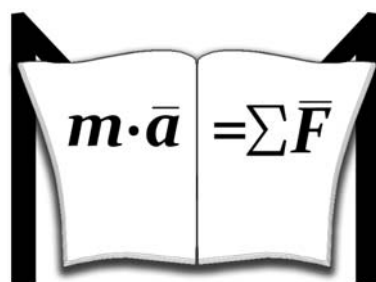


МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Механика»

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

*Методические рекомендации к самостоятельной работе
для студентов специальностей 1-70 02 01 «Промышленное
и гражданское строительство» и 1-70 03 01 «Автомобильные
дороги» заочной формы обучения*



Могилев 2020

УДК 539.3/6
ББК 30.121
С86

Рекомендовано к изданию
учебно-методическим отделом
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Механика» «21» мая 2020 г., протокол № 11

Составители: канд. техн. наук, доц. А. А. Катькало;
ст. преподаватель В. А. Кемова

Рецензент канд. техн. наук, доц. А. П. Прудников

Методические рекомендации предназначены для выполнения аудиторной контрольной работы студентами специальностей 1-70 02 01 «Промышленное и гражданское строительство» и 1-70 03 01 «Автомобильные дороги» заочной формы обучения. В них изложены общие требования к выполнению аудиторной контрольной работы, краткие теоретические сведения по расчету многопролетных статически определимых балок и плоских статически неопределимых рам, приведены примеры расчетов.

Учебно-методическое издание

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

Ответственный за выпуск	П. Н. Громыко
Корректор	А. А. Подошевка
Компьютерная верстка	Н. П. Полевничая

Подписано в печать . Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Печать трафаретная. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 66 экз. Заказ № .

Издатель и полиграфическое исполнение:
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования
«Белорусско-Российский университет».

Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/156 от 07.03.2019.

Пр-т Мира, 43, 212022, Могилев.

© Белорусско-Российский
университет, 2020

Содержание

Введение.....	4
1 Расчет многопролетных статически определимых балок.....	5
1.1 Расчет многопролетной статически определимой балки (пример 1)..	6
1.2 Расчет многопролетной статически определимой балки (пример 2)..	11
1.3 Задачи для самостоятельной подготовки.....	16
2 Расчет статически определимой балки на подвижную нагрузку.....	16
2.1 Определение значений внутренних силовых факторов по линиям влияния (пример 1).....	19
2.2 Определение значений внутренних силовых факторов по линиям влияния (пример 2).....	20
2.3 Задачи для самостоятельной подготовки.....	21
3 Расчет плоских статически неопределимых рам методом сил.....	22
3.1 Пример расчета один раз статически неопределимой рамы методом сил.....	23
3.2 Пример расчета два раза статически неопределимой рамы методом сил.....	26
3.3 Задачи для самостоятельной подготовки.....	29
4 Расчет плоских статически неопределимых рам методом перемещений.....	29
4.1 Пример расчета один раз статически неопределимой рамы методом перемещений.....	31
4.2 Пример расчета два раза статически неопределимой рамы методом перемещений.....	35
4.3 Задачи для самостоятельной подготовки.....	39
Список литературы.....	40
Приложение А.....	41

Введение

Методические рекомендации составлены в соответствии с рабочей программой по курсу «Строительная механика» для студентов специальностей 1-70 02 01 «Промышленное и гражданское строительство» и 1-70 03 01 «Автомобильные дороги» заочной формы обучения.

В краткой форме изложены основные теоретические положения по выполнению типовых задач, приведены примеры решения, таблицы типовых эпюр для расчета статически неопределимых рам методом перемещений, а также список литературы, которую рекомендуется изучить студенту перед началом выполнения контрольных работ.

Цель изучения дисциплины – научить студентов проводить расчеты типовых элементов строительных конструкций на прочность, жесткость, устойчивость. Правильно выбирать конструкционные материалы и форму сечений конструкций, обеспечивающие требуемые запасы надежности, безопасность их эксплуатации и экономичность сооружений.

Задача курса – дать студентам навыки по применению методов строительной механики при изучении курсов строительной механики, оснований и фундаментов, механики грунтов, металлических и железобетонных конструкций.

Методические рекомендации разработаны в соответствии с Положением об аудиторной контрольной работе и компьютерном тестировании обучающихся по заочной (дистанционной) форме.

Аудиторная контрольная работа (далее – АКР) является формой промежуточного контроля результатов межсессионной самостоятельной работы обучающихся заочной (в том числе дистанционной) формы обучения, по дисциплинам учебного плана специальности, одним из элементов системы контроля качества обучения.

АКР организуется и проводится в период лабораторно-экзаменационной сессии в соответствии с расписанием – после проведения лекционных и практических занятий по дисциплине «Строительная механика».

Студенты строительных специальностей, обучающиеся по полным учебным программам, выполняют две АКР в письменной или дистанционной формах (решение принимает деканат): в одном семестре – «Расчет многопролетной статически определимой балки на изгиб», во втором – «Расчет плоской статически неопределимой рамы».

Общая продолжительность АКР для учебной группы составляет два академических часа. АКР проводится в соответствии с расписанием.

К выполнению АКР допускаются обучающиеся по заочной (в том числе дистанционной) форме, имеющие при себе зачетную книжку, удостоверение личности (паспорт либо вид на жительство, удостоверение беженца).

1 Расчет многопролетных статически определимых балок

Расчет статически определимой многопролетной балки начинают с анализа взаимодействия отдельных ее элементов. Затем строят так называемую поэтажную схему.

В многопролетных шарнирно-консольных балках различают основные и вспомогательные балки. К основным балкам относят геометрически неизменяемые системы, прикрепленные к основанию при помощи двух шарнирных опор или заделки. Эти балки являются основой для построения поэтажной схемы. Вспомогательные балки опираются на основные, поэтому при построении поэтажной схемы их располагают выше, над основными балками. Все вышерасположенные балки являются вспомогательными по отношению к нижерасположенным. Так как *постоянное усилие передается со вспомогательной балки на основную*, то расчет на постоянную нагрузку (построение эпюр изгибающих моментов и поперечных сил) начинают с самой верхней вспомогательной балки, представляя ее как статически определимую и геометрически неизменяемую систему.

При построении эпюр необходимо руководствоваться правилом знаков (рисунок 1.1): изгибающий момент считается положительным, если создающие его усилия сжимают верхние волокна.

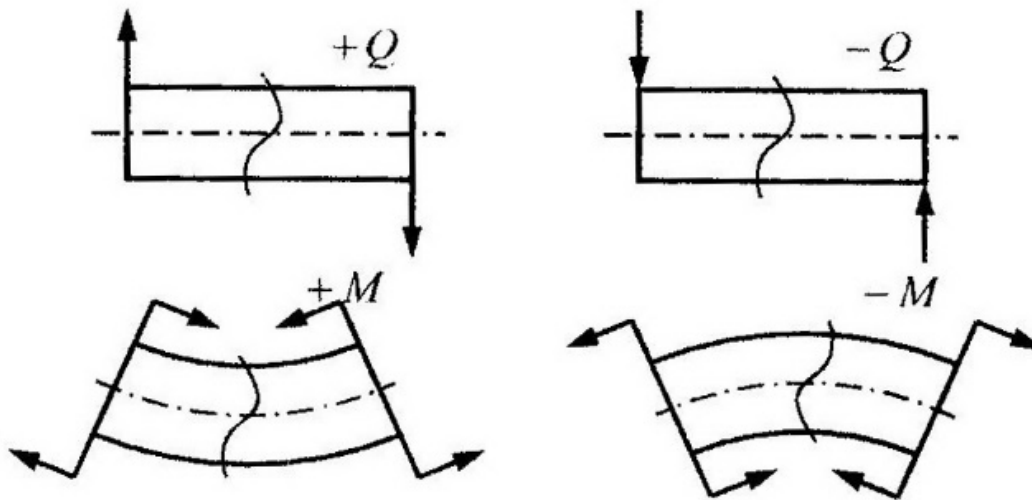


Рисунок 1.1 – Правило знаков внутренних силовых факторов

Причем важно помнить, что *эпюра изгибающих моментов строится на растянутых волокнах*, то есть положительные ординаты откладываются вниз от нейтральной оси, а отрицательные – вверх. В строительной механике эпюру поперечных сил принято строить по ординатам эпюры моментов, используя следующую зависимость (формулу Журавского):

$$Q = \frac{M_{np} - M_{л}}{L} \pm \frac{q \cdot L}{2},$$

где M_{np}, M_l – ординаты изгибающего момента на правом и левом концах рассматриваемого участка;

L – длина рассматриваемого участка балки;

q – интенсивность распределенной нагрузки на участке.

1.1 Расчет многопролетной статически определимой балки (пример 1)

Построить эпюры изгибающих моментов M и поперечных сил Q для заданной многопролетной балки (рисунок 1.2, а).

Проводим геометрический анализ многопролетной балки. Она состоит из четырех элементов. Балка $AШ_1$ имеет заделку и потому будет основной. Балка BD прикреплена к основанию двумя опорами и потому также будет являться основной по отношению к балкам $Ш_1Ш_2$ и $Ш_3E$. Балка $Ш_1Ш_2$ присоединена к основным балкам $AШ_1$ и BD обоими концами при помощи шарниров, а балка $Ш_3E$ одной опорной связью к основанию и потому они являются вспомогательными элементами. Схема взаимодействия элементов представлена на рисунке 1.2, б.

Расчет начинаем с рассмотрения вспомогательных элементов $Ш_1Ш_2$ и $Ш_3E$, а затем – основных $AШ_1$ и BD .

Балка $Ш_1Ш_2$. Так как балка полностью загружена распределенной нагрузкой, то реакции равны между собой и определяются как

$$R_{Ш_1} = R_{Ш_2} = \frac{q_1 \cdot 4}{2} = \frac{6 \cdot 4}{2} = 12 \text{ кН.}$$

При таком виде нагружения значения изгибающего момента по концам балки равны нулю, а его максимальное значение приходится на середину пролета и вычисляется следующим образом:

$$M_{Ш_1Ш_2}^{\max} = \frac{q_1 \cdot 4^2}{8} = \frac{6 \cdot 4^2}{8} = 12 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

Балка $Ш_3E$. Определяем опорные реакции:

$$\sum M_{Ш_3} = q_2 \cdot 2 \cdot 1 - 2 \cdot R_E + 3 \cdot P_2 = 0;$$

$$R_E = \frac{q_2 \cdot 2 \cdot 1 + P_2 \cdot 3}{2} = \frac{10 \cdot 2 \cdot 1 + 2 \cdot 3}{2} = 13 \text{ кН;}$$

$$\sum M_E = 2 \cdot R_{Ш_3} - q_2 \cdot 2 \cdot 1 + P_2 \cdot 1 = 0;$$

$$R_{III_3} = \frac{q_2 \cdot 2 \cdot 1 - P_2 \cdot 1}{2} = \frac{10 \cdot 2 \cdot 1 - 2 \cdot 1}{2} = 9 \text{ кН.}$$

Проверка:

$$\sum y = R_{III_3} - q_2 \cdot 2 + R_E - P_2 = 9 - 10 \cdot 2 + 13 - 2 = 0.$$

Строим эпюру изгибающих моментов:

$$M_{III_3E}^{III_3} = 0; \quad M_{III_3E}^E = R_{III_3} \cdot 2 - q_2 \cdot 2 \cdot 1 = 9 \cdot 2 - 10 \cdot 2 \cdot 1 = -2 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{EF}^F = 0; \quad M_{EF}^E = -P_2 \cdot 1 = -2 \cdot 1 = -2 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

Балка АШ₁. Так как балка закреплена консольно, то ординаты эпюры изгибающих моментов могут быть получены без определения опорных реакций.

$$M_{AШ_1}^{III_1} = 0; \quad M_{AШ_1}^A = -R'_{III_1} \cdot 4 = -12 \cdot 4 = -48 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

Значение изгибающего момента в сечении *I*:

$$M_1 = -R'_{III_1} \cdot 1 = -12 \cdot 1 = -12 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

Балка ВD. Определяем опорные реакции:

$$\sum M_B = -R'_{III_2} \cdot 4 - P_1 \cdot 2 + 4 \cdot R_D + R'_{III_3} \cdot 7 = 0;$$

$$R_D = \frac{R'_{III_2} \cdot 4 + P_1 \cdot 2 - R'_{III_3} \cdot 7}{4} = \frac{12 \cdot 4 + 18 \cdot 2 - 9 \cdot 7}{4} = 5,25 \text{ кН};$$

$$\sum M_D = -R'_{III_2} \cdot 8 + 4 \cdot R_B + P_1 \cdot 2 + R'_{III_3} \cdot 3 = 0;$$

$$R_B = \frac{R'_{III_2} \cdot 8 - P_1 \cdot 2 - R'_{III_3} \cdot 3}{4} = \frac{12 \cdot 8 - 18 \cdot 2 - 9 \cdot 3}{4} = 8,25 \text{ кН.}$$

Проверка:

$$\sum y = -R'_{III_2} + R_B + P_1 - R_D - R'_{III_3} = -12 + 8,25 + 18 - 5,25 - 9 = 0.$$

Определяем ординаты эпюры изгибающих моментов:

$$M_{III_2B}^{III_2} = 0; \quad M_{III_2B}^B = -R_{III_2}' \cdot 4 = -12 \cdot 4 = -48 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{BC}^C = -R_{III_2}' \cdot 6 + R_B \cdot 2 = -12 \cdot 6 + 8,25 \cdot 2 = -55,5 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{III_3D}^{III_3} = 0; \quad M_{III_3D}^D = -R_{III_3}' \cdot 3 = -9 \cdot 3 = -27 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{III_3C}^C = -R_{III_3}' \cdot 5 - R_D \cdot 2 = -9 \cdot 5 - 5,25 \cdot 2 = -55,5 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Строим эпюру поперечных сил по участкам:

$$Q_{AIII_1} = \frac{M_{AIII_1}^{III_1} - M_{AIII_1}^A}{4} = \frac{0 - (-48)}{4} = 12 \text{ кН};$$

$$Q_{III_1III_2} = \pm \frac{6 \cdot 4}{2} + 0 = \pm 12 \text{ кН};$$

$$Q_{III_1III_2}^{III_1} = 12 \text{ кН}; \quad Q_{III_1III_2}^{III_2} = -12 \text{ кН}; \quad Q_{III_2B} = \frac{-48 - 0}{4} = -12 \text{ кН};$$

$$Q_{BC} = \frac{-55,5 - (-48)}{2} = -3,75 \text{ кН}; \quad Q_{CD} = \frac{-27 - (-55,5)}{2} = 14,25 \text{ кН};$$

$$Q_{DIII_3} = \frac{0 - (-27)}{3} = 9 \text{ кН}; \quad Q_{III_3E} = \pm \frac{10 \cdot 2}{2} + \frac{-2 - 0}{2} = \pm 10 - 1 \text{ кН};$$

$$Q_{III_3E}^{III_3} = 10 - 1 = 9 \text{ кН}; \quad Q_{III_3E}^E = -10 - 1 = -11 \text{ кН}; \quad Q_{EF} = \frac{0 - (-2)}{1} = 2 \text{ кН}.$$

Так как эпюра Q на участке III_3E пересекла нейтральную ось, то на эпюре моментов будет экстремум.

