МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Технологии металлов»

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ И ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Методические рекомендации к практическим занятиям для студентов специальности 1-70 03 01 «Автомобильные дороги» очной и заочной форм обучения

Часть 2

Могилев 2020

УДК 539.3/6
ББК 30.121
С64

Рекомендовано к изданию
учебно-методическим управлением
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Технологии металлов» «30» июня 2020 г., протокол № 12

Составители: канд. техн. наук, доц. А. А. Катькало;
канд. техн. наук, доц. И. А. Леонович

Рецензент канд. техн. наук, доц. А. Е. Науменко

Методические рекомендации составлены в соответствии с рабочей программой дисциплины «Сопротивление материалов и теория упругости» для студентов специальности 1-70 03 01 «Автомобильные дороги». Содержат материал для проведения практических занятий в весеннем семестре по разделу «Сопротивление материалов».

Учебно-методическое издание

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ И ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Часть 2

Ответственный за выпуск Д. И. Якубович

Корректор А. А. Подошевко

Компьютерная верстка Н. П. Полевничая

Подписано в печать . Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Печать трафаретная. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 115 экз. Заказ № .

Издатель и полиграфическое исполнение:
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования
«Белорусско-Российский университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/156 от 07.03.2019.
Пр-т Мира, 43, 212022, Могилев.

Содержание

Введение... 4
1 Расчет простейших статически неопределимых стержневых систем……………………………………………………………………….. 5
2 Расчет вала круглого поперечного сечения на прочность при совместном действии изгиба и кручения……………………………………….. 7
3 Расчет несущей способности колонны. Построение ядра сечения при внецентренном приложении продольной силы 10
4 Расчет стержней с учетом пластических свойств материала………. 17
5 Определение перемещений с использованием интегралов Мора….. 19
6 Определение перемещений способом Верещагина…………………. 22
7 Расчет балок в упругопластической стадии сопротивления материалов……………………………………………………………….. 23
8 Расчет толстостенных труб и тонкостенных стержней…………….. 26
9 Расчет при продольном ударе………………………………………… 35
10 Расчет при поперечном ударе……………………………………….. 36
11 Расчеты сжатых стержней на устойчивость: проверочный, проектировочный, определение несущей способности…………………… 38
12 Расчет составного сечения продольно сжатого стержня………….. 44
Список литературы……………………………………………………… 46

Введение

Цель преподавания дисциплины – сформировать у студентов основные знания и умения по расчету типового элемента строительных конструкций (бруса) на прочность, жесткость и устойчивость, по выбору конструкционных материалов и форм поперечных сечений, обеспечивающих требуемые показатели надежности, безопасности и экономичности сооружений.

Студенты специальности 1-70 03 01 «Автомобильные дороги» изучают дисциплину «Сопротивление материалов и теория упругости» на протяжении 3-го и 4-го семестров.

По каждой теме практических занятий в методических рекомендациях приводится один или более примеров с подробным решением. Далее следуют вопросы для самопроверки в форме тестовых заданий.

Методические рекомендации помогут сформировать у студентов нижеперечисленные компетенции.

АК-1. Уметь применять базовые научно-теоретические знания для решения теоретических и практических задач.

АК-4. Уметь работать самостоятельно.

АК-9. Уметь учиться, повышать свою квалификацию в течение всей жизни.

ПК-14. Определять актуальные направления научных исследований в области строительства с целью внедрения в практику эффективных строительных материалов, конструкций и технологий.

ПК-22. Формулировать и реализовывать мероприятия по повышению качества строительной продукции, снижению энергоемкости и материальных затрат при выполнении строительно-монтажных работ.

ПК-26. Работать с научной, технической, юридической литературой в области промышленного и гражданского строительства.

Перед практическим занятием студентам предлагается изучить материал темы по конспекту лекций и рекомендуемой литературе [1–8], разобрать решение приведенных типовых примеров и проработать материал для самопроверки.

1 Расчет простейших статически неопределимых стержневых систем

Пример – Решить один раз статически неопределимую балку (рисунок 1.1) методом сил. Построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов.

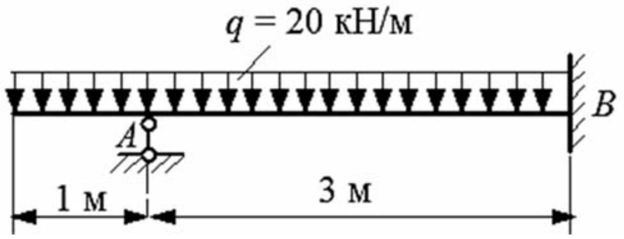


Рисунок 1.1

Решение

Заданная балка один раз статически неопределима, т. е. она имеет одну лишнюю связь. Выбираем основную систему, отбрасывая одну связь, например, опору A (рисунок 1.2, a).

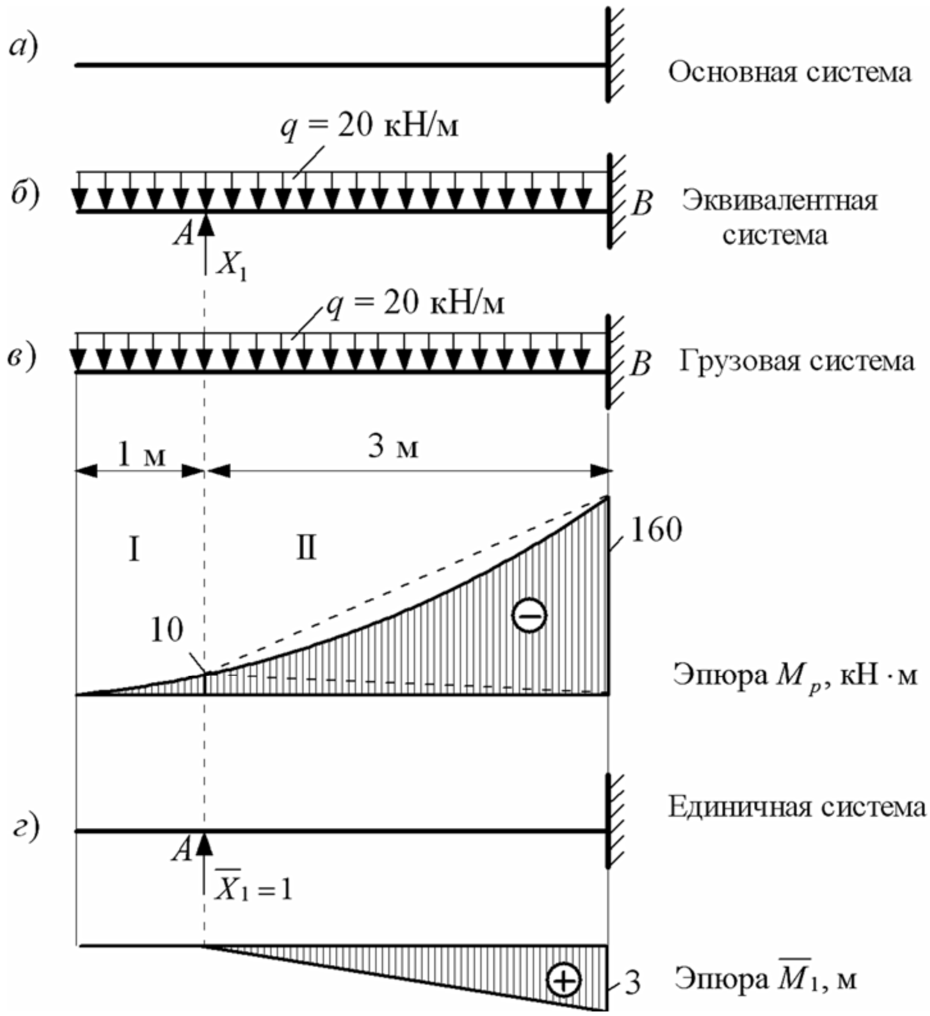


Рисунок 1.2

Составляем эквивалентную систему (рисунок 1.2, *б*).

Каноническое уравнение метода сил один раз статически неопределимой системы имеет вид:

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \Delta_{1p} = 0\,.$$

Для определения коэффициентов канонического уравнения строим эпюры изгибающих моментов в грузовой (рисунок 1.2, *в*) и единичной (рисунок 1.2, *г*) системах.

Определяем коэффициент при неизвестной силе X_1 перемножением эпюры M_1 на M_1:

$$\delta_{11} = \sum \frac{M_1\, y_c}{EI} = \frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2}3 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3}3\right) = \frac{9}{EI}\ \text{м}^3.$$

Определяем свободный коэффициент Δ_{1p} перемножением эпюры M_1 на эпюру M_p:

$$\Delta_{1p} = \sum \frac{M_P\, y_c}{EI} = \frac{1}{EI}\left(-\frac{1}{2}10 \cdot 3 \cdot \frac{1}{3}3 - \frac{1}{2}160 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3}3 + \frac{20 \cdot 3^3}{12} \cdot \frac{1}{2}3\right) = -\frac{427{,}5}{EI}\ \text{кН} \cdot \text{м}^3.$$

Решаем каноническое уравнение:

$$\frac{9}{EI} \cdot X_1 - \frac{427{,}5}{EI} = 0; \qquad X_1 = R_A = 47{,}5\ \text{кН}\,.$$

После определения реакции R_A можно построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов обычным образом (рисунок 1.3).

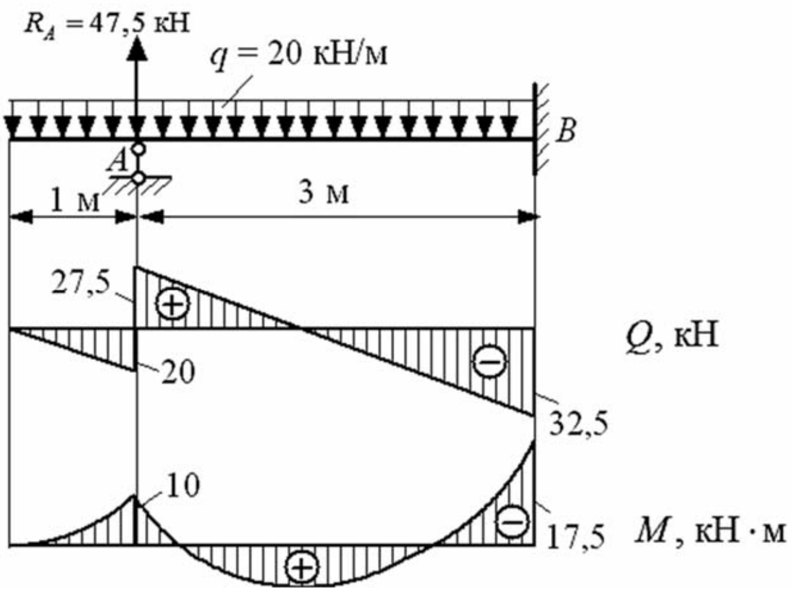


Рисунок 1.3

2 Расчет вала круглого поперечного сечения на прочность при совместном действии изгиба и кручения

Пример **–** На вал круглого сплошного сечения диаметром d = 68 мм насажены шестерня средним диаметром D_1 = 0,23 м и шкив ременной передачи диаметром D_2 = 0,39 м и весом G = 600 Н (рисунок 2.1, *а*). Вал делает 660 об/мин и передает мощность 40 кВт. Расчетное сопротивление материала вала R = 80 МПа. Проверить прочность вала в опасном сечении по четвертой теории прочности.

