г}; \quad \cos(\beta_R) = \frac{R_{Гy}}{R_Г}; \quad \cos(\gamma_R) = \frac{R_{Гz}}{R_Г},$$

где α_R, β_R, γ_R – углы между главным вектором и осями Ox, Oy и Oz соответственно.

Систему пар сил, действующих на систему, можно заменить одной парой сил с моментом

$$\vec{M}_{ГO} = \vec{M}_{1O} + \vec{M}_{2O} + \ldots + \vec{M}_{nO} = \sum_{iO}^{n} \vec{M}_{iO} ,$$

который называется главным моментом заданной системы сил относительно центра приведения O.

На плоскости главный момент системы сил относительно некоторой точки O равен алгебраической сумме моментов всех сил относительно центра приведения.

Любую систему сил, произвольно расположенных на плоскости, можно привести к силе, равной ее главному вектору, приложенной в центре приведения, и паре сил с моментом, равным главному моменту всех сил относительно центра приведения.

Силы, линии действия которых пересекаются в одной точке, образуют систему сходящихся сил.

Эквивалентные системы сил – это такие системы, которые при замене не меняют кинематического состояния точки (тела, системы).

Если некоторую систему нескольких сил можно заменить одной силой и кинематическое состояние точки (тела, системы) не изменится, то такая сила называется равнодействующей указанной системы.

Для сходящейся системы сил главный вектор является равнодействующей системы сил. В общем случае (когда система не сходящаяся), это не так.

Для равновесия сходящейся системы сил необходимо и достаточно, чтобы главный вектор сил, являющийся равнодействующей, был равен нулю (общее условие): $\overline{R}_Г = 0$.

В векторной форме это условие будет сформулировано так: для равновесия сходящейся системы сил необходимо и достаточно, чтобы векторный многоугольник всех сил был замкнут.

При равновесии системы сходящихся сил сумма проекций всех сил системы на три координатные оси равна нулю (аналитическое условие):

$$\sum F_{ix} = 0;\ \sum F_{iy} = 0;\ \sum F_{iz} = 0.$$

Для системы сходящихся сил, расположенных в одной плоскости, получаем два уравнения равновесия:

$$\sum F_{ix} = 0; \quad \sum F_{iy} = 0.$$

Если тело находится в равновесии под действием трех непараллельных сил, то эти силы лежат в одной плоскости и линии их действия пересекаются в одной точке.

Связи и их реакции. Принцип освобождаемости от связей.

Тело, которое может совершать из данного положения любые перемещения в пространстве, называется свободным (например, воздушный шар в воздухе). Тело, перемещениям которого в пространстве препятствуют какие-нибудь другие, скрепленные или соприкасающиеся с ним тела, называют **несвободным**.

Все то, что ограничивает перемещения данного тела в пространстве, называют **связью**.

Примерами несвободных тел являются груз, лежащий на столе; дверь, закрепленная на петлях, и т. д. Связями в этих случаях будут: для груза – плоскость стола, не дающая грузу перемещаться по вертикали вниз; для двери – петли, не дающие ей отойти в сторону от косяка двери.

Сила, с которой данная связь действует на тело, препятствуя тем или иным его перемещениям, называется силой реакции (противодействия) связи или просто **реакцией связи**.

Направлена реакция связи в сторону, противоположную той, куда связь не дает перемещаться телу.

Одним из основных положений механики является **принцип освобождаемости от связей**, согласно которому всякое несвободное твердое тело можно рассматривать как свободное, если отбросить связи, заменив их действие реакциями (рисунок 16).