Балка с определенными реакциями, а также эпюры изгибающих моментов M и поперечных сил Q представлены на рисунке 1.2, в-д.

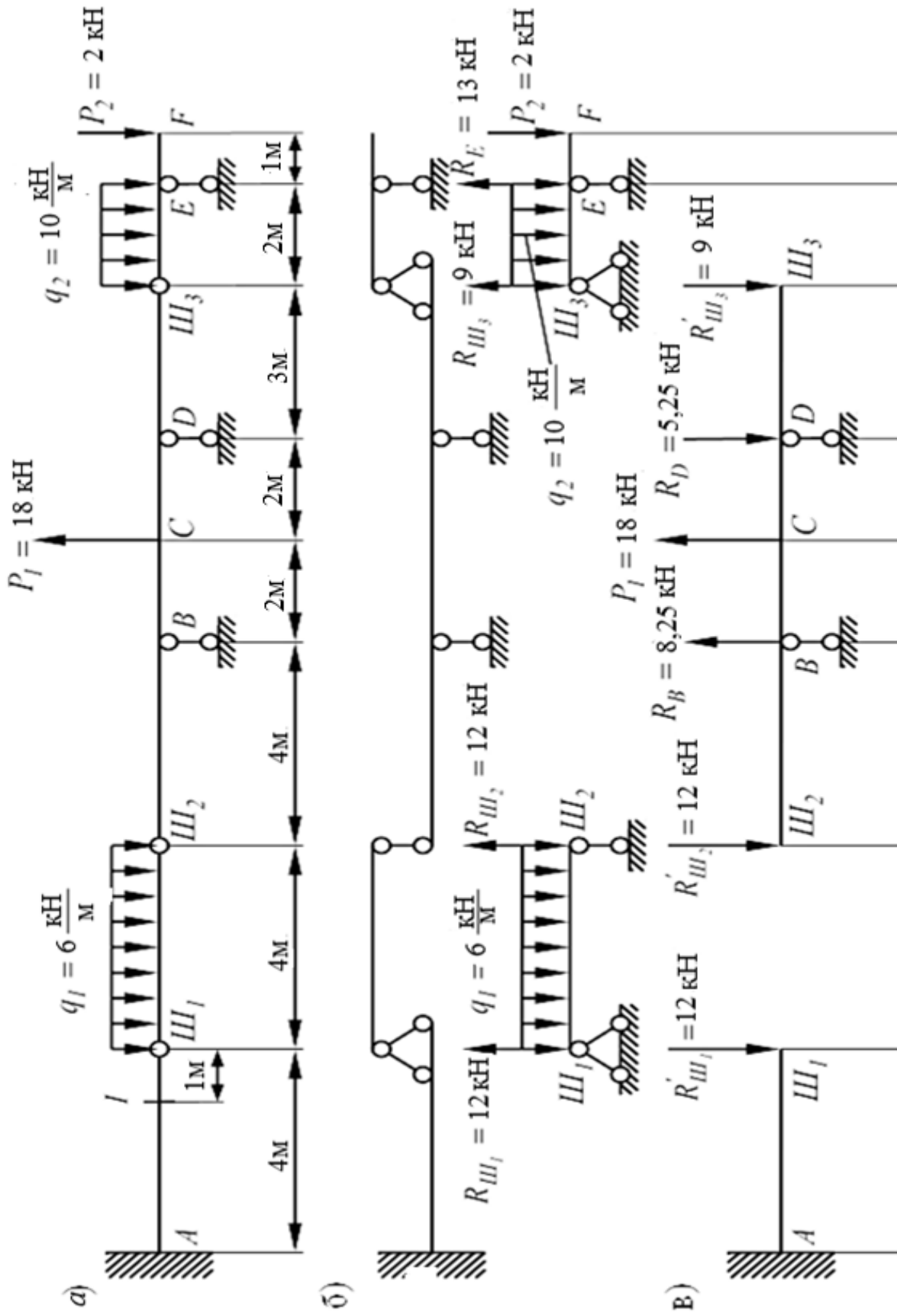
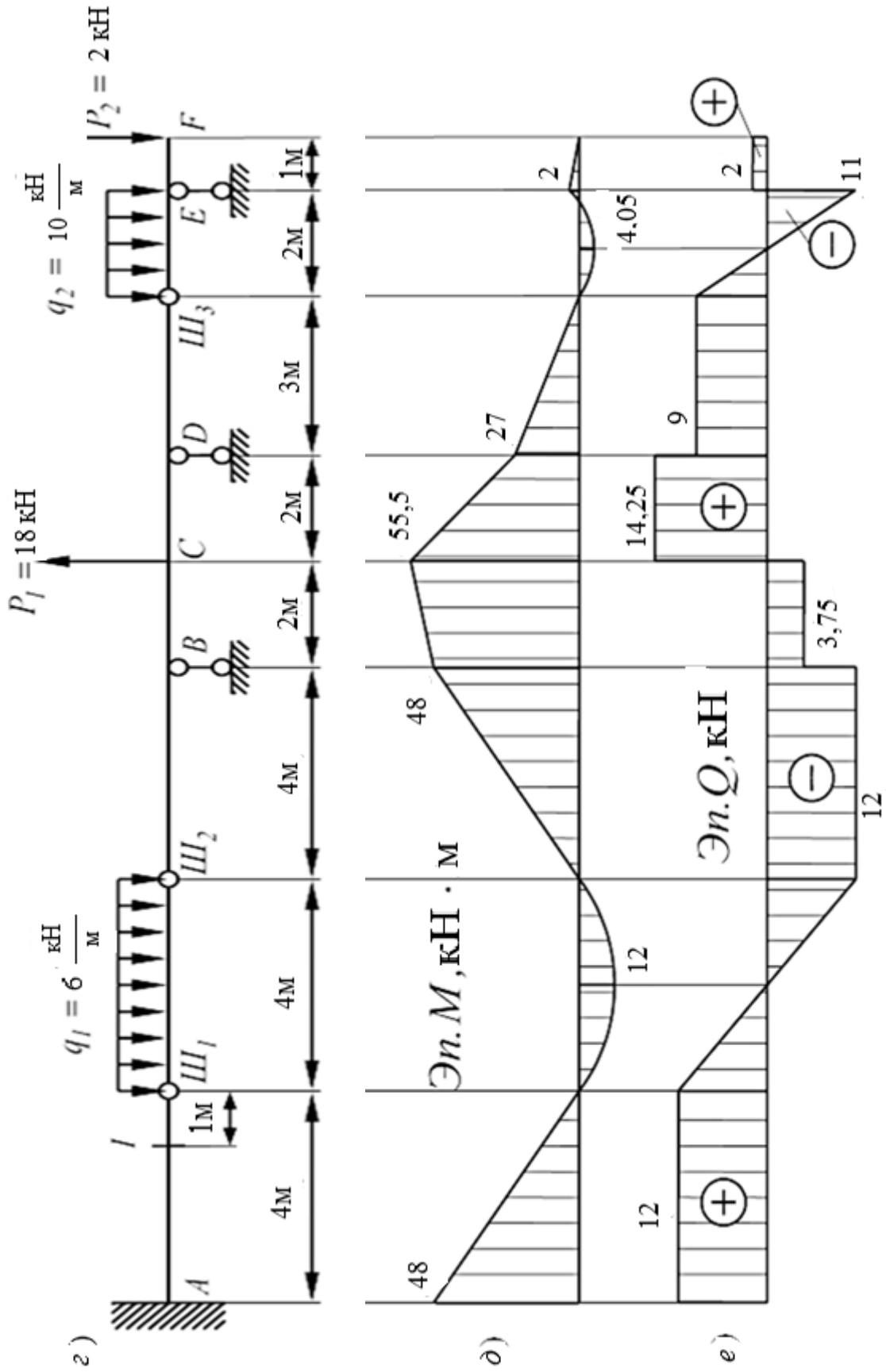


Рисунок 1.2 – Расчет многопролетной статически определимой балки



Окончание рисунка 1.2

1.2 Расчет многопролетной статически определимой балки (пример 2)

Построить эпюры изгибающих моментов M и поперечных сил Q для заданной многопролетной балки (рисунок 1.3, а).

Проведем анализ взаимодействия элементов многопролетной балки. Балка AB прикреплена к основанию при помощи двух опор, то есть является геометрически неизменяемой системой. Следовательно, она будет основной. Балки III_1C , III_2D и III_3E присоединены к основанию одной опорной связью, т. е. являются изменяемыми системами. Все они по отношению к нижерасположенным балкам являются вспомогательными. Строим поэтажную схему (рисунок 1,3, б).

Расчет начинаем с рассмотрения вспомогательных элементов, так как усилия передаются на основные балки именно через них.

Балка III_3E (рисунок 1,3, в). Так как сила приложена посередине пролета, то реакции будут равны между собой:

$$R_{III_1} = R_E = \frac{P_2}{2} = \frac{6}{2} = 3 \text{ кН.}$$

Определяем ординаты эпюры изгибающих моментов:

$$M_{III_3G}^{III_3} = M_{EG}^E = 0; \quad M_{III_3G}^G = M_{EG}^G = R_{III_3} \cdot 0,5 = 3 \cdot 0,5 = 1,5 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

Балка III_2D . Определяем опорные реакции:

$$\sum M_{III_2} = -2 \cdot R_D + 3 \cdot R'_{III_3} = 0;$$

$$R_D = \frac{3 \cdot R'_{III_3}}{2} = \frac{3 \cdot 3}{2} = 4,5 \text{ кН;}$$

$$\sum M_D = 1 \cdot R'_{III_3} - 2 \cdot R_{III_2} = 0;$$

$$R_{III_2} = \frac{1 \cdot R'_{III_3}}{2} = \frac{1 \cdot 3}{2} = 1,5 \text{ кН.}$$

Проверка:

$$\sum y = -R_{III_2} + R_D - R'_{III_3} = -1,5 + 4,5 - 3 = 0.$$

Ординаты эпюры изгибающих моментов:

$$M_{III_2D}^{III_2} = 0; \quad M_{III_2D}^D = -R_{III_2} \cdot 2 = -1,5 \cdot 2 = -3 \text{ кН} \cdot \text{м;}$$

$$M_{III_3D}^{III_3} = 0; \quad M_{III_3D}^D = -R_{III_3}' \cdot 1 = -3 \cdot 1 = -3 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Балка III₁C: Находим реакции:

$$\sum M_{III_1} = 2 \cdot P_1 + 4 \cdot R_C - q_2 \cdot 2 \cdot 5 - 6 \cdot R_{III_2}' = 0;$$

$$R_C = \frac{-2 \cdot P_1 + q_2 \cdot 2 \cdot 5 + 6 \cdot R_{III_2}'}{4} = \frac{-2 \cdot 10 + 5 \cdot 2 \cdot 5 + 6 \cdot 1,5}{4} = 9,75 \text{ кН};$$

$$\sum M_C = 4 \cdot R_{III_1} - 2 \cdot P_1 - q_2 \cdot 2 \cdot 1 - 2 \cdot R_{III_2}' = 0;$$

$$R_{III_1} = \frac{2 \cdot P_1 + q_2 \cdot 2 \cdot 1 + 2 \cdot R_{III_2}'}{4} = \frac{2 \cdot 10 + 5 \cdot 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1,5}{4} = 8,25 \text{ кН}.$$

Проверка:

$$\sum y = R_{III_1} - P_1 - R_C + q_2 \cdot 2 + R_{III_2}' = 8,25 - 10 - 9,75 + 5 \cdot 2 + 1,5 = 0.$$

Ординаты эпюры изгибающих моментов:

$$M_{III_1F_1}^{III_1} = 0; \quad M_{III_1F}^F = R_{III_1} \cdot 2 = 8,25 \cdot 2 = 16,5 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{FC}^C = R_{III_1} \cdot 4 - P_1 \cdot 2 = 8,25 \cdot 4 - 10 \cdot 2 = 13 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{III_2C}^{III_2} = 0; \quad M_{III_2C}^C = R_{III_2}' \cdot 2 + q_2 \cdot 2 \cdot 1 = 1,5 \cdot 2 + 5 \cdot 2 \cdot 1 = 13 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Балка AB. Определяем реакции:

$$\sum M_A = -q_1 \cdot 1 \cdot 0,5 - 6 \cdot R_B + 10 \cdot R_{III_1}' = 0;$$

$$R_B = \frac{-q_1 \cdot 1 \cdot 0,5 + 10 \cdot R_{III_1}'}{6} = \frac{-4 \cdot 1 \cdot 0,5 + 10 \cdot 8,25}{6} = 13,42 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = -q_1 \cdot 1 \cdot 6,5 - 6 \cdot R_A + 4 \cdot R_{III_1}' = 0;$$

$$R_A = \frac{-q_1 \cdot 1 \cdot 6,5 + 4 \cdot R_{III_1}'}{6} = \frac{-4 \cdot 1 \cdot 6,5 + 4 \cdot 8,25}{6} = 1,17 \text{ кН}.$$

Проверка:

$$\sum y = -q_1 \cdot 1 - R_A + R_B - R'_{III_1} = -4 \cdot 1 - 1,17 + 13,42 - 8,25 = 0.$$

Ординаты эпюры изгибающих моментов:

$$M_{OA}^O = 0; \quad M_{OA}^A = -q_1 \cdot 1 \cdot 0,5 = -2 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{AB}^B = -q_1 \cdot 1 \cdot 6,5 - R_A \cdot 6 = -4 \cdot 1 \cdot 6,5 - 1,17 \cdot 6 = -33 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{III_1B}^{III_1} = 0; \quad M_{III_1B}^B = -R'_{III_1} \cdot 4 = -8,25 \cdot 4 = -33 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Эпюра изгибающих моментов M представлена на рисунке 1.3, δ .

