

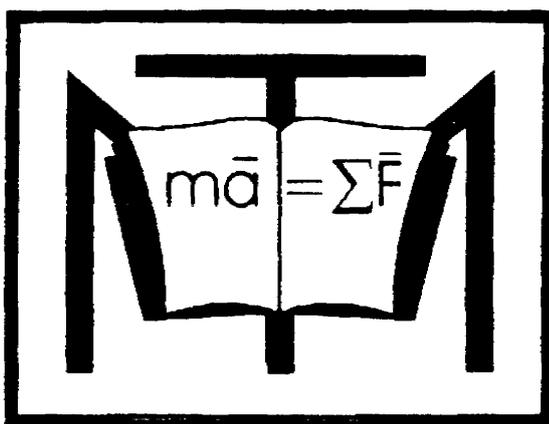
МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Механика»

МЕХАНИКА МАТЕРИАЛОВ

*Методические рекомендации к самостоятельной работе
для студентов специальностей*

*1-37 01 06 «Техническая эксплуатация автомобилей (по направлениям)»,
1-37 01 07 «Автосервис» заочной формы обучения*



Могилев 2020

УДК 539.3
ББК 30.121
М55

Рекомендовано к изданию
учебно-методическим отделом
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Механика» «16» марта 2020 г., протокол № 9

Составитель ст. преподаватель С. В. Гонорова

Рецензент канд. техн. наук, доц. А. Е. Науменко

Методические рекомендации составлены в соответствии с рабочими программами дисциплины «Механика материалов» для студентов специальностей 1-37 01 06 «Техническая эксплуатация автомобилей (по направлениям)», 1-37 01 07 «Автосервис» для студентов заочной формы обучения. Содержат материалы для самостоятельной работы.

Учебно-методическое издание

МЕХАНИКА МАТЕРИАЛОВ

Ответственный за выпуск	П. Н. Громыко
Корректор	Т. А. Рыжикова
Компьютерная верстка	Е. В. Ковалевская

Подписано в печать 01.06.2020. Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Печать трафаретная. Усл. печ. л. 1,86. Уч.-изд. л. 1,94. Тираж 86 экз. Заказ № 237.

Издатель и полиграфическое исполнение:
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования
«Белорусско-Российский университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/156 от 07.03.2019.
Пр-т Мира 43, 212022, Могилев.

© Белорусско-Российский
университет, 2020

Содержание

Введение.....	4
1 Прямой поперечный изгиб.....	5
1.1 Общие понятия и определения.....	5
1.2 Порядок построения эпюр поперечных сил и изгибающих моментов.....	8
1.3 Правила контроля построения эпюр Q и M	9
1.4 Расчеты на прочность при изгибе.....	10
1.5 Расчеты на прочность при прямом поперечном изгибе.....	11
1.6 Аудиторная контрольная работа № 1.....	16
2 Сложное сопротивление бруса. Совместное действие изгиба и кручения.....	17
2.1 Общие понятия и определения.....	17
2.2 Расчеты на прочность при совместном действии изгиба и кручения.....	21
2.3 Аудиторная контрольная работа № 2.....	27
Список литературы	29
Приложение А.....	30

Введение

Цель преподавания курса «Механика материалов» – получение теоретических знаний в объеме лекций по основам расчета на прочность, жесткость и устойчивость деталей и элементов конструкций.

Методические рекомендации содержат теоретические сведения по темам аудиторных контрольных работ, примеры решения задач и задания к аудиторным контрольным работам. Также приведены контрольные вопросы по теории.

1 Прямой поперечный изгиб

1.1 Общие понятия и определения

Изгиб – это такой вид деформаций, при котором происходит искривление первоначально прямой оси бруса (рисунок 1.1).

Брус, работающий преимущественно на изгиб, называют балкой. При расчете балку принято заменять осью, а все силы располагать в плоскости чертежа (см. рисунок 1.1).

Ось балки представляет собой прямую линию. Поперечное сечение балки образует секущей плоскостью, перпендикулярной оси бруса.

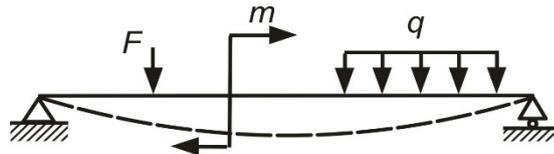


Рисунок 1.1 – Изгиб балки

Неподвижность балки под действием внешней нагрузки обеспечивается опорами. Опоры соединяют балку с основанием («землей»). Таким образом, можно отметить, что возникающие в опорах реакции и внешние нагрузки представляют собой уравновешенную систему внешних сил, действующих на балку.

Основные типы опор балок [1–4]:

– шарнирно-подвижная опора (рисунок 1.2, а), которая исключает вертикальное смещение опорного сечения относительно опорной плоскости, но не препятствует его повороту. В опоре возникает одна реакция R , вектор которой проходит перпендикулярно опорной плоскости. Закрепление с помощью такой опоры накладывает на балку одну связь;

– шарнирно-неподвижная опора (рисунок 1.2, б), которая исключает вертикальное и горизонтальное смещение опорного сечения, но не препятствует его повороту. Опорную реакцию можно разложить на вертикальную и горизонтальную составляющие R и H . Закрепление с помощью шарнирно неподвижной опоры накладывает на балку две связи;

– жесткая заделка или защемление (рисунок 1.2, в), которая препятствует линейным и угловым смещениям опорного сечения. В общем случае реакцию в такой опоре можно разложить на вертикальную R и горизонтальную H составляющие и опорный момент M . Данная опора накладывает на балку три связи.

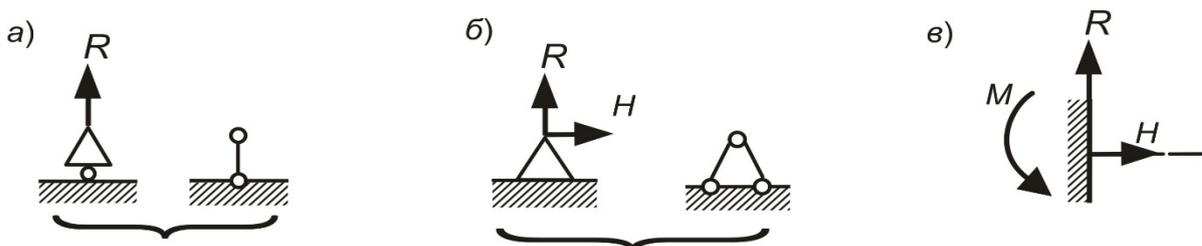


Рисунок 1.2 – Типы опор балок

По способу закрепления различают консольные балки (рисунок 1.3, *a*), двухопорные балки без консолей (рисунок 1.3, *б*) и консольные двухопорные балки (рисунок 1.3, *в*). Консоль – это свободный конец балки, расположенный за опорой. Участок между опорами балки называется пролетом.

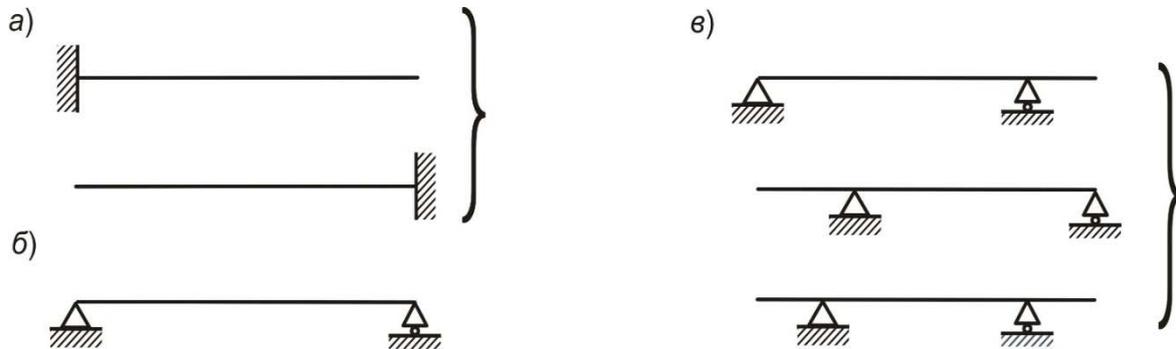


Рисунок 1.3 – Способы закрепления балок

Изгиб связан с возникновением в поперечных сечениях балки изгибающего момента M . Если плоскость действия изгибающего момента совпадает с одной из главных осей сечения, то изгиб называется прямым. Нагрузки при этом могут действовать как в вертикальной, так и в горизонтальной плоскости. Тогда изгибающий момент может быть обозначен M_x или M_y . В этом случае индекс x или y указывает на главную центральную ось сечения, относительно которой действует момент [1–4].

В случае, приведенном на рисунке 1.4, нагрузки действуют в вертикальной плоскости, соответственно, изгибающий момент возникает относительно оси x и будет обозначен как M_x .

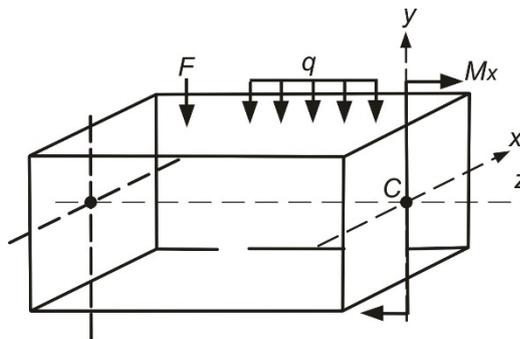


Рисунок 1.4 – Прямой изгиб балки

Изгиб называется чистым, если в поперечных сечениях бруса возникает только изгибающий момент M .

Изгиб называется поперечным, если в поперечных сечениях бруса возникают изгибающий момент M и поперечная сила Q .

Поперечная сила может быть обозначена Q_x и Q_y . Здесь также индекс x или y указывает на главную центральную ось сечения, относительно которой действует поперечная сила.

Так как при изучении данной темы будут рассматриваться балки, нагрузки к которым приложены в вертикальной плоскости, то в дальнейшем поперечную силу и изгибающий момент будем обозначать Q и M соответственно, без указания индекса.