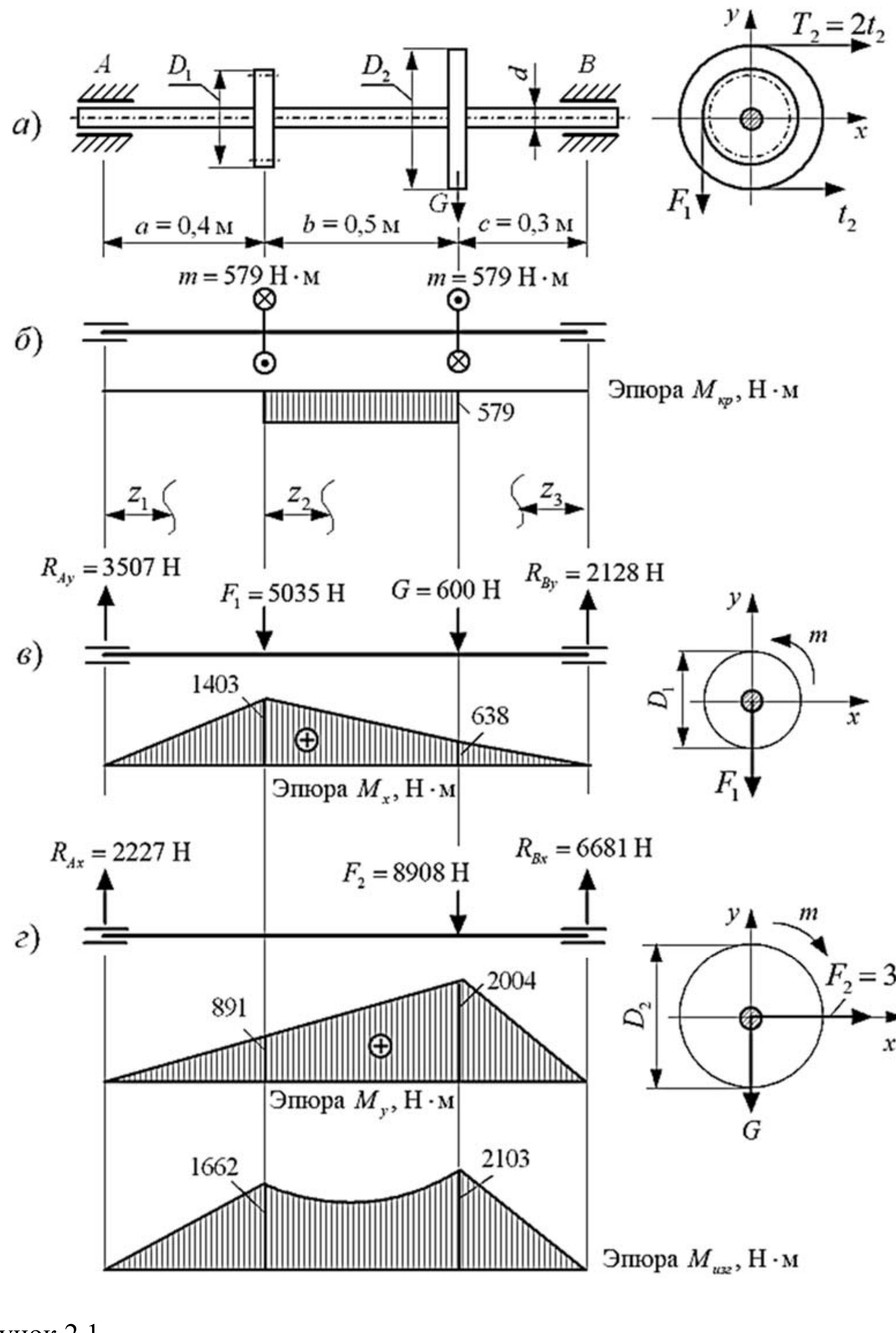


Рисунок 2.1

Решение

Внешние крутящие моменты, передаваемые валом через шестерню и шкив,

$$m = \frac{N \cdot 30}{\pi \cdot n} = \frac{40000 \cdot 30}{3{,}14 \cdot 660} = 579 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Схема действия крутящих моментов и эпюра $M_{кр}$ показаны на рисунке 2.1, *б*.

Окружное усилие F_1, действующее на шестерню и вал в вертикальной плоскости,

$$F_1 = \frac{2 \cdot m}{D_1} = \frac{2 \cdot 579}{0{,}23} = 5035 \text{ Н}.$$

Изгибающая сила F_2 от ременной передачи на шкиве, действующая на вал в горизонтальной плоскости,

$$F_2 = 3 \cdot \frac{2 \cdot m}{D_2} = 3 \cdot \frac{2 \cdot 579}{0{,}39} = 8908 \text{ Н}.$$

Схема действия изгибающих сил в вертикальной плоскости показана на рисунке 2.1, *в*. Опорные реакции R_{Ay} и R_{By} определены из уравнений статического равновесия вала. Ниже схемы показана эпюра изгибающих моментов M_x.

Схема действия изгибающих сил в горизонтальной плоскости показана на рисунке 2.1, *г*. Опорные реакции R_{Ax} и R_{Bx} определены из уравнений статического равновесия вала. Ниже схемы показана эпюра изгибающих моментов M_y.

Значения суммарных изгибающих моментов $M_{изг}$ в характерных сечениях вала определим по формуле

$$M_{изг} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}.$$

$$M_A = 0;$$

$$M_{D_1} = \sqrt{1403^2 + 891^2} = 1662 \text{ Н} \cdot \text{м};$$

$$M_{D_2} = \sqrt{638^2 + 2004^2} = 2103 \text{ Н} \cdot \text{м};$$

$$M_B = 0.$$

По эпюре полных изгибающих моментов $M_{изг}$ и эпюре крутящих моментов $M_{кр}$ определим опасное сечение вала, в котором действуют наибольший изги изгибающий момент $M_{изг} = 2103$ Н · м и крутящий момент $M_{кр} = 579$ Н · м.

Значение эквивалентного момента в опасном сечении, согласно четвертой теории прочности,

$$M_{экв}^{IV} = \sqrt{M_{изг}^2 + 0,75 \cdot M_{кр}^2} = \sqrt{2103^2 + 0,75 \cdot 579^2} = 2162 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Осевой момент сопротивления вала

$$W_x = \frac{\pi \cdot d^3}{32} = \frac{3,14 \cdot 6,8^3}{32} = 30,85 \text{ см}^3.$$

Проверка прочности:

$$\sigma_{экв} = \frac{M_{экв}^{IV}}{W_x} = \frac{2162}{30,85 \cdot 10^{-6}} = 70,1 \cdot 10^6 \text{ Па} = 70,1 \text{ МПа} < R = 80 \text{ МПа}.$$

Условие прочности выполняется.

Тестовые вопросы и задачи для самопроверки

1 Какая теория прочности применяется для расчета стальных валов на совместное действие изгиба и кручения:

а) $\sigma_{экв} = \sigma_1 - \mu \cdot (\sigma_2 + \sigma_3) \le R$;
б) $\sigma_{экв} = \sigma_1 - к \cdot \sigma_3 \le R$;
в) $\sigma_{экв} = \sigma_1 - \sigma_3 \le R$;
г) $\sigma_{экв} = \sigma_1 \le R$.

2 Как определить эквивалентный момент по третьей теории прочности:

а) $M_{экв} = \sqrt{M_{изг}^2 + M_{кр}^2}$;
б) $M_{экв} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}$;
в) $M_{экв} = \sqrt{M_{изг}^2 + 0,75 \cdot M_{кр}^2}$;
г) $M_{экв} = \sqrt{M_{кр}^2 + 0,75 \cdot M_{изг}^2}$.

3 Как определить суммарный изгибающий момент:

а) $M_{изг} = \sqrt{M_x + M_y}$;
б) $M_{изг} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}$;
в) $M_{изг} = \sqrt{M_x \cdot M_y}$;
г) $M_{изг} = M_x + M_y$.

3 Расчет несущей способности колонны. Построение ядра сечения при внецентренном приложении продольной силы

Пример 1 **–** Проверить прочность бетонной колонны, если F = 7 кН, $R_{раст}$ = 0,6 МПа, $R_{сж}$ = 6 МПа, γ_c = 1. Размеры на рисунке 3.1 показаны в миллиметрах.

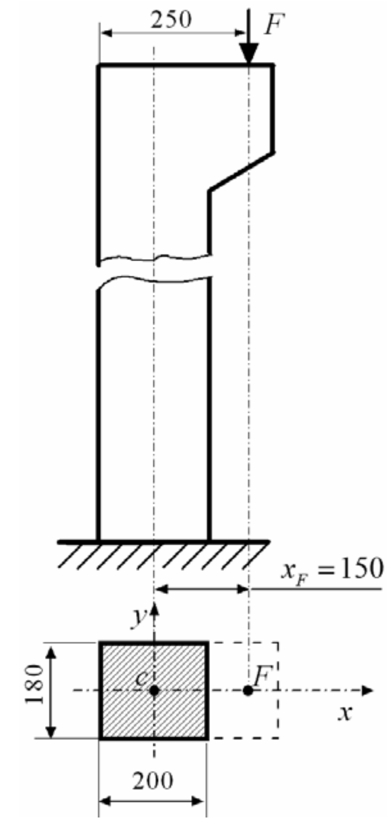


Рисунок 3.1

Решение

Условие прочности для сжимающей силы

$$\sigma_{\max} = -\frac{F}{A}\cdot\left(1+\frac{x_F\cdot x_{оп}}{i_y^2}+\frac{y_F\cdot y_{оп}}{i_x^2}\right)\le R\cdot\gamma_c\,.$$

Чтобы им воспользоваться, нужно определить положение нейтральной оси и опасные точки в сечении с координатами $x_{оп}$, $y_{оп}$.

Определим геометрические характеристики поперечного сечения колонны.

Площадь $A = 20\cdot 18 = 360$ см^2.

Осевые моменты инерции

$$I_x = \frac{b\cdot h^3}{12} = \frac{20\cdot 18^3}{12} = 9720\ \text{см}^4;\ I_y = \frac{h\cdot b^3}{12} = \frac{18\cdot 20^3}{12} = 12000\ \text{см}^4.$$

Квадраты радиусов инерции

$$i_x^{\,2} = \frac{I_x}{A} = \frac{9720}{360} = 27\ \ \text{см}^2;\ i_y^{\,2} = \frac{I_y}{A} = \frac{12000}{360} = 33{,}3\ \ \text{см}^2.$$

Координаты точки приложения силы следующие: x_F = 15 см, y_F = 0.

Положение нейтральной оси определяется по величине отрезков, которые она отсекает на осях координат (рисунок 3.2):

$$X_0 = -\frac{i_y^2}{x_F} = -\frac{33{,}3}{15} = -2{,}2\ \text{см};\ Y_0 = -\frac{i_x^2}{y_F} = -\frac{27}{0} = -\infty\,.$$

Нейтральная ось разделила колонну на две части. Определим координаты *опасных точек.*

В *растянутой области* из самых дальних от нейтральной оси точек на ребре выделим любую, например, точку 1: x_1 = –10 см, y_1 = 0.

В *сжатой области* из самых дальних от нейтральной оси точек на ребре выделим любую, например, точку 2: $x_2 = 10$ см, $y_2 = 0$.

Проверка прочности в *сжатой области*:

$$\sigma_{\max}^{сж} = \sigma_2 = -\frac{7 \cdot 10^3}{360 \cdot 10^{-4}} \cdot \left(1 + \frac{15 \cdot 10}{33,3} + 0\right) =$$

$$= -1,07 \cdot 10^6 \text{ Па} = -1,07 \text{ МПа};$$

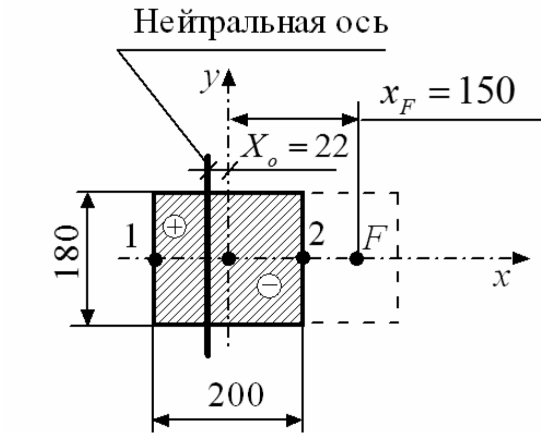


Рисунок 3.2

$$\sigma_{\max}^{сж} = 1,07 \text{ МПа} < R_{сж} \cdot \gamma_c = 6 \text{ МПа}.$$

Проверка прочности в *растянутой области*:

$$\sigma_{\max}^{раст} = \sigma_1 = -\frac{7 \cdot 10^3}{360 \cdot 10^{-4}} \cdot \left(1 + \frac{15 \cdot (-10)}{33,3} + 0\right) = 0,68 \cdot 10^6 \text{ Па} = 0,68 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{\max}^{раст} = 0,68 \text{ МПа} > R_{раст} \cdot \gamma_c = 0,6 \text{ МПа}.$$

Перегрузка составила:

$$\delta = \frac{\sigma_{\max} - [\sigma]}{[\sigma]} \cdot 100\ \% = \frac{0,68 - 0,6}{0,6} \cdot 100\ \% = 13,3\ \% > 5\ \%,$$

что недопустимо.