Определяем ординаты и строим эпюру поперечных сил Q (рисунок 1.3, e):

$$Q_{OA} = \pm \frac{q_1 \cdot 1}{2} + \frac{M_{OA}^A - M_{OA}^O}{1} = \pm \frac{4 \cdot 1}{2} + \frac{-2 - 0}{1} = \pm 2 - 2 \text{ кН};$$

$$Q_{OA}^O = 2 - 2 = 0 \text{ кН}; \quad Q_{OA}^A = -2 - 2 = -4 \text{ кН};$$

$$Q_{AB} = \frac{-33 - (-2)}{6} = -5,17 \text{ кН};$$

$$Q_{BIII_1} = \frac{0 - (-33)}{4} = 8,25 \text{ кН}; \quad Q_{III_1F} = \frac{16,5}{2} = 8,25 \text{ кН};$$

$$Q_{FC} = \frac{13 - 16,5}{2} = -1,75 \text{ кН};$$

$$Q_{CIII_2} = \pm \frac{q_2 \cdot 2}{2} + \frac{0 - 13}{2} = \pm \frac{5 \cdot 2}{2} - 6,5 = \pm 5 - 6,5 \text{ кН};$$

$$Q_{CIII_2}^C = -5 - 6,5 = -11,5 \text{ кН}; \quad Q_{CIII_2}^{III_2} = 5 - 6,5 = -1,5 \text{ кН};$$

$$Q_{III_2D} = \frac{-3 - 0}{2} = -1,5 \text{ кН}; \quad Q_{DIII_3} = \frac{0 - (-3)}{1} = 3 \text{ кН}; \quad Q_{III_3G} = \frac{1,5 - 0}{0,5} = 3 \text{ кН};$$

$$Q_{GE} = \frac{0 - 1,5}{0,5} = -3 \text{ кН}.$$

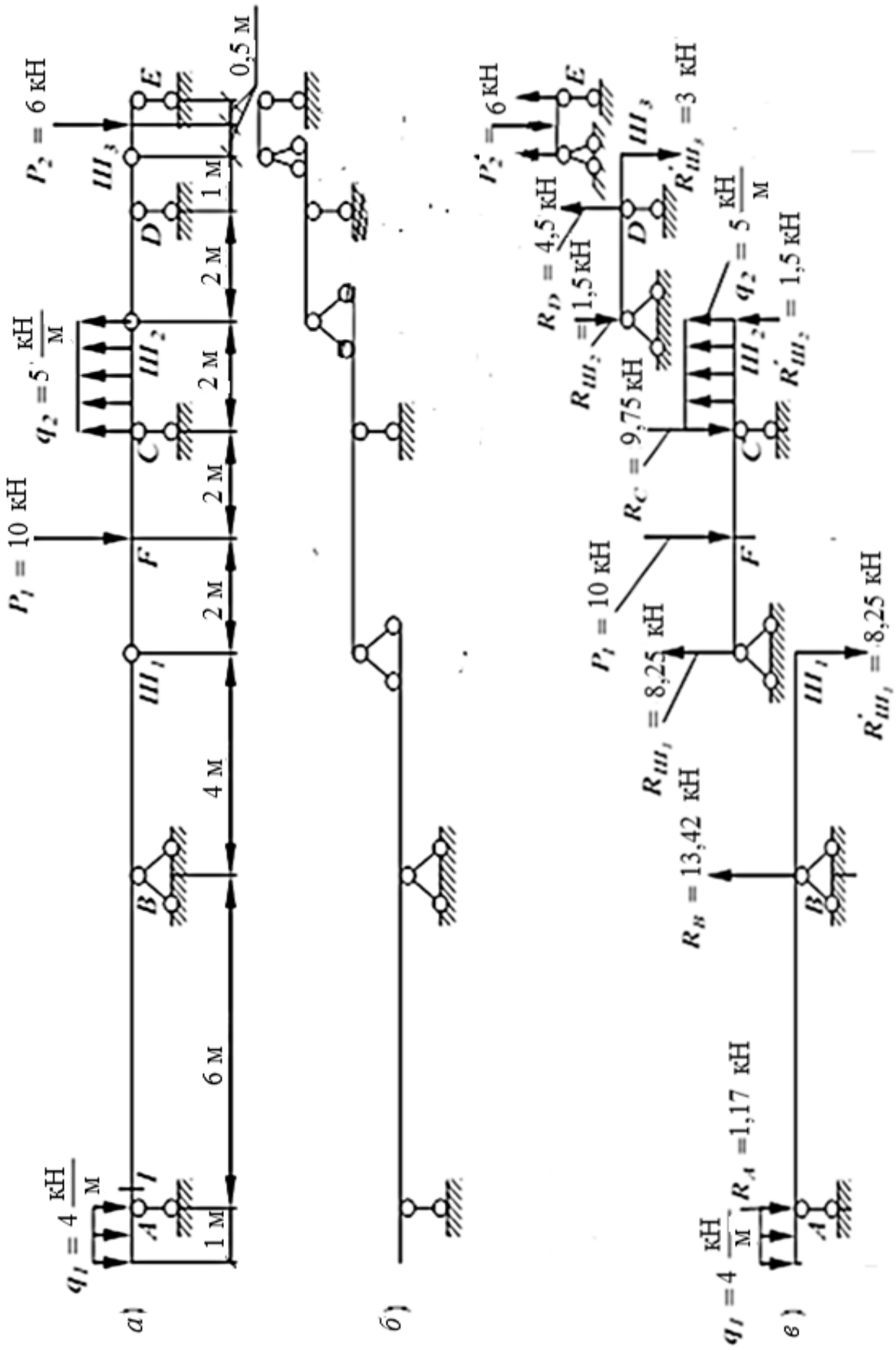
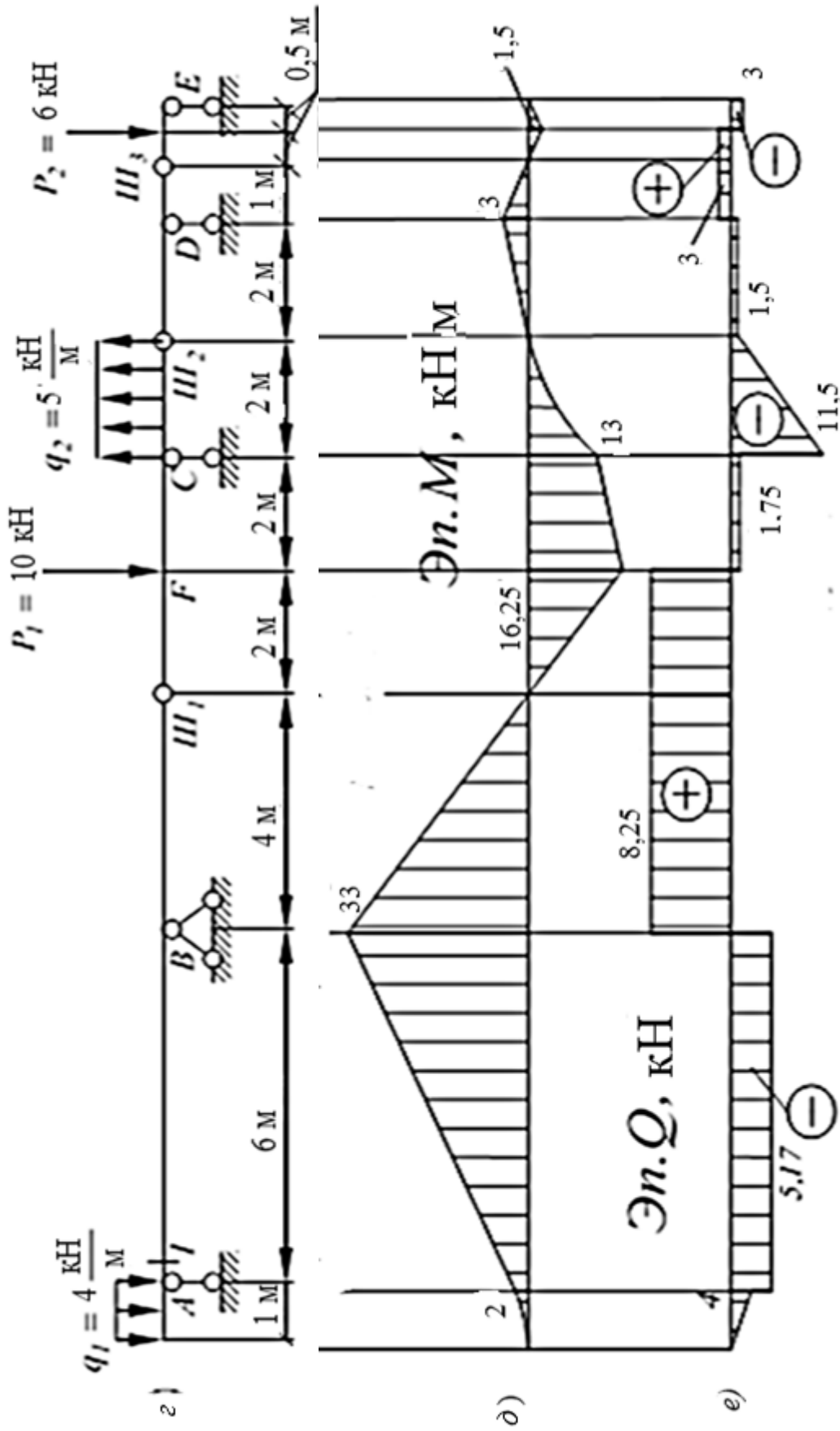


Рисунок 1.3 – Расчет многопролетной статически определимой балки



Окончание рисунка 1.3

1.3 Задачи для самостоятельной подготовки

На рисунке 1.4 представлены задачи для самостоятельной подготовки.

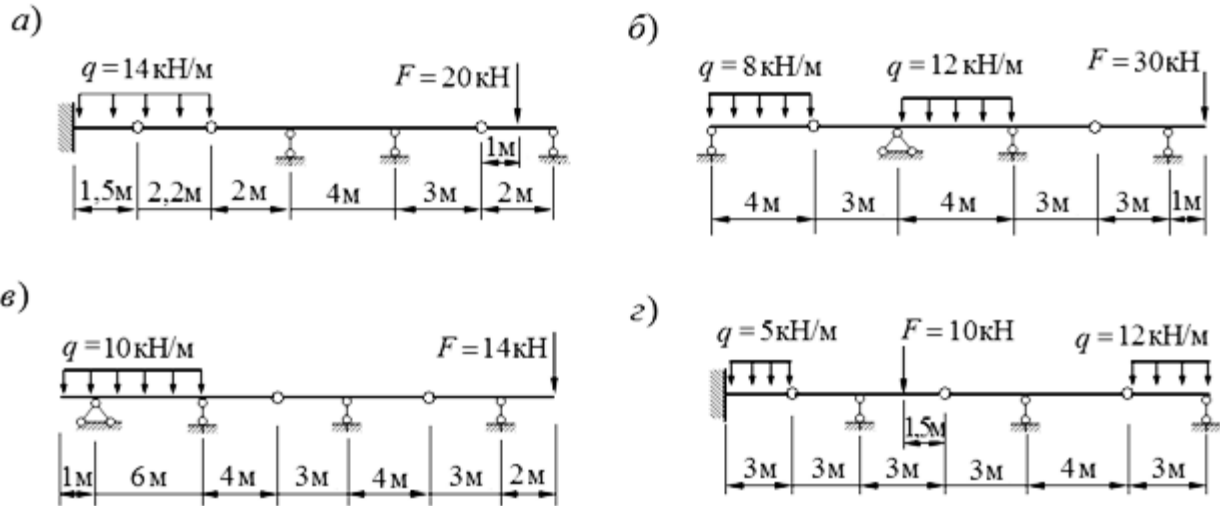


Рисунок 1.4 – К расчету статически определимой многопролетной балки

2 Расчет статически определимой балки на подвижную нагрузку

Расчет сооружений на временную нагрузку проще осуществлять по линиям влияния, которые строятся от перемещения единичной силы $\bar{P} = 1$ по всей длине конструкции. Линия влияния представляет собой график изменения какого-либо усилия в определенном сечении в зависимости от положения единичной силы \bar{P} . В отличие от методики построения эпюр, при построении линий влияния расчет начинается с балки, которой принадлежит рассматриваемое сечение, и только затем единичный груз перемещают по остальным элементам многопролетной балки, причем *усилия от единичной нагрузки с основных балок передаются на вспомогательные*.

Линии влияния изгибающих моментов M и поперечных сил Q в характерных сечениях для шарнирно опертых балок представлены на рисунках 2.1 и 2.2, для консольных балок – на рисунке 2.3.

В отличие от методики построения эпюр, при построении линий влияния вначале рассматривается та балка, которой принадлежит рассматриваемое сечение, а затем единичный груз перемещают по остальным элементам. Причем усилие от единичной нагрузки с основных балок передается на вспомогательные. Положительные ординаты линий влияния откладываются сверху от нейтральной оси.

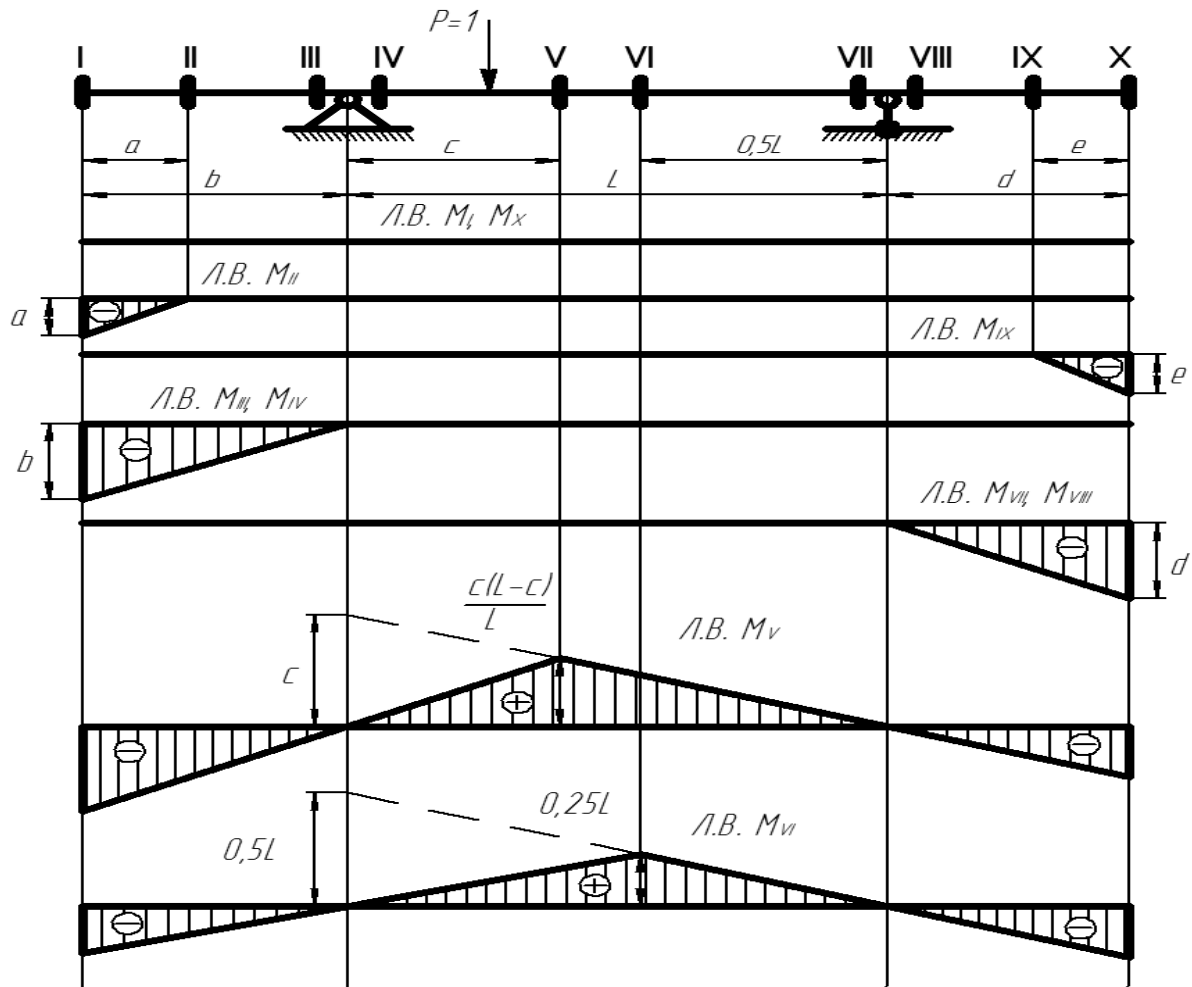


Рисунок 2.1 – Линии влияния изгибающих моментов для шарнирно-опертых балок

Значения усилий от заданной нагрузки по линиям влияния определяются по формуле

$$S = \sum (P_i \cdot y_i + q_i \cdot \omega_i + M_i \cdot \operatorname{tg} \alpha_i),$$

где S – искомое усилие;

P_i и y_i – значение силы и ордината линии влияния под ней;

q_i и ω_i – интенсивность равномерно распределенной нагрузки и площадь фигуры, образованной линией влияния и нейтральной осью под соответствующей нагрузкой;

M_i и $\operatorname{tg} \alpha_i$ – значение изгибающего момента и тангенс угла наклона соответствующей линии влияния к нейтральной оси в месте приложения изгибающего момента.