Для определения внутренних усилий в балках используется метод сечений. Рассмотрим балку, работающую в условиях прямого поперечного изгиба. В произвольном сечении балки мысленно сделаем разрез на расстоянии z от незакрепленного сечения (рисунок 1.5, а).

Рассмотрим равновесие левой части (рисунок 1.5, б). Через центр тяжести сечения (точку C) проводим главные центральные оси сечения x и y . Взаимодействие частей балки заменим внутренними усилиями Q и M , которые приводим к центру тяжести сечения.

Для определения внутренних силовых факторов используем уравнения статики [1–4]:

$$\sum Y = 0; \quad -F + Q = 0; \quad Q = F; \quad \sum M_C = 0; \quad F \cdot z - M = 0; \quad M = F \cdot z. \quad (1.1)$$

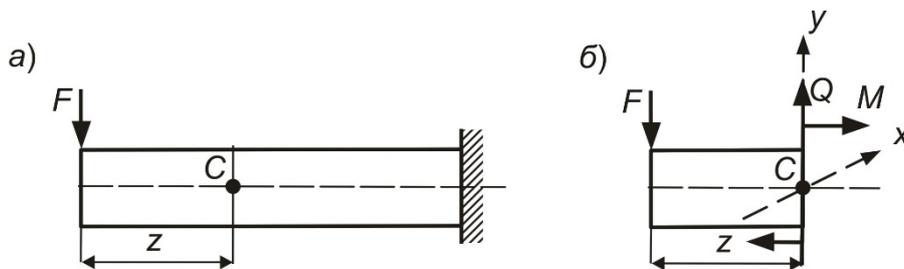


Рисунок 1.5 – Определение внутренних силовых факторов

Следовательно, в общем случае плоского действия сил на балку возникают поперечная сила и изгибающий момент. Величины указанных внутренних силовых факторов определяются на основании уравнений статики.

Тогда исходя из уравнений (1.1) можно сделать вывод:

а) поперечная сила Q в произвольном поперечном сечении балки численно равна алгебраической сумме проекций на нормаль к оси бруса всех сил, действующих по одну сторону от рассматриваемого сечения;

б) изгибающий момент M в произвольном поперечном сечении балки численно равен алгебраической сумме моментов от внешних сил, действующих по одну сторону от рассматриваемого сечения.

Необходимо отметить, что в уравнения для определения внутренних силовых факторов включаются не только заданные нагрузки, но и реакции, возникающие в опорах балки.

1.2 Порядок построения эпюр поперечных сил и изгибающих моментов

1 Вычертить заданную балку с указанием всех нагрузок и линейных размеров в численном виде.

2 Определить реакции опор. Для определения реакций опорные сечения можно обозначать латинскими буквами A и B . Чтобы рассчитать величины опорных реакций, необходимо использовать три уравнения статики:

$$\sum Y = 0; \quad \sum M_A = 0; \quad \sum M_B = 0. \quad (1.2)$$

3 Провести оси (нулевые линии) для построения эпюры поперечных сил (эпюры Q) и эпюры изгибающих моментов (эпюры M). Указанные оси (нулевые линии) представляют собой прямые линии, параллельные оси балки.

4 Разбить балку на участки, границами которых выступают характерные сечения, такие как:

- опорные сечения;
- сечения, в которых приложены сосредоточенные силы или моменты;
- сечения, ограничивающие действие равномерно распределенной нагрузки.

5 В пределах каждого выделенного участка провести произвольное поперечное сечение на некотором расстоянии от начала участка.

6 Записать в общем виде выражения для определения поперечных сил и изгибающих моментов для произвольного поперечного сечения каждого участка балки, используя дифференциальные зависимости [1–4]:

$$q = \frac{dQ}{dz}; \quad Q = \frac{dM}{dz}; \quad q = \frac{d^2M}{dz^2}. \quad (1.3)$$

При построении эпюр необходимо руководствоваться правилами знаков для определения поперечных сил и изгибающих моментов.

Поперечная сила считается положительной, если вектор внешней силы стремится вращать отсеченную часть балки по часовой стрелке относительно рассматриваемого сечения (рисунок 1.6, *а*).

Поперечная сила считается отрицательной, если вектор внешней силы стремится вращать отсеченную часть балки против часовой стрелки относительно рассматриваемого сечения (рисунок 1.6, *б*).

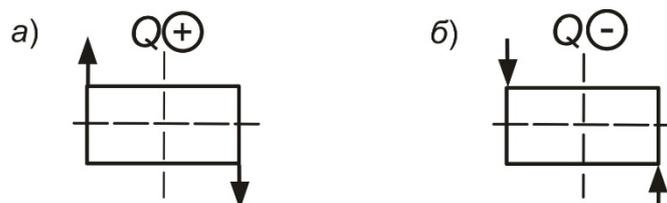


Рисунок 1.6 – Правило знаков для поперечной силы

Изгибающий момент считается положительным, если момент от внешней нагрузки сжимает верхние волокна балки (рисунок 1.7, а). Балка при этом изгибается выпуклостью вниз.

Изгибающий момент считается отрицательным, если момент от внешней нагрузки сжимает нижние волокна балки (рисунок 1.7, б). Балка при этом изгибается выпуклостью вверх.

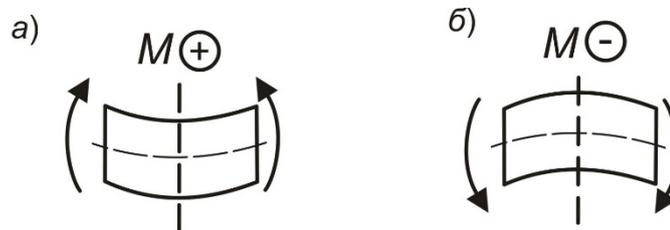


Рисунок 1.7 – Правило знаков для изгибающего момента

7 С помощью полученных выражений определить величины внутренних силовых факторов в характерных сечениях. Значения внутренних силовых факторов (ординаты эпюры) откладывают перпендикулярно оси эпюры (нулевой линии). Положительные значения ординат на эпюре поперечных сил откладывают вверх от оси эпюры, а отрицательные значения – вниз.

При построении эпюры изгибающих моментов необходимо учитывать некоторые особенности.

Студентам машиностроительных специальностей следует строить эпюру изгибающих моментов со стороны сжатых волокон. Это значит, что положительные значения изгибающих моментов откладывают вверх от оси эпюры, а отрицательные – вниз.

Полученные точки соединяют линиями, замыкающими поле эпюры. В поле эпюры в кружке ставится знак рассматриваемого внутреннего силового фактора и наносится штриховка. Линии штриховки перпендикулярны оси балки.

1.3 Правила контроля построения эпюр M и Q

Следуя дифференциальным зависимостям (1.3), можно сформулировать основные правила контроля построения эпюр [1–4]:

- на участках с равномерно распределенной нагрузкой эпюра Q очерчивается прямой наклонной линией, а эпюра M – квадратной параболой. Если на участке с равномерно распределенной нагрузкой линия, очерчивающая эпюру, пересечет ось эпюры, то необходимо выполнить исследование на экстремум;

- в сечении, где приложена внешняя сосредоточенная сила, на эпюре Q наблюдается скачок на величину и в направлении действия внешней силы. Значение изгибающего момента в этом сечении не изменяется. Но линии, очерчивающие эпюру моментов на смежных участках, будут сопрягаться с изломом;

- в сечении, где приложен внешний сосредоточенный момент, на эпюре M будет наблюдаться скачок на величину и в направлении действия внешнего момента. На эпюре Q изменений не будет;

- если на концевой опоре или на консоли приложен внешний сосредоточенный момент, то изгибающий момент на опоре или консоли будет равен по величине внешнему моменту;
- если на консоли приложена внешняя сосредоточенная сила, то изгибающий момент на конце консоли будет равен нулю, а поперечная сила равна по величине внешней сосредоточенной силе;
- если на консоли приложена распределенная нагрузка, на конце консоли изгибающий момент и поперечная сила будут равны нулю.

1.4 Расчеты на прочность при изгибе

При прямом поперечном изгибе балки в ее поперечных сечениях возникают нормальные σ и касательные τ напряжения.

Оценка прочности балки производится по нормальным напряжениям, возникающим в опасном сечении. Если балка имеет постоянное поперечное сечение, опасным будет сечение, в котором возникает наибольший по абсолютной величине изгибающий момент M_{\max} .

Условие прочности при изгибе для опасного сечения будет иметь вид [1–4]:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} \leq [\sigma], \quad (1.4)$$

где W_x – осевой момент сопротивления поперечного сечения балки;
 $[\sigma]$ – допускаемое напряжение.

Осевой момент сопротивления поперечного сечения является геометрической характеристикой, которая определяет прочность сечения при изгибе. Величина осевого момента сопротивления зависит от формы и размеров поперечного сечения балки. Для стандартных профилей проката (уголков, швеллеров, двутавров) значения осевых моментов сопротивления приводятся в соответствующих таблицах стандартов. Если сечение балки представляет собой простую геометрическую фигуру (круг, квадрат и т. д), то эта величина определяется по специальным зависимостям (таблица А.1).

Исходя из условия прочности, можно решить три основные задачи.

1 Проверочная задача. Исходными данными к задаче являются расчетная схема балки с указанием численных значений внешних нагрузок, форма и размеры поперечного сечения, допускаемое напряжение. С помощью эпюры изгибающих моментов определяют величину M_{\max} , рассчитывают максимальное напряжение:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x}. \quad (1.5)$$

Полученное значение сравнивают с допускаемым напряжением. Прочность балки будет обеспечена в случае выполнения условия:

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma]. \quad (1.6)$$

Необходимо отметить, что допускается некоторое перенапряжение балки. Величина отклонения возникающего максимального напряжения от допускаемого значения может быть рассчитана по формуле

$$\delta = \frac{\sigma_{\max} - [\sigma]}{[\sigma]} \cdot 100 \% . \quad (1.7)$$

Полученное отклонение не должно превышать 5 %.