Вывод: так как условие прочности на растяжение не выполняется, то прочность колонны не обеспечена.

Пример 2 **–** Определить минимальный диаметр стального стержня, к которому приложена растягивающая сила $F = 30$ кН (рисунок 3.3), если расчетное сопротивление материала $R = 180$ МПа, $\gamma_c = 1$.

Решение

Площадь поперечного сечения стержня

$$A = \frac{\pi \cdot d^2}{4} = 0,785 \cdot d^2.$$

Квадрат радиуса инерции

$$i_x^2 = i_y^2 = d^2/16.$$

Координаты точки приложения силы следующие: $x_F = 0$, $y_F = -d/4$.

Отрезки, которые отсекает нейтральная линия на осях координат,

$$X_0 = -\frac{i_y^2}{x_F} = -\frac{d^2/16}{0} = -\infty;$$

$$Y_0 = -\frac{i_x^2}{y_F} = -\frac{d^2/16}{-d/4} = \frac{d}{4}.$$

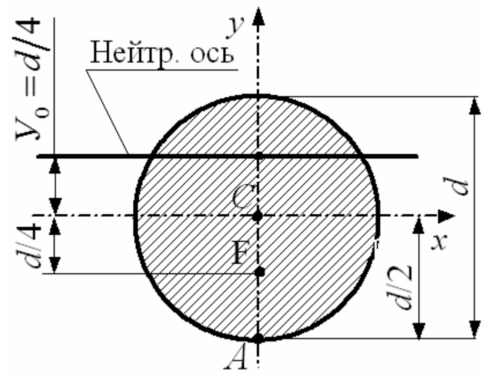


Рисунок 3.3

Опасной является точка A, как самая удаленная точка от нейтральной оси. Ее координаты следующие: $x_A = 0$, $y_A = -d/2$.

Определим минимальный диаметр стержня из условия прочности:

$$\sigma_{\max} = \frac{F}{A} \cdot \left(1 + \frac{x_F \cdot x_A}{i_y^2} + \frac{y_F \cdot y_A}{i_x^2} \right) \le R \cdot \gamma_c;$$

$$\sigma_{\max} = \frac{F}{A} \cdot \left(1 + \frac{0 \cdot 0}{d^2/16} + \frac{(-d/4)\cdot(-d/2)}{d^2/16} \right) = \frac{F}{0{,}785 \cdot d^2} \cdot 3 = R \cdot \gamma_c;$$

$$d \ge \sqrt{\frac{F \cdot 3}{R \cdot \gamma_c \cdot 0{,}785}} = \sqrt{\frac{30 \cdot 10^3 \cdot 3}{180 \cdot 10^6 \cdot 1 \cdot 0{,}785}} = 0{,}025 \text{ м} = 25 \text{ мм}.$$

Пример 3 **–** Определить допустимую сжимающую силу для чугунного стержня коробчатого поперечного сечения (рисунок 3.4), если расчетное сопротивление материала $R_{раст} = 60$ МПа, $R_{сж} = 150$ МПа, $\gamma_c = 1$.

Построить ядро сечения. Размеры на рисунке 3.4 показаны в миллиметрах.

Решение

Площадь поперечного сечения $A = 12 \cdot 9 - 6 \cdot 9 = 54 \text{ см}^2$.

Осевые моменты инерции

$$I_x = \frac{12 \cdot 9^3}{12} - \frac{9 \cdot 6^3}{12} = 567 \text{ см}^4; \quad I_y = \frac{9 \cdot 12^3}{12} - \frac{6 \cdot 9^3}{12} = 931{,}5 \text{ см}^4.$$

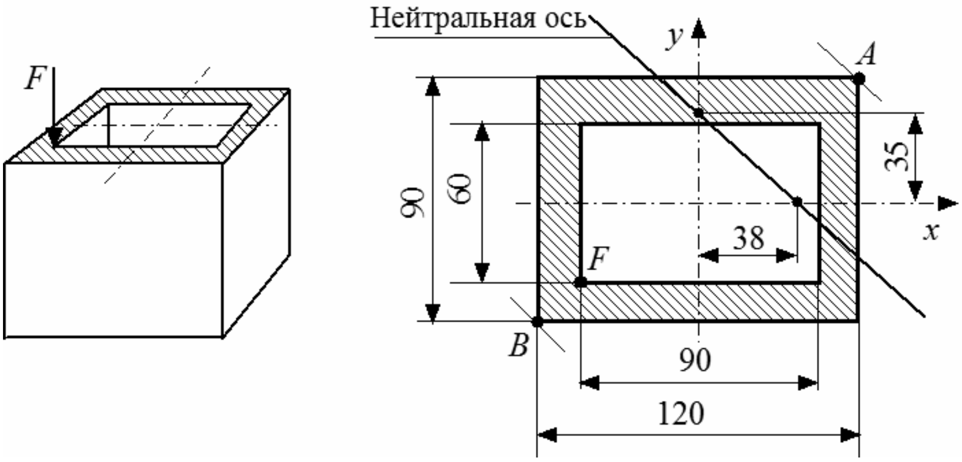


Рисунок 3.4

Квадраты радиусов инерции

$$i_x^2 = \frac{I_x}{A} = \frac{567}{54} = 10{,}5 \text{ см}^2; \quad i_y^2 = \frac{I_y}{A} = \frac{931{,}5}{54} = 17{,}25 \text{ см}^2.$$

Координаты точки приложения силы следующие: $x_F = -4{,}5$ см; $y_F = -3$ см.

Положение нейтральной оси определим по величине отрезков, которые она отсекает на осях координат (см. рисунок 3.4):

$$X_0 = -\frac{i_y^2}{x_F} = -\frac{17{,}25}{-4{,}5} = 3{,}8 \text{ см};$$

$$Y_0 = -\frac{i_x^2}{y_F} = -\frac{10{,}5}{-3} = 3{,}5 \text{ см}.$$

Нейтральная ось разделила колонну на две части.

В *растянутой области* составим условие прочности для опасной точки A с координатами $x_A = 6$ см и $y_A = 4{,}5$ см:

$$\sigma_{\max}^{раст} = \sigma_A = -\frac{F}{A} \cdot \left(1 + \frac{(-4{,}5) \cdot 6}{17{,}25} + \frac{(-3) \cdot 4{,}5}{10{,}5}\right) = -\frac{F \cdot (-1{,}85)}{A} \le R_{раст} = 60 \text{ МПа}.$$

Откуда допустимая сила

$$F \le \frac{A \cdot R_{раст}}{1{,}85} = \frac{54 \cdot 10^{-4} \cdot 60 \cdot 10^6}{1{,}85} = 175 \cdot 10^3 \text{ Н} = 175 \text{ кН}.$$

В *сжатой области* составим условие прочности для опасной точки B с координатами $x_B = -6$ см и $y_B = -4{,}5$ см:

$$\sigma_{\max}^{сж} = \sigma_B = -\frac{F}{A}\cdot\left(1+\frac{(-4{,}5)\cdot(-6)}{17{,}25}+\frac{(-3)\cdot(-4{,}5)}{10{,}5}\right) = -\frac{F\cdot 3{,}85}{A} \le R_{сж} = -150\ \text{МПа}.$$

Откуда допустимая сила

$$F \le \frac{A\cdot R_{сж}}{3{,}85} = \frac{54\cdot 10^{-4}\cdot 150\cdot 10^{6}}{3{,}85} = 210\cdot 10^{3}\ \text{Н} = 210\ \text{кН}.$$

Допустимой для всего стержня будет меньшая из рассчитанных сил: $[F] = 175$ кН.

Для построения *ядра сечения* (рисунок 3.5) нужно провести касательные линии к контуру сечения и определить координаты угловых точек ядра по следующим формулам:

$$x_Я = -\frac{i^2_y}{X_0};\ y_Я = -\frac{i^2_x}{У_0}.$$

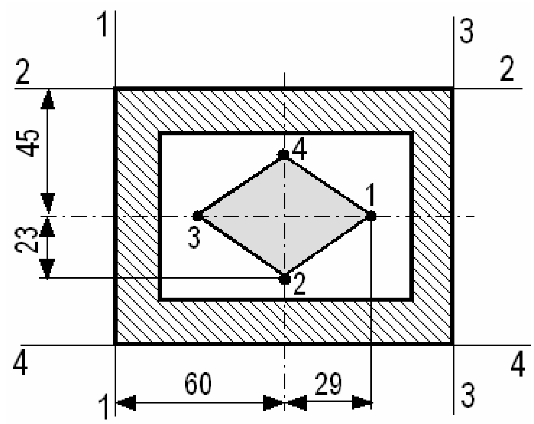


Рисунок 3.5

Касательная 1–1: $X_0 = -6$ см, $У_0 = \infty$.

Точка 1: $x_1 = -\frac{i^2_y}{X_0} = -\frac{17{,}25}{-6} = 2{,}9$ см, $\quad y_1 = -\frac{i^2_x}{У_0} = -\frac{10{,}5}{\infty} = 0.$

Касательная 2–2: $X_0 = \infty,\ У_0 = 4{,}5$ см.

Точка 2: $x_2 = -\frac{i^2_y}{X_0} = -\frac{17{,}25}{\infty} = 0,\ y_2 = -\frac{i^2_x}{У_0} = -\frac{10{,}5}{4{,}5} = -2{,}3$ см.

Касательная 3–3: $X_0 = 6$ см, $У_0 = \infty$.

Точка 3: $x_3 = -\frac{i^2_y}{X_0} = -\frac{17{,}25}{6} = -2{,}9$ см, $y_3 = -\frac{i^2_x}{У_0} = -\frac{10{,}5}{\infty} = 0.$

Касательная 4–4: $X_0 = \infty,\ У_0 = -4{,}5$ см.

Точка 4: $x_4 = -\frac{i^2_y}{X_0} = -\frac{17{,}25}{\infty} = 0,\ y_4 = -\frac{i^2_x}{У_0} = -\frac{10{,}5}{-4{,}5} = 2{,}3$ см.

Найденные точки соединяются прямыми линиями (см. рисунок 3.5).

Тестовые вопросы и задачи для самопроверки

1 Какие внутренние силовые факторы возникают в поперечных сечениях бруса при внецентренном растяжении или сжатии:

а) продольная сила и поперечная сила;
б) только продольная сила;
в) только изгибающие моменты;
г) изгибающие моменты и продольная сила.

2 По какой формуле определяются напряжения при внецентренном растяжении-сжатии:

а) $\sigma = \pm\dfrac{M_x \cdot y}{I_x} \pm \dfrac{M_y \cdot x}{I_y}$; в) $\sigma = \pm\dfrac{F}{A} \cdot \left(1 + \dfrac{x_F \cdot x}{i_x^2} + \dfrac{y_F \cdot y}{i_y^2}\right)$;

б) $\sigma = \pm\dfrac{M_x \cdot x}{I_x} \pm \dfrac{M_y \cdot y}{I_y}$; г) $\sigma = \pm\dfrac{F}{A} \cdot \left(1 + \dfrac{x_F \cdot x}{i_y^2} + \dfrac{y_F \cdot y}{i_x^2}\right)$.