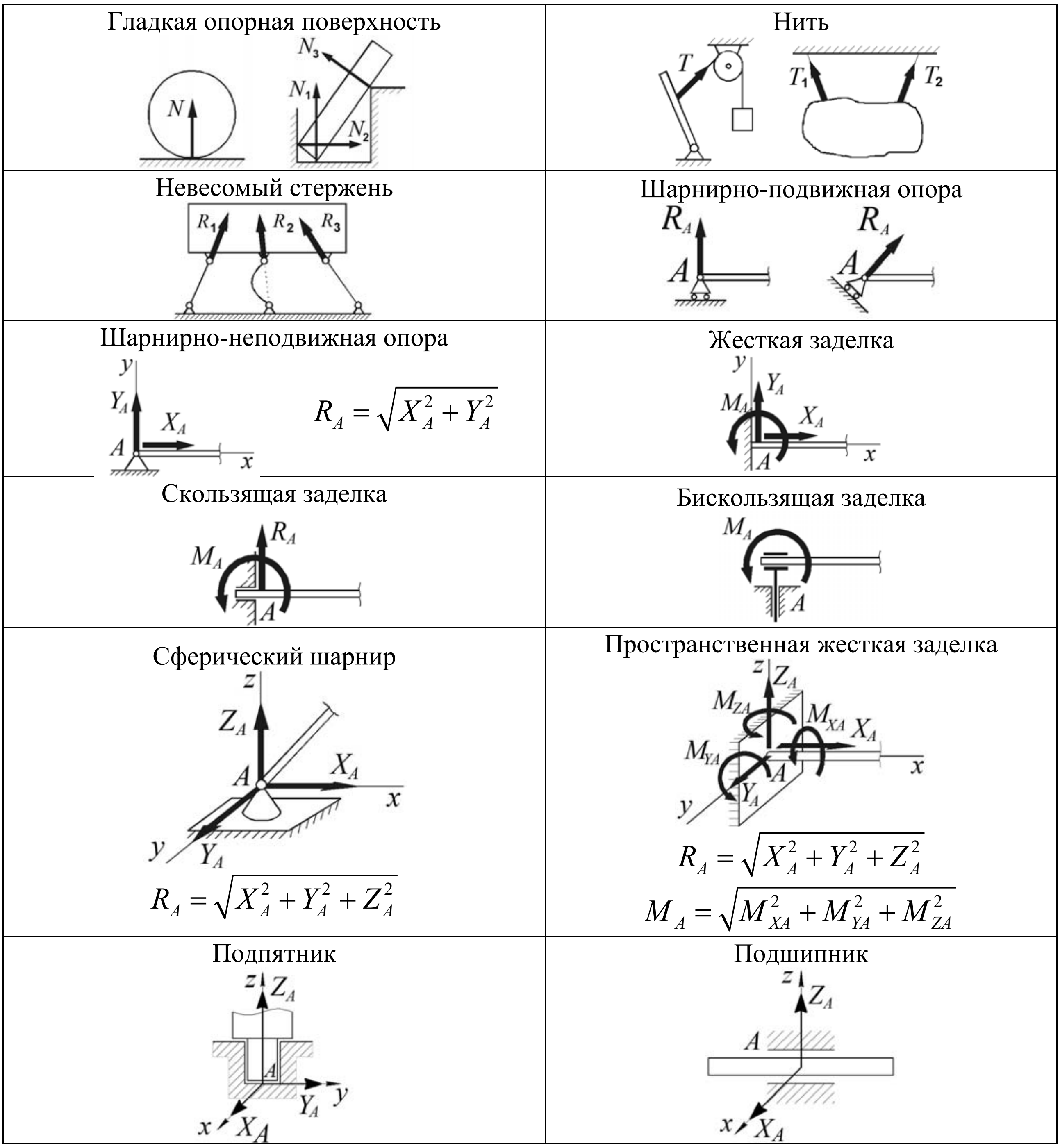


Рисунок 16

Общая методика решения задач статики.

1 Начертить расчетную схему.

2 Приложить внешние силы.

3 Освободить тело (систему тел) от связей, заменив их действие реакциями.

4 Составить уравнения равновесия и решить их.

Для сходящейся системы убедиться после п. 3, что она действительно сходящаяся.

Пример решения задач

Дано: шар весом P = 4 Н удерживается на наклонной плоскости с углом $\alpha = 30^\circ$ с помощью нити. Найти силу давления шара на наклонную поверхность и силу натяжения нити (рисунок 17).

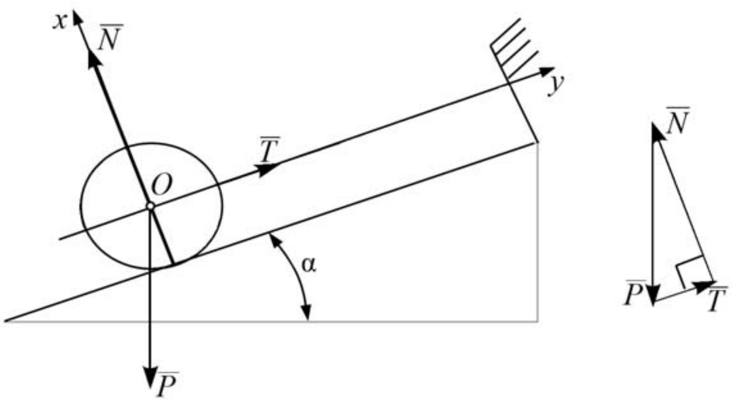


Рисунок 17

Решим задачу двумя способами.

От связей будем освобождать шар. Связи – опорная поверхность и нить. Реакции – N и T соответственно. Реакция N – по нормали к гладкой поверхности в точке соприкосновения, реакция нити – вдоль нити к точке подвеса. Выберем оси координат x и y. Начало координат свяжем с центром масс тела O. Оси направлены так же, как искомые реакции, что упростит их нахождение. Так как имеем систему трех сил, то линии их действия сходятся. Применим условия равновесия.

$$\sum F_{xi} = 0;\; N - P\cdot\cos(\alpha) = 0;$$

$$\sum F_{yi} = 0;\; T - P\cdot\sin(\alpha) = 0.$$

Из первого уравнения

$$N = P\cdot\cos(30^\circ) = 4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 3{,}2 \text{ Н}.$$

Из второго уравнения

$$T = P\cdot\cos(60^\circ) = 4\cdot\frac{1}{2} = 2 \text{ Н}.$$

Решим задачу геометрически. Построим силовой многоугольник, который должен быть замкнутым. Так как реакция T перпендикулярна N, получим прямоугольный треугольник, из которого N и T находятся как катеты при гипотенузе, равной P. Результат будет аналогичным.

Задачи для самостоятельного решения

1 Определить главный вектор плоской системы сил, если заданы его проекции на координатные оси $R_x = 300$ Н, $R_y = 400$ Н.

2 К прямоугольнику приложены четыре силы по 10 Н каждая (рисунок 18). Определить модуль главного вектора заданной системы сил, если угол α = 60°.

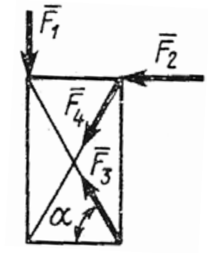


Рисунок 18

3 Определить главный момент системы двух сил относительно точки A, если силы G = 1 Н, F = 5 Н, расстояние l = 0,2 м, угол φ = 60° (рисунок 19).

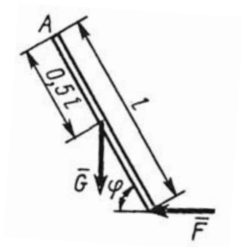


Рисунок 19

4 К прямоугольнику приложены силы F_1 = 4 Н, F_2 = 5 Н, F_3 = 8 Н, F_4 = 2 Н (рисунок 20). Определить главный момент заданной системы сил относительно точки A, если расстояние l = 1 м, угол α = 30°.

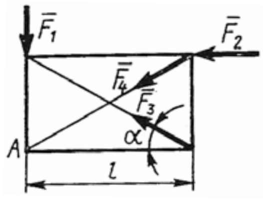


Рисунок 20

5 Груз удерживается в равновесии стержнями AC и BC, шарнирно соединенными в точках A, B и C (рисунок 21). Вес груза 100 Н. Найти реакции стержней, если задан угол β = 60º. Задачу решить аналитическим и геометрическим способами.

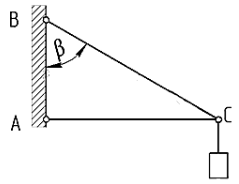


Рисунок 21

6 Пластина весом G = 8 Н удерживается в равновесии двумя канатами: AB и CD, расположенными в вертикальной плоскости. Определить натяжение каната CD, если угол α = 30° (рисунок 22).

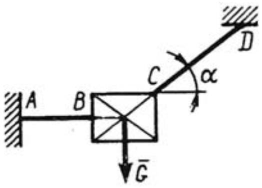


Рисунок 22

7 Однородный шар весом 12 Н удерживается в равновесии на гладкой наклонной плоскости с помощью веревки AB. Определить давление шара на плоскость, если угол α = 60° (рисунок 23).