Значения ординат и площадей линий влияния берутся со своими знаками. Сосредоточенная сила и распределенная нагрузка считаются положительными, если они совпадают с направлением единичного усилия (направлены сверху вниз). Изгибающий момент учитывается со знаком «+», если он направлен по

часовой стрелке, так же как и $\operatorname{tg}\alpha_i$ будет положительным, если ту часть линии влияния, на которой приложен момент, до ее совмещения с нейтральной осью надо повернуть по часовой стрелке.

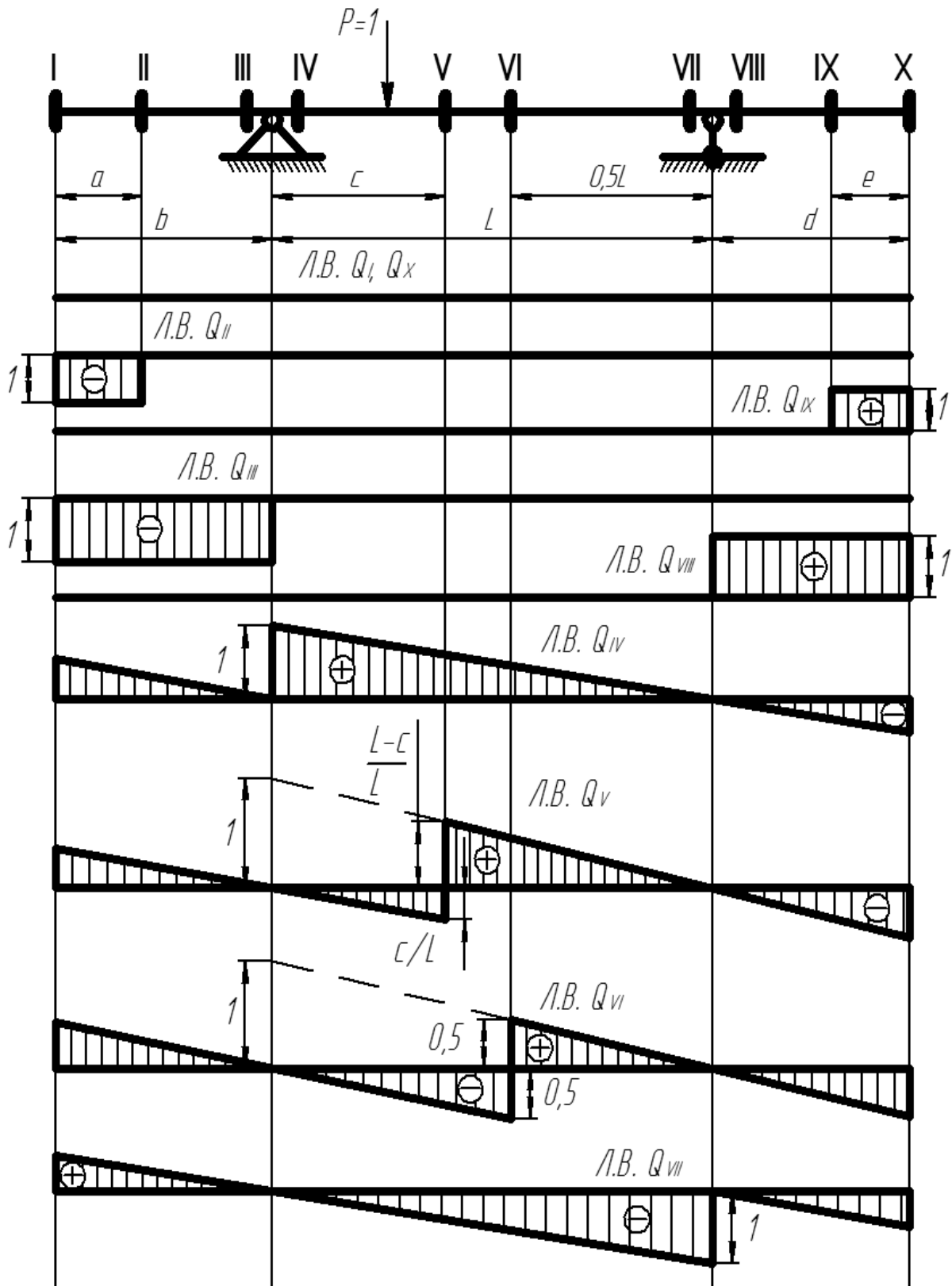


Рисунок 2.2 – Линии влияния поперечных сил для шарнирно-опертых балок

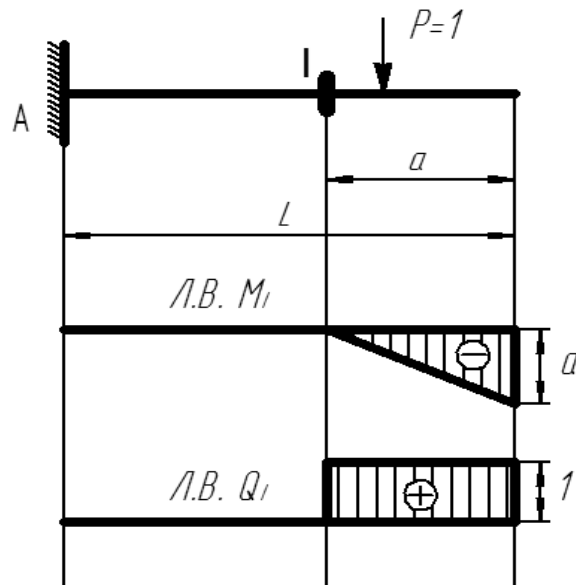


Рисунок 2.3 – Линии влияния изгибающих моментов и поперечных сил для консольных балок

Значения усилий от одинаковой нагрузки, найденные аналитически и по линиям влияния, должны совпадать.

2.1 Определение значений внутренних силовых факторов по линиям влияния (пример 1)

Для заданной многопролетной балки (рисунок 2.4, а) определить значения M и Q в сечении I по линиям влияния.

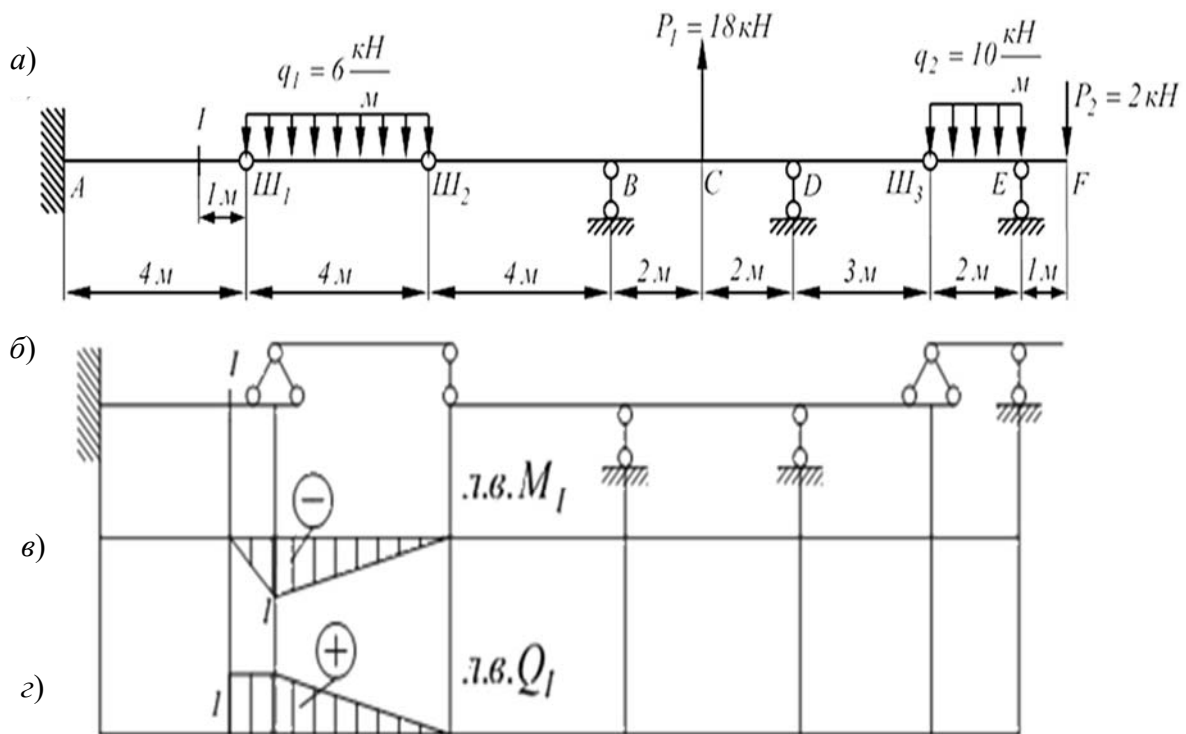


Рисунок 2.4 – Расчет многопролетной статически определимой балки по линиям влияния

2.2 Определение значений внутренних силовых факторов по линиям влияния (пример 2)

Определить значения M и Q в сечении I по линиям влияния.

Строим линии влияния Q и M для сечения I , которое принадлежит основной балке AB (рисунок 2.5, в, з). При построении линий влияния руководствуемся схемами, приведенными на рисунках 2.1–2.3.

Так как сечение I бесконечно близко расположено к опоре, то для построения линии влияния M рассматриваем действие единичной силы только на консоль. В точке A откладываем ноль, а на конце консоли – вниз ее длину, равную 1 м (см. рисунок 2.5, в). На вспомогательные балки линия влияния M не передается.

Для построения линии влияния Q сечения I над опорой A откладываем единицу (так как сечение расположено бесконечно близко к опоре A), соединяем ее с нулем в опоре B и продливаем ее на правую консоль. Параллельную линию проводим из нуля в опоре A на левую консоль. Так как по отношению к балке AB есть вспомогательная балка $Ш_1C$, то выводим линию влияния Q_1 на нее, проводя через ноль в опоре C и продлевая на консоль $СШ_2$. По отношению к балке $Ш_1C$ балка $Ш_2D$ является вспомогательной, поэтому аналогично продлеваем линию влияния Q_1 на нее через ноль в опоре D , выводя на консоль $DШ_3$. Балка $Ш_2E$ является вспомогательной по отношению к $Ш_2D$, поэтому завершаем линию влияния Q_1 в нуле в опоре E . Определяем ординаты линий влияния под характерными точками из подобия треугольников.

Находим усилия Q и M в сечении I по линиям влияния:

$$\begin{aligned} Q_1 &= q_1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,17 \cdot 1 + P_1 \cdot (-0,335) - q_2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,335 \cdot 2 + P_2 \cdot (-0,085) = \\ &= 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,17 \cdot 1 + 10 \cdot (-0,335) - 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,335 \cdot 2 + 6 \cdot (-0,085) = -5,19 \text{ кН}; \end{aligned}$$

$$M_1 = q_1 \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1\right) = 4 \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1\right) = -2 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Таким образом, рассчитанные по линиям влияния значения усилий Q и M в сечении I совпадают со значениями, определенными аналитическим путем (см. эпюры M и Q).

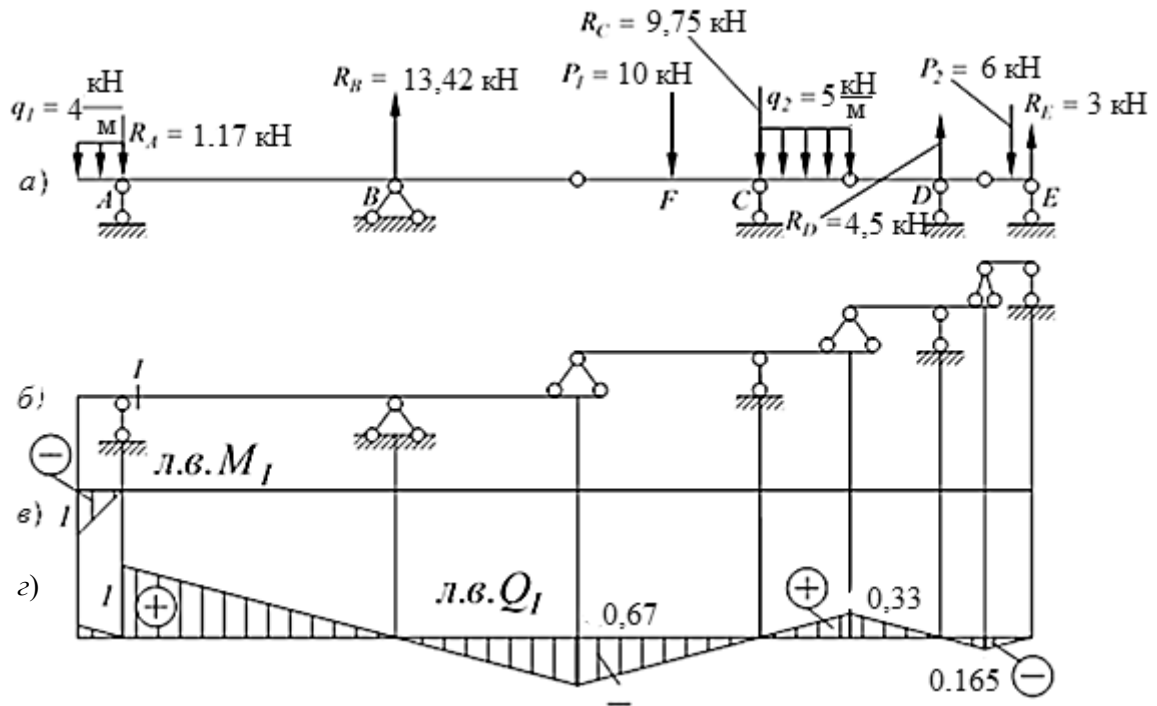


Рисунок 2.5 – Расчет многопролетной статически определимой балки по линиям влияния

2.3 Задачи для самостоятельной подготовки

На рисунке 2.6 приведены схемы нагрузки балок для самостоятельной подготовки.

