

МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Основы проектирования машин»

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

*Методические рекомендации к самостоятельной работе
для студентов специальности
1-53 01 05 «Автоматизированные электроприводы»
заочной формы обучения*



Могилев 2020

УДК 531.8
ББК 22.21
Т38

Рекомендовано к изданию
учебно-методическим отделом
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Основы проектирования машин» «15» января 2020 г.,
протокол № 7

Составители: д-р техн. наук, проф. М. Е. Лустенков;
Е. С. Лустенкова

Рецензент канд. техн. наук, доц. И. В. Лесковец

Предназначены для самостоятельной подготовки студентов специальности 1-53 01 05 «Автоматизированные электроприводы» заочной формы обучения к аудиторной контрольной работе.

Учебно-методическое издание

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Ответственный за выпуск А. П. Прудников

Корректор И. В. Голубцова

Компьютерная верстка Н. П. Полевничая

Подписано в печать . Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Печать трафаретная. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 56 экз. Заказ №

Издатель и полиграфическое исполнение:
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования
«Белорусско-Российский университет».

Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/156 от 07.03.2019.

Пр-т Мира, 43, 212022, Могилев.

© Белорусско-Российский
университет, 2020

Содержание

Введение.....	4
1 Условия и уравнения равновесия системы сил, произвольно расположенных на плоскости.....	5
2 Вращательное движение твердого тела.....	9
3 Теорема об изменении кинетической энергии системы.....	14
Список литературы.....	19
Приложение А. Пример оформления титульного листа.....	20
Приложение Б. Таблица производных некоторых функций.....	21

Введение

Методические рекомендации содержат материал для самостоятельной подготовки студентов специальности «Автоматизированные электроприводы» заочной формы обучения к аудиторной контрольной работе и для ее выполнения в рамках управляемой самостоятельной работы. Также могут быть использованы студентами дневной формы обучения для подготовки к зачету по теоретической механике.

Контрольная работа включает в себя три задачи из разделов теоретической механики «Статика», «Кинематика» и «Динамика».

В методических рекомендациях содержится минимум теоретических сведений для самостоятельного решения задач, примеры решения задач, а также перечень заданий.

Правила оформления отчетов по контрольной работе в электронном виде в случае выполнения ее в рамках управляемой самостоятельной работы.

Отчет должен быть представлен в виде одного файла в формате документа текстового процессора Microsoft Word *.doc (.docx) любой версии, позволяющем произвести распечатку на листах формата А4. Рисунки рекомендуется вставлять в текст, а не формировать объекты рисования в MS Word, т. к. они могут неоднозначно воспроизводиться на различных компьютерах. Не должно быть подключенных макросов и активных гиперссылок. При обнаружении вирусов в файле почта отправителя блокируется, для продолжения работы со студентом необходимы личные пояснения студента (Scype, Viber). Требования к оформлению отчетов: гарнитура шрифта – Times New Roman Cyr; ориентация страниц – книжная; размер основного шрифта – кг. 14, дополнительного – кг. 12; межстрочный интервал – одинарный; параметры полей: верхнее, нижнее, левое, правое – 20 мм; абзацный отступ – 10 мм; автоматическая расстановка переносов; нумерация страниц располагается вверху, по центру, в колоннитулах. Формулы набирают только в формульном редакторе MathType (любая версия). Таблицы набирают средствами программы MS Word с помощью меню Таблица. Не допускается набор таблиц с использованием табуляции.

Отчет должен содержать титульный лист с приведенными на нем следующими сведениями: наименование вуза; наименование дисциплины; фамилия, имя и отчество студента; номер группы; номер зачетной книжки; иные сведения, требуемые деканатом ИФЗО. Пример оформления титульного листа представлен в приложении А.

В отчете должны быть приведены исходные данные, расчетная схема и решение, в конце – ответ. При необходимости решение сопровождается вставкой формул и схем, фотографий в виде рисунков.

На последнем листе отчета приводится список использованных источников, который оформляется согласно ГОСТ 7.1–2003 *Библиографическая запись. Библиографическое описание. Общие требования и правила составления.*

1 Условия и уравнения равновесия системы сил, произвольно расположенных на плоскости

1.1 Теоретические сведения

Условия равновесия: при равновесии системы сил, произвольно расположенных на плоскости, главный вектор \vec{R}_G и главный момент \vec{M}_{GO} этой системы сил относительно любой точки плоскости равны нулю:

$$\vec{R}_G = 0; \vec{M}_{GO} = 0. \quad (1.1)$$

Уравнения равновесия системы сил, произвольно расположенных на плоскости, имеют вид:

$$\begin{cases} \sum F_{ix} = 0; \\ \sum F_{iy} = 0; \\ \sum M_{iO} = 0. \end{cases} \quad (1.2)$$

То есть проекции всех сил, действующих на тело, на взаимно перпендикулярные оси должны равняться нулю и сумма моментов сил относительно любой точки в плоскости должна равняться нулю.