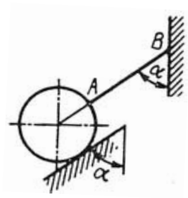


Рисунок 23

8 Вес однородной горизонтальной балки AB равен 180 Н (рисунок 24). Задан угол α = 45°. Определить реакцию шарнира A.

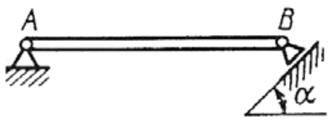


Рисунок 24

1.3 Произвольная плоская система сил

Контрольные вопросы

1 Назовите основные (векторные) условия равновесия.

2 Какие уравнения равновесия справедливы для произвольной плоской системы сил?

3 Сколько независимых уравнений равновесия можно записать для плоской произвольной системы сил?

4 Какие системы называют статически определимыми и статически неопределимыми?

5 Как определить степень статической неопределимости системы?

6 Дайте определение сочлененной системы тел.

7 Какова методика расчета сочлененной системы тел, являющейся статически неопределимой?

Краткие теоретические сведения

При равновесии системы сил, произвольно расположенных на плоскости, главный вектор $\bar{R}_Г$ и главный момент этой системы сил относительно любой точки плоскости $\bar{M}_{ГO}$ равны нулю (условия равновесия):

$$\vec{R}_Г = 0;\ \vec{M}_{ГO} = 0.$$

Уравнения равновесия системы сил, произвольно расположенных на плоскости, имеют вид:

$$\begin{cases} \sum F_{ix} = 0; \\ \sum F_{iy} = 0; \\ \sum M_{iO} = 0. \end{cases}$$

То есть проекции всех сил, действующих на тело, на взаимно перпендикулярные оси должны равняться нулю и сумма моментов сил относительно любой точки в плоскости должна равняться нулю.

Для плоской произвольной системы сил можно записать сколько угодно уравнений равновесия, но независимыми будут только три.

Если число независимых уравнений равновесия больше или равно числу неизвестных, то система является статически определимой.

Если число неизвестных превышает число независимых уравнений, то система является статически неопределимой и не решается только лишь с помощью механики твердого тела.

Число независимых уравнений – S; число неизвестных – N.

Например (рисунок 25),

$$S - N = 3 - 6 = -3,$$

следовательно, система является трижды статически неопределимой.

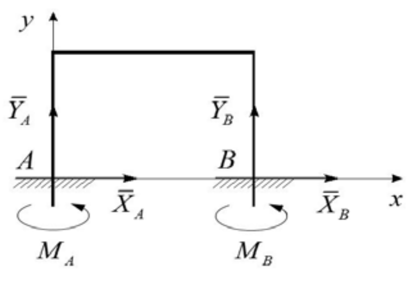


Рисунок 25

Сочлененной системой тел называется совокупность тел, соединенных между собой с помощью связей или просто соприкасающихся друг с другом.

Статический расчет инженерных сооружений во многих случаях сводится к рассмотрению условий равновесия конструкции из системы сочлененных тел, соединенных связями. Связи, соединяющие части данной конструкции, будем называть внутренними, в отличие от внешних связей, скрепляющих конструкцию с телами, в неё не входящими.

Методика расчета сочлененных систем (рисунок 26).

1 Рассматривая систему как единое тело, к ней применяют принцип освобождаемости от связей. Подсчитывают число неизвестных и определяют степень статической неопределимости.

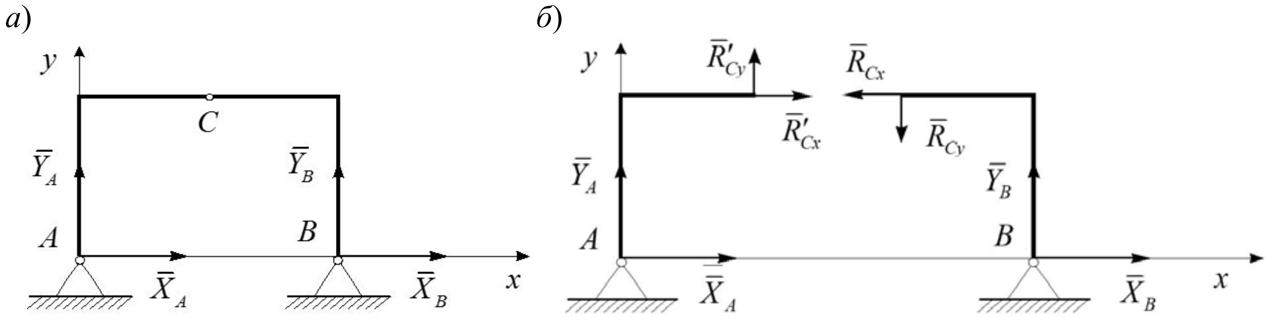


Рисунок 26

2 Систему тел расчленяют на отдельные подсистемы. Указывают внутренние реакции в месте сочленения. Реакции в месте сочленения равны по модулю и противоположны по направлению.

$$\vec{R}_{Cx} = -\vec{R}'_{Cx}\,;\ \vec{R}_{Cy} = -\vec{R}'_{Cy}\,.$$

3 Проверяют выполняемость условия $S - N \geq 0$. Записывают уравнения равновесия для каждой подсистемы отдельно.

4 Решают эти системы совместно в удобной последовательности.

Пример решения задач

Вес однородной арки *1* равен 100 Н. Пренебрегая весом балки *2*, определить максимальную интенсивность $q_{\max}$ распределенной нагрузки, для того чтобы момент в заделке *A* равнялся 70 Н·м, если арка *1* имеет форму полуокружности и размеры $BC = 3 \cdot AC = 0{,}5$ м (рисунок 27).

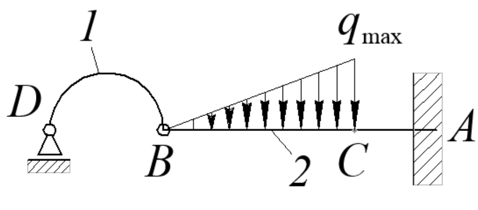


Рисунок 27

Решение

Для решения задачи сначала рассмотрим равновесие арки *1* (рисунок 28, *а*), а затем – балки *2* (рисунок 28, *б*).