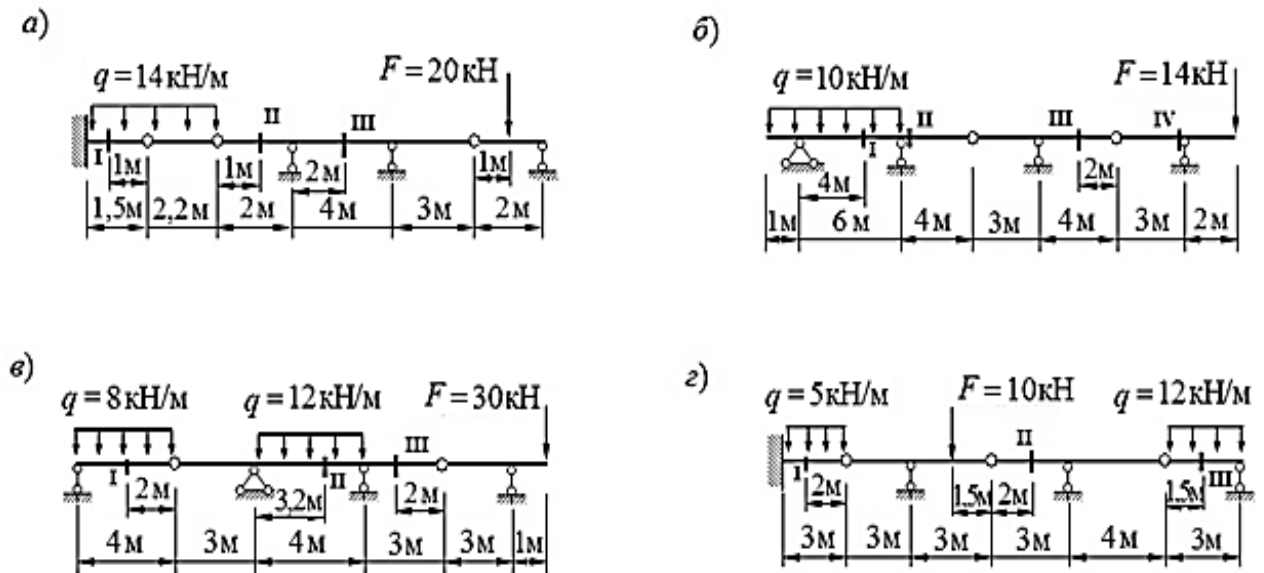


Рисунок 2.6 – К расчету статически определимой многопролетной балки

3 Расчет плоских статически неопределимых рам методом сил

Алгоритм расчета статически неопределимых рам методом сил заключается в следующем.

1 Определяется степень статической неопределимости системы, которая заменяется статически определимой геометрически неизменяемой (основной) системой путем удаления «лишних» связей. Степень статической неопределимости n устанавливается при помощи следующих формул:

$$n = 2 \cdot Ш + C_{оп} - 3 \cdot Д;$$

$$n = 3K - C,$$

где $Ш$ – число простых шарниров;

$Д$ – число дисков, составляющих систему;

$C_{оп}$ – число опорных связей;

K – количество замкнутых контуров;

C – число связей, недостающих до полной замкнутости системы.

2 Действие удаленных связей заменяется их неизвестными реакциями.

3 Составляются канонические уравнения метода сил из условия, что перемещения системы по направлениям отброшенных связей равны нулю. Причем количество уравнений равно количеству отброшенных «лишних» связей:

$$\begin{cases} \delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \dots + \delta_{1n} \cdot X_n + \Delta_{1P} = 0; \\ \delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \dots + \delta_{2n} \cdot X_n + \Delta_{2P} = 0; \\ \dots \\ \delta_{n1} \cdot X_1 + \delta_{n2} \cdot X_2 + \dots + \delta_{nn} \cdot X_n + \Delta_{nP} = 0, \end{cases}$$

где X_1, X_2, X_n – неизвестные реакции в удаленных связях для заданной системы;

δ_{mn} – перемещение по направлению n -й отброшенной связи от действия силы $X_n = 1$;

Δ_{nP} – перемещение по направлению n -й связи от внешней нагрузки.

Для определения коэффициентов канонических уравнений в основной системе строятся единичные эпюры изгибающих моментов \overline{M}_i от действия усилий отброшенных связей и грузовая эпюра M_P от действия заданной внешней нагрузки.

Коэффициенты канонических уравнений могут быть найдены путем перемножения соответствующих эпюр (способ Верещагина), т. е. коэффициент δ_{ij} есть произведение единичных эпюр \overline{M}_i и \overline{M}_j , а коэффициент Δ_{iP} – \overline{M}_i и \overline{M}_P :

$$\delta_{ij} = \frac{\bar{M}_i \cdot \bar{M}_j}{E \cdot I}; \quad \Delta_{ip} = \frac{\bar{M}_i \cdot M_p}{E \cdot I},$$

где $E \cdot I$ – изгибная жесткость балки.

Результат перемножения двух эпюр по способу Верещагина равен произведению площади одной из них на ординату другой эпюры, взятую под центром тяжести площади первой эпюры.

Следует отметить, что при перемножении двух эпюр, ограниченных прямыми линиями, не имеет значения, площадь какой из эпюр брать, а на какой – ординату. В случае, если одна из эпюр имеет криволинейное очертание, то площадь необходимо брать из нее.

При нахождении коэффициентов канонических уравнений эпюры должны перемножаться по участкам. Участком считается часть эпюры, где она не меняет характер своего поведения. Следует обратить внимание, что произведение ординат эпюр, расположенных по одну сторону от нулевой линии, берется со знаком «+», по разные стороны – со знаком «-».

4 Решение системы канонических уравнений позволяет найти неизвестные усилия, действующие в раме, и перейти к построению окончательной (суммарной) эпюры моментов. Ее можно строить как для обычной статически определимой системы, но проще использовать уже имеющиеся эпюры и на основании принципа независимости действия сил определить ординаты по формуле

$$M = M_p + \bar{M}_1 \cdot X_1 + \bar{M}_2 \cdot X_2 + \dots + \bar{M}_n \cdot X_n.$$

5 Построив окончательную эпюру моментов, проводят ее кинематическую проверку, суть которой заключается в равенстве нулю перемещений по направлению всех отброшенных связей. Для этого перемножение окончательной эпюры M на суммарную единичную \bar{M}_S по правилу Верещагина должно давать ноль.

6 После построения эпюр поперечных и продольных сил проводится статическая проверка правильности решения системы, а именно проверяется равновесие узлов рамы на эпюре моментов и равенство нулю суммы проекций всех сил и реакций, действующих на раму.

3.1 Пример расчета один раз статически неопределимой рамы методом сил

Раскрыть статическую неопределимость рамы и построить эпюры M , Q , N рамы, представленной на рисунке 3.1.

Заданная стержневая система (см. рисунок 3.1, а) один раз статически неопределима:

$$n = 2 \cdot 0 + 4 - 3 \cdot 1 = 1.$$

На рисунке 3.1, б изображена основная система, на рисунке 3.2, в – эквивалентная. Каноническое уравнение метода сил имеет вид:

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \Delta_{1P} = 0.$$



Рисунок 3.1 – Основная и эквивалентная системы

Для определения коэффициентов δ_{11} , Δ_{1P} строим эпюры изгибающих моментов от единичной силы $\bar{X}_1 = 1$ и внешней силы P (рисунок 3.2).

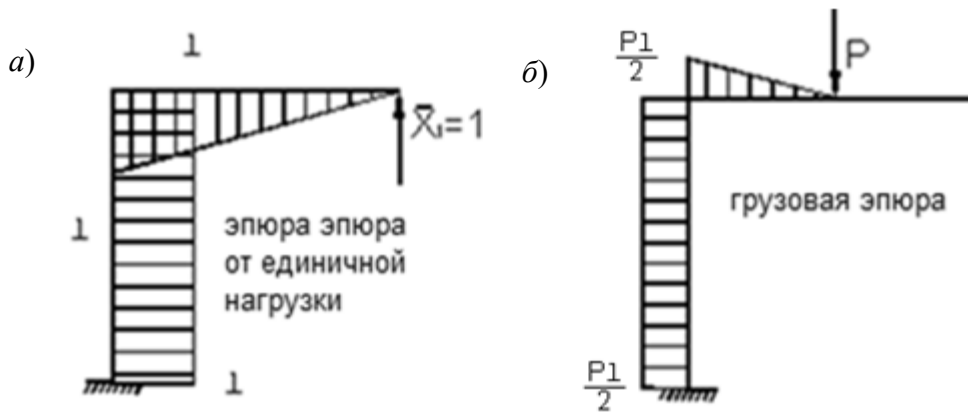


Рисунок 3.2 – Эпюры от единичной нагрузки и грузовая

При определении δ_{11} используем эпюру от единичной силы (см. рисунок 3.2, а). Она является одновременно эпюрой моментов от заданной и единичной нагрузки. Применяя способ Верещагина, получаем:

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI_x} \sum_{i=1}^2 \Omega_i M_{1i} = \frac{1}{EI_x} \left[\left(\frac{l \cdot l}{2} \right) \frac{2}{3} l + l \cdot l \cdot l \right] = \frac{4l^3}{3EI_x}.$$

Для вычисления Δ_{1P} воспользуемся формулой в виде

$$\Delta_P = \frac{1}{EI_x} \sum_{i=1}^2 \Omega_i M_{1i} = \left[-\left(\frac{1}{2} \frac{Pl}{2} \frac{l}{2} \right) \frac{5l}{6} - \left(\frac{Pl}{2} l \right) \right] = -\frac{29}{48} \frac{Pl^3}{EI_x},$$

где использованы эпюры на рисунке 3.2.

Подставляя найденные значения δ_{11}, Δ_{1P} в каноническое уравнение, получаем:

$$\frac{4l^3}{3EI_x} \cdot X_1 - \frac{29Pl^3}{48EI_x},$$

откуда находим лишнюю неизвестную:

$$X_1 = \frac{29P}{64}.$$

При построении эпюр используем эквивалентную систему, в которой X_1 уже известно, и метод сечений. Построение эпюры моментов можно упростить, если применить способ разложения: эпюру моментов строить отдельно от внешней нагрузки и силы X_1 , а затем их сложить. Эпюра от внешней нагрузки изображена на рисунке 3.2, б. Эпюру моментов от X_1 получим от единичной силы $\bar{X}_1 = 1$ (см. рисунок 3.2, а), если все ординаты этой эпюры умножим на X_1 (см. рисунок 3.3, а). Складывая эту эпюру с эпюрой на рисунке 3.2, б получим окончательную эпюру моментов (рисунок 3.3, б). Эпюры нормальных и перерезывающих сил строим с использованием метода сечений (см. рисунок 3.3).

Для деформационной проверки определим перемещение в направлении силы X_1 эквивалентной системы (см. рисунок 3.1). Для этого по правилу Верещагина перемножим окончательную эпюру изгибающих моментов (см. рисунок 3.3, б) на единичную (см. рисунок 3.2, а) – либо, что всё равно, эпюры моментов X_1 и P (см. рисунки 3.3, а и 3.2, б) – на единичную от X_1 .

В результате получим:

$$\Delta_1 = \frac{1}{EI_x} \left[-\left(\frac{Pl}{2} \cdot l \right) + \left(\frac{29Pl}{64} \cdot l \right) l - \left(\frac{1}{2} \frac{Pl}{2} \frac{l}{2} \right) \frac{5l}{6} + \left(\frac{1}{2} \frac{29Pl}{64} \right) \frac{2l}{3} \right] = 0,$$

что подтверждает правильность полученного решения.

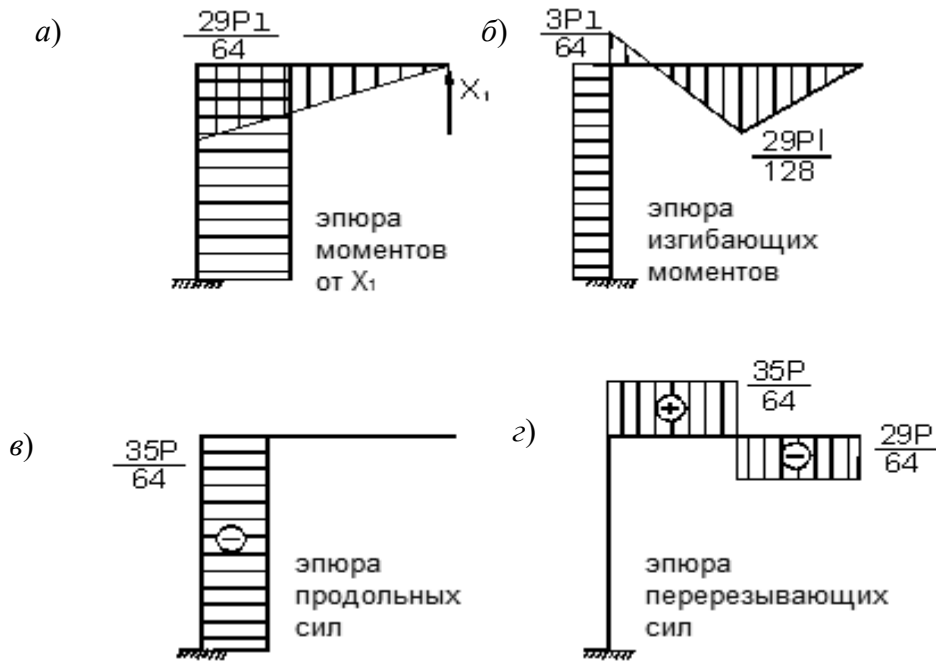


Рисунок 3.3 – Эпюры нормальных и перерезывающих сил

3.2 Пример расчета два раза статически неопределимой рамы методом сил

Рассмотрим два раза статически неопределимую раму (рисунок 3.4, а).

Решение

На рисунке 3.4, б изображена её эквивалентная система. Для определения коэффициентов δ_{ij} , Δ_1 , Δ_2 системы канонических уравнений построим эпюры от единичных сил и внешней нагрузки (рисунок 3.4, в–д). Используем способ Верещагина:

$$\left\{ \begin{array}{l} EI\delta_{11} = \left(\frac{1}{2}l \cdot l\right) \cdot \frac{2}{3}l = \frac{l^3}{3}; \\ EI\delta_{22} = \left(\frac{1}{2}l \cdot l\right) \cdot \frac{2}{3}l + (l \cdot l) \cdot l = \frac{4l^3}{3}; \\ EI\delta_{12} = EI\delta_{21} = -\frac{1}{2}l \cdot l \cdot l = -\frac{l^3}{3}; \\ EI\Delta_1 = \left(\frac{1}{2}Pl \cdot l\right) \frac{l}{2} = \frac{Pl^3}{4}; \\ EI\Delta_2 = -\left(\frac{1}{2} \frac{Pl}{2} \frac{l}{2}\right) \frac{5l}{6} - \left(\frac{Pl}{2} \cdot l\right) = -\frac{29pl^3}{48}. \end{array} \right.$$