1.2 Исходные данные к задаче

Необходимо определить реакции в опорах A и B балки, нагруженной силой F , распределенной нагрузкой с интенсивностью q и моментом пары сил M . Общая схема балки приведена на рисунке 1.1, а исходные данные – в таблице 1.

Таблица 1 – Исходные данные к задаче 1

Последняя цифра зачетной книжки	Схема	F , кН	q , кН/м	M , кН·м	Предпоследняя цифра зачетной книжки	a , м	b , м	α , град
0	I	12	10	5	0	2	5	10
1	II	13	20	-6	1	3	4	23
2	III	15	32	7	2	4	5	30
3	I	16	15	-8	3	3	4	60
4	II	11	25	9	4	4	6	15
5	III	7,6	31	-10	5	6	7	23
6	I	5,9	14	12	6	7	8	48
7	II	16	20	14	7	4	2	30
8	III	14	31	-15	8	5	3	50
9	I	13,5	18	11	9	1	9	60

Схема I

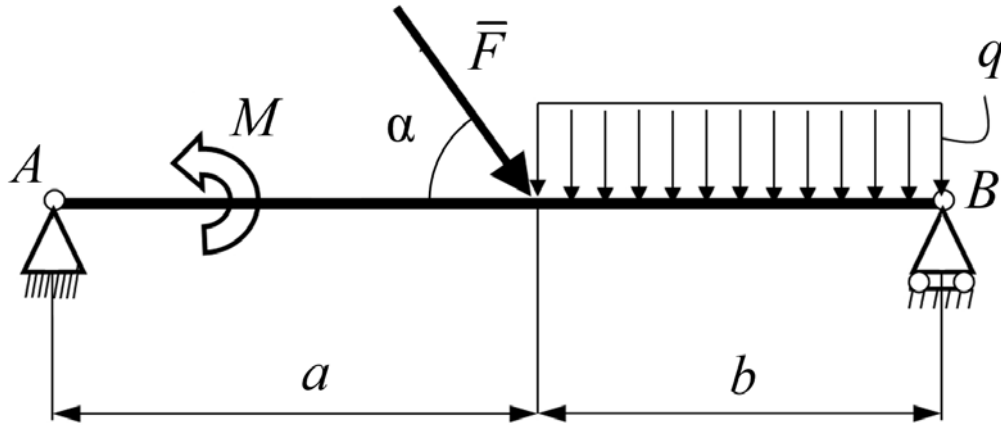


Схема II

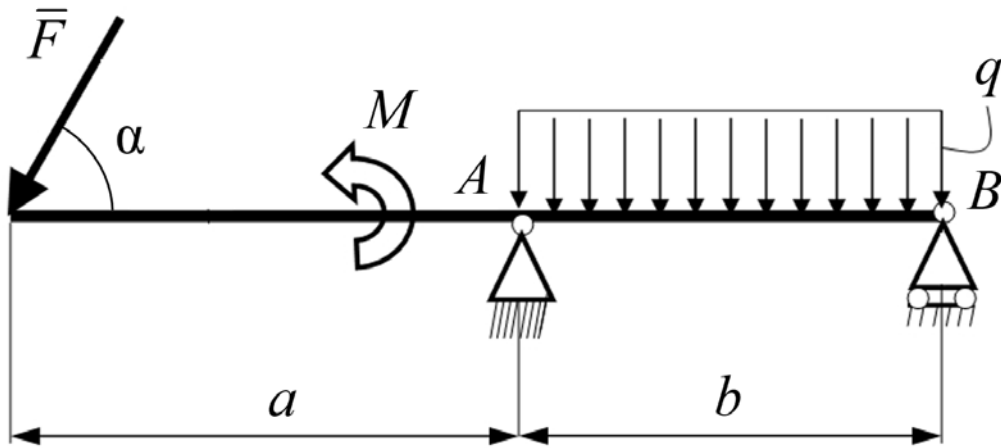


Схема III

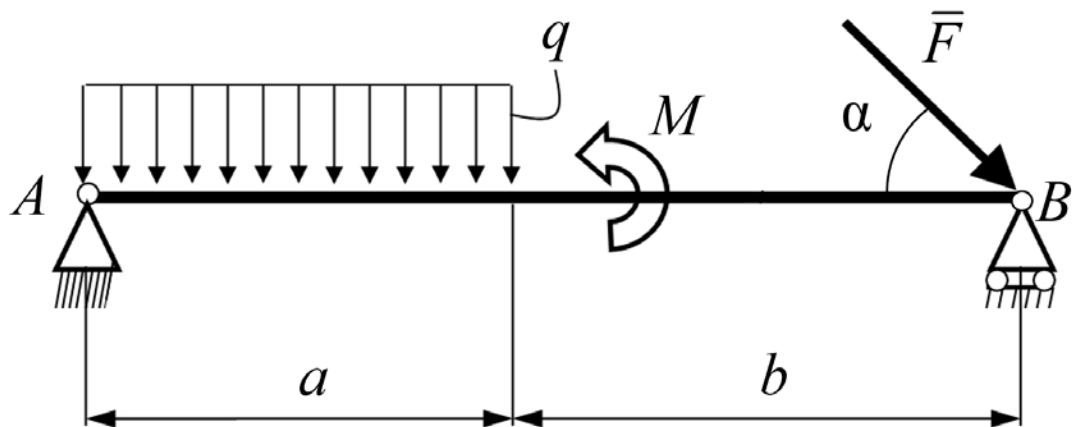


Рисунок 1.1 – Исходные схемы для всех вариантов

В качестве проверки **необходимо (!)** самостоятельно составить уравнения суммы моментов всех сил относительно точки B и проверить выполнение условия равновесия.

1.3 Пример решения задачи

Дано: $q = 10$ кН/м, $M = 5$ кН·м, $F = 2$ кН. Найти реакции опор A и B (рисунок 1.2).

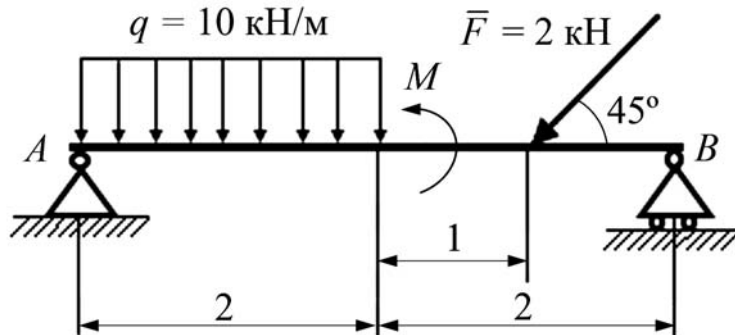


Рисунок 1.2 – Исходные данные к примеру

Решение

1 Заменяем распределенную нагрузку сосредоточенной силой:

$$Q = q \cdot l = 10 \cdot 2 = 20 \text{ (кН)},$$

где l – длина распределения нагрузки.

2 Выбираем направление осей координат традиционным: вверх (y) и вправо (x).

3 Применяем принцип освобожденности от связей для балки. Имеем две опоры: шарнирно-неподвижную A и шарнирно-подвижную B . Направляем реакции опор (рисунок 1.3).

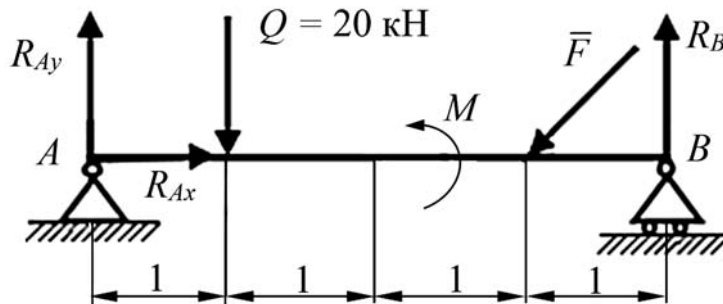


Рисунок 1.3 – Расчетная схема

Имеем три неизвестные реакции (R_{Ax} , R_{Ay} и R_B) и можем составить три независимых уравнения равновесия.

4 Запишем поочередно уравнения равновесия.

Первое

$$\sum F_{xi} = 0; \quad R_{Ax} - F \cdot \cos(45^\circ) = 0.$$

Отсюда

$$R_{Ax} = F \cdot \cos(45^\circ) = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1,41 \text{ (кН)}.$$

Второе

$$\sum F_{yi} = 0; R_{Ay} - Q - F \cdot \sin(45^\circ) + R_B = 0.$$

Третье

$$\sum M_A = 0; -Q \cdot 1 + M - F \cdot \sin(45^\circ) \cdot 3 + R_B \cdot 4 = 0.$$

Из него находим

$$R_B = \frac{Q - M + F \cdot \sin(45^\circ) \cdot 3}{4} = 4,8 \text{ (кН)}.$$

Подставляем R_B во второе уравнение ($\sum F_{yi} = 0$) и находим R_{Ay} :

$$R_{Ay} = Q + F \cdot \sin(45^\circ) \cdot 3 - R_B = 16,6 \text{ (кН)}.$$

Суммарная реакция опоры A

$$R_A = \sqrt{R_{Ax}^2 + R_{Ay}^2} = 16,66 \text{ (кН)}.$$

Ответ: $R_A = 16,66$ кН; $R_B = 4,8$ кН.