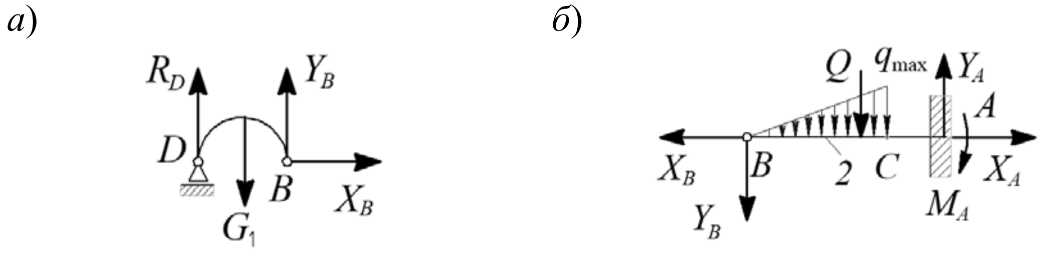


Рисунок 28

Применим принцип освобождаемости от связей и заменим связи соответствующими реакциями для всей системы. Получим четыре неизвестные: R_D, Y_A, X_A, Q (q_{max}). Система один раз статически неопределима.

Расчленим в шарнире *B*. Получим две подсистемы. Имеем шесть неизвестных: R_D, Y_A, X_A, Q (q_{max}), X_D и Y_D. Для двух подсистем можем составить также шесть независимых уравнений равновесия, значит, задача решаема.

Следует заметить, что, исходя из условий задачи, можно не составлять все возможные уравнения, а ограничиться лишь необходимыми. Для арки, как для левой подсистемы (см. рисунок 28, *а*), составим уравнение равновесия: $\sum M_D = 0$ и найдем вертикальную составляющую реакции в шарнире *B*:

$$-G_1\frac{DB}{2} + Y_B \cdot DB = 0; \quad Y_B = \frac{G_1}{2}.$$

Для балки (см. рисунок 28, *б*), как для правой подсистемы, составим уравнение равновесия моментов относительно точки *A*:

$$\sum M_A = 0;$$

$$-M_A + Y_B \cdot AB + \frac{1}{2}q_{\max} \cdot BC \cdot \left(\frac{1}{3}BC + AC\right) = 0;$$

$$q_{\max} = \frac{M_A - Y_B \cdot AB}{\frac{1}{2} \cdot BC \cdot \left(\frac{1}{3}BC + AC\right)}.$$

Подставляя числовые значения, получим

$$q_{\max} = \frac{70 - 50 \cdot \left(0{,}5 + \frac{0{,}5}{3}\right)}{\frac{1}{2} \cdot 0{,}5 \cdot \left(\frac{1}{3}0{,}5 + \frac{0{,}5}{3}\right)} = 441{,}8 \text{ Н/м}.$$

Ответ: $q_{max} = 441{,}8$ Н/м.

Задачи для самостоятельного решения

1 Определить момент M пары сил, при котором реакция опоры B равна 250 Н, если интенсивность распределенной нагрузки q = 150 Н/м, размеры $AC = CB$ = 2 м (рисунок 29).

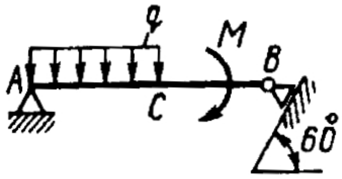


Рисунок 29

2 На балку AB действуют сосредоточенная сила Q = 2 Н, заменяющая распределенную нагрузку интенсивностью q, и сила F = 6 Н (рисунок 30). Определить реакцию опоры B, если длина $AC = \frac{1}{3} \cdot AB$, угол α = 45°.

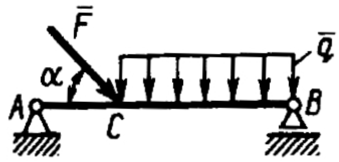


Рисунок 30

3 Конец B однородного бруса весом 100 кН, закрепленного в шарнире A, опирается на гладкую стену (рисунок 31). Определить в килоньютонах давление бруса на стену, если угол α = 60°.

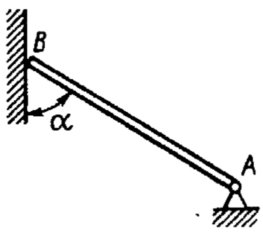


Рисунок 31

4 На консольную балку AB, заделанную в стену, действуют сила F = 4 Н и пара сил с моментом M = 2 Н·м (рисунок 32). Определить момент в заделке, если длина AB = 4 м.

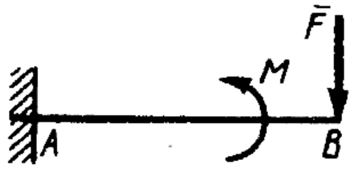


Рисунок 32

5 Балка AC закреплена в шарнире C и поддерживается в горизонтальном положении веревкой AD, перекинутой через блок (рисунок 33). Определить интенсивность распределенной нагрузки q, если длины BC = 5 м, AC = 8 м, угол $\alpha = 45°$, а вес груза 1 равен 20 Н.

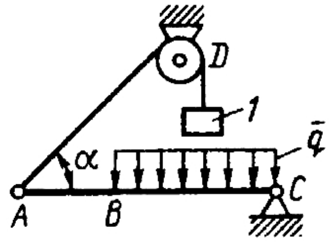


Рисунок 33

6 Определить реакцию опоры A в килоньютонах, если сила F = 3 кН, угол $\alpha = 30°$, размеры $AB = BC$ (рисунок 34).

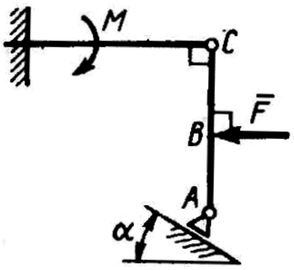


Рисунок 34

7 Два стержня соединены в шарнире B. Определить момент в заделке A, если силы F_1 = 60 Н, F_2 = 50 Н (рисунок 35).

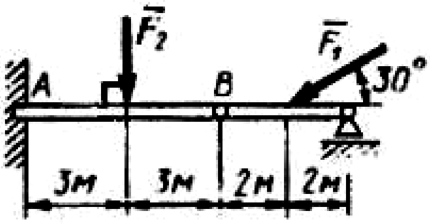


Рисунок 35

8 Определить вертикальную составляющую реакции в шарнире B, если сила F = 850 Н, а размеры $DC = CE = BE$ (рисунок 36).

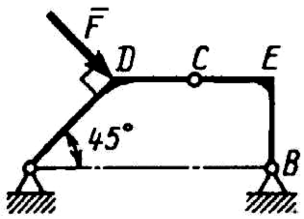


Рисунок 36

1.4 Произвольная пространственная система сил

Контрольные вопросы

1 Дайте определение понятию «проекция силы на плоскость».