2 Проектировочная задача. Исходными данными к задаче являются расчетная схема балки с указанием численных значений внешних нагрузок, форма и соотношение размеров поперечного сечения балок, допускаемое напряжение. С помощью эпюры изгибающих моментов определяют величину M_{\max} . Считая, что максимальные напряжения в сечении равны по величине допускаемым напряжениям, из условия прочности рассчитывают величину осевого момента сопротивления поперечного сечения:

$$W_x \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]} . \quad (1.8)$$

3 Задача расчета грузоподъемности. Исходными данными к этой задаче являются: схема нагружения балки, форма и размеры поперечного сечения и допускаемое напряжение. Считая, что максимальные напряжения в сечении равны по величине допускаемым напряжениям, из условия прочности (1.4) рассчитывают величину изгибающего момента

$$M_{\max} \leq W_x \cdot [\sigma] . \quad (1.9)$$

1.5 Расчеты на прочность при прямом поперечном изгибе

Пример 1 – Проверить прочность балки, изображенной на рисунке 1.8. Допускаемое напряжение $[\sigma] = 160$ МПа.

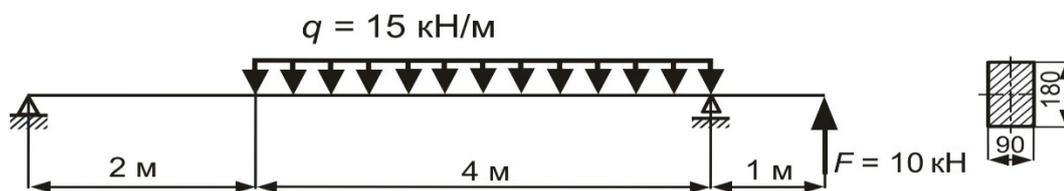


Рисунок 1.8 – Исходные данные к примеру 1

Решение

Определим опорные реакции заданной балки (рисунок 1.9, а):

$$\sum M_B = 0; \quad -R_A \cdot 6 + 15 \cdot 4 \cdot 2 + 10 \cdot 1 = 0; \quad R_A = \frac{15 \cdot 4 \cdot 2 + 10 \cdot 1}{6} = 21,67 \text{ кН};$$

$$\sum M_A = 0; R_B \cdot 6 - 15 \cdot 4 \cdot 4 + 10 \cdot 7 = 0; R_B = \frac{15 \cdot 4 \cdot 4 + 10 \cdot 7}{6} = 28,33 \text{ кН.}$$

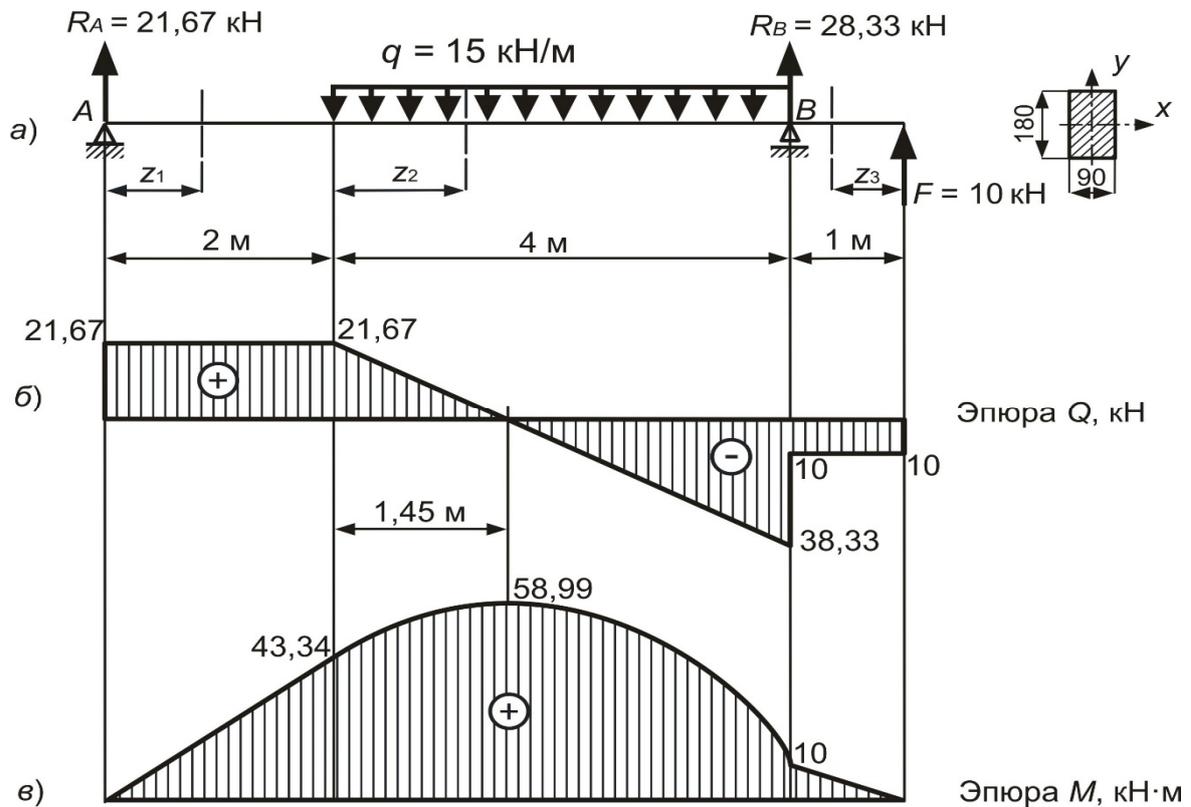


Рисунок 1.9 – Построение эюр поперечных сил и изгибающих моментов

Проверка правильности расчета реакций из условия:

$$\sum Y = 0; 21,67 - 15 \cdot 4 + 28,33 + 10 = 0.$$

Разбиваем балку на три участка. Используя метод сечений, для каждого из участков записываем выражения для определения поперечной силы Q и изгибающего момента M . При составлении этих выражений учитываем правила знаков поперечных сил (см. рисунок 1.6) и изгибающих моментов (см. рисунок 1.7). Расчет значений поперечных сил и изгибающих моментов выполняем для характерных сечений балки.

Участок 1: $0 \leq z_1 \leq 2$ м.

$$Q_1 = 21,67 \text{ кН}; M_1 = 11 \cdot z_1;$$

$$z_1 = 0; M_1 = 0;$$

$$z_1 = 2 \text{ м}; M_1 = 43,34 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

Участок 2: $0 \leq z_2 \leq 4$ м.

$$Q_2 = 21,67 - 15 \cdot z_2; \quad M_2 = 11 \cdot (2 + z_2) - 15 \cdot \frac{z_2^2}{2};$$

$$z_2 = 0; \quad Q_2 = 21,67 \text{ кН}; \quad M_2 = 43,34 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$z_2 = 4 \text{ м}; \quad Q_2 = -38,33 \text{ кН}; \quad M_2 = 10 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Экстремум: $Q_2 = 21,67 - 15 \cdot z_2 = 0$; $z_2 = \frac{21,67}{15} = 1,45$ м; $M_2 = 58,99$ кН·м.

Участок 3: $0 \leq z_3 \leq 1$ м.

$$Q_3 = -10 \text{ кН}; \quad M_3 = 10 \cdot z_3;$$

$$z_3 = 0; \quad M_3 = 0;$$

$$z_3 = 1 \text{ м}; \quad M_3 = 10 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

По полученным результатам строим эпюры поперечных сил Q и изгибающих моментов M (рисунок 1.9, б, в).

Из эпюры изгибающих моментов определим опасное сечение, в котором $M_{\max} = 58,99$ кН·м (см. рисунок 1.9, б).

Осейвой момент заданного прямоугольного сечения (см. таблицу А.1)

$$W_x = \frac{b \cdot h^2}{6} = \frac{9 \cdot 18^2}{6} = 486 \text{ см}^3.$$

Тогда условие прочности (1.4) имеет вид:

$$\sigma_{\max} = \frac{58,99 \cdot 10^3}{468 \cdot 10^{-6}} = 0,121 \cdot 10^9 \text{ Па} = 121 \text{ МПа} < [\sigma] = 160 \text{ МПа}.$$

Условие выполнено. Прочность обеспечена.

Пример 2 – Для балки, изображенной на рисунке 1.10, определить размеры поперечного сечения. Допускаемое напряжение $[\sigma] = 160$ МПа.

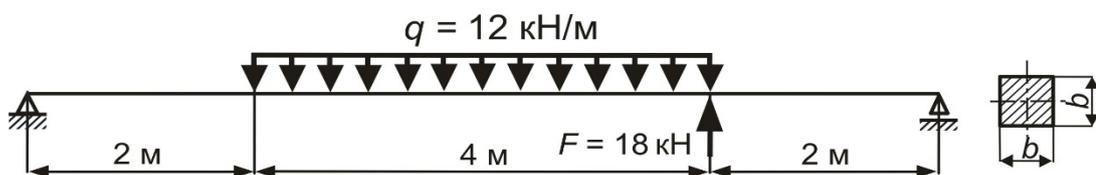


Рисунок 1.10 – Исходные данные к примеру 2

Решение

Определим опорные реакции заданной балки (рисунок 1.11, а):

$$\sum M_B = 0; -R_A \cdot 6 + 12 \cdot 4 \cdot 4 - 18 \cdot 2 = 0; R_A = \frac{12 \cdot 4 \cdot 4 + 18 \cdot 2}{6} = 19,5 \text{ кН};$$

$$\sum M_A = 0; R_B \cdot 8 - 12 \cdot 4 \cdot 4 + 18 \cdot 6 = 0; R_B = \frac{12 \cdot 4 \cdot 4 - 18 \cdot 6}{8} = 10,5 \text{ кН}.$$

Проверка правильности расчета реакций из условия:

$$\sum Y = 0; 19,5 - 12 \cdot 4 + 18 + 10,5 = 0.$$

Разбиваем балку на три участка. Используя метод сечений, для каждого из участков записываем выражения для определения поперечной силы Q и изгибающего момента M с учетом правил знаков. Расчет значений поперечных сил и изгибающих моментов выполняем для характерных сечений балки.