2 Вращательное движение твердого тела

2.1 Теоретические сведения

Вращательным движением называется такое движение, при котором тело имеет две неподвижные точки. Прямая, проходящая через эти точки, – *ось вращения*.

На рисунке 2.1 осью вращения является ось z .

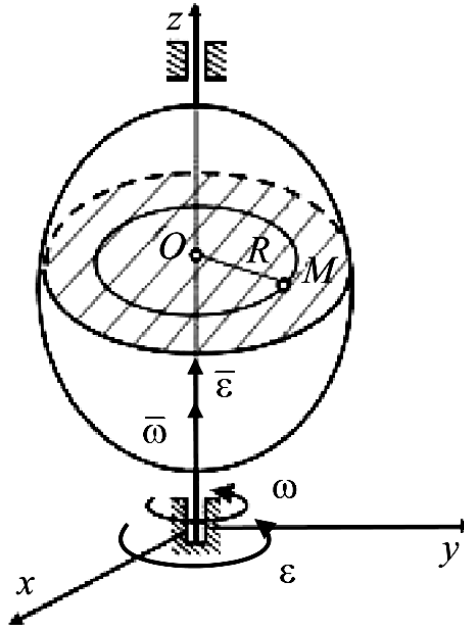


Рисунок 2.1 – Тело, совершающее вращение

Траектория всех точек вращающегося тела – окружности, кроме точек, лежащих на оси вращения (они неподвижны, их скорости равны нулю).

Перемещение тела характеризуется *углом поворота* φ . Единицы измерения – радиан или градус.

Формула для перевода радиан в градусы

$$\text{grad} = \text{rad} \cdot \frac{180}{\pi}. \quad (2.1)$$

Кинематическое уравнение вращательного движения

$$\varphi = f(t). \quad (2.2)$$

Угловой скоростью вращающегося тела называется первая производная от угла поворота по времени:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}. \quad (2.3)$$

Единица измерения – радиан в секунду или секунд в минус первой степени.

Угловая скорость может изображаться в виде изогнутой стрелки (см. рисунок 2.1) и быть представлена в виде вектора, направленного вдоль оси вращения таким образом, чтобы, глядя в острие (конец) вектора, поворот тела происходил бы против хода часовой стрелки. Вектор ω – скользящий, его можно переносить вдоль оси вращения в любую точку.

Кроме угловой скорости, есть еще и *частота вращения* n , которая относится, скорее, к инженерным величинам. Она измеряется в оборотах в минуту. По сути, и угловая скорость, и частота вращения – это одна и та же величина, отличающаяся лишь постоянным коэффициентом. Связь между ними следующая:

$$\omega = \frac{\pi \cdot n}{30}. \quad (2.4)$$

Угловое ускорение – это первая производная от угловой скорости по времени или вторая производная от угла поворота по времени:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}. \quad (2.5)$$

Единица измерения – радиан в секунду в квадрате или секунд в минус второй степени.

Угловое ускорение также можно представить в виде вектора, направленного по оси вращения, и он тоже является скользящим. Его направление также определяется по правилу правого винта (буравчика): если глядеть в острие вектора, поворот соответствующей стрелки ε должен происходить против хода часовой стрелки.

Если направление вектора углового ускорения совпадает с направлением вектора скорости, то вращение является ускоренным, если противоположно (угловая скорость и ускорение имеют разные знаки), то вращение замедленное. Если угловое ускорение равно нулю, то вращение равномерное.

Определение скоростей и ускорений точек тела, совершающего вращательное движение.

Траектории всех точек вращающегося тела (кроме точек, лежащих на оси вращения) – окружности, как было отмечено ранее. Это частный случай криволинейного движения точки.

Скорость точки вращающегося тела направлена по касательной к окружности – траектории в сторону вращения ω (рисунок 2.2) и определяется по формуле