2 Как определить момент силы относительно оси?

3 На рисунке 33 сила *F* создает момент относительно оси z положительный или отрицательный?

4 Когда момент силы относительно оси равен нулю?

5 Назовите условия равновесия произвольной пространственной системы сил.

6 Чем отличаются условия и уравнения равновесия для пространственной сходящейся системы сил?

7 Сколько независимых уравнений равновесия можно записать для произвольной пространственной системы сил? Каких?

Краткие теоретические сведения

Проекцией силы на плоскость *Oxy* называется вектор F_{xy}, заключенный между проекциями начала и конца вектора силы $\vec{F}$ на эту плоскость (рисунок 37). Проекции силы на плоскости и на координатные оси определяются следующими зависимостями:

$$F_{xy} = F \cdot \cos(\beta) = F \cdot \sin(\alpha).$$

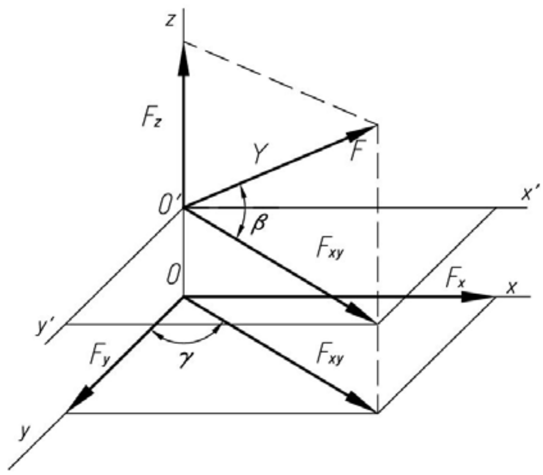


Рисунок 37

Момент M_Z силы относительно оси *Oz* (рисунок 38) равен произведению модуля проекции силы на плоскость *Q*, перпендикулярную оси, на плечо *h* этой проекции относительно точки *O* пересечения оси с плоскостью *Q*:

$$M_z = F \cdot \cos(\alpha) \cdot h.$$

Момент считается положительным, если (см. рисунок 34), глядя навстречу оси, «вращение» плоскости Q под действием спроецированной на неё силы наблюдается происходящим против хода часовой стрелки, и отрицательным – при вращении в обратном направлении.

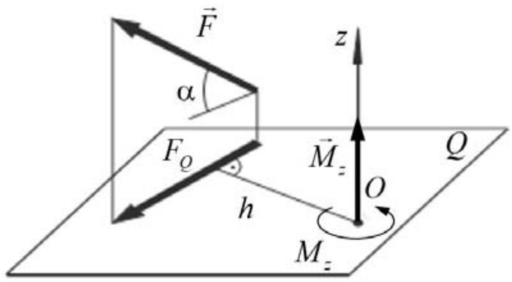


Рисунок 38

Момент силы относительно оси равен нулю, если $\cos\alpha$ или h равны нулю, т. е. если:

– линия действия силы параллельна оси;

– линия действия силы пересекает ось.

Момент силы относительно оси можно найти, разложив силу F на три составляющие: F_x, F_y и F_z, и определить поочередно моменты этих составляющих относительно оси, а затем сложить с учетом знаков.

Главный вектор и главный момент системы сил относительно центра O $\vec{R}_Г = \sum \vec{F}_i$; $\vec{M}_{ГО} = \sum \vec{M}_{Oi}$.

Условия равновесия любой системы сил выражаются равенствами $\vec{R}_Г = 0$ и $\vec{M}_{ГО} = 0$.

Уравнения равновесия имеют вид:

$$\begin{cases} \sum F_{ix} = 0; \\ \sum F_{iy} = 0; \\ \sum F_{iz} = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} \sum M_{ix} = 0; \\ \sum M_{iy} = 0; \\ \sum M_{iz} = 0. \end{cases}$$

При равновесии системы сил, произвольно расположенных в пространстве, суммы проекций всех сил на каждую из трех координатных осей и суммы их моментов относительно этих осей равны нулю.

Таким образом, для произвольной пространственной системы сил можно составить шесть независимых уравнений равновесия.

Для пространственной сходящейся системы сил необходимо и достаточно, чтобы был равным нулю главный вектор системы сил: $\vec{R}_Г = 0$. Соответственно, для нее можно составить три независимых уравнения равновесия:

$$\begin{cases} \sum F_{ix} = 0; \\ \sum F_{iy} = 0; \\ \sum F_{iz} = 0. \end{cases}$$

Пример решения задач

1 Определить момент распределенной нагрузки относительно оси *Oy*, если q_{max} = 10 Н/м, *a* = 3 м (рисунок 39). Направление осей координат задано.

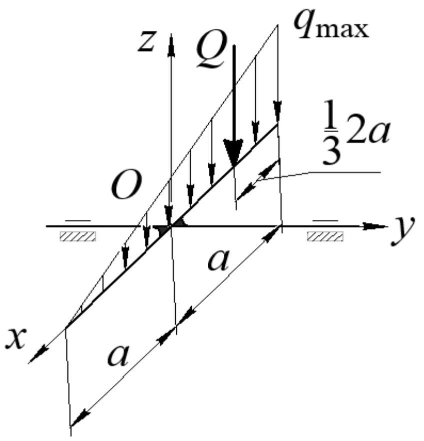


Рисунок 39

Решение

Заменим распределенную нагрузку сосредоточенной силой:

$$Q = \frac{1}{2} q_{\max} \cdot 2a \,.$$

Момент распределенной нагрузки относительно оси *Oy*

$$M_{Q_y} = -\frac{1}{2} q_{\max} \cdot 2a \cdot (a - \frac{1}{3} 2a).$$

Подставляя численные значения, получим

$$M_{Q_y} = -\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (3 - \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 3) = -30 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Ответ: $M_{Q_y} = -30$ Н·м.

2 Дано: вес полки *P* = 2000 Н, *AB* = 4 м, *AK* = 2 м (рисунок 40). Найти реакции опор R_A, R_B и силу натяжения троса *T*.