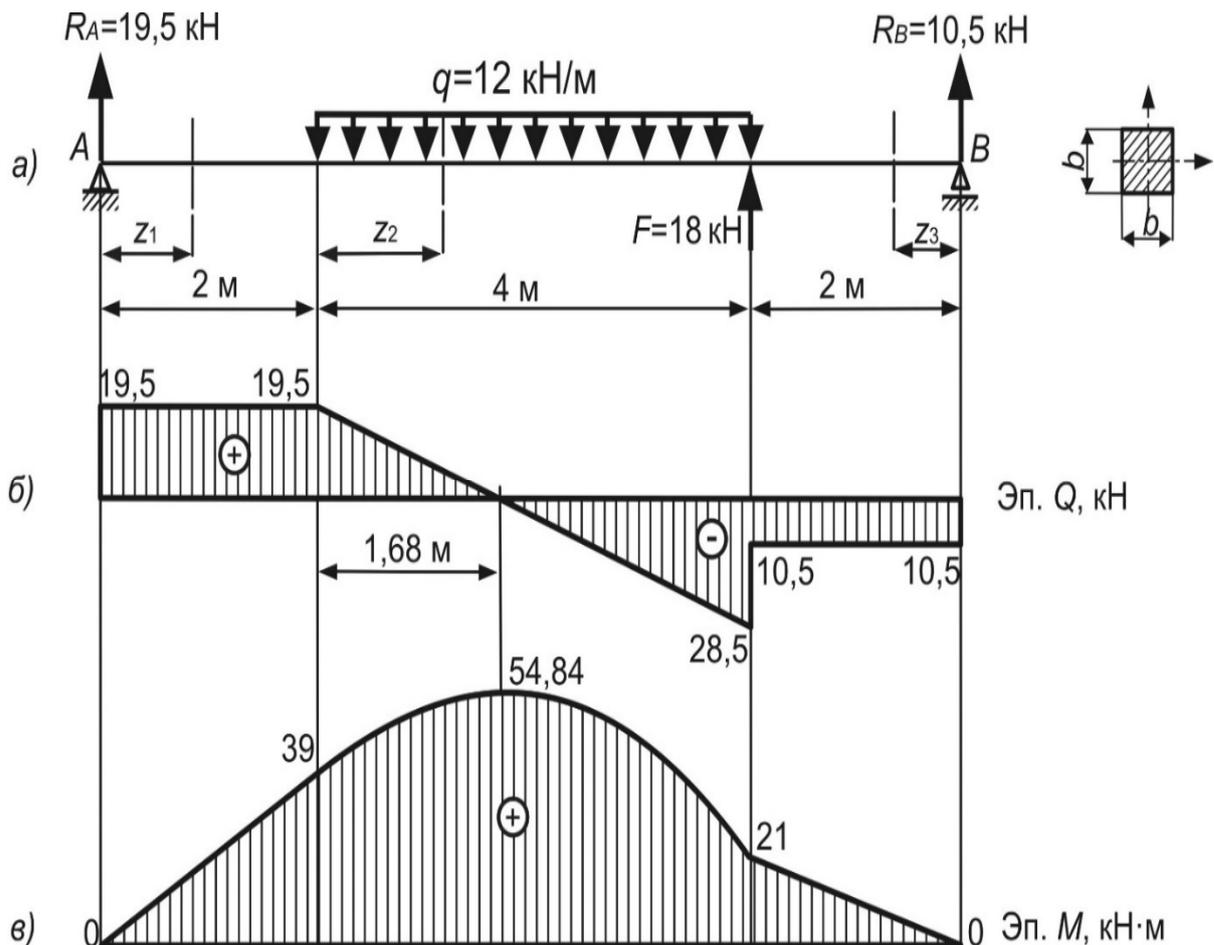


Рисунок 1.11 – Построение эпюр поперечных сил и изгибающих моментов

Участок 1: $0 \leq z_1 \leq 2$ м.

$$Q_1 = 19,5 \text{ кН}; M_1 = 19,5 \cdot z_1;$$

$$z_1 = 0; M_1 = 0;$$

$$z_1 = 2 \text{ м}; M_1 = 39 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Участок 2: $0 \leq z_2 \leq 4$ м.

$$Q_2 = 19,5 - 12 \cdot z_2; M_2 = 19,5 \cdot (2 + z_2) - 12 \cdot \frac{z_2^2}{2};$$

$$z_2 = 0; Q_2 = 19,5 \text{ кН}; M_2 = 39 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$z_2 = 4 \text{ м}; Q_2 = -28,5 \text{ кН}; M_2 = 21 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

$$\text{Экстремум: } Q_2 = 19,5 - 12 \cdot z_2 = 0;$$

$$z_2 = \frac{19,5}{12} = 1,68 \text{ м}; M_2 = 54,84 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Участок 3: $0 \leq z_3 \leq 2$ м.

$$Q_3 = -10,5 \text{ кН}; M_3 = 10,5 \cdot z_3;$$

$$z_3 = 0; M_3 = 0;$$

$$z_3 = 2 \text{ м}; M_3 = 21 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

По полученным результатам строим эпюры поперечных сил Q и изгибающих моментов M (рисунок 1.11, б, в).

Из эпюры изгибающих моментов определим опасное сечение, в котором $M_{\max} = 54,84 \text{ кН}\cdot\text{м}$ (см. рисунок 1.1, б).

Расчетный момент сопротивления определяется по формуле (1.8):

$$W_x \geq \frac{54,84 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 0,343 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 343 \text{ см}^3.$$

Осей момент сопротивления квадратного сечения определяется в соответствии с таблицей А.1:

$$W_x = \frac{b^3}{6} = 343 \text{ см}^3.$$

Тогда расчетная длина стороны квадрата

$$b = \sqrt[3]{343 \cdot 6} = 12,7 \text{ см}.$$

Контрольные вопросы

- 1 Какие внутренние силовые факторы возникают в поперечном сечении балки при изгибе?
- 2 Какое правило знаков принято для поперечной силы?
- 3 Какое правило знаков принято для изгибающего момента?
- 4 Как вычисляется поперечная сила в произвольном сечении балки?
- 5 Как вычисляется изгибающий момент в произвольном сечении балки?
- 6 Какой вид деформаций называется изгибом?
- 7 В каком случае имеет место прямой изгиб?
- 8 Какие внутренние силовые факторы возникают при чистом изгибе?
- 9 Какие внутренние силовые факторы возникают при поперечном изгибе?
- 10 Какие напряжения возникают при чистом изгибе?
- 11 Какие напряжения возникают при поперечном изгибе?
- 12 Запишите условие прочности по нормальным напряжениям.
- 13 Как выбирается опасное сечение для проверки прочности по нормальным напряжениям?
- 14 Сформулируйте задачи, решаемые с использованием условия прочности по нормальным напряжениям.

1.6 Аудиторная контрольная работа № 1

Для заданной стальной балки (рисунок 1.12), требуется:

- определить реакции опор;
 - записать выражения для определения поперечной силы и изгибающего момента на каждом участке;
 - построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов;
 - найти максимальный изгибающий момент и размеры поперечного сечения при заданном допуске напряжении $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$.
- Данные взять из таблицы 1.1.