$$v = \omega \cdot R. \quad (2.6)$$

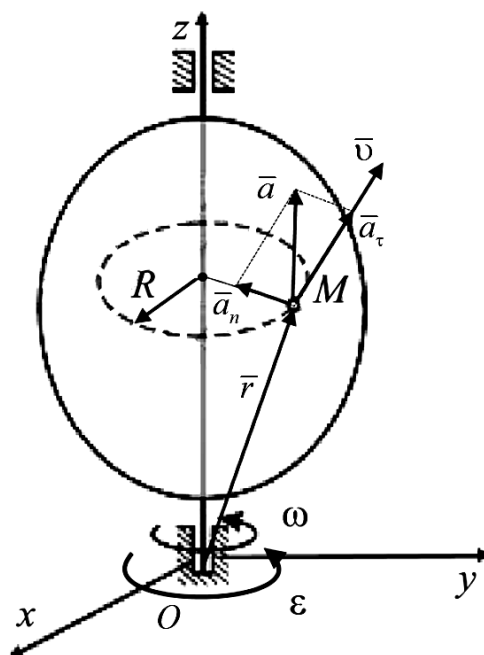


Рисунок 2.2 – К определению скорости и ускорения точки

Касательное ускорение a_τ при вращательном движении называется *вращательным* и определяется по формуле

$$a_{ep} = a_\tau = \frac{d\omega}{dt} \cdot R = \varepsilon \cdot R. \quad (2.7)$$

Можно продолжать называть его касательным.

Нормальное ускорение точки во вращательном движении называется *центростремительным*. С учетом формул (2.6) и (2.8)

$$a_n = a_n = \frac{v^2}{R} = \omega \cdot v = \omega \cdot \omega \cdot R = \omega^2 \cdot R. \quad (2.8)$$

Можно при решении задач по-прежнему называть его нормальным.

Модуль полного ускорения точки

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}. \quad (2.9)$$

2.2 Исходные данные к задаче

Необходимо определить скорость и ускорение точки N тела, совершающего вращательное движение по закону $\varphi(t)$ в момент времени t . Точка N отстоит от оси вращения на расстоянии h .

Для нахождения производных можно воспользоваться таблицей в приложении Б.

Таблица 2 – Исходные данные к задаче 2

Последняя цифра зачетной книжки	Закон движения тела $\varphi(t)$	h , м	Предпоследняя цифра зачетной книжки	t , с
0	$\varphi = 12 \cdot t^2 - 3 \cdot t^2$	10	0	2
1	$\varphi = 4 \cdot t^3 - 3 \cdot t - 1$	20	1	3,5
2	$\varphi = 0,2 \cdot t^4 + 2^t$	32	2	4
3	$\varphi = \sin(t) + 5 \cdot t$	15	3	5
4	$\varphi = 4 \cdot t^3 - 1/t$	25	4	0,5
5	$\varphi = 0,2 \cdot t^4 + 2 \cdot t + 2^t$	31	5	6
6	$\varphi = \cos(t) + 12 \cdot t$	14	6	7
7	$\varphi = 4 \cdot t^3 - 3 \cdot t - 1$	20	7	8
8	$\varphi = 6 \cdot t^3 - \cos(t)$	31	8	9
9	$\varphi = 10 \cdot t^{-3} + 6 \cdot t$	18	9	1

Важно! При решении задачи необходимо самостоятельно изобразить расчетную схему, указать векторы угловой скорости, углового ускорения тела, направления векторов скорости и ускорений по образцу на рисунке 2.2. Направления векторов показать с учетом знаков. **Без расчетной схемы задача не будет считаться выполненной.**

2.3 Пример решения задачи

Дано: цилиндр ($R = 2$ м) начал вращаться относительно оси, проходящей через центр масс, являющейся осью симметрии, из состояния покоя согласно закону $\varphi = 3 \cdot t^2 - 2 \cdot t + 4$. Определить скорость и ускорение точки M , лежащей на наружной поверхности цилиндра (рисунок 2.3), после 3 с с начала движения.

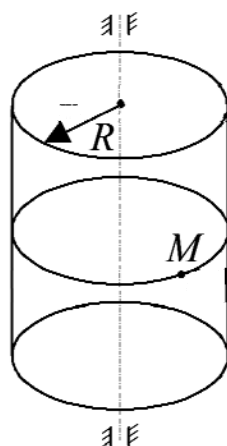


Рисунок 2.3 – Расчетная схема к примеру

Решение (приводится в сокращенном виде, без подстановок. При выполнении контрольной работы необходимо подробно показывать все подстановки числовых значений)

Угловая скорость цилиндра

$$\omega = \dot{\phi} = 6 \cdot t - 2 = 16 \text{ рад/с.}$$

Угловое ускорение цилиндра

$$\varepsilon = \dot{\omega} = 6 \text{ рад/с}^2.$$

Скорость точки M

$$v = \omega \cdot R = 32 \text{ м/с.}$$

Касательное ускорение точки M

$$a_{\tau} = \varepsilon \cdot R = 12 \text{ м/с}^2.$$

Нормальное ускорение точки M

$$a_n = \omega^2 \cdot R = 512 \text{ м/с}^2.$$

Полное ускорение точки M

$$a = \sqrt{a_{\tau}^2 + a_n^2} = 512,14 \text{ м/с}^2.$$

Ответ: $v = 32 \text{ м/с}$; $a = 512,14 \text{ м/с}^2$.