Решение

Составим шесть уравнений равновесия:

1) $\sum F_{xi} = 0$;

2) $\sum F_{yi} = R_{Ay} + R_{By} - T \cdot \cos 30^\circ = 0$;

3) $\sum F_{zi} = R_{Az} + R_{Bz} + T \cdot \sin 30^\circ - P = 0$;

4) $\sum M_x = -P \cdot \frac{1}{2} \cdot AD + T \cdot \sin 30^\circ \cdot AD = 0$;

5) $\sum M_y = -P \cdot \frac{1}{2} \cdot AB + R_{Bz} \cdot AB = 0$;

6) $\sum M_z = -R_{By} \cdot AB = 0$.

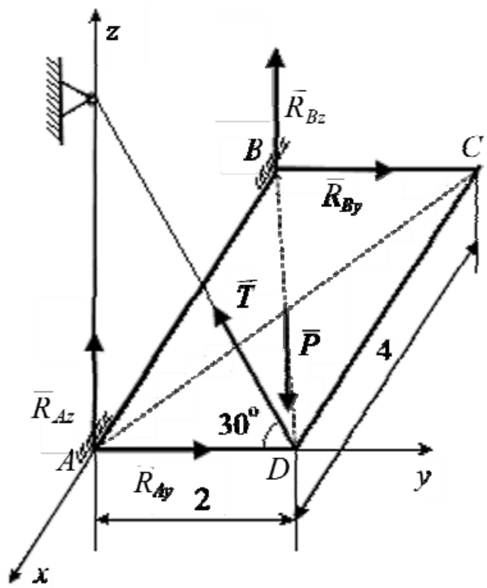


Рисунок 40

Так как из последнего уравнения длина *AB* не может быть равна 0 (она равна 4 м), то $R_{By} = 0$.

Из четвертого уравнения находим *T*:

$$T \cdot = \frac{P \cdot 1/2 \cdot AD}{\sin 30^\circ \cdot AD} = 2000 \text{ Н.}$$

Из второго уравнения находим R_{Ay}:

$$R_{Ay} = T \cdot \cos 30^\circ - R_{By} = 1732 \text{ Н.}$$

Из пятого уравнения находим R_{Bz}:

$$R_{Bz} = \frac{P \cdot 1/2 \cdot AB}{AB} = 1000 \text{ Н.}$$

Из третьего уравнения находим R_{Az}:

$$R_{Az} = P - R_{Bz} - T \cdot \sin 30^\circ = 0 \text{ Н.}$$

$$R_A = \sqrt{R_{Ay}^2 + R_{Az}^2} = R_{Ay} = 1732 \text{ Н}; \; R_B = \sqrt{R_{By}^2 + R_{Bz}^2} = R_{Bz} = 1000 \text{ Н}.$$

Ответ: $R_A = 1732$ Н; $R_B = 1000$ Н.

Задачи для самостоятельного решения

1 К точке A прямоугольного параллелепипеда приложена сила F = 4 кН (рисунок 41). Определить момент этой силы относительно оси Oy, если размеры a = 10 м, b = 6 м, c = 20 м.

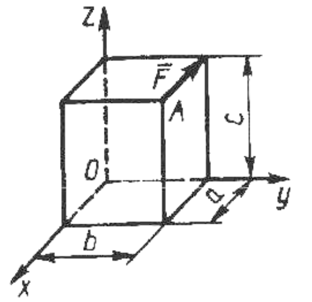


Рисунок 41

2 Определить момент силы $\overline{F}$ относительно оси Ox, если ее значение F = 16 Н, ребро куба a = 0,75 м (рисунок 42).

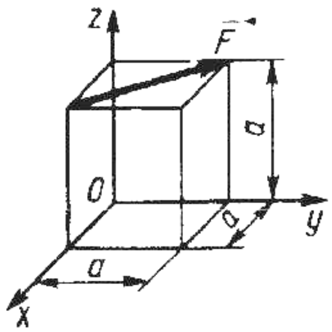


Рисунок 42

3 На участке AB фигурной балки действует распределенная нагрузка интенсивностью $q = 2$ кН/м (рисунок 43). К точке D приложена сила $F = 4$ кН. Определить главный вектор данной системы сил, если AB = 1,5 м.

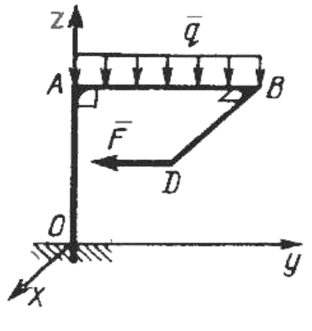


Рисунок 43

4 К коленчатому валу OA в точке B под углом $\alpha = 60°$ к горизонту приложена сила $F = 10$ Н, которая уравновешивается парой сил с моментом M (рисунок 44). Определить модуль момента, если сила $\overline{F} \parallel Oxz$ и $b = 0{,}9$ м.

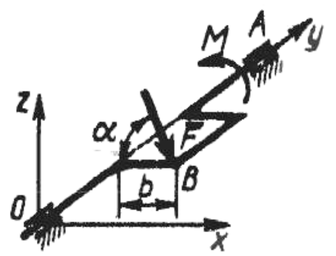


Рисунок 44

5 К валу OA под прямым углом прикреплены стержни BC и DE (рисунок 45). К стержню DE приложена распределенная нагрузка $q = 0{,}5$ Н/м. Определить модуль силы $\overline{F}$, уравновешивающей данную нагрузку, если $\overline{F} \parallel Oxz$.

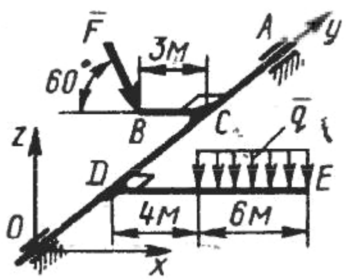


Рисунок 45

6 Однородная плита $OABC$ весом $G = 30$ Н удерживается в горизонтальном положении шарнирами O, A и тросом BD (рисунок 46). Определить натяжение троса, если $a = 2$ м и угол $\alpha = 60°$.

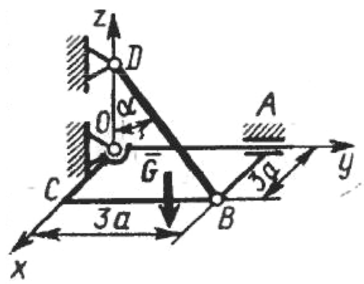


Рисунок 46

7 Три стержня: AC, BC и DC соединены шарнирно в точке C (рисунок 47). Определить усилие в стержне DC, если заданы сила $F = 50$ Н и угол $\alpha = 60°$. Сила $\overline{F}$ находится в плоскости Oyz.