3 При внецентренном растяжении-сжатии нулевая линия:

а) проходит через центр тяжести поперечного сечения;
б) проходит через точку приложения силы;
в) находится за центром тяжести поперечного сечения напротив силы;
г) находится между центром тяжести и точкой приложения силы.

4 При внецентренном растяжении-сжатии нормальные напряжения максимальны:

а) на границе ядра сечения;
б) в точке, наиболее удаленной от нулевой линии;
в) в точке приложения силы;
г) в центре поперечного сечения.

5 Какие напряжения испытывает брус, если сжимающая внецентренная сила приложена в ядре сечения:

а) нормальные напряжения на растяжение и на сжатие;
б) нормальные напряжения только на сжатие;
в) нормальные напряжения только на растяжение;
г) касательные напряжения на сдвиг.

6 Какое положение занимает нейтральная линия, если продольная сила приложена на границе ядра сечения:

а) касается поперечного сечения;
б) проходит вне сечения;

в) пересекает поперечное сечение за пределами ядра;
г) касается ядра сечения.

7 Где нужно прикладывать продольную силу, чтобы напряжения в поперечном сечении не менялись:
а) на границе ядра;
б) на границе поперечного сечения;
в) на нейтральной оси;
г) в центре тяжести поперечного сечения.

8 Какой закон распределения нормальных напряжений в поперечном сечении бруса при внецентренном растяжении-сжатии:
а) постоянный;
б) гиперболический;
в) параболический;
г) линейный.

9 Для каких из перечисленных материалов сжимающую нагрузку необходимо прикладывать в ядре сечения:
а) дерево;
б) сталь;
в) бетон;
г) медь.

10 Опасные точки для бетонной колонны (рисунок 3.6):
а) *А* и *С*;
б) *В* и *Д*;
в) *А*, *В*, *С* и *Д*;
г) Только *В*.

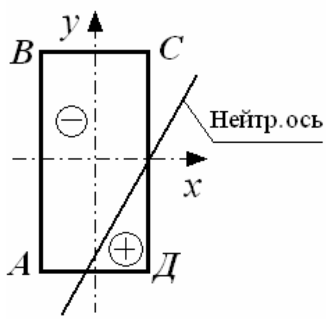


Рисунок 3.6

4 Расчет стержней с учетом пластических свойств материала

При расчете стержней и стержневых систем из материалов, обладающих свойствами пластичности, может быть использована упрощенная диаграмма $\sigma-\varepsilon$ (диаграмма Прандтля) (рисунок 4.1).

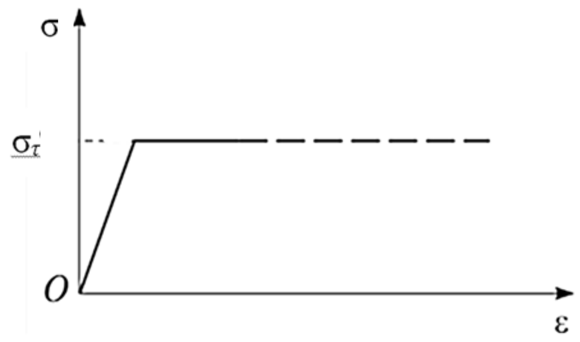


Рисунок 4.1

Эта диаграмма состоит из двух прямолинейных участков – наклонного и горизонтального. Горизонтальный участок, соответствующий площадке текучести, считается бесконечно протяженным. Согласно диаграмме Прандтля при достижении напряжениями предела текучести σ_τ деформации неограниченно возрастают, что условно принимается за начало разрушения стержня. При этом предельная сила в стержне (разрушающая сила) равна

$$N_{пред} = N_{разр} = \sigma_t \cdot A. \qquad (4.1)$$

В стержневых системах, стержни которых работают на растяжение и сжатие, началом разрушения может считаться момент, когда напряжения в одном или нескольких стержнях достигнут предела текучести $[\sigma_t]$. При этом можно по формуле (4.1) определить усилия в стержнях, а затем с помощью уравнений равновесия установить величину предельной силы $P_{пред}$. Допускаемая нагрузка на конструкцию $[P]$ определяется из условия

$$P \le [P] = \frac{P_{пред}}{n},$$

где n – коэффициент запаса прочности, принимаемый на основании тех же соображений, которые учитываются при расчете по методу допускаемых напряжений.

При определении предельной нагрузки в статически неопределимых системах надо учесть, что возникновение пластических деформаций ($a = a_\tau$) только в одном или в нескольких элементах (стержнях) не всегда приводит систему к разрушению.

Пример **–** Для стержневой системы (рисунок 4.2) определим значения предельной и допускаемой силы P. В расчетах примем $\sigma_t = 240$ МПа, $n = 1{,}5$, $A_1 = A_3 = 10$ см^2, $A_2 = 15$ см^2.

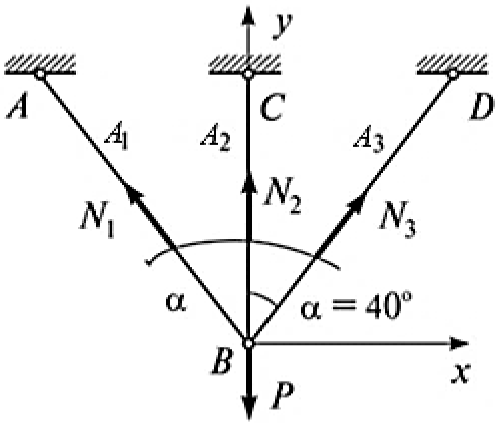


Рисунок 4.2

Решение

Составим два уравнения равновесия:

$$\sum X = 0. \quad -N_1 \sin\alpha + N_3 \sin\alpha = 0, \quad N_1 = N_3;$$

$$\sum Y = 0. \quad N_1 \cos\alpha + N_2 + N_3 \cos\alpha - P = 0;$$

$$P = 2N_1 \cos\alpha + N_2.$$

При постепенном увеличении силы P наступит момент, когда напряжения во всех трех стержнях достигнут предела текучести σ_t. Этот момент, согласно диаграмме Прандтля, соответствует началу разрушения системы, поскольку деформации стержней при этом неограниченно возрастают. Определим значения усилий в стержнях в момент начала разрушения.

$$N_{1,пред} = N_{3,пред} = \sigma_t \cdot A_1 = 240 \cdot 10^{-1} \cdot 10 = 240 \text{ кН};$$

$$N_{2,пред} = \sigma_t \cdot A_2 = 240 \cdot 10^{-1} \cdot 15 = 360 \text{ кН}.$$

Находим из уравнения равновесия величину предельной силы:

$$P_{пред} = 2N_{1,пред} \cos\alpha + 2N_{2,пред} = 2 \cdot \cos 40° + 360 = 727{,}7 \text{ кН}.$$

Величина допускаемой силы равна

$$\left[P\right]=\frac{P_{пред}}{n}=\frac{727,7}{1,5}=485,1 \text{ кН}.$$

5 Определение перемещений с использованием интегралов Мора

Пример – Для балки, загруженной равномерно распределенной нагрузкой (рисунок 5.1), определить:

1) прогиб в точке *K* (вертикальное перемещение точки EIy_k);

2) прогиб в точке *C* (вертикальное перемещение точки EIy_c);

3) угол поворота точки *C* ($EI\theta_c$).

Решение

Схемы нагрузок заданной и балок с единичной нагрузкой показаны на рисунке 5.1, *а–г*. Определяем вертикальные реакции в шарнирах *A* и *B*.

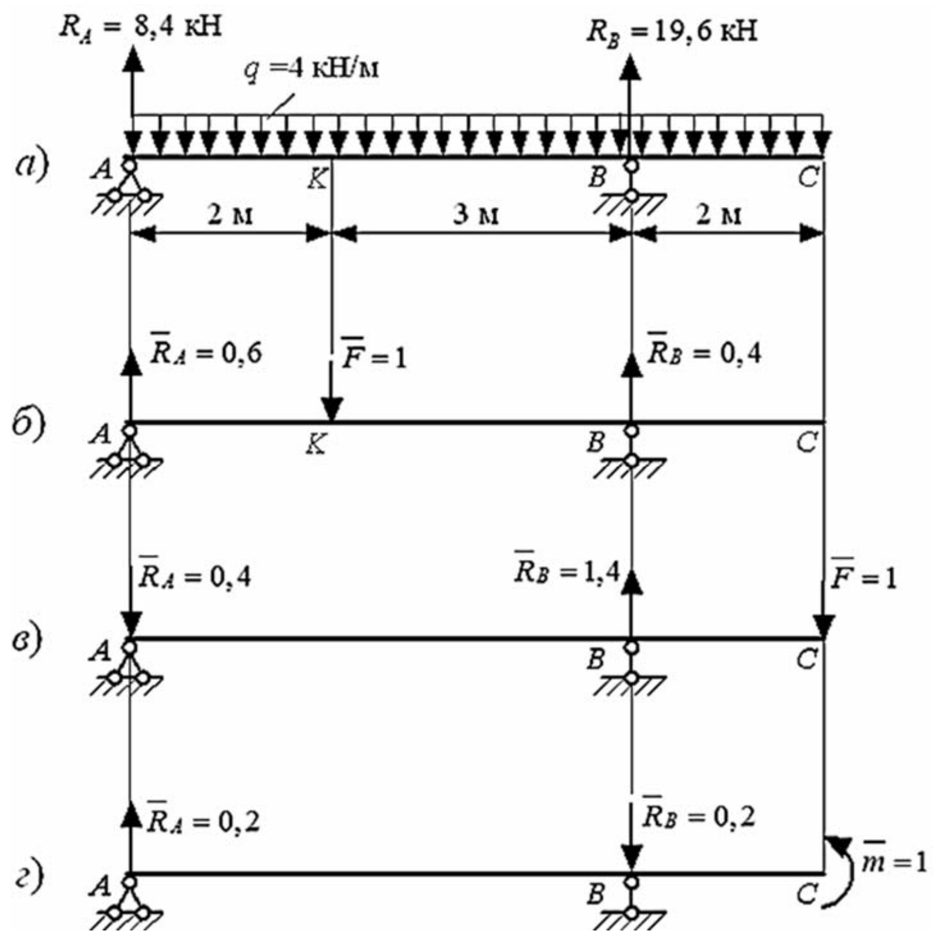


Рисунок 5.1

Составляем уравнение изгибающих моментов относительно точки A:

$$\sum M_A = 4 \cdot 7 \cdot 3{,}5 - R_B \cdot 5 = 0;$$

$$R_B = \frac{4 \cdot 7 \cdot 3{,}5}{5} = 19{,}6 \text{ кН.}$$

Составляем уравнение изгибающих моментов относительно точки B:

$$\sum M_B = 5R_A - 4 \cdot 5 \cdot 2{,}5 + 4 \cdot 2 \cdot 1 = 0;$$

$$R_A = \frac{4 \cdot 5 \cdot 2{,}5 - 4 \cdot 2 \cdot 1}{5} = 8{,}4 \text{ кН.}$$

Для нахождения этих перемещений воспользуемся первым слагаемым в формуле Мора, а именно:

$$\Delta_i = \sum_1^n \int_l \frac{M_p(z) \cdot M_1(z) \cdot dz}{EI},$$

где $M_p(z)$ – эпюра изгибающих моментов от заданной внешней нагрузки (рисунок 5.2, *б*);

$M_1(z)$ – эпюра моментов от воздействия единичной нагрузки.

EI – жесткость балки при изгибе.

Строим эпюру изгибающих моментов от внешней нагрузки по участкам:

$$M_{p1}(z) = 8{,}4 \cdot z_1 - 4 \cdot z_1^2; \qquad M_{p2} = 4 \cdot z_2^2.$$

Для определения прогиба в точке K единичную нагрузку прикладываем в точку K по вертикали (рисунок 5.2, *в*); для определения прогиба в точке C единичную нагрузку прикладываем в точку C по вертикали (рисунок 5.2, *г*).