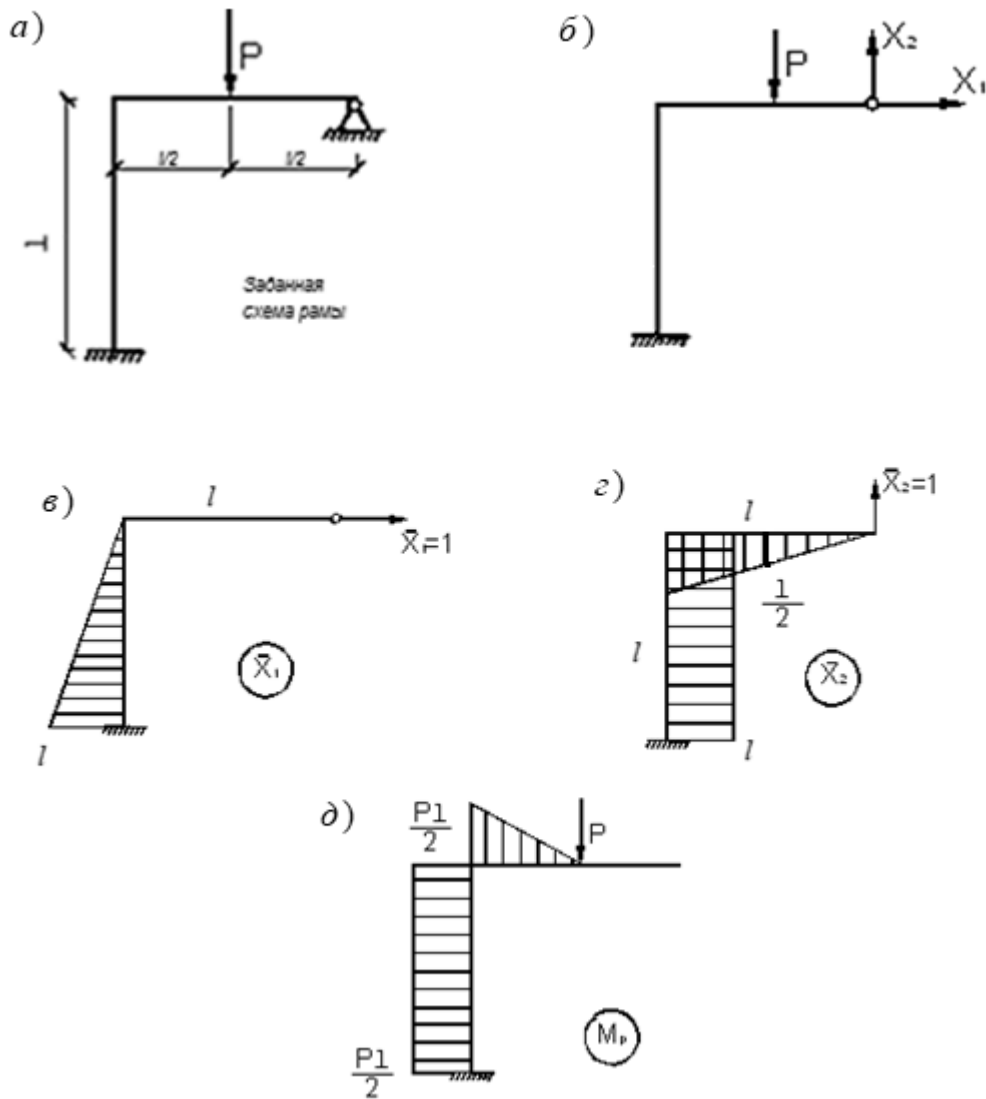


Рисунок 3.4 – Эпюры от единичной и заданной нагрузки

Подставляя найденные значения коэффициентов в канонические уравнения, получим:

$$\begin{cases} \frac{1}{3}X_1 - \frac{1}{2}X_2 + \frac{1}{4}P = 0; \\ -\frac{1}{2}X_1 + \frac{4}{3}X_2 - \frac{29}{48}P = 0. \end{cases}$$

Решая систему уравнений, получим

$$X_1 = -\frac{9P}{56}; \quad X_2 = \frac{11P}{28}.$$

Умножая единичные эпюры на рисунке 3.4, в, г на X_1 , X_2 , получим эпюры моментов от этих сил (рисунок 3.5). Складывая эти эпюры с эпюрой момен-

тов от внешней нагрузки (см. рисунок 3,4, д), получим суммарную эпюру моментов (рисунок 3.6, а). Эпюры N и Q изображены на рисунке 3.6, б, в.

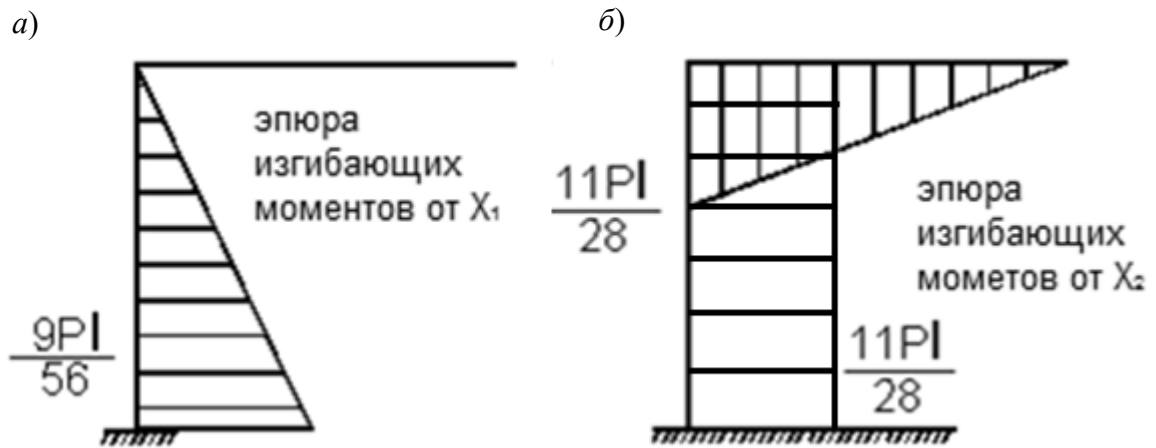


Рисунок 3.5 – Эпюры изгибающих моментов

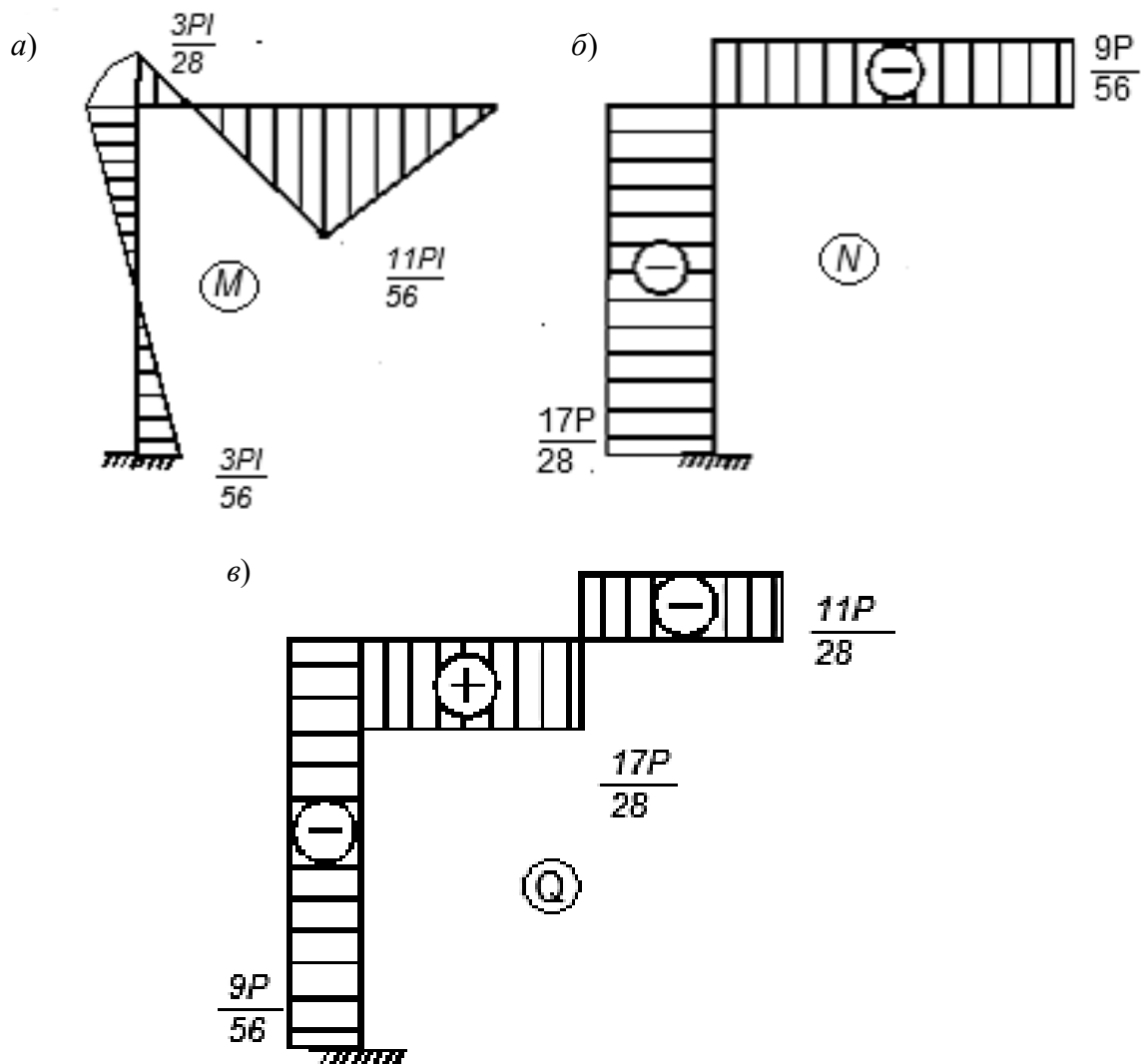


Рисунок 3.6 – Эпюры изгибающих моментов, продольных и поперечных сил

Произведём деформационную проверку. Для этого найдём перемещения:

$$EI\Delta_1 = -\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{6Pl}{56} \cdot l\right) \cdot \frac{l}{3} + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3Pl}{56} \cdot l\right) \cdot \frac{2}{3}l = 0,$$

что подтверждает правильность полученного решения.

3.3 Задачи для самостоятельной подготовки

На рисунке 3.7 приведены схемы рам для самостоятельного решения.

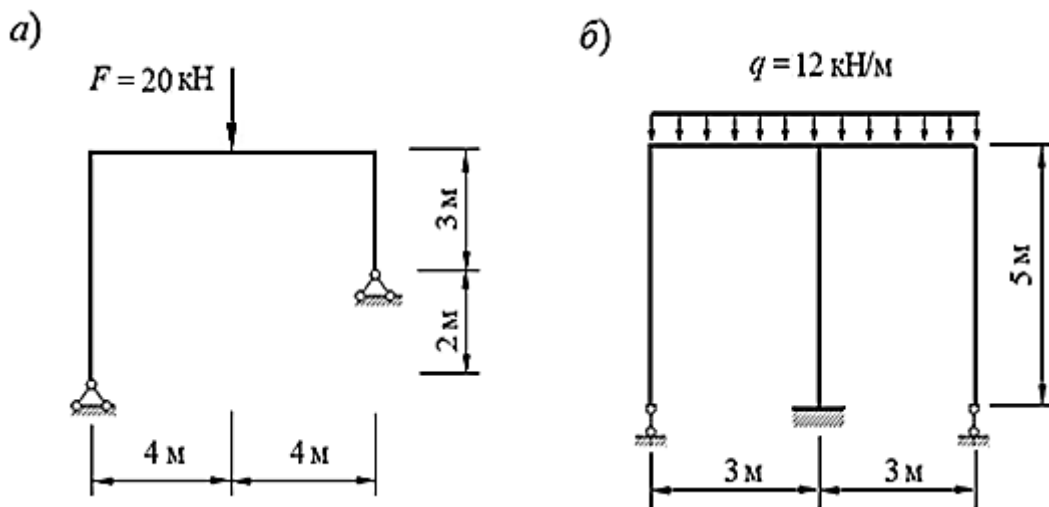


Рисунок 3.7 – К расчету статически неопределимой рамы методом сил

4 Расчет плоских статически неопределимых рам методом перемещений

Алгоритм расчета статически неопределимой рамы методом перемещений следующий.

1 Определяется степень кинематической неопределимости рамы как сумма числа возможных угловых n_y и линейных n_l перемещений:

$$n = n_y + n_l.$$

Число возможных углов поворота n_y равно числу жестких узлов рамы, включая опорные. Для определения числа возможных линейных перемещений n_l во все жесткие узлы рамы, в том числе и опорные, врезают шарниры. Степень подвижности полученного механизма будет равна числу возможных линейных перемещений узлов.

2 Основная система по методу перемещений получается из заданной рамы путем введения дополнительных связей, число которых равно общему количеству неизвестных. Во все жесткие узлы рамы вводятся плавающие связи (заделки), препятствующие только повороту узлов, но не их линейному перемещению. Реакции таких связей представляют собой моменты, приложенные в узлах рамы. Таким образом, основная система метода перемещений представляет собой ряд однопролетных статически неопределимых балок, для которых в справочной литературе приводятся эпюры изгибающих моментов и реакции при различных воздействиях (рисунок А.1).

3 Составляется система канонических уравнений метода перемещений, которая имеет вид:

$$\begin{cases} r_{11} \cdot Z_1 + r_{12} \cdot Z_2 + \dots + r_{1n} \cdot Z_n + R_{1P} = 0; \\ r_{21} \cdot Z_1 + r_{22} \cdot Z_2 + \dots + r_{2n} \cdot Z_n + R_{2P} = 0; \\ \dots \\ r_{n1} \cdot Z_1 + r_{n2} \cdot Z_2 + \dots + r_{nn} \cdot Z_n + R_{nP} = 0, \end{cases} \quad (4.1)$$

где r_{n1} – реактивное усилие в связи n от действия единичного перемещения в связи 1;

r_{nn} – реактивное усилие, возникающее в связи n от ее перемещения, равно-го единице;

R_{nP} – реактивное усилие в связи n от действия внешней нагрузки;

Z_n – неизвестное перемещение узла.

Для определения коэффициентов уравнений необходимо построить единичные \overline{M}_n и грузовую M_P эпюры изгибающих моментов. Коэффициенты с одинаковыми индексами r_{nn} называются главными и их значения всегда положительны. Побочные коэффициенты r_{n1} и свободные члены уравнений R_{nP} могут быть положительными, отрицательными и равняться нулю. Побочные коэффициенты обладают свойством взаимности, т. е.

$$r_{1n} = r_{n1}. \quad (4.2)$$

Для простоты определения усилий можно считать, что первый индекс при реактивном усилии r_{n1} обозначает номер узла (линейной связи), который вырезается (узел, где приложено неизвестное усилие $\overline{Z}_n = 1$), а второй индекс обозначает номер такой эпюры, из которой он вырезается (из эпюры \overline{M}_1).

При действии единичного угла поворота эпюры изгибающих моментов строятся на стержнях, примыкающих к поворачивающейся заделке (**кроме консоли!**), а при единичном смещении – для всех деформирующихся (изгибающихся) стержней. Коэффициенты и свободные члены канонических уравнений

проще определять статическим способом из условия равновесия соответствующих узлов рамы или отдельных частей основной системы. **Реактивные моменты всегда направляются по ходу часовой стрелки.**

4 После определения коэффициентов и свободных членов решают систему канонических уравнений, находят значения неизвестных Z_n , строят «исправленные» эпюры моментов $M_n = \overline{M}_n \cdot Z_n$.

5 Строят окончательную (действительную) эпюру изгибающих моментов M , алгебраически суммируя ординаты «исправленных» и грузовой эпюры моментов по характерным точкам:

$$M = M_p + M_1 + M_2 + \dots + M_n . \quad (4.3)$$

Проверкой правильности построения эпюры изгибающих моментов является равновесие узлов рамы.

6 После статической проверки выполняют кинематическую проверку правильности построения эпюры M , для чего строят единичную эпюру моментов в основной системе метода сил \overline{M}_1 и перемножают ее с эпюрой M по правилу Верещагина:

$$\delta = \frac{\overline{M}' \cdot M}{E \cdot I} = 0 . \quad (4.4)$$

7 Строят эпюры поперечных Q и продольных N сил таким же образом, как и при расчете рам методом сил.