3 Теорема об изменении кинетической энергии системы

3.1 Теоретические сведения

Теорема об изменении кинетической энергии имеет вид:

$$T - T_0 = \sum A_i. \quad (3.1)$$

Изменение кинетической энергии материальной точки на некотором ее перемещении равно сумме работ всех действующих на точку сил на этом же перемещении.

Теорема об изменении кинетической энергии механической системы имеет следующий вид:

$$T - T_0 = \sum A_i^E + \sum A_i^J, \quad (3.2)$$

где A_i^E – работа равнодействующей внешних сил, действующих на i -ю материальную точку;

A_i^J – работа равнодействующей внутренних сил, действующих на i -ю материальную точку.

Механическая система является неизменяемой, т. е. это такая механическая система, в которой расстояния между любыми двумя точками все время остаются постоянными. Для данной системы сумма работ всех внутренних сил равна нулю. Теорема об изменении кинетической энергии для неизменяемой системы имеет вид:

$$T - T_0 = \sum A_i^E. \quad (3.3)$$

3.2 Исходные данные к задаче

Система состоит из колеса 1 массой m_1 , которое можно рассматривать как однородный цилиндр с радиусом r , блока 2, массой которого можно пренебречь и который может вращаться, и груза 3 массой m_3 (рисунок 3.1). Колесо 1 и груз 2 соединены тросом, перекинутым через блок 2. Система в начальный момент находилась в покое, колесо 1 находится на наклонной поверхности с углом α . Определить скорость груза 3 после того, как он переместился на расстояние s . Необходимые данные взять из таблицы 3. Трением между колесом и наклонной поверхностью и между блоком и тросом пренебречь.