Для определения угла поворота сечения в точке C единичную нагрузку в виде сосредоточенного изгибающего момента прикладываем к точке C (рисунок 5.2, *д*).

Строим эпюру изгибающих моментов $M_1(z)$ (см. рисунок 5.2, *в*).

Уравнение моментов для левого участка $M_1(z) = 0{,}6 \cdot z$, для правого – $M_1(z) = 0{,}4 \cdot z$.

Вычисляем

$$EIy_k = \int_0^2 (8{,}4 \cdot z - 2 \cdot z^2) \cdot 0{,}6 \cdot z\, dz + \int_0^3 (8{,}8 + 0{,}4 \cdot (z - 2z^2))(1{,}2 - 0{,}4 \cdot \mathrm{z}) dz =$$

$$= \int_0^2 (5{,}04 \cdot z^2 - 1{,}2 \cdot z^3) dz + \int_0^3 (10{,}56 + 3{,}04 \cdot z - 2{,}56 \cdot z^2 + 0{,}8 \cdot z^3) dz =$$

$$= 8{,}64 + 11{,}16 = 19{,}80.$$

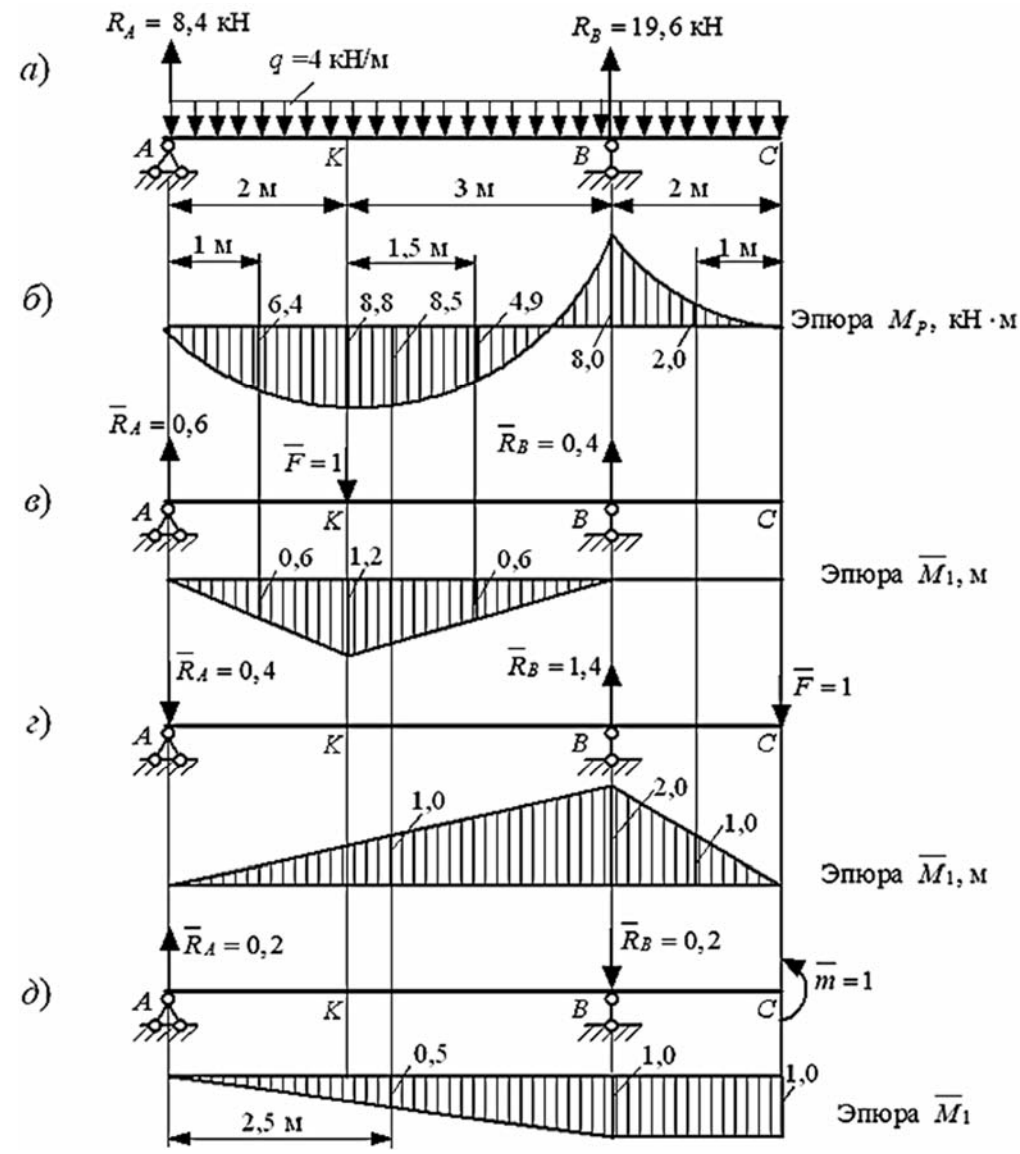


Рисунок 5.2

Для определения прогиба в точке C перемножаем эпюры M_P (см. рисунок 5.2, *а*) и M_1 (см. рисунок 5.2, *б*).

$$EIy_c = \int_0^5 (8,4 \cdot z - 2z) \cdot (-0,4z)dz + \int_0^2 2 \cdot z^2 \cdot z \cdot dz =$$

$$= \int_0^5 (3,36 \cdot z^2 - 0,8 \cdot z^3)dz + \int_0^2 2 \cdot z^3 dz = -15 + 8 = -7;$$

$$EI\Theta_c = \int_0^5 (8,4 \cdot z - 2 \cdot z^2) \cdot 0,2z \cdot dz + \int_0^2 2 \cdot z^2 \cdot 1 \cdot dz =$$

$$= \int_0^5 (1,68 \cdot z^2 - 0,4 \cdot z^3)dz + \int_0^2 2 \cdot z^2 \cdot dz = 7,5 - 5,33 = 2,17.$$

Необходимо помнить: если одна из эпюр на участке интегрирования имеет излом (см. рисунок 5.2, *в*), то нужно интегрирование на этом участке разбить на два участка (граница участков интегрирования – точка излома).

Напоминаем правило знаков при перемножении: знак произведения положительный, если обе координаты эпюр моментов расположены по одну сторону от оси стержня.

6 Определение перемещений способом Верещагина

Для балки, загруженной равномерно распределенной нагрузкой (рисунок 6.1, *а*), определить:

1) прогиб в точке *K* (вертикальное перемещение точки EIy_k);

2) прогиб в точке *C* (вертикальное перемещение точки EIy_c);

3) угол поворота точки *C* ($EI\theta_c$).

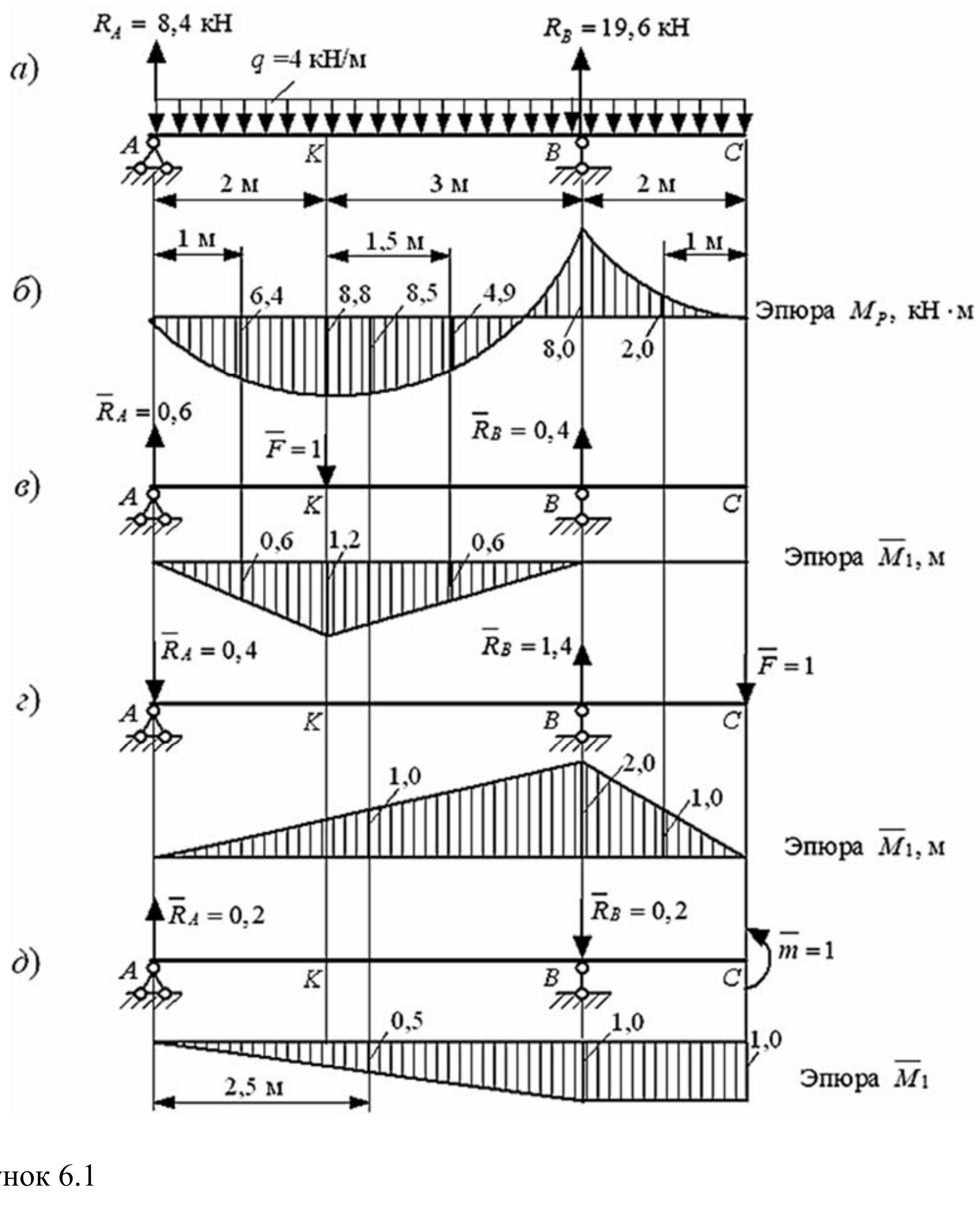


Рисунок 6.1

Решение

Определяем вертикальные реакции в шарнирах *A* и *B* (см. раздел 5).

Определение EIy_k.

Перемножим эпюры M_P и M_1 (рисунок 6.1, *б*, *в*).

$$EIY_k = \frac{2}{3}\cdot 2\cdot 2\cdot \frac{1}{2}\cdot 0,6 + \frac{8,8\cdot 2}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot 1,2 + \frac{2}{3}\cdot 3\cdot 4,5\cdot 0,6 - \frac{8,8\cdot 3}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot 1,2 -$$

$$-\frac{8\cdot 3}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot 1,2 = 8,64 + 11,16 = 19,80.$$

Определение EIy_c.

Перемножаем M_p на M_1 (см. рисунок 6.1, *б*, *в*).

$$EIy_c = \frac{5\cdot 8}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot 2 - \frac{2}{3}\cdot 5\cdot\frac{25}{2}\cdot 1 + \frac{2\cdot 8}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot 2 - \frac{2}{3}\cdot 2\cdot 1 = 8 - 15 = -7.$$

Знак «минус» указывает, что перемещение точки 3 происходит вверх (а не вниз, как мы предполагали) на семь единиц.

Определение $EI\Theta_c$.

Перемножаем эпюры моментов, показанные на рисунке 6.1, *б*, *д*. Тогда:

$$EI\Theta_c = \frac{5\cdot 8}{2}\cdot\frac{2}{3} - \frac{2}{3}\cdot\frac{25}{2}\cdot 5\cdot\frac{1}{2} + \frac{2\cdot 8}{2}\cdot 1 - \frac{2}{3}\cdot 2\cdot 2\cdot 1 = 7,5 - 5,33 = 2,17.$$

7 Расчет балок в упругопластической стадии сопротивления материалов

Рассмотрим пример расчета балки на изгиб по допустимым напряжениям и по предельному состоянию без учета влияния поперечной силы.