8 Выполняют статическую проверку правильности решения задачи по условию равенства нулю суммы проекций всех сил и реакций, действующих на раму:

$$\sum X = 0; \quad \sum Y = 0 . \quad (4.5)$$

4.1 Пример расчета один раз статически неопределимой рамы методом перемещений

Построить эпюры изгибающих моментов M , поперечных Q и продольных N сил для рамы, считая жесткость стержней постоянной величиной ($EI = \text{const}$) (рисунок 4.1, а).

Решение

Число неизвестных углов поворота $n_y = 1$. При введении шарниров в жесткий узел B и жесткую заделку A линейная подвижность системы n_l будет равна нулю (рисунок 4.1, б). Общая степень кинематической неопределимости:

$$n = n_y + n_l = 1 + 0 = 1 .$$

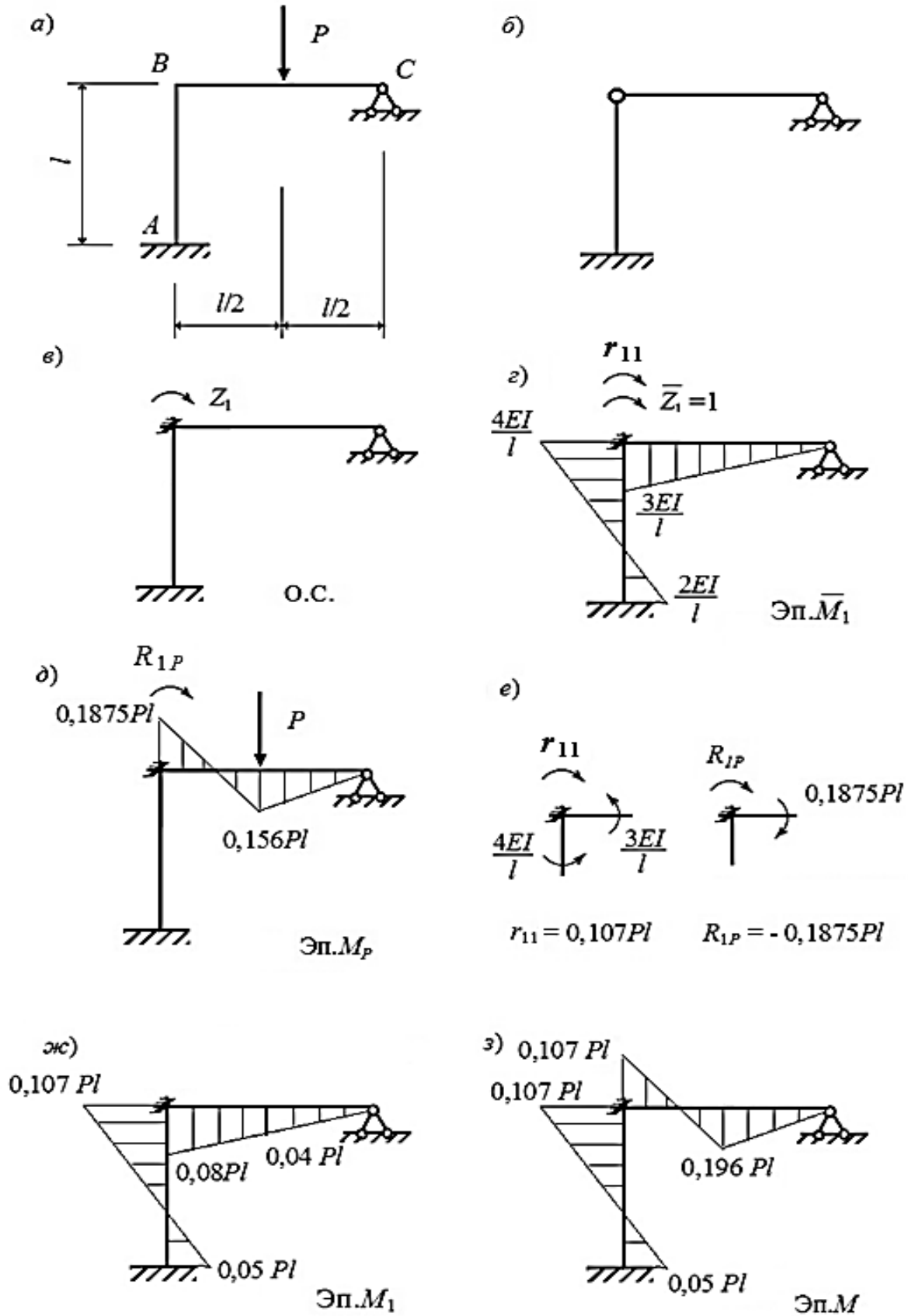
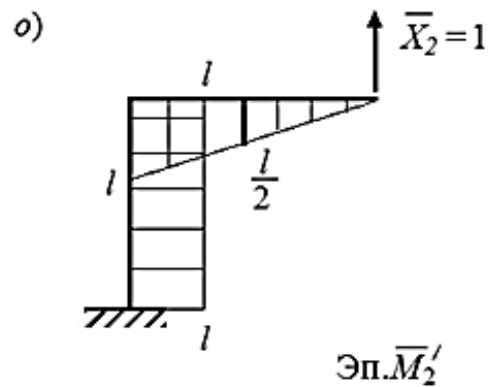
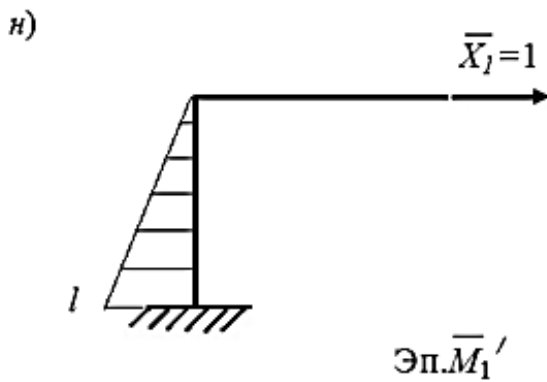
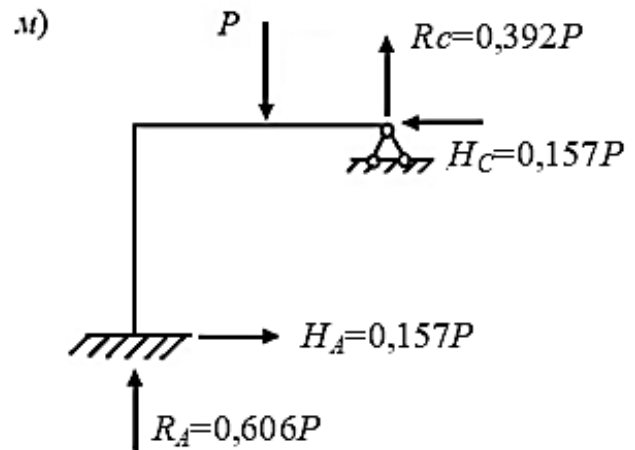
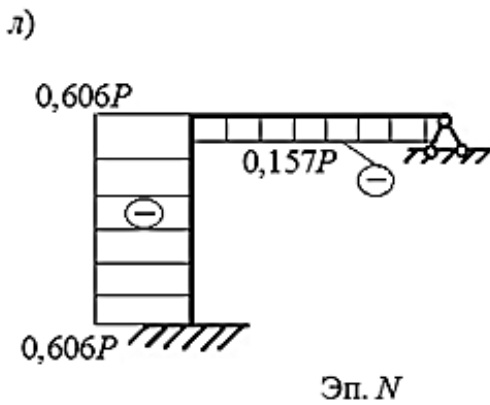
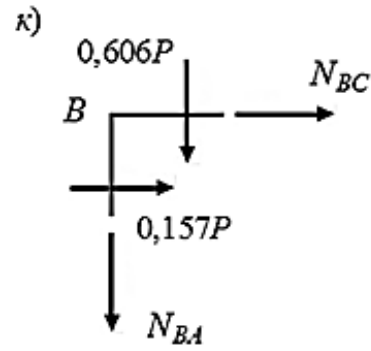
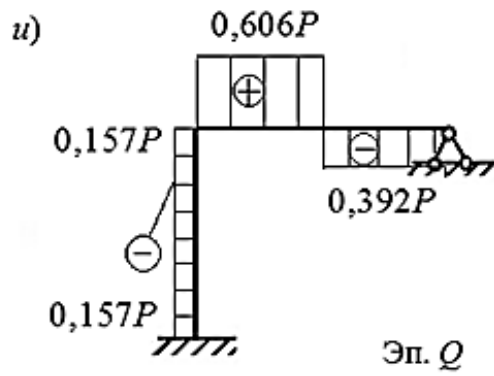


Рисунок 4.1 – К расчету один раз статически неопределимой кинематической рамы



Окончание рисунка 4.1

Основную систему получаем из заданной путем постановки плавающих заделок в жесткий узел B (рисунок 4.1, в). Система канонических уравнений для заданной рамы имеет вид обычного линейного уравнения:

$$r_{11} \cdot Z_1 + R_{1P} = 0.$$

При помощи таблицы готовых решений (см. рисунок А.1) строим единичную эпюру моментов \bar{M}_1 , задавая единичное угловое перемещение введенной в

основную систему плавающей заделке (рисунок 4.1, *з*), а также грузовую эпюру изгибающих моментов M_P от действия внешней (заданной) нагрузки (рисунок 4.1, *д*). На рисунке 4.1, *е* представлено определение коэффициентов уравнений:

$$r_{11} = \frac{4E \cdot I}{l} + \frac{3E \cdot I}{l} = \frac{7E \cdot I}{l};$$

$$R_{1P} = -0,1875P \cdot l.$$

Подставляя их в уравнение, находим неизвестное усилие, действующее во введенной связи:

$$\frac{7E \cdot I}{l} \cdot z_1 - 0,1875P \cdot l = 0;$$

$$z_1 = \frac{0,027P \cdot l^2}{E \cdot I}.$$

На рисунке 4.1, *ж* показана «исправленная» эпюра изгибающих моментов M_1 , ординаты которой умножены на найденный коэффициент Z_1 . Суммируя алгебраически ординаты грузовой M_P и «исправленной» эпюры M_1 , строим окончательную эпюру изгибающих моментов M (рисунок 4.1, *з*). По эпюре моментов строим эпюру поперечных сил Q (рисунок 4.1, *и*).

$$Q_{AB} = \frac{-0,107P \cdot l - 0,05P \cdot l}{l} = -0,157P;$$

$$Q_{BC}^{лев} = \frac{0,196P \cdot l - (-0,107P \cdot l)}{\frac{l}{2}} = 0,606P; \quad Q_{BC}^{прав} = \frac{0 - 0,196P \cdot l}{\frac{l}{2}} = 0,392P.$$

Вырезая узел B (рисунок 4.1, *к*) строим эпюру продольных сил N (рисунок 4.1, *л*):

$$\sum X = 0: \quad 0,157P + N_{BC} = 0; \quad N_{BC} = -0,157P;$$

$$\sum Y = 0: \quad -0,606P - N_{BA} = 0; \quad N_{BA} = -0,606P.$$

Проводим статическую проверку равновесия рамы (рисунок 4.1, *м*).

$$\sum X = 0: \quad H_A - H_C = 0,157P - 0,157P = 0;$$

$$\sum Y = 0: R_A - P + R_C = 0,606 P - P + 0,392 P = 0.$$

Для кинематической проверки строим единичные эпюры моментов в основной системе метода сил (рисунок 4.1, *н, о*) и перемножаем их с окончательной эпюрой M по правилу Верещагина:

$$\delta_1 = \frac{\overline{M}_1' \cdot M}{E \cdot I} = \frac{1}{E \cdot I} \cdot \left(\left(\frac{1}{2} \cdot 0,107 P \cdot l \cdot l \right) \cdot \frac{1}{3} \cdot l - \left(\frac{1}{2} \cdot 0,05 P \cdot l \cdot l \right) \cdot \frac{2}{3} \cdot l \right) = \frac{0,001 P l^3}{EI} \approx 0;$$

$$\begin{aligned} \delta_2 = \frac{\overline{M}_2' \cdot M}{E \cdot I} = \frac{1}{E \cdot I} \cdot & \left(\left(\frac{1}{2} \cdot 0,196 P \cdot l \cdot \frac{1}{2} \cdot l \right) \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{l}{2} + \frac{l}{2 \cdot 6} (2 \cdot 0,196 P \cdot l \cdot \frac{l}{2} - \right. \\ & \left. - 2 \cdot 0,107 P \cdot l \cdot l + 0,196 P \cdot l \cdot l - 0,107 P \cdot l \cdot \frac{l}{2}) + \right. \\ & \left. + \frac{l}{6} (-2 \cdot 0,107 P \cdot l \cdot l + 2 \cdot 0,05 P \cdot l \cdot l - 0,107 P \cdot l \cdot l + 0,05 P \cdot l \cdot l) \right) = \frac{0,0142 P l^3}{EI} \approx 0. \end{aligned}$$

Проверка полностью выполняется, следовательно, эпюры M , Q , N построены верно.

4.2 Пример расчета два раза статически неопределимой рамы методом перемещений

Построить эпюры изгибающих моментов M , поперечных Q и продольных N сил для рамы, считая жесткость стержней постоянной величиной ($EI = \text{const}$) (рисунок 4.2, *а*).