Схема I

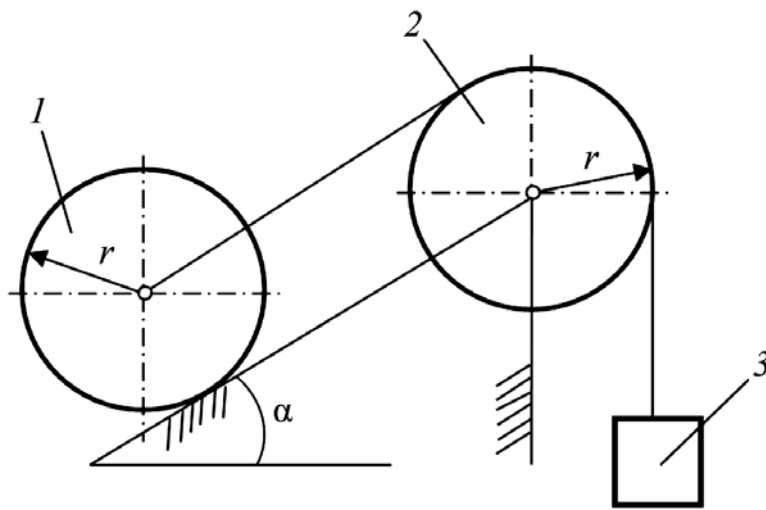


Схема II

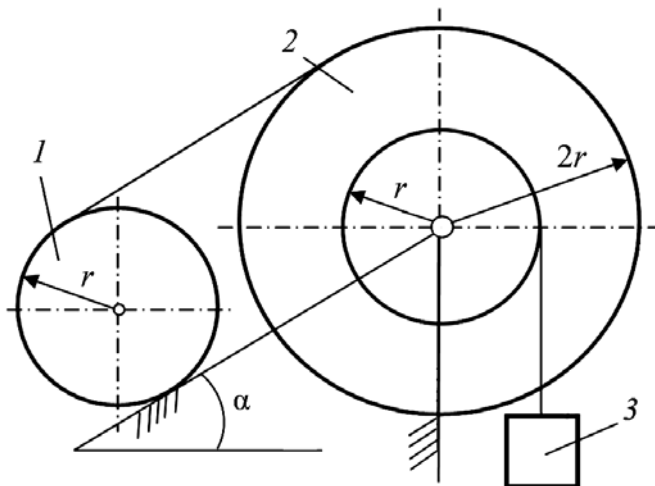


Схема III

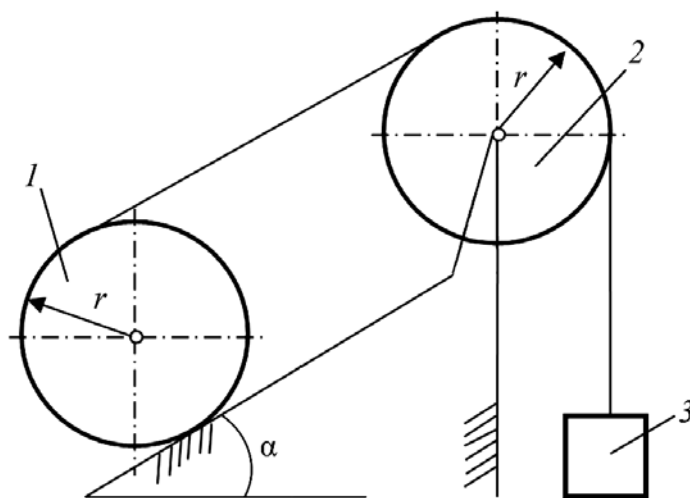


Рисунок 3.1 – Исходные схемы для задачи 3

Таблица 3 – Исходные данные к задаче 3

Последняя цифра зачетной книжки	Схема	s , м	r , м	Предпоследняя цифра зачетной книжки	m_1 , кг	m_2 , кг	α , град
0	I	1,2	0,23	0	2	12	10
1	II	1,3	0,32	1	3	14	23
2	III	1,5	0,24	2	4	15	30
3	I	1,6	0,15	3	3	13	60
4	II	1,1	0,25	4	4	11	15
5	III	0,6	0,31	5	6	10	23
6	I	0,9	0,22	6	7	17	48
7	II	1,1	0,18	7	4	18	30
8	III	1,4	0,19	8	5	19	50
9	I	1,7	0,22	9	1	20	60

3.3 Пример решения задачи

Дано: определить скорость груза 2 в момент времени, когда он опустился вниз на расстояние $s = 4$ м, если массы грузов $m_1 = 2$ кг, $m_2 = 4$ кг (рисунок 3.2). Массами блоков с радиусами r пренебречь. Система тел вначале находилась в покое.

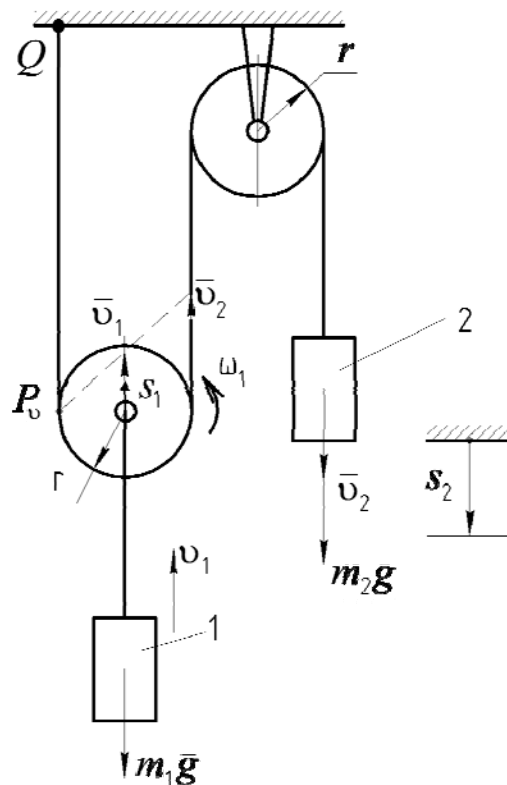


Рисунок 3.2 – Расчетная схема к примеру

Решение

Согласно теореме об изменении кинетической энергии (формула (3.3))

$$T - T_0 = \sum A^E.$$

В начальный момент времени кинетическая энергия системы равнялась нулю ($T_0 = 0$), т. к. система находилась в покое. Определим кинетическую энергию механической системы в конечный момент времени:

$$T = T_1 + T_2,$$

где T_1 и T_2 – кинетическая энергия первого и второго грузов соответственно,

$$T_1 = \frac{m_1 \cdot v_1^2}{2}; \quad T_2 = \frac{m_2 \cdot v_2^2}{2}.$$

Кинетические энергии блоков не учитываем, т. к. их массой можно пренебречь по условиям задачи. Но на самом деле левый блок совершает плоскопараллельное движение, обкатываясь без скольжения по вертикальному тросу, верхняя точка которого закреплена (в точке Q). Точка контакта P будет являться мгновенным центром скоростей левого блока (как бы колесо катится по вертикальной дороге). Правый блок совершает вращательное движение. Скорость первого груза выразим через скорость второго груза (см. рисунок 3.2):

$$v_1 = \frac{v_2}{2}.$$

Тогда кинетические энергии тел

$$T_1 = \frac{m_1 \frac{v_2^2}{4}}{2} = m_1 \frac{v_2^2}{8}; \quad T_2 = \frac{m_2 \cdot v_2^2}{2}.$$