Балка прямоугольного поперечного сечения, зажата по концам, несет равномерно распределенную по длине нагрузку интенсивности g (рисунок 7.1). Определить наибольшую интенсивность этой нагрузки согласно расчета по допустимому напряжению и по предельному состоянию при том же запасе прочности n.

Расчет по допустимым напряжениям. Балка статически неопределенная. Ее расчет существенно упрощается благодаря симметрии. Находим лишние неизвестные и строим эпюру изгибающих моментов (см. рисунок 7.1). Изгибающий момент наибольшее значение имеет в защемленных опорных сечениях:

$$M_{\max} = \frac{g \cdot l^2}{12}.$$

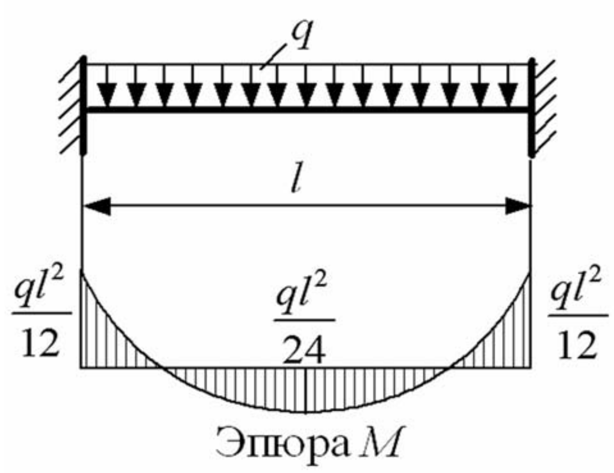


Рисунок 7.1

При увеличении нагрузки g максимальные напряжения в этих же сечениях в первую очередь достигнут предела текучести. Принимая запас прочности по пределу текучести равным n, определяем наибольшую допустимую интенсивность нагрузки из условия прочности

$$\frac{M_{\max}}{W} = \frac{\sigma_t}{n}.$$

Учитывая, что $W = \dfrac{b \cdot h^2}{6}$, а $M_{\max} = \dfrac{g_1 l^2}{12}$, получаем

$$g_1 = 2\frac{\sigma_t}{n}\frac{b \cdot h^2}{l^2}.$$

Расчет по предельному состоянию. После появления пластических деформаций в наиболее удаленных от нейтральной оси точках опорных сечений дальнейший рост нагрузки приведет к образованию в этих сечениях пластических шарниров, а изгибающий момент при этом достигнет предельного значения $M_{пр}$. Теперь уже балка работает как шарнирно опертая, к которой на опорах приложены постоянные моменты (рисунок 7.2).

$$M_{пр} = \sigma_t \cdot W_{пл} = \sigma_t \cdot \frac{b \cdot h^2}{4}.$$

При дальнейшем росте нагрузки эти моменты сохраняют свое значение, и задача становится статически определенной. В пролетных сечениях величины изгибающих моментов будут расти, пока посередине пролета момент не станет равным той же величине $M_{пр}$, пока не образуется пластический шарнир. При этом три пластические шарниры расположатся на одной прямой, поэтому дальнейший рост нагрузки невозможен. Несущая способность балки иссякнет.

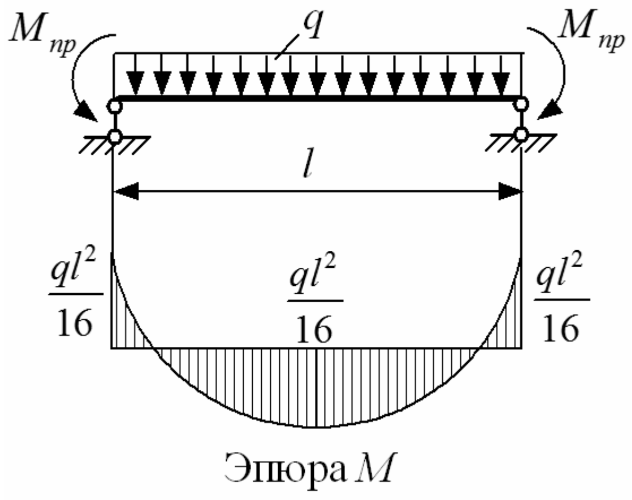


Рисунок 7.2

Условие равенства изгибающих моментов в опорных сечениях и посередине пролета имеет вид:

$$\frac{g_{пр}l^2}{8} - M_{пр} = M_{пр}, \qquad (7.1)$$

откуда находим, что

$$M_{пр} = \frac{g_{пр}l^2}{16}. \qquad (7.2)$$

Решая совместно выражения (7.1) и (7.2), найдем

$$g_{пр} = 4 \cdot \sigma_t \cdot \frac{b \cdot h^2}{l^2}.$$

Принимая запас прочности равный n, получим наибольшую допустимую интенсивность нагрузки:

$$g_2 = \frac{g_{пр}}{n} = 4\frac{\sigma_t}{n}\frac{bh^2}{l^2}.$$

Отношение наибольших допустимых нагрузок при расчетах по предельному состоянию и по допускаемому напряжению

$$\frac{g_2}{g_1} = 2.$$

Расчет по предельному состоянию часто позволяет вскрыть дополнительные резервы прочности. Как указывалось выше, он получил широкое распространение при расчете строительных конструкций.

8 Расчет толстостенных труб и тонкостенных стержней

В толстостенных трубах, нагруженных равномерным давлением, напряжения и деформации не изменяются вдоль оси трубы. При этом распределение напряжений и деформаций происходит одинаково во всех плоскостях, перпендикулярных к этой оси. По граням малого криволинейного элемента, выделенного в поперечном сечении трубы (рисунок 8.1), действуют нормальные напряжения – радиальные σ_r и окружные σ_Θ. Каждая точка трубы при ее деформации получает радиальное перемещение u. Величины напряжений σ_r и σ_Θ, а также перемещения u зависят от расстояния r от рассматриваемой точки трубы до ее оси.

Если сплошная (не составная) труба с внутренним радиусом a и наружным радиусом b не имеет днищ и нагружена равномерным внутренним p_a и наружным p_b давлением, то величины σ_r, σ_Θ и u определяются по формулам Ламе:

$$\sigma_r = \frac{p_a a^2 - p_b b^2}{b^2 - a^2} - \frac{(p_a - p_b)a^2 b^2}{(b^2 - a^2)r^2};$$

$$\sigma_\Theta = \frac{p_a a^2 - p_b b^2}{b^2 - a^2} + \frac{(p_a - p_b)a^2 b^2}{(b^2 - a^2)r^2};$$

$$u = \frac{1-\mu}{E}\frac{p_a a^2 - p_b b^2}{b^2 - a^2} r + \frac{1+\mu}{E}\frac{(p_a - p_b)a^2 b^2}{(b^2 - a^2)r}. \tag{8.1}$$

Поскольку в точках толстостенных труб реализуется сложное (плоское) напряженное состояние, оценка прочности их производится на основе тех или иных критериев (теорий) прочности.

Формулы Ламе используются, в частности, при расчете составных труб (рисунок 8.2). В соответствии с решением А. В. Гадолина основные геометрические и силовые параметры таких труб определяются по формулам:

– радиальный натяг

$$\delta = \frac{p \cdot c}{E}, \tag{8.2}$$

– внешний радиус внутренней трубы

$$b = \sqrt{a \cdot c}; \tag{8.3}$$

– давление от натяга

$$p_{\aleph} = \frac{E \cdot \delta}{2b^3} \frac{(b^2 - a^2)(c^2 - b^{2)}}{c^2 - a^2}. \tag{8.4}$$

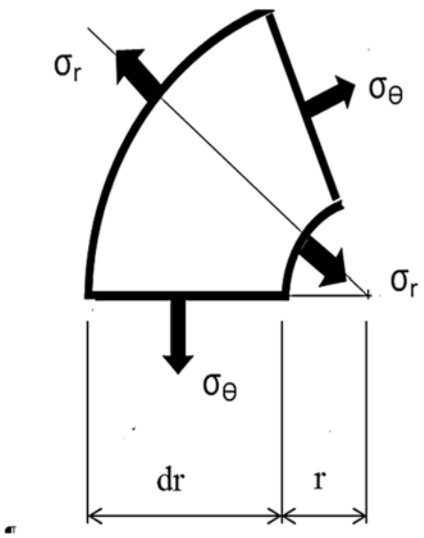


Рисунок 8.1

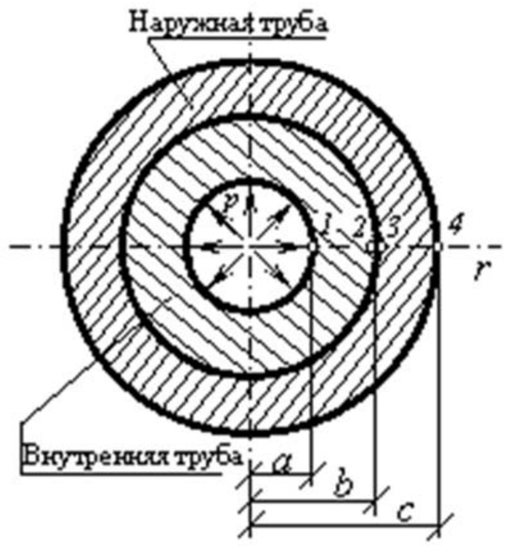


Рисунок 8.2

Условие прочности в наиболее напряженных точках составной трубы в соответствии с критерием наибольших касательных напряжений (третья теория прочности) имеет вид:

$$\sigma_{экв} = \frac{p \cdot c}{c - a} \le R_y. \tag{8.5}$$

Пример 1 **–** Для стальной составной трубы (см. рисунок 8.2) заданы: внутренний радиус внутренней трубы a = 7 см, внутреннее давление p = 100 МПа, расчетное сопротивление стали R_y = 240 МПа, коэффициент Пуассона μ = 0,3; модуль продольной упругости $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

Требуется:

1) определить внешний радиус внутренней трубы b, внешний радиус наружной трубы c, радиальный натяг δ;

2) проверить прочность сплошной трубы с внутренним радиусом *a* и внешним радиусом *c*, нагруженной внутренним давлением *p*, используя третью теорию прочности;

3) проверить прочность в опасных точках составной трубы, нагруженной внутренним давлением *p*, используя третью теорию прочности;

4) определить радиальные перемещения точек внутреннего канала.

Решение

1 Определение геометрических параметров b, c и δ.

Внешний радиус с наружной трубы определяется на основе условия прочности (8.5):

$$c = \frac{R_y}{R_y - p} = \frac{240 \cdot 7}{240 - 100} = 12 \text{ см.}$$

Внешний радиус b внутренней трубы вычисляется по формуле (8.3):

$$b = \sqrt{a \cdot c} = \sqrt{7 \cdot 12} = 9{,}16 \text{ см.}$$

Радиальный натяг рассчитывается по формуле (8.2):

$$\delta = \frac{p \cdot b}{E} = \frac{100 \cdot 9{,}16}{2 \cdot 10^5} = 4{,}58 \cdot 10^{-3} \text{ см.}$$

2 Проверка прочности сплошной трубы с внутренним a и внешним радиусом c, нагруженной давлением p.

Из теории расчета толстостенных труб известно, что и при нагружении внутренним давлением, и при нагружении внешним давлением опасными являются точки на внутреннем канале трубы.