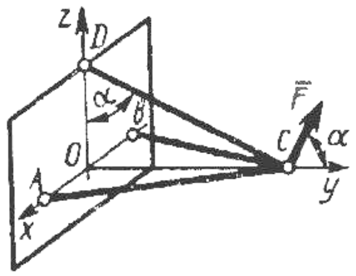


Рисунок 47

1.5 Равновесие с учетом сил трения

Контрольные вопросы

1 Что называется силой сцепления?
2 Как определяется коэффициент сцепления?
3 Дайте определение силе трения скольжения.
4 Как определяется коэффициент трения?
5 Равновесие с учетом сил трения качения.

Краткие теоретические сведения

При стремлении сдвинуть покоящееся тело по неподвижной поверхности с усилием $\vec{S}$ (рисунок 48) в плоскости, касательной к соприкасающимся поверхностям, возникает сила сцепления $\vec{F}_{сц}$.

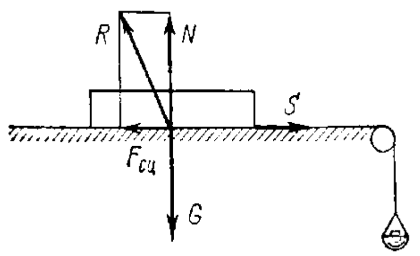


Рисунок 48

При этом полная реакция поверхности

$$\vec{R} = \vec{F}_{сц} + \vec{N},$$

где N – нормальная составляющая полной реакции поверхности.

Силой сцепления называется касательная составляющая полной реакции опорной поверхности, которая уравновешивает силу, стремящуюся сдвинуть покоящееся тело.

Если усилие $\vec{S}$ изменяется от 0 до некоторого максимального значения $\vec{S}^{\max}$, при котором тело придет в движение, то сила $\vec{F}_{сц}$ сцепления также будет изменяться от 0 до своего максимального значения $\vec{F}_{сц}^{\max}$ (**критический случай**).

Коэффициент пропорциональности между максимальным значением силы сцепления и нормальным давлением тела на поверхность называют **коэффициентом сцепления**.

$$f_{сц}^{\max} = \frac{F_{сц}^{\max}}{N}.$$

При решении задач значение силы сцепления $F_{сц}$ можно найти только для критического случая. В остальных же случаях сила сцепления находится из уравнений равновесия как составляющая полной реакции поверхности.

Сила трения скольжения – касательная составляющая полной реакции опорной поверхности, возникающая при скольжении тела.

Коэффициент пропорциональности между силой трения скольжения и нормальным давлением тела на поверхность называется **коэффициентом трения скольжения**, который определяется по формуле

$$f = \frac{F_{тр}}{N}.$$

Экспериментально установлено, что $f < f_{сц}^{\max}$.

Коэффициенты сцепления и трения скольжения зависят от материалов соприкасающихся поверхностей, от разделяющих их оксидных пленок, покрытий, смазочных материалов, а также от макро- и микрогеометрии соприкасающихся поверхностей. Значения данных коэффициентов устанавливаются опытным путем и приведены в справочной литературе.

Условие отсутствия скольжения $S < f \cdot N$, а наличия – $S \geq f \cdot N$.

Пусть на каток радиусом *R* и весом *G*, опирающийся на горизонтальную поверхность, действует сила *T*, приложенная горизонтально к его центру (рисунок 49), стремящаяся сместить каток.

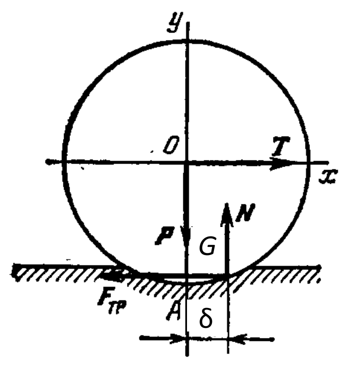


Рисунок 49

Под действием силы тяжести катка соприкасающаяся поверхность деформируется и линия действия силы *N* смещается на расстояние поверхности и силы $F_{сц}$ сцепления из *A* в *C*. Составим уравнения равновесия катка:

$$\sum F_{ix} = T - F_{сц} = 0; \quad \sum F_{iy} = N - P = 0; \quad \sum M_{iA} = N \cdot \delta - T \cdot R = 0.$$

Откуда $F_{сц} = T$; $N = P$.

На каток действуют две пары сил: $(\vec{F}_{сц}, \ \vec{T})$ и $(\vec{N}, \ \vec{P})$, которые уравновешены. Первая пара сил с моментом $M = T \cdot R$ стремится привести каток в движение, а вторая – противодействует качению катка. Момент $M_к = N \cdot \delta$ противодействующей пары называют **моментом сопротивления качению**, а коэффициент δ – **коэффициентом трения качения** (измеряется экспериментально). Условие отсутствия качения $T \cdot R < N \cdot \delta$, а наличия – $T \cdot R \geq N \cdot \delta$.

Пример решения задач

Каким должен быть вес тела для того, чтобы началось скольжение вверх по наклонной плоскости, если F = 90 Н, а коэффициент трения скольжения f = 0,3?

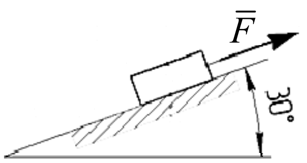


Рисунок 50

Решение

Для решения задачи составим уравнение равновесия в проекциях на ось x:

$$\sum F_x = 0; \ F - F_{тр} - G \cdot \sin 30° = 0.$$

Сила трения скольжения $F_{тр} = f \cdot N$, где N – нормальная составляющая полной реакции опоры.

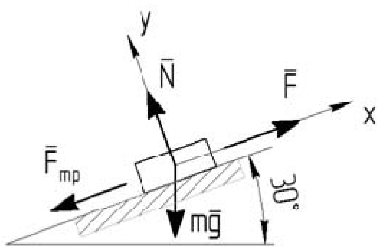


Рисунок 51

Для определения силы N составим уравнения проекций на ось y:

$$\sum F_y = 0; \ \ N - G \cdot \cos 30° = 0; \ \ N = G \cdot \cos 30°;$$

$$F - f \cdot G \cdot \cos 30° - G \cdot \sin 30° = 0.$$

Из полученного выражения вес

$$G = \frac{F}{f \cdot G \cdot \cos 30° + G \cdot \sin 30°}.$$

Подставляя числовые значения, имеем

$$G = \frac{90}{0,3 \cdot \cos 30° + \sin 30°} = 118,45 \text{ Н}.$$

Ответ: G = 118,45 Н.