Решение

Число неизвестных углов поворота $n_y = 1$. При введении шарниров во все жесткие узлы и заделки линейная подвижность системы n_l будет равна единице (рисунок 4.2, *б*). Таким образом, степень кинематической неопределенности равна:

$$n = n_y + n_l = 1 + 1 = 2.$$

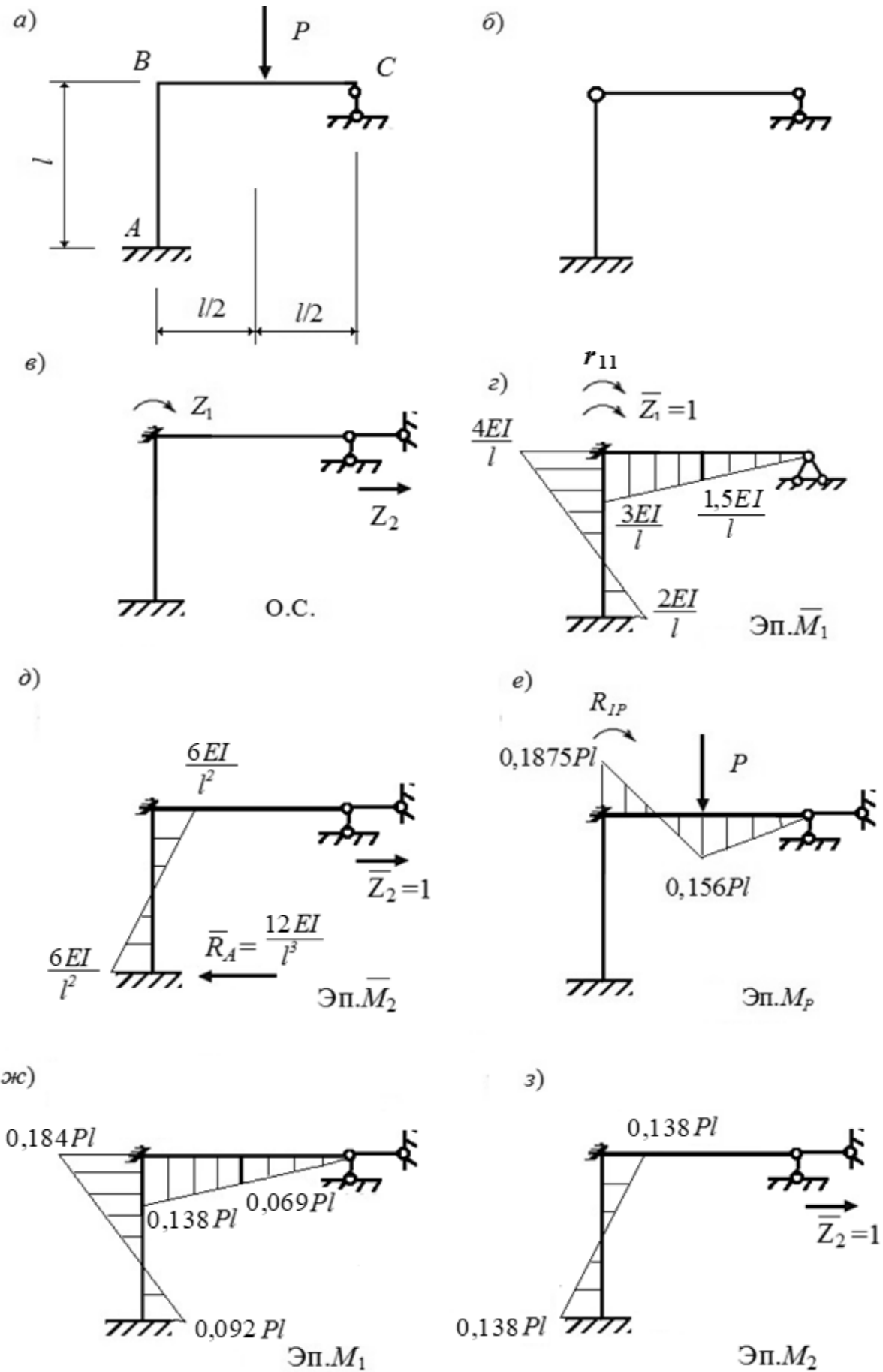
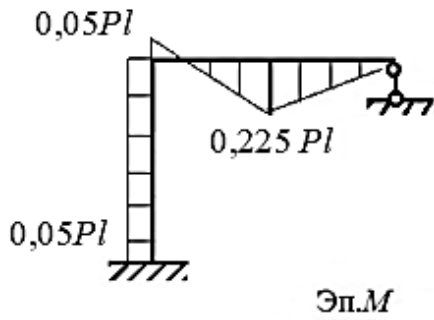
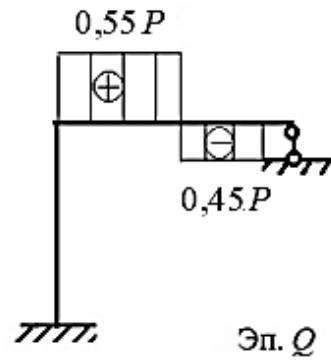


Рисунок 4.2 – К расчету дважды статически неопределимой кинематической рамы

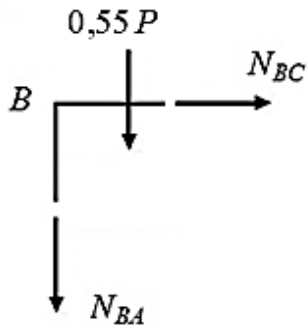
и)



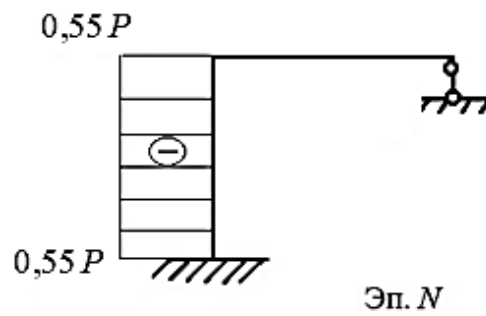
к)



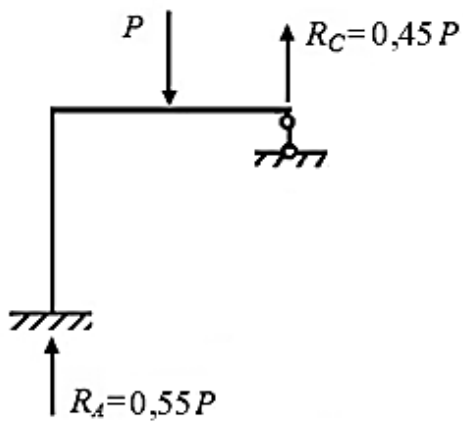
л)



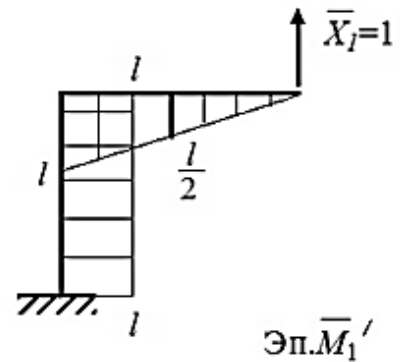
м)



н)



о)



Окончание рисунка 4.2

Основную систему получаем из заданной путем постановки подвижных заделок в жесткие узлы E и F (рисунок 4.2, в). Система канонических уравнений для заданной рамы имеет вид:

$$\begin{cases} r_{11} \cdot Z_1 + r_{12} \cdot Z_2 + R_{1P} = 0; \\ r_{21} \cdot Z_1 + r_{22} \cdot Z_2 + R_{2P} = 0. \end{cases}$$

При помощи таблицы готовых решений (см. рисунок А.1) строим единичные эпюры моментов \overline{M}_1 и \overline{M}_2 , задавая поочередно единичные перемещения введенным в основную систему связям (рисунок 4.2, з, д), а также грузовую эпюру изгибающих моментов M_P от действия внешней (заданной) нагрузки (рисунок 4.2, е). Определяем коэффициенты уравнений:

$$r_{11} = \frac{4E \cdot I}{l} + \frac{3E \cdot I}{l} = \frac{7E \cdot I}{l};$$

$$r_{12} = r_{21} = -\frac{6E \cdot I}{l^2};$$

$$r_{22} = \frac{12E \cdot I}{l^3};$$

$$R_{1P} = -0,1875P \cdot l;$$

$$R_{2P} = 0.$$

Подставляя коэффициенты в систему и решая ее, находим неизвестные усилия, действующие во введенных связях:

$$\begin{cases} \frac{7E \cdot I}{l} \cdot Z_1 - \frac{6E \cdot I}{l^2} \cdot Z_2 - 0,1875 P \cdot l = 0; \\ -\frac{6E \cdot I}{l^2} \cdot Z_1 + \frac{12E \cdot I}{l^3} \cdot Z_2 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} Z_1 = \frac{0,046Pl^2}{E \cdot I}; \\ Z_2 = \frac{0,023Pl^3}{E \cdot I}. \end{cases}$$

На рисунке 4.2, ж, з показаны «исправленные» эпюры изгибающих моментов M_1 и M_2 , умножая характерные ординаты единичных эпюр на найденные соответствующие коэффициенты Z_1 и Z_2 . Суммируя алгебраически ординаты грузовой M_P и «исправленных» эпюр M_1 и M_2 , строим окончательную эпюру изгибающих моментов M (рисунок 4.2, и). По эпюре моментов строим эпюру поперечных сил Q (рисунок 4.2, к).

$$Q_{AB} = \frac{-0,046P \cdot l - (-0,046P \cdot l)}{l} = 0;$$

$$Q_{BC}^{лев} = \frac{0,225P \cdot l - (-0,0495P \cdot l)}{\frac{l}{2}} = 0,55 P; \quad Q_{BC}^{прав} = \frac{0 - 0,225P \cdot l}{\frac{l}{2}} = -0,45 P.$$

Вырезая узел B (рисунок 4.2, л), строим эпюру продольных сил N (рисунок 4.2, м):

$$\sum X = 0: \quad N_{BC} = 0;$$

$$\sum Y = 0: \quad -0,55 P - N_{BA} = 0; \quad N_{BA} = -0,55 P.$$

Проводим статическую проверку равновесия рамы (рисунок 4.2, н).

$$\sum Y = 0: \quad R_A - P + R_C = 0,55 P - P + 0,45 P = 0.$$

Для кинематической проверки строим единичную эпюру моментов в основной системе метода сил \overline{M}_2 (рисунок 4.2, о) и перемножаем ее с окончательной эпюрой M по правилу Верещагина:

$$\begin{aligned} \delta_2 &= \frac{\overline{M}_2 \cdot M}{E \cdot I} = \frac{Pl^3}{E \cdot I} \cdot \left(\left(\frac{1}{2} \cdot 0,225 P \cdot l \right) \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{2} \right) - \frac{l}{2 \cdot 6} (-2 \cdot 0,0495 P \cdot l \cdot l + \\ &+ 0,225 P \cdot l \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{2} - 0,0495 P \cdot l \cdot \frac{l}{2} + 0,225 P \cdot l \cdot l) - 0,046 P \cdot l \cdot l \cdot l = \\ &= \frac{(0,01875 + 0,027 - 0,046) \cdot Pl^3}{E \cdot I} \approx 0. \end{aligned}$$

Проверка полностью выполняется, следовательно, эпюры M , Q , N построены верно.

4.3 Задачи для самостоятельной подготовки

На рисунке 4.3 представлены задачи для самостоятельной подготовки.

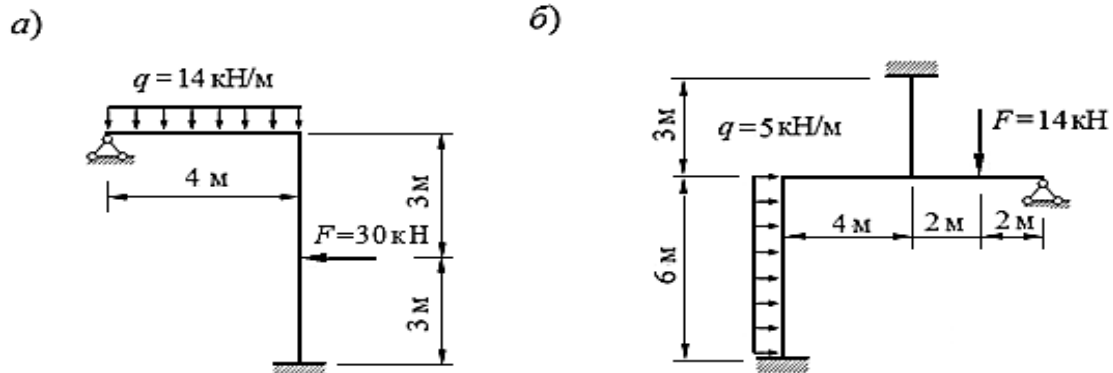


Рисунок 4.3 – К расчету статически неопределимой рамы

Список литературы

1 **Дарков, А. В.** Строительная механика: учебник / А. В. Дарков, Н. Н. Шапошников. – 12-е изд., стер. – Санкт-Петербург: Лань, 2016. – 656 с.: ил.

2 **Смирнов, В. А.** Строительная механика: учебник для вузов / В. А. Смирнов, А. С. Городецкий; под ред. В. А. Смирнова. – 2-е изд., перераб. и доп. – Москва: Юрайт, 2018. – 423 с.

3 **Шапошников, Н. Н.** Строительная механика: учебник / Н. Н. Шапошников, Р. Е. Кристалинский, А. В. Дарков; под общ. ред. Н. Н. Шапошникова. – 13-е изд., перераб. и доп. – Санкт-Петербург; Москва; Краснодар: Лань, 2017. – 692 с.: ил.

4 Строительная механика: методические рекомендации к самостоятельной работе для студентов специальностей 1-70 02 01 «Промышленное и гражданское строительство» и 1-70 03 01 «Автомобильные дороги» заочной формы обучения / Сост. В. А. Кемова, А. П. Прудников. – Могилев: Белорус.-Рос. ун-т, 2015. – 48 с.

Приложение А (справочное)

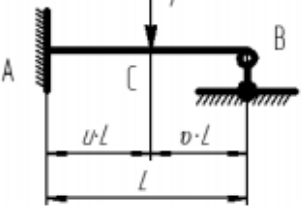
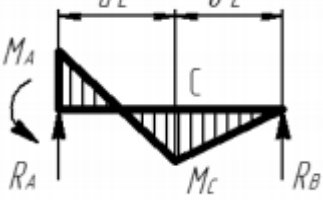
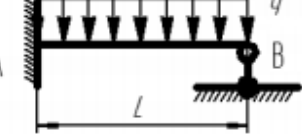





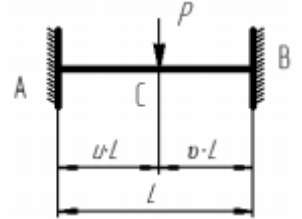
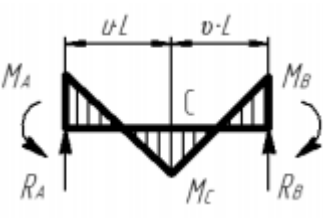
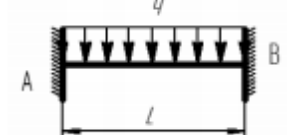





Номер схемы	Схема балки	Эпюра изгибающих моментов и реакция	Формула
1			$M_A = \frac{P \cdot L \cdot v}{2} \cdot (1 - v^2)$ $M_C = \frac{P \cdot L \cdot u^2 \cdot v}{2} \cdot (3 - u)$ $R_A = \frac{P \cdot v}{2} \cdot (3 - v^2); R_B = \frac{P \cdot u^2}{2} \cdot (3 - u)$
2			$M_A = \frac{q \cdot L^2}{8}$ $R_A = \frac{5}{8} \cdot q \cdot L; R_B = \frac{3}{8} \cdot q \cdot L$
3			$M_A = \frac{3 \cdot EI}{L}$ $R_A = R_B = \frac{3 \cdot EI}{L^2}$
4			$M_A = \frac{3 \cdot EI}{L^2}$ $R_A = R_B = \frac{3 \cdot EI}{L^3}$
5			$M_A = P \cdot L \cdot u \cdot v^2$ $M_B = P \cdot L \cdot u^2 \cdot v$ $M_C = 2 \cdot P \cdot L \cdot u^2 \cdot v^2$ $R_A = P \cdot v^2 \cdot (1 + 2 \cdot u)$ $R_B = P \cdot u^2 \cdot (1 + 2 \cdot v)$
6			$M_A = \frac{4 \cdot EI}{L}; M_B = \frac{2 \cdot EI}{L}$ $R_A = R_B = \frac{6 \cdot EI}{L^2}$
7			$M_A = \frac{4 \cdot EI}{L}; M_B = \frac{2 \cdot EI}{L}$ $R_A = R_B = \frac{6 \cdot EI}{L^2}$
8			$M_A = M_B = \frac{6 \cdot EI}{L^2}$ $R_A = R_B = \frac{12 \cdot EI}{L^3}$

Рисунок А.1 – Готовые решения метода перемещений