Рассчитываем напряжения в точках 1 (см. рисунок 8.2), используя формулы (8.1) и полагая в них $b = c$, $p_a = p$, $p_b = 0$, $r = a$:

$$\sigma_{r,1} = \frac{p \cdot a^2}{c^2 - a^2}\left(1 - \frac{c^2}{r^2}\right) = -p = -100 \text{ МПа;}$$

$$\sigma_{\Theta,1} = \frac{p \cdot a^2}{c^2 - a^2}\left(1 + \frac{c^2}{r^2}\right) = \frac{10 \cdot 7}{12^2 - 7^2}\left(1 + \frac{12^2}{7^2}\right) = 203 \text{ МПа.}$$

По аналогии определяем в точках 2 и 3:

$$\sigma_{r,2} = \sigma_{r,3} = \frac{p \cdot a^2}{c^2 - a^2}\left(1 - \frac{c^2}{b^2}\right) = -36{,}94 \text{ МПа.}$$

$$\sigma_{\Theta,2} = \sigma_{\Theta,3} = \frac{p \cdot a^2}{c^2 - a^2}\left(1 + \frac{c^2}{b^2}\right) = \frac{10 \cdot 7^2}{12^2 - 7^2}\left(1 + \frac{12^2}{9{,}16^2}\right) = 140 \text{ МПа}$$

и в точке 4

$$\sigma_{r,4} = \frac{p \cdot a^2}{c^2 - a^2}\left(1 - \frac{c^2}{b^2}\right) = 0;$$

$$\sigma_{\Theta,4} = \frac{p \cdot a^2}{c^2 - a^2}\left(1 + \frac{c^2}{c^2}\right) = \frac{10 \cdot 7^2}{12^2 - 7^2}(1 + 1) = 103 \text{ МПа}.$$

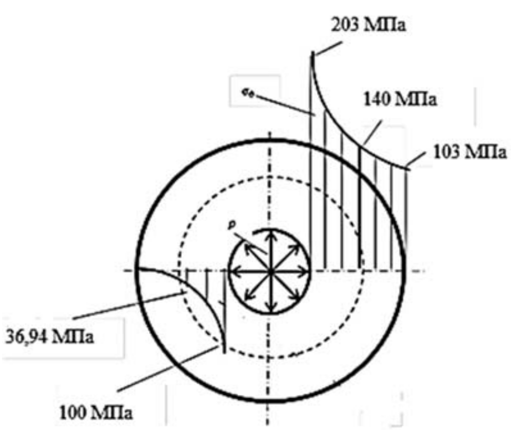


Рисунок 8.3

Эпюра распределения напряжений по толщине сплошной трубы с внутренним a и внешним радиусом c показана на рисунке 8.3.

Условие прочности по третьей теории прочности имеет вид:

$$\sigma_{экв} = \sigma_{\max} - \sigma_{\min} \le R_y.$$

В рассматриваемом случае в точке 1 трубы

$$\sigma_{\max} = \sigma_{\Theta} = 203 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{\min} = \sigma_r = -100 \text{ МПа}.$$

Таким образом, получаем

$$\sigma_{экв} = 203 - (-100) = 303 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{экв} > R_y = 240 \text{ МПа}.$$

Условие прочности для сплошной трубы не выполняется.

3 Проверка прочности в опасных точках составной трубы, нагруженной внутренним давлением p.

$$p_{\aleph} = \frac{E \cdot \delta}{2b^3}\frac{(b^2 - a^2)}{(c^2 - a^2)} = \frac{2 \cdot 10^5 \cdot 4{,}58 \cdot 10^{-3}(9{,}16^2 - 7^2)(12^2 - 9{,}16^2)}{2 \cdot 9{,}16^3(12^2 - 7^2)} = 13{,}5 \text{ МПа}.$$

Рассчитываем напряжения σ_r и σ_θ в точке 1 от действия натяга $p_к$, полагая в них $p_a = 0$, $p_b = p_k$, $r = a$:

$$\sigma_r = -\frac{p_{к}b^2}{(b^2 - a^2)}\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) = 0;$$

$$\sigma_\Theta = -\frac{p_{к}b^2}{(b^2 - a^2)}\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) = -\frac{2p_{к}b^2}{(b^2 - a^2)} = \frac{2 \cdot 13{,}15 \cdot 9{,}16^2}{9{,}16^2 - 7^2} = -63{,}22 \text{ МПа}.$$

Рассчитаем суммарные напряжения σ_r и σ_θ в точке 1 от действия p и p_k:

$$\sigma_r = \sigma_{r(p)} + \sigma_{r(p_{к})} = -100 + 0 = -100 \text{ МПа};$$

$$\sigma_\Theta = \sigma_{\Theta(p)} + \sigma_{\Theta(p_{к})} = 203 - 63{,}22 = 139{,}78 \text{ МПа}.$$

Проверяем прочность составной трубы в точке 1 по третьей теории прочности:

$$\sigma_{экв} = \sigma_{\max} - \sigma_{\min} = 139{,}78 - (-100) = 239{,}78 \le 240 \text{ МПа}.$$

Условие прочности для составной трубы выполняется.

4 Определение радиальных перемещений точек 1 составной трубы.

Воспользуемся законом Гука для двухосного напряженного состояния:

$$u = \frac{r}{E}(\sigma_\Theta - \mu\sigma_r) = \frac{7}{2 \cdot 10^5}\left[139{,}78 - 0{,}3 \cdot (-100)\right] = 5{,}94 \cdot 10^{-5} \text{ м}.$$

Пример 2 – Расчет тонкостенного стержня открытого профиля.

Для тонкостенного стержня открытого профиля, изображенного на рисунке 8.4, *а*, при следующих исходных данных: $H = 12{,}5 \cdot 10^{-2}$ м; $B = 19 \cdot 10^{-2}$ м; $l = 2$ м; $\delta = 1 \cdot 10^{-2}$ м; $P = 1$ кН; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; $G = 8 \cdot 10^4$ МПа, требуется:

1) определить площадь, положение центра тяжести, главные центральные моменты инерции поперечного сечения;

2) найти положение центра изгиба;

3) определить момент инерции при чистом кручении $I_{кр}$ и секториальные характеристики сечения;

4) вычислить изгибно-крутильную характеристику $\alpha = \sqrt{\dfrac{GI_\rho}{EI_\omega}}$.

Решение

1 Определение площади, положения центра тяжести и главных центральных моментов инерции.

Вычислим расчетные размеры сечения стержня (рисунок 8.4, *б*, *в*), приняв в дальнейших расчетах:

$$\delta = 1 \cdot 10^{-2} \text{ м};$$

$$b = B - 2\frac{\delta}{2} = 19 \cdot 10^{-2} - 1 \cdot 10^{-2} = 18 \cdot 10^{-2} \text{ м};$$

$$h = H - \frac{\delta}{2} = 12{,}5 \cdot 10^{-2} - \frac{1 \cdot 10^{-2}}{2} = 12 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

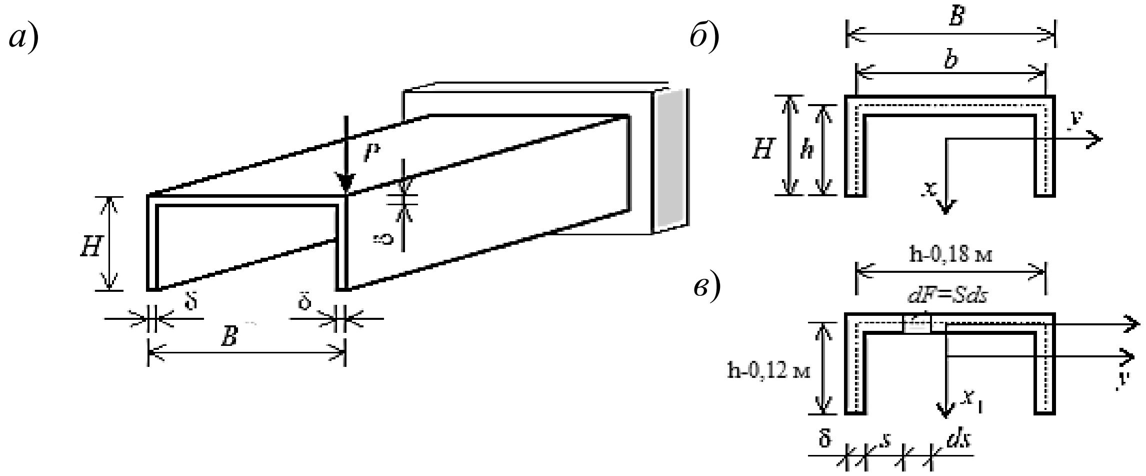


Рисунок 8.4

Тогда

$$A = \delta \sum S_i = \delta(b + 2h) = 1 \cdot 10^{-2} \cdot (18 \cdot 10^{-2} + 2 \cdot 12 \cdot 10^{-2}) = 42 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

В выбранной системе координат $x_1 y_1$ определим положение центра тяжести сечения: $y_c = 0$; $x_c = \dfrac{S_{y1}}{A}$; $y_c = 0$.

Для этого построим эпюру координат x_1 (см. рисунок 8.4, *а*) и вычислим статический момент сечения относительно оси y_1:

$$S_{y1} = \delta \sum \int x_1 ds = 1 \cdot 10^{-2} \cdot \frac{2 \cdot 12 \cdot 10^{-2} \cdot 12 \cdot 10^{-2}}{2} = 144 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

Тогда координата центра тяжести сечения

$$x_c = \frac{S_{y1}}{A} = \frac{144 \cdot 10^{-6}}{42 \cdot 10^{-4}} = 3{,}43 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

Для вычисления главных центральных моментов инерции предварительно построим эпюру координат x и y (см. рисунок 8.4, *б*, *в*). С применением этих эпюр определяются

$$I_x = \delta\sum\int y^2 ds = 1\cdot10^{-2}\cdot(12\cdot10^{-2}\cdot9\cdot10^{-2}\cdot9\cdot10^{-2}\cdot2+\frac{9\cdot10^{-2}\cdot9\cdot10^{-2}}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot9\cdot10^{-2}\cdot2)=$$

$$=2,43\cdot10^{-5}\,\text{м}^4;$$

$$I_y = \delta\sum\int x^2 ds = 1\cdot10^{-2}\cdot(18\cdot10^{-2}\cdot3,43\cdot10^{-2}\cdot3,43\cdot10^{-2}\cdot2+\frac{12\cdot10^{-2}}{6}\cdot2+$$

$$+\ 8,57\cdot10^{-2}+\frac{\cdot9\cdot10^{-2}\cdot9\cdot10^{-2}}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot9\cdot10^{-2}\cdot2)\times$$

$$\times\left[2(3,43\cdot10^{-2}\cdot3,43\cdot10^{-2}+8,57\cdot10^{-2})-2\cdot3,43\cdot10^{-2}\cdot8,57\cdot10^{-2}\right]=6,583\cdot10^{-5}\ \text{м}^4.$$

2 Определение положения центра изгиба.