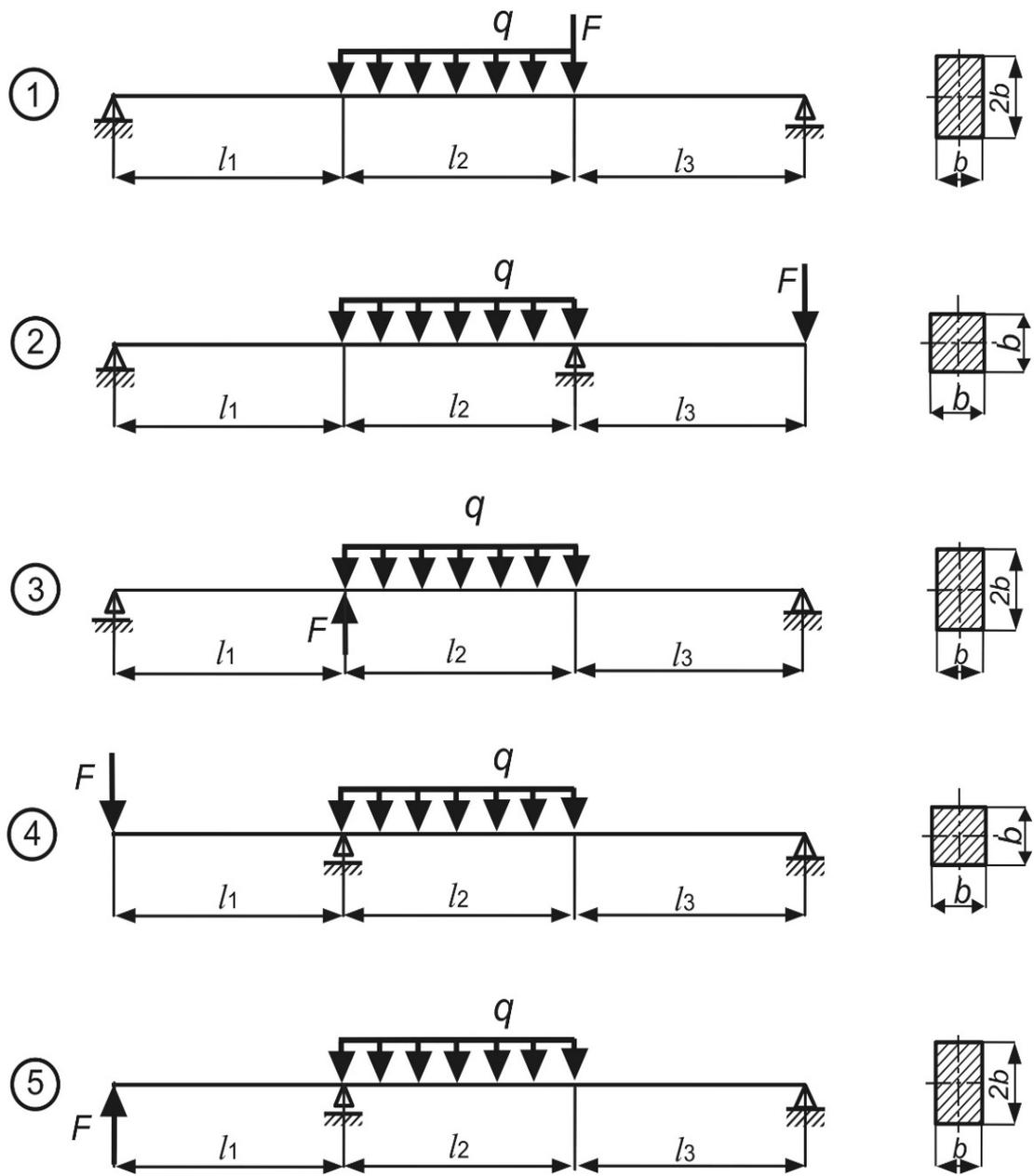


Рисунок 1.12 – Схемы для аудиторной контрольной работы № 1

Таблица 1.1 – Исходные данные к аудиторной контрольной работе № 1

Номер строки	Номер варианта схемы балки по рисунку 1.12	$l_1, \text{ м}$	$l_2, \text{ м}$	$l_3, \text{ м}$	$F, \text{ кН}$	$q, \text{ кН/м}$
1	1	1	4	2	12	6
2	2	0,5	2	1	6	14
3	3	2	5	1	11	7
4	4	1,5	4	1	8	12
5	5	1	3,5	1,5	20	2
6	1	1,5	4	1	4	16
7	2	2	3,5	1,5	14	3
8	3	1	4	1,5	5	18
9	4	1,5	3	1	15	4
0	5	1	3	1	5	15
	в	а			б	в

Примечание – Для выбора исходных данных осуществляется по трем последним цифрам номера зачетной книжки. Первые буквы русского алфавита, располагают под указанными цифрами, то есть: 0 9 4 2 5 0
а б в

Так как столбец обозначен буквой «в», то по номеру строки «0» берем расчетную схему под номером 5 (рисунок 1.12). Из столбца «а» по номеру строки $l_1 = 0,5\text{ м}$, $l_2 = 2\text{ м}$, $l_3 = 1\text{ м}$, из столбца «б» по номеру строки «5» $F = 20\text{ кН}$, , из столбца «в» по номеру строки «0» $q = 15\text{ кН/м}$

2 Сложное сопротивление бруса. Совместное действие изгиба и кручения

2.1 Общие понятия и определения

Совместное действие изгиба и кручения является одним из видов сложного сопротивления. Этот вид нагружения распространен в технике [1–4]: валы редукторов, коробок скоростей, коробок передач, валы приводов конвейеров и т. д.

Силы, действующие на вал (собственный вес вала и вес колес, давление на зубья шестерен, натяжение ремней шкивов и т. п.), вызывают в его поперечном сечении возникновение внутренних силовых факторов (ВСФ): $M_{кр}$, M_x , M_y , Q_x , Q_y . Действием поперечных сил Q_x , Q_y , как правило, пренебрегают. В практических расчетах действие крутящих моментов $M_{кр}$ и изгибающих моментов M_x и M_y рассматривают по отдельности с последующим суммированием результата по соответствующим теориям прочности.

Передаваемая валом мощность N является работой внешнего скручивающего момента m [1–4] и определяется по формуле

$$N = m \cdot \omega = m \cdot \frac{\pi \cdot n}{30}, \quad (2.1)$$

где n – частота вращения вала, об/мин;
 ω – угловая скорость, с^{-1} .

Соответственно, внешний скручивающий момент можно найти по формуле

$$m = \frac{N}{\omega} = \frac{N \cdot 30}{\pi \cdot n}. \quad (2.2)$$

Основными изгибающими силами являются окружные усилия на зубьях шестерен F и усилия натяжения ветвей ременной передачи на шкивах. Приведение изгибающих усилий к центру тяжести вала диаметром d в том его сечении, где располагается шкив, показано на рисунке 2.1, а, в том сечении, где располагается шестерня – на рисунке 2.1, б. Окружное усилие на зубчатом колесе средним диаметром D рассчитывают по формуле

$$F = \frac{2 \cdot m}{D}. \quad (2.3)$$

Изгибающую силу на шкиве диаметром D при отношении усилий ременной передачи $2t$ и t находят по формуле

$$F = 2 \cdot t + t = 3 \cdot \frac{2 \cdot m}{D}, \quad (2.4)$$

где t – усилие натяжения на ведомой ветви ременной передачи.

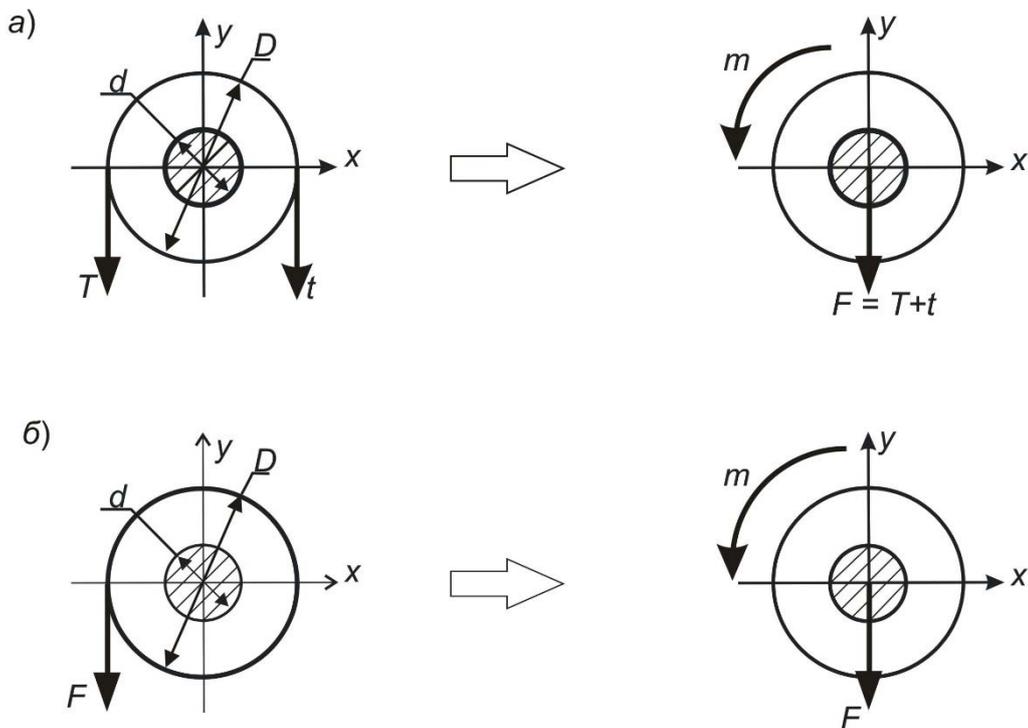


Рисунок 2.1 – К определению изгибающих усилий

Расчет вала на прочность ведется в опасном сечении, которое определяется по эюграм крутящих и изгибающих моментов при их наиболее неблагоприятном сочетании. Для примера рассмотрим вал, на который действуют скручивающий момент m и изгибающая сила F (рисунок 2.2).

Опасным будет являться сечение, примыкающее к заделке, и опасными точками в нем – точки C и B , в которых достигаются максимальные значения нормальных напряжений σ_{\max} от изгибающего момента и максимальные значения касательных напряжений τ_{\max} от крутящего момента [1–4]:

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W_x}; \quad (2.5)$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_k}{W_\rho}, \quad (2.6)$$

где W_x – осевой момент сопротивления поперечного сечения вала;
 W_ρ – полярный момент сопротивления поперечного сечения вала.

В точках C и B материал вала находится в плоском напряженном состоянии.

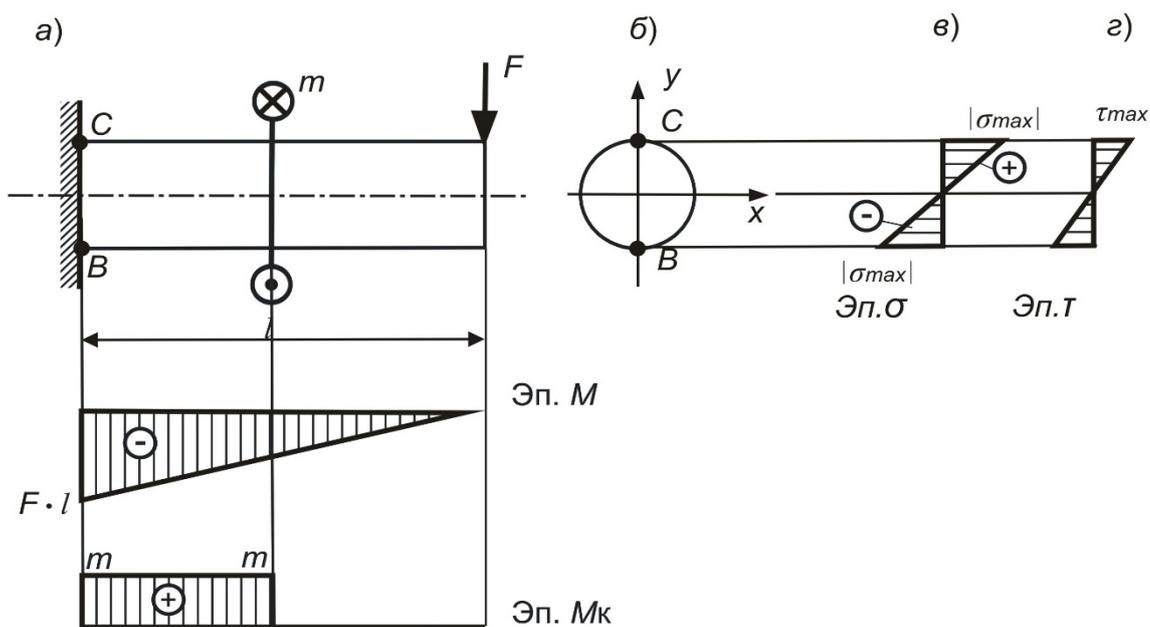


Рисунок 2.2 – К определению напряжений

Валы изготавливаются из стали, поэтому их расчет рекомендуется проводить по третьей или четвертой теориям прочности:

$$\sigma_{\text{экв}}^{\text{III}} = \sqrt{\sigma_{\max}^2 + 4 \cdot \tau_{\max}^2} \leq [\sigma]; \quad (2.7)$$

$$\sigma_{\text{экв}}^{\text{IV}} = \sqrt{\sigma_{\max}^2 + 3 \cdot \tau_{\max}^2} \leq [\sigma]. \quad (2.8)$$