Задачи для самостоятельного решения

1 Каким должен быть наименьший вес тела *2* для того, чтобы тело *1* весом 200 Н начало скользить по горизонтальной плоскости, если коэффициент трения скольжения f = 0,2 (рисунок 52)?

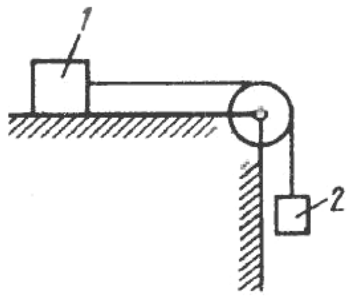


Рисунок 52

2 Однородный брус *AB* опирается в точке *A* на гладкую стену, а в точке *B* – на негладкий пол. Определить наименьший коэффициент трения скольжения между брусом и полом, при котором брус останется в указанном положении в покое (рисунок 53).

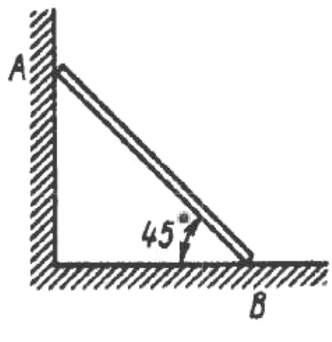


Рисунок 53

3 Определить наименьший вес груза *1*, при котором он останется в покое, если груз *2* имеет вес 140 Н, а коэффициент трения скольжения между грузом *1* и плоскостью равен 0,2 (рисунок 54).

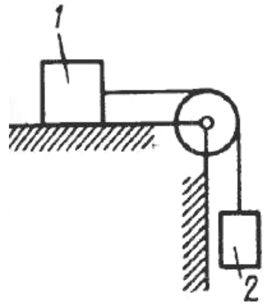


Рисунок 54

4 К катку *1* с помощью нерастяжимой нити подвешен груз *2* (рисунок 55). Определить наибольший вес этого груза, при котором каток *1* весом 3,2 кН останется в покое, если коэффициент трения качения $\delta = 0{,}004$ м, радиус $R = 32{,}4$ см.

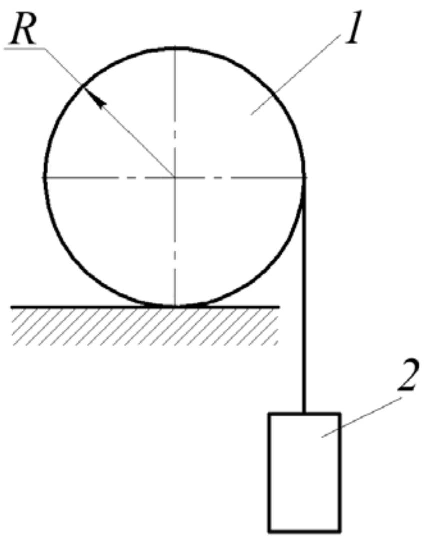


Рисунок 55

5 К однородному катку весом 2 кН приложена горизонтальная сила $\bar{F}$ (рисунок 56). Определить наименьший модуль силы $\bar{F}$, при котором каток не скользит и не катится, если коэффициент трения качения $\delta = 0{,}006$ м, коэффициент трения скольжения $f = 0{,}2$, радиус $R = 0{,}6$ м, размер $OA = 0{,}4$ м.

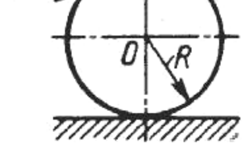


Рисунок 56

6 Однородный каток *2* весом 4 кН связан с телом *1* нерастяжимой нитью (рисунок 57). Радиус $R = 0{,}5$ м, коэффициент трения качения $\delta = 0{,}005$ м, момент пары сил $M = 50$ Н·м. Определить наибольший вес тела *1*, при котором оно начнет скользить, если коэффициент трения скольжения для катка и тела $f = 0{,}2$.

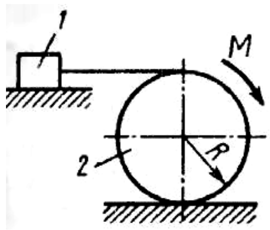


Рисунок 57

7 К однородному катку, малый радиус которого 0,2 м, подвешен груз *1* весом 200 Н и приложена пара сил с моментом $M = 57{,}6$ Н·м (рисунок 58). Определить в килоньютонах наибольший вес катка, при котором он будет катиться влево, если коэффициент трения качения $\delta = 0{,}008$ м.

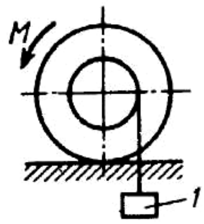


Рисунок 58

8 Однородный каток *1* весом 10 кН и радиусом 0,5 м связан с грузом *3*, вес которого равен 80 Н, горизонтальной нерастяжимой нитью, перекинутой через блок *2* (рисунок 59). Определить наименьший коэффициент трения качения, при котором каток останется в покое.

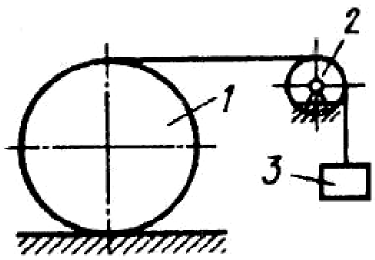


Рисунок 59

Список литературы

1 Теоретическая механика. Статика – кинематика [Электронный ресурс]: методические рекомендации к практическим занятиям для студентов / Сост. Ю. В. Машин [и др.]. – Могилев: Белорус.-Рос. ун-т, 2019. – Ч. 1. – 36 с.

2 Сборник коротких задач по теоретической механике: учебное пособие / О. Э. Кепе [и др.]; под ред. О. Э. Кепе. – Санкт-Петербург; Москва; Краснодар: Лань, 2016. – 368 с.

3 **Цывильский, В. Л.** Теоретическая механика: учебник / В. Л. Цывильский. – 5-е изд., перераб. – Москва: КУРС; ИНФРА-М, 2018. – 368 с.

4 **Никитин, Н. Н.** Курс теоретической механики: учебник для вузов / Н. Н. Никитин. – 8-е изд., стер. – Санкт-Петербург; Москва; Краснодар: Лань, 2011. – 720 с.: ил.