Кинетическая энергия системы

$$T = m_1 \frac{v_2^2}{8} + \frac{m_2 \cdot v_2^2}{2} = v_2^2 \cdot \left(\frac{m_1}{8} + \frac{m_2}{2} \right).$$

Определим работу внешних сил, приложенных к системе. Отношение между перемещениями такое же, как и между скоростями, т. е. $s_1 = \frac{s_2}{2}$. Работа силы тяжести первого тела будет отрицательной, т. к. направление силы не совпадает с направлением его перемещения. Работа силы тяжести второго тела будет положительной, т. к. сила совпадает с направлением перемещения s :

$$A_1 = -m_1 \cdot g \cdot \frac{s_2}{2}; \quad A_2 = m_2 \cdot g \cdot s_2.$$

Сумма работ внешних сил

$$\sum A_i = A_1 + A_2 = -m_1 \cdot g \cdot \frac{s_2}{2} + m_2 \cdot g \cdot s_2 = -2 \cdot 9,81 \cdot \frac{4}{2} + 4 \cdot 9,81 \cdot 4 = 143,15 \text{ Дж.}$$

Подставив сумму работ $\sum A_i$ и кинетическую энергию системы T в теорему об изменении кинетической энергии (формула 3.1), получим

$$v_2^2 \left(\frac{m_1}{8} + \frac{m_2}{2} \right) = 143,15; \quad v_2 = \sqrt{\frac{143,15}{\left(\frac{m_1}{8} + \frac{m_2}{2} \right)}} = 7,56 \text{ м/с.}$$

Ответ: $v_2 = 7,56 \text{ м/с.}$

Если бы были заданы массы и радиусы левого и правого блоков, то кинетическая энергия тела, совершающего плоскопараллельное движение, была бы

$$T = \frac{m \cdot v_C^2}{2} + \frac{\omega^2 \cdot J_z}{2},$$

где m – масса блока, кг;

v_C – скорость движения его центра масс;

ω – угловая скорость блока, м/с;

J_z – момент инерции блока относительно оси, проходящей через его центр масс, перпендикулярно плоскости движения, кг·м².

Момент инерции тел определяется по справочной литературе. Для колес и блоков, которые можно считать однородными цилиндрами,

$$J_z = \frac{m \cdot r^2}{2}.$$

Для тела, которое совершает вращательное движение, кинетическая энергия будет определяться по формуле

$$T = \frac{\omega^2 \cdot J_z}{2}.$$

Список литературы

1 Сборник коротких задач по теоретической механике: учебное пособие / О. Э. Кепе [и др.]; под ред. О. Э. Кепе. – Санкт-Петербург; Москва; Краснодар: Лань, 2016. – 368 с.

2 **Цывильский, В. Л.** Теоретическая механика: учебник / В. Л. Цывильский. – 5-е изд., перераб. – Москва: КУРС; ИНФРА-М, 2018. – 368 с.

3 **Никитин, Н. Н.** Курс теоретической механики: учебник для вузов / Н. Н. Никитин. – 8-е изд., стер. – Санкт-Петербург; Москва; Краснодар: Лань, 2011. – 720 с.: ил.

4 Теоретическая механика. Статика – кинематика [Электронный ресурс]: методические рекомендации к практическим занятиям для студентов / Сост. Ю. В. Машин [и др.]. – Могилев: Беларус.-Рос. ун-т, 2019. – Ч. 1. – 36 с.

5 Теоретическая механика. Динамика: методические рекомендации к самостоятельной работе студентов технических специальностей заочной формы обучения / Сост. П. Н. Громыко [и др.]. – Могилев: Беларус.-Рос. ун-т, 2017. – 40 с.

Приложение А (справочное)

Пример оформления титульного листа

Министерство образования Республики Беларусь
Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования
«Белорусско-Российский университет»

Кафедра «Основы проектирования машин»

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА по дисциплине «Теоретическая механика»

Выполнил студент гр. _____
(краткое наименование и номер группы)

(ФИО студента)

Шифр зачетной книжки:

(шифр зачетной книжки)

Приложение Б (справочное)

Таблица производных некоторых функций

Функция	Производная
$y = C, \quad C = \text{const}$	0
$y = Cx$	$y' = C$
$y = x^n$	$y' = n \cdot x^{n-1}$
$y = e^{nx}$	$y' = ne^{nx}$
$y = a^x$	$y' = a^x \ln a$
$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$
$y = \sin x$	$y' = \cos x$
$y = \cos x$	$y' = -\sin x$
$y = \operatorname{tg} x$	$y' = \frac{1}{(\cos x)^2}$
$y = \operatorname{ctg} x$	$y' = -\frac{1}{(\sin x)^2}$