Для вала круглого поперечного сечения осевой и полярный моменты сопротивления определяются по формулам:

$$W_x = W_y = \frac{\pi \cdot d^3}{32}; \quad (2.9)$$

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16} = 2 \cdot W_x. \quad (2.10)$$

Подставляя в теории прочности (2.7) и (2.8) вместо σ_{\max} и τ_{\max} их значения, выраженные через осевой момент сопротивления W_x , получим следующее условие прочности для расчета вала при совместном действии изгиба и кручения:

$$\sigma_{\text{экв}} = \frac{M_{\text{экв}}}{W_x} \leq [\sigma], \quad (2.11)$$

где $M_{\text{экв}}$ – эквивалентный момент, равный, соответственно, по третьей и четвертой теориям прочности [1-4]:

$$M_{\text{экв}}^{\text{III}} = \sqrt{M^2 + M_k^2}; \quad (2.12)$$

$$M_{\text{экв}}^{\text{IV}} = \sqrt{M^2 + 0,75 \cdot M_k^2}. \quad (2.13)$$

Изгибающие силы, действующие в разных плоскостях, раскладывают на вертикальную и горизонтальную составляющие. Затем показывают отдельно схему изгиба вала от всех вертикальных сил и схему изгиба вала от всех горизонтальных сил. В каждой схеме изгиба определяют реакции на опорах. Под каждой схемой строится эпюра изгибающих моментов, причем вертикальные силы создают момент M_x , а горизонтальные – момент M_y . Так как у брусьев круглого поперечного сечения кривой изгиб невозможен, то поперечное сечение вала будет испытывать прямой изгиб под действием полного изгибающего момента [1-4]:

$$M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}, \quad (2.14)$$

где M_x и M_y – изгибающие моменты в вертикальной и горизонтальной плоскостях соответственно.

По результатам расчета полного (суммарного) изгибающего момента в характерных точках вала строится эпюра M , которая характеризует только величину момента. Плоскости действия полных изгибающих моментов в различных сечениях вала различны, но на эпюре все ординаты условно расположены в плоскости чертежа. Эпюра крутящих моментов M_k строится так же, как и при чистом кручении.

Для вала постоянного поперечного сечения при помощи эпюр M_k и M

определяют опасное сечение, в котором наиболее неблагоприятно сложились крутящий и изгибающий моменты [1–4].

Проверку прочности производят по формуле (2.11).

Проектировочный расчет позволяет определить диаметр вала:

$$\sigma_{\text{экв}} = \frac{M_{\text{экв}}}{W_x} = \frac{M_{\text{экв}} \cdot 32}{\pi \cdot d^3} \leq [\sigma];$$

$$d^3 = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot M_{\text{экв}}}{\pi \cdot [\sigma]}}. \quad (2.15)$$

2.2 Расчеты на прочность при совместном действии изгиба и кручения

Пример 1 – Вал круглого сплошного поперечного сечения (рисунок 2.3, а) передает мощность $N = 40$ кВт, вращаясь с угловой скоростью $\omega = 100$ рад/с. На валу установлены шестерни с средним диаметром $D_1 = 0,15$ м и $D_2 = 0,35$ м. Определить диаметр вала по четвертой теории прочности, если $[\sigma] = 70$ МПа.

Решение

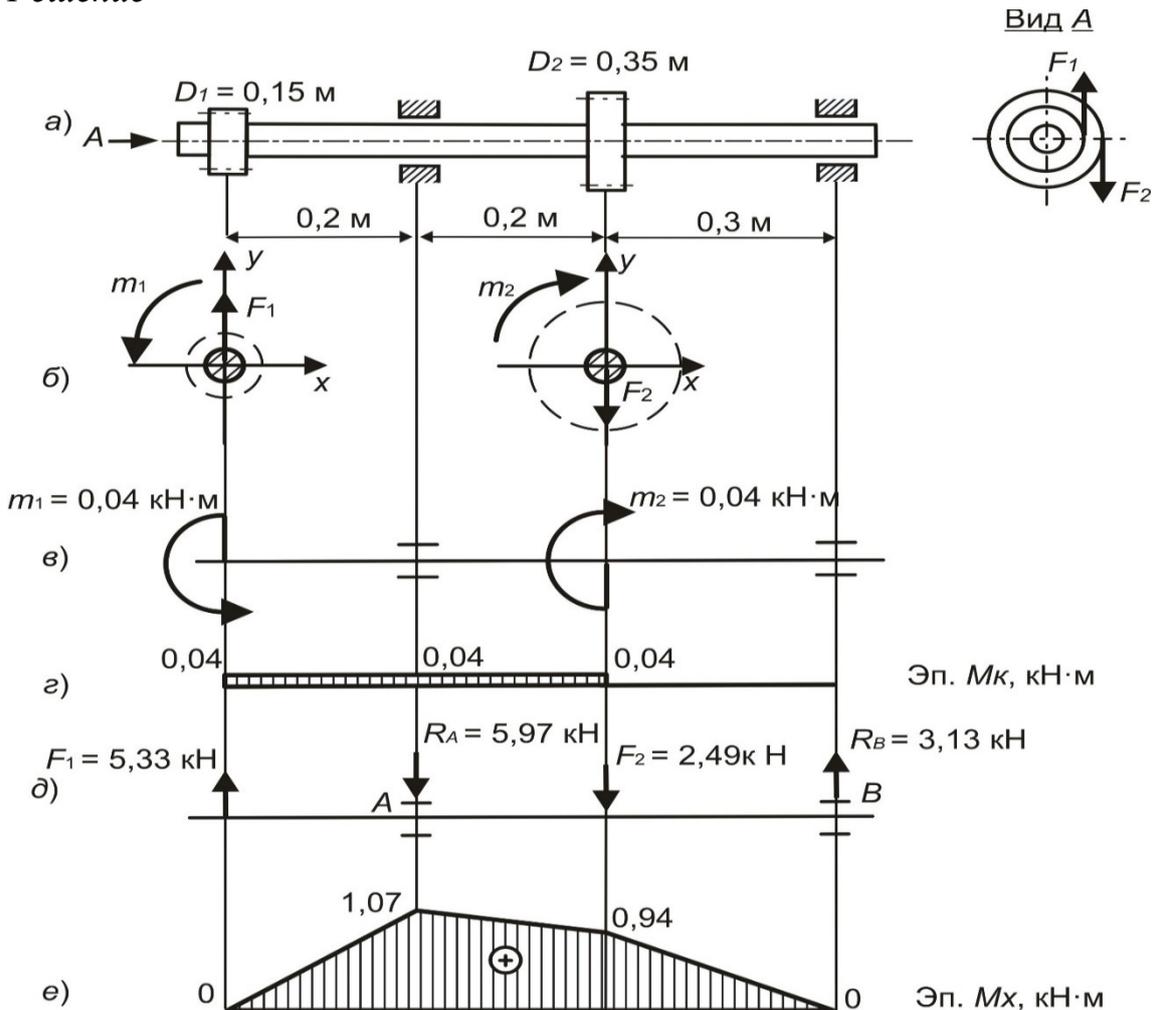


Рисунок 2.3 – Расчетная схема вала к примеру 1

Приводим действующие нагрузки к центру тяжести вала (рисунок 2.3, б).
Определим внешние моменты на шкиве и шестерне из формулы 2.2:

$$m_1 = m_2 = \frac{N}{\omega} = \frac{40}{100} = 0,4 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Составим схему действия на вал внешних моментов (рисунок 2.3, в).
Построение эпюры крутящих моментов (рисунок 2.3, з) [1–4].

Участок 1: $0 \leq z_1 \leq 0,2 \text{ м}$. $M_K = 0,4 \text{ кН}\cdot\text{м}$.

Участок 2: $0 \leq z_2 \leq 0,2 \text{ м}$. $M_K = 0,4 \text{ кН}\cdot\text{м}$.

Участок 3: $0 \leq z_3 \leq 0,3 \text{ м}$. $M_K = 0,4 - 0,4 = 0$.

Определим внешние силы, изгибающие вал со стороны шестерен, используя формулу (2.3):

$$F_1 = \frac{2 \cdot m_1}{D_1} = \frac{2 \cdot 0,4}{0,15} = 5,33 \text{ кН};$$

$$F_2 = \frac{2 \cdot m_2}{D_2} = \frac{2 \cdot 0,4}{0,35} = 2,29 \text{ кН}.$$

Составим схему действия на вал сил в вертикальной плоскости (рисунок 2.3, д).
Определим реакции опор:

$$\Sigma M_A = -R_B \cdot 0,2 - 2,49 \cdot 0,2 - 5,33 \cdot 0,2 = 0; \quad R_B = 3,13 \text{ кН}.$$

$$\Sigma M_B = R_A \cdot 0,5 + 2,49 \cdot 0,3 - 5,33 \cdot 0,7 = 0; \quad R_A = 5,97 \text{ кН}.$$

Проверим расчет реакций:

$$\Sigma Y = F_1 - R_A - F_2 + R_B = 5,33 - 5,97 - 2,49 + 3,13 = 0.$$

Построение эпюры изгибающих моментов от сил в вертикальной плоскости (рисунок 2.3, е). Вал разбиваем на три участка, при составлении выражений для определения изгибающего момента используем правило знаков (см. рисунок 1.7).

Участок 1: $0 \leq z_1 \leq 0,2 \text{ м}$.

$$M_x = 5,33 \cdot z_1;$$

$$z_1 = 0; M_X = 0;$$

$$z_1 = 0,2 \text{ м}; M_X = 1,07 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Участок 2: $0 \leq z_2 \leq 0,2 \text{ м}$.

$$M_X = 5,33 \cdot (0,2 + z_2) - 5,97 \cdot z_2;$$

$$z_2 = 0; M_X = 1,07 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$z_2 = 0,2 \text{ м}; M_X = 0,94 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Участок 3: $0 \leq z_3 \leq 0,1 \text{ м}$.

$$M_X = 3,13 \cdot z_3;$$

$$z_3 = 0; M_X = 0;$$

$$z_3 = 0,3 \text{ м}; M_Y = 0,94 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

По эпюре суммарных изгибающих моментов M и эпюре крутящих моментов M_K определим опасное сечение. В этом сечении действуют наибольший изгибающий момент $M_X = 1,07 \text{ кН} \cdot \text{м}$ и наибольший крутящий момент $M_K = 0,4 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

Эквивалентный момент по четвертой теории прочности в опасном сечении (формула (2.13)):

$$M_{\text{экв}}^{\text{IV}} = \sqrt{M^2 + 0,75 \cdot M_K^2} = \sqrt{1,07^2 + 0,75 \cdot 0,4^2} = 1,13 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Расчетное значение диаметра вала из условия прочности по формуле (2.15):

$$d = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot M_{\text{экв}}^{\text{IV}}}{\pi \cdot [\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 1,13 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 70 \cdot 10^6}} = 0,055 \text{ м} = 55 \text{ мм}.$$

Пример 2 – Вал круглого сплошного поперечного сечения (рисунок 2.4, а) передает мощность $N = 6 \text{ кВт}$, вращаясь с угловой скоростью $\omega = 31,4 \text{ рад/с}$. На валу установлены шкив диаметром $D_1 = 0,4 \text{ м}$ и шестерня, средний диаметр которой $D_2 = 0,24 \text{ м}$. Определить диаметр вала по третьей теории прочности, если $[\sigma] = 80 \text{ МПа}$.

Решение

Приводим действующие нагрузки к центру тяжести вала (рисунок 2.4, б). Определим внешние моменты на шкиве и шестерне по формуле (2.2):

$$m_1 = m_2 = \frac{N}{\omega} = \frac{6}{31,4} = 0,191 \text{ кН}\cdot\text{м.}$$

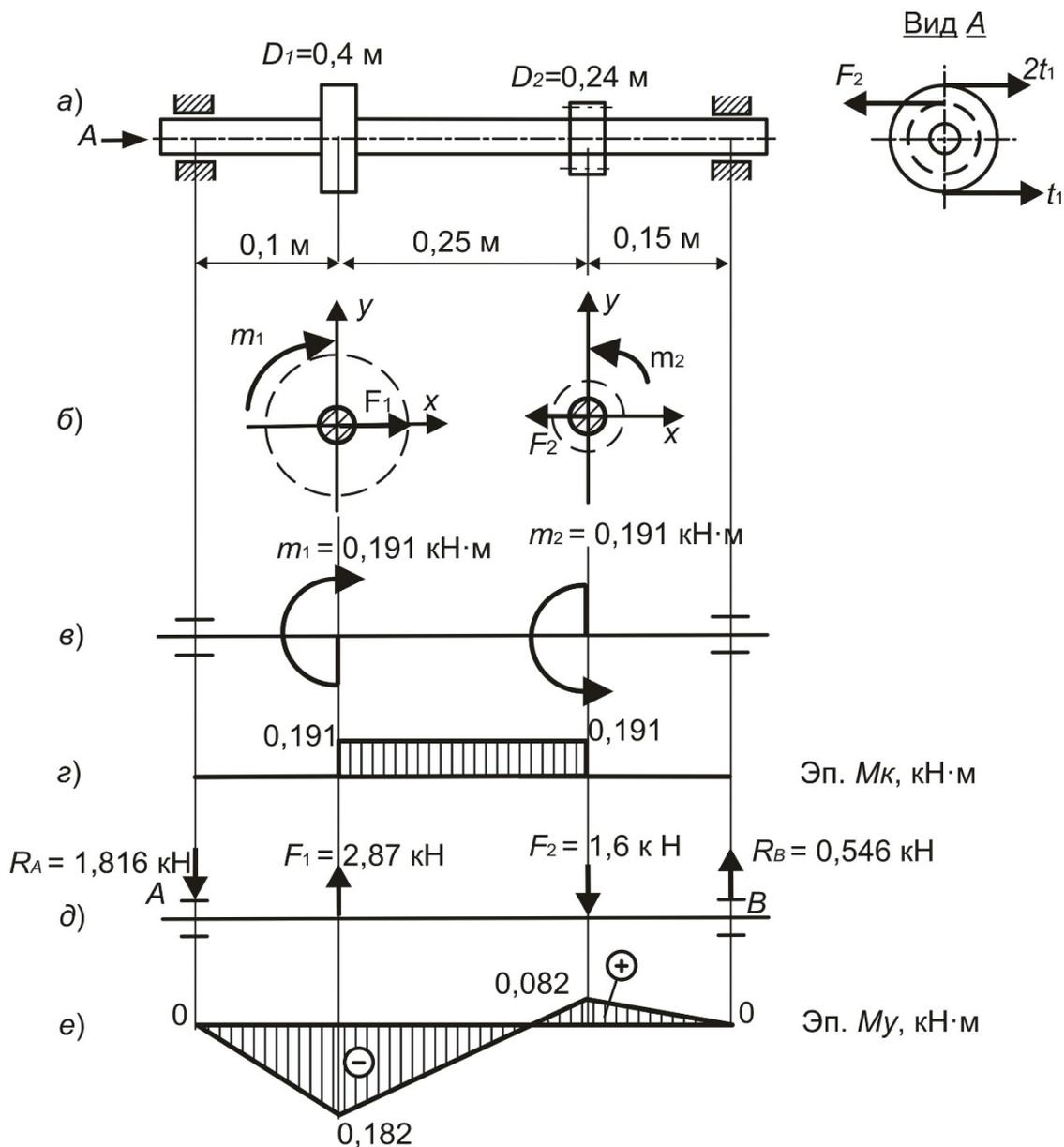


Рисунок 2.4 – Расчетная схема вала к примеру 2

Рассчитаем внешние силы, изгибающие вал со стороны шкива и шестерни, используя формулы (2.3) и (2.4) соответственно:

$$F_1 = 3 \cdot t_1 = 3 \cdot \frac{2 \cdot m_1}{D_1} = 3 \cdot \frac{2 \cdot 0,91}{0,4} = 2,87 \text{ кН};$$

$$F_2 = \frac{2 \cdot m_2}{D_2} = \frac{2 \cdot 0,191}{0,24} = 1,6 \text{ кН.}$$

Составим схему действия на вал сил в горизонтальной плоскости (рисунок 2.4, *д*). Определим реакции опор:

$$\sum M_A = R_B \cdot 0,5 - 1,6 \cdot 0,35 + 2,87 \cdot 0,1 = 0; \quad R_B = 0,546 \text{ кН.}$$

$$\sum M_B = R_A \cdot 0,5 - 2,87 \cdot 0,4 + 1,6 \cdot 0,15 = 0; \quad R_A = 1,47 \text{ кН.}$$

Проверим расчет реакций:

$$\sum Y = -R_A + F_1 - F_2 + R_B = -1,826 + 2,87 - 1,6 + 0,546 = 0.$$

Построение эпюры изгибающих моментов от сил в горизонтальной плоскости (рисунок 2.4, *е*).

Участок 1: $0 \leq z_1 \leq 0,1 \text{ м.}$

$$M_Y = -1,816 \cdot z_1;$$

$$z_1 = 0; \quad M_Y = 0;$$

$$z_1 = 0,1 \text{ м}; \quad M_X = -0,182 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

Участок 2: $0 \leq z_2 \leq 0,25 \text{ м.}$

$$M_X = -1,816 \cdot (0,1 + z_2) + 2,87 \cdot z_2;$$

$$z_2 = 0; \quad M_X = -0,182 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$z_2 = 0,25 \text{ м}; \quad M_Y = 0,082 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

Участок 3: $0 \leq z_3 \leq 0,3 \text{ м.}$

$$M_X = 0,546 \cdot z_3;$$

$$z_3 = 0; \quad M_X = 0; \quad z_3 = 0,15 \text{ м}; \quad M_Y = 0,082 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

По эпюре изгибающих моментов M_Y и эпюре крутящих моментов M_K определим опасное сечение. В этом сечении действуют наибольший

изгибающий момент $M_X = 0,182 \text{ кН}\cdot\text{м}$ и наибольший крутящий момент $M_K = 0,191 \text{ кН}\cdot\text{м}$.

Эквивалентный момент по третьей теории прочности в опасном сечении (формула (2.13)):

$$M_{\text{экв}}^{\text{III}} = \sqrt{M^2 + M_K^2} = \sqrt{0,182^2 + 0,191^2} = 0,264 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Расчетное значение диаметра вала из условия прочности по формуле (2.15):

$$d = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot M_{\text{экв}}^{\text{III}}}{\pi \cdot [\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 0,264 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 80 \cdot 10^6}} = 0,032 \text{ м} = 32 \text{ мм}.$$

Контрольные вопросы

1 Какие внутренние силовые факторы возникают при совместном действии изгиба и кручения?

2 Как определяется внешний момент, если известна мощность, передаваемая колесом или шкивом?

3 Как определить усилие, изгибающее вал со стороны колеса (шестерни)?

4 Как определить усилие, изгибающее вал со стороны шкива?

5 Запишите формулу для определения полного (суммарного) изгибающего момента.

6 При помощи каких эпюр определяют опасное сечение вала?

7 Какие напряжения возникают в поперечном сечении вала при совместном действии изгиба и кручения?

8 Какие точки поперечного сечения являются опасными при совместном действии изгиба и кручения?

9 Запишите выражения для определения эквивалентного момента по третьей и четвертой теориям прочности.

10 Запишите условие прочности при совместном действии изгиба и кручения.

2.3 Аудиторная контрольная работа № 2

Вал круглого сплошного поперечного сечения передает мощность N , вращаясь с угловой скоростью ω . На валу установлены шкивы и шестерни. Определить диаметр вала d по заданной теории прочности, если $[\sigma] = 80$ МПа. Данные взять из таблицы 2.1.

Таблица 2.1 – Исходные данные к аудиторной контрольной работе № 2

Номер строки	Схема по рисунку 2.5	N , кВт	ω , рад/с	l_1 , м	l_2 , м	l_3 , м	D_1 , м	D_2 , м	Теория прочности
1	1	10	50	0,1	0,4	0,3	0,15	0,25	III
2	2	8	20	0,15	0,36	0,24	0,16	0,26	IV
3	3	12	60	0,2	0,25	0,35	0,17	0,27	III
4	4	9	30	0,1	0,22	0,48	0,18	0,28	IV
5	5	14	70	0,15	0,55	0,15	0,19	0,29	III
6	1	7	35	0,2	0,27	0,33	0,20	0,30	IV
7	2	16	80	0,1	0,32	0,38	0,21	0,31	III
8	3	6	0,2	0,15	0,28	0,32	0,22	0,32	IV
9	4	18	90	0,2	0,49	0,31	0,23	0,33	III
0	5	4	40	0,1	0,34	0,26	0,24	0,34	IV
	в	б		а		б	в	б	
<p><i>Примечание</i> – Выбор исходных данных осуществляется по трем последним цифрам номера зачетной книжки, т. е.</p> <p style="text-align: center;">0 9 4 2 5 0 а б в</p> <p>Например, для шифра 094250 выбираем следующие исходные данные: схема № 2, $N = 14$ кВт; $\omega = 70$ рад/с; $l_1 = 0,15$ м; $l_2 = 0,36$ м; $l_3 = 0,24$ м; $D_1 = 0,19$ м; $D_2 = 0,34$ м, использовать третью теорию прочности.</p>									

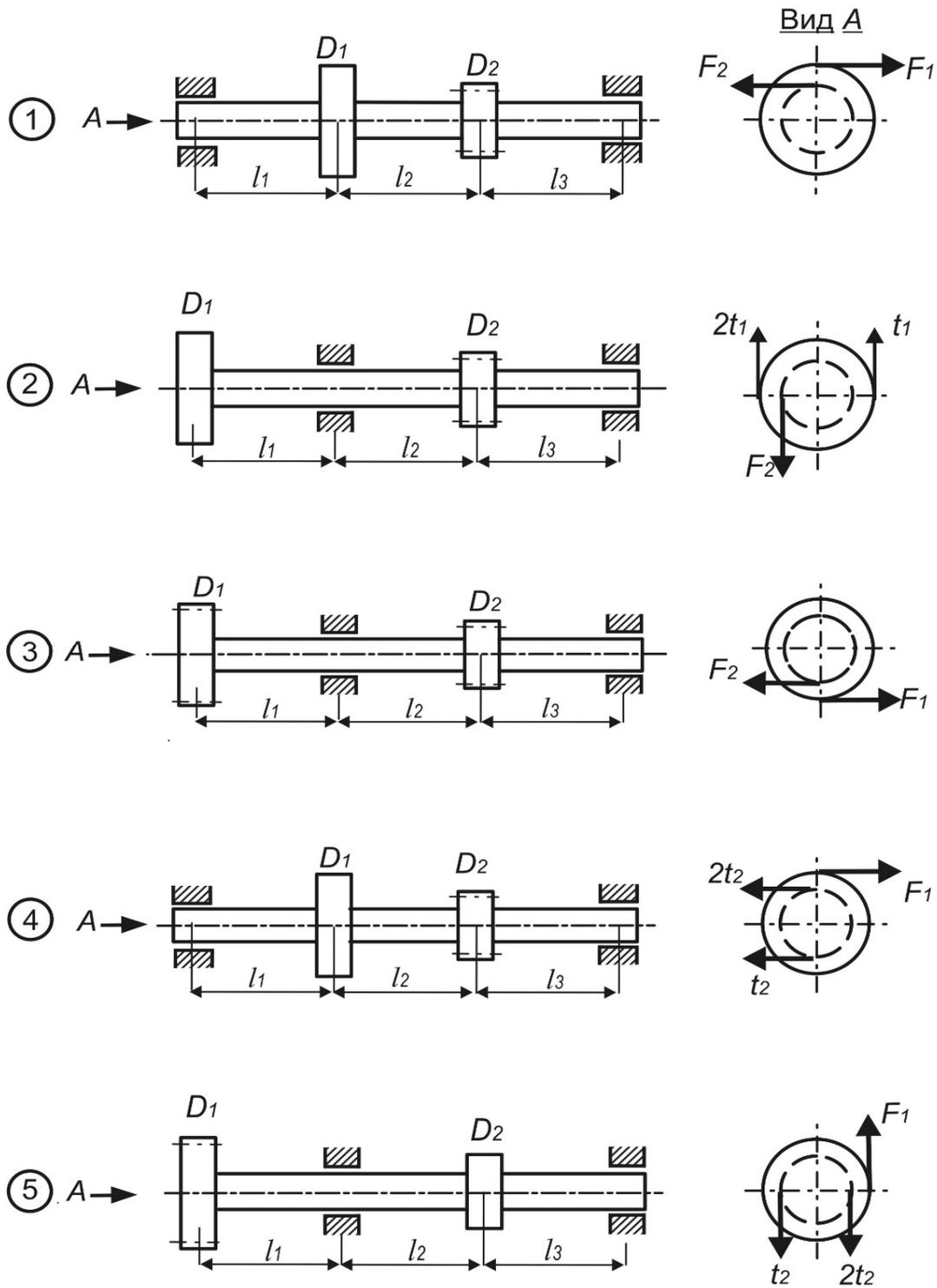


Рисунок 2.5 – Схемы к аудиторной контрольной работе № 2

Список литературы

1 **Волосухин, В. А.** Сопротивление материалов: учебник / В. А. Волосухин, В. Б. Логвинов, С. И. Евтушенко. – 5-е изд. – Москва: РИОР; ИНФРА-М, 2014. – 543 с.

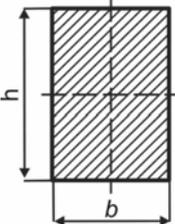
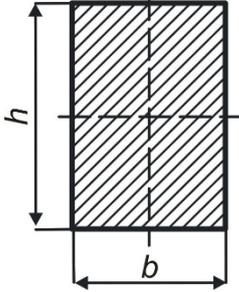
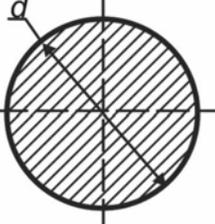
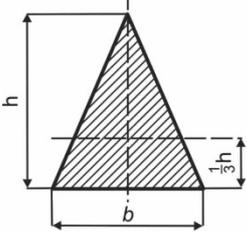
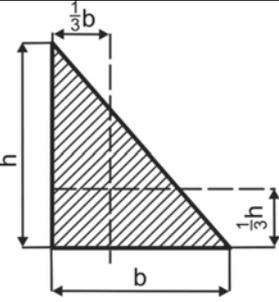
2 **Муморцев, А. Н.** Сборник задач по сопротивлению материалов: учебное пособие / А. Н. Муморцев, Е. А. Фролов. – Москва: ФОРУМ; ИНФРА-М, 2015. – 112 с. : ил.

3 **Кривошапко, С. Н.** Сопротивление материалов: учебник и практикум для прикладного бакалавриата / С. Н. Кривошапко. – Москва: Юрайт, 2016. – 413 с.

4 Сопротивление материалов с основами теории упругости и пластичности: учебник / Г. С. Варданян [и др.]; под ред. Г. С. Варданяна, Н. М. Атарова. – 2 изд., испр. и доп. – Москва: ИНФРА-М, 2011. – 638 с.

Приложение А (справочное)

Таблица А.1 – Геометрические характеристики некоторых сечений

Сечение	Площадь сечения	Осей момент инерции I_x, I_y	Осей момент сопротивления W_x, W_y
	$b \cdot h$	$I_x = \frac{b \cdot h^3}{12}; I_y = \frac{h \cdot b^3}{12}$	$W_x = \frac{b \cdot h^2}{6}; W_y = \frac{h \cdot b^2}{6}$
	b^2	$I_x = I_y = \frac{b^4}{12}$	$W_x = W_y = \frac{b^3}{6}$
	$\frac{\pi \cdot d^2}{4}$	$I_x = I_y = \frac{\pi \cdot d^4}{64};$ $I_p = \frac{\pi \cdot d^4}{32}$	$W_x = W_y = \frac{\pi \cdot d^3}{32};$ $W_p = \frac{\pi \cdot d^3}{16}$
	$\frac{b \cdot h}{2}$	$I_x = \frac{b \cdot h^3}{36};$ $I_y = \frac{h \cdot b^3}{48}$	$W_{xB} = \frac{b \cdot h^2}{24};$ $W_{xH} = \frac{b \cdot h^2}{12};$ $W_y = \frac{b \cdot h^2}{24}$
	$\frac{b \cdot h}{2}$	$I_x = \frac{b \cdot h^3}{36};$ $I_y = \frac{h \cdot b^3}{36}$	$W_{xB} = \frac{b \cdot h^2}{24};$ $W_{xH} = \frac{b \cdot h^2}{12};$ $W_{yII} = \frac{b \cdot h^2}{24}; W_{yI} = \frac{b \cdot h^2}{12}$