Вначале построим эпюру секториальных координат площади ω_B в характерных точках (1, 2, 3, 4) профиля, выбрав произвольный полюс в точке B (рисунок 8.5, *г*):

$$\omega_1=-2\cdot\frac{1}{2}\cdot9\cdot10^{-2}\cdot12\cdot10^{-2}=-108\cdot10^{-4}\ \text{м}^2;$$

$$\omega_2=\omega_3=0;$$

$$\omega_4=2\cdot\frac{1}{2}\cdot9\cdot10^{-2}\cdot12\cdot10^{-2}=108\cdot10^{-4}\ \text{м}^2.$$

Вычисляем координаты центра изгиба. Используя эпюры ω_B и y, применив правило Верещагина, вычисляем секториально-линейный статический момент

$$S_{\omega_{Bx}}=\int_A\omega_B y dA=\delta\sum_i\int_{S_i}\omega_B y ds=$$

$$=1\cdot10^{-2}\cdot\frac{1,08\cdot10^{-2}\cdot12\cdot10^{-2}}{2}\cdot9\cdot10^{-2}=-116,64\cdot10^{-8}\ \text{м}^5.$$

Тогда координата центра изгиба по вертикальной оси принимает значение

$$x_A=\frac{S_{\omega_{Bx}}}{I_x}=\frac{-116,64\cdot10^{-8}}{2,43\cdot10^{-5}}=-48,0\cdot10^{-3}\ \text{м}.$$

Координата центра изгиба по горизонтальной оси вычисляется по формуле

$$y_A=\frac{S_{\omega_{By}}}{I_y}.$$

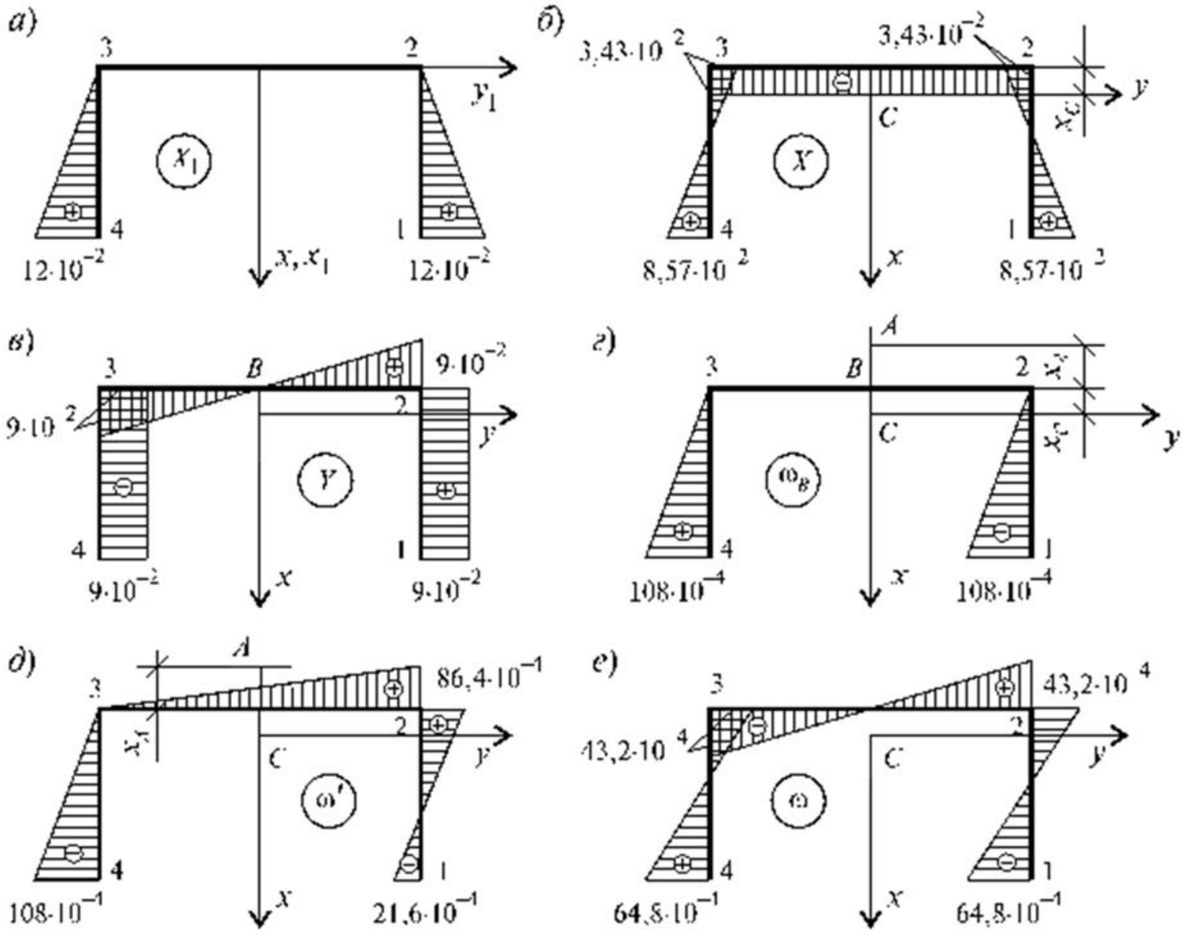


Рисунок 8.5

Так как эпюра x симметрична, а эпюра ω_B обратно симметрична относительно x, то по правилу Верещагина секториально-линейный статический момент равен нулю, т. е.

$$S_{\omega_{By}} = \int_A \omega_B x dA = \delta \sum_i \int_{S_i} \omega_B x ds = 0 .$$

Следовательно, $y_A = 0$ и поэтому центр изгиба лежит на оси x.

Вычислим постоянную D, предварительно построив эпюру секториальных площадей ω' (рисунок 8.5, *д*).

При этом полюс расположим в центре изгиба (точка A). За начало отсчета возьмем точку 3 (произвольно):

$$\omega'_4 = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 10^{-2} \cdot 12 \cdot 10^{-2} = 108 \cdot 10^{-4} \text{ м}^4;$$

$$\omega'_3 = 0 ;$$

$$\omega_2' = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot 4{,}8\cdot 10^{-2}\cdot 18\cdot 10^{-2} = 86{,}4\cdot 10^{-4}\ \text{м}^4;$$

$$\omega_1' = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot 4{,}8\cdot 10^{-2}\cdot 18\cdot 10^{-2} - 2\cdot\frac{1}{2}\cdot 9\cdot 10^{-2}\cdot 12\cdot 10^{-2} = -21{,}6\cdot 10^{-4}.$$

Постоянную D вычисляем по формуле

$$D = -\frac{S_{\omega'}}{A} = \frac{\int_A \omega' dA}{A} = \frac{\delta\sum_i \int_{S_i} \omega' ds}{A}.$$

Далее вычисляем секториально-статический момент $S_{\omega'}$, как произведение площади эпюры ω' на y:

$$S_{\omega'} = 1\cdot 10^{-2}\left\{108\cdot 10^{-4}\cdot 12\cdot 10^{-2}\cdot\frac{1}{2} + \left(86{,}4\cdot 10^{-4} - 21{,}6\cdot 10^{-4}\right)\cdot\frac{1}{2}\cdot 12\cdot 10^{-2} + \right.$$

$$\left. + 86{,}4\cdot 10^{-4}\cdot 18\cdot 10^{-2}\right\} = 1814{,}4\cdot 10^{-9}\ \text{м}^4.$$

В этом случае величина постоянной D будет равна:

$$D = -\frac{1814{,}4\cdot 10^{-8}}{42\cdot 10^{-4}} = 43{,}2\cdot 10^{-4}\ \text{м}^2.$$

Далее вычисляем секториальные координаты характерных точек профиля:

$$\omega_1 = -21{,}6\cdot 10^{-4} - 43{,}2\cdot 10^{-4} = -64{,}8\cdot 10^{-4}\ \text{м}^2;$$

$$\omega_2 = 86{,}4\cdot 10^{-4} - 43{,}2\cdot 10^{-4} = 43{,}2\cdot 10^{-4}\,\text{м}^2;$$

$$\omega_3 = 0 - 43{,}2\cdot 10^{-4} = -43{,}2\cdot 10^{-4}\cdot 10^{-4} = 64{,}8\cdot 10^{-4}\,\text{м}^2;$$

$$\omega_4 = 108\cdot 10^{-4} - 43{,}2\cdot 10^{-4} = 64{,}8\cdot 10^{-4}\ \text{м}^2.$$

По полученным координатам строим эпюру ω (рисунок 8.5, *е*).

3 Определить момент инерции при чистом кручении $I_{кр}$ и секториальные характеристики сечения.

Для корытообразного профиля поперечного сечения бруса (рисунок 8.5, *б*), имеем:

$$I_{кр}=\frac{1,12}{3}\cdot\left[12,5\cdot10^{-2}\cdot\left(1\cdot10^{-2}\right)^{3}\cdot2+\left(19\cdot10^{-2}-2\cdot1\cdot10^{-2}\right)\cdot\left(1\cdot10^{-2}\right)^{3}\right]=$$

$$=15,68\cdot10^{-8}\ \text{м}^{4}.$$

Секториальный момент инерции I_{ω} вычисляем по эпюре ω (рисунок 8.5, *е*):

$$I_{\omega}=\int_{A}\omega^{2}dA=\delta\sum_{i}\omega^{2}ds=1\cdot10^{-2}\left(\frac{43,2\cdot10^{-4}\cdot9\cdot10^{-2}}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot43,2\cdot10^{-2}\cdot2+\frac{12\cdot10^{-2}}{6}\cdot2\times\right.$$

$$\left.\times\left\{2\left[\left(43,2\cdot10^{-4}\right)^{2}+\left(64,8\cdot10^{-4}\right)^{2}\right]-2\cdot43,2\cdot10^{-4}\cdot64,8\cdot10^{-4}\right\}\right)=3,73\cdot10^{-9}\ \text{м}^{6}.$$

4 Определение изгибно-крутильной характеристики α.

Изгибно-крутильную характеристику α вычисляем по формуле

$$\alpha=\sqrt{\frac{GI_{кр}}{EI_{\omega}}}=\sqrt{\frac{8\cdot10^{4}\cdot15,68\cdot10^{-8}}{2\cdot10^{5}\cdot3,73\cdot10^{-8}}}=1,3\ \ \text{м}^{-1}.$$

9 Расчет при продольном ударе

Пример – Пусть груз F = 10 кН падает с высоты H = 10 см на двутавровую стойку длиной ℓ = 4 м (рисунок 9.1).

Определить:

1) максимальное нормальное напряжение;
2) наибольшее укорочение стойки при ударе.

Считать, что стойка не теряет устойчивости.

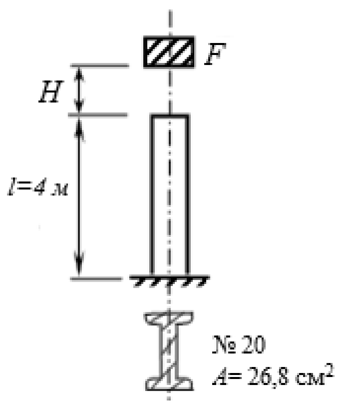


Рисунок 9.1

Решение

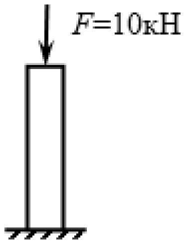
Расчетными формулами при ударе являются:

$$\sigma_{дин}=k\cdot\sigma_{ст};\quad \Delta l_{дин}=k\cdot\Delta l_{ст}.$$

$$k=1+\sqrt{1+\frac{2H}{\delta_{ст}}},$$

где k – динамический коэффициент при ударе.

Эти параметры соответствуют статическому способу приложения силы веса падающего груза (рисунок 9.2)



$$|\sigma_{ст}| = \frac{N_{ст}}{A} = \frac{10 \cdot 10^3}{26{,}8 \cdot 10^{-4}} = 3{,}73 \text{ МПа};$$

$$\delta_{ст} = |\Delta l_{ст}| = \frac{N_{ст} \cdot l}{E \cdot A} = \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 4}{2 \cdot 10^{11} \cdot 26{,}8 \cdot 10^{-4}} = 0{,}746 \cdot 10^{-4} \text{ м}.$$

Рисунок 9.2

Тогда

$$k = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 0{,}1}{0{,}746 \cdot 10^{-4}}} = 1 + 51{,}8 = 52{,}8;$$

$$\sigma_{дин} = 3{,}73 \cdot 52{,}8 = 193 \text{ МПа};$$

$$|\Delta l_{дин}| = 0{,}746 \cdot 52{,}8 = 39{,}4 \cdot 10^{-4} \text{ м}.$$

10 Расчет при поперечном ударе

Пример – На двутавровую балку № 20 длиной l = 9 м, свободно лежащую на двух жестких опорах, с высоты h = 5 см падает груз Q = 1200 Н (рисунок 10.1).

Требуется:

1) найти наибольшее нормальное напряжение в балке;

2) определить прогиб балки в месте падения груза.

Решение

1 Рассчитываем балку на действие статической нагрузки. Прикладываем силу Q и строим эпюру изгибающих моментов M_F. Для этого определяем реакции:

$$\sum M_A = 0; \quad R_B = \frac{Q \cdot 3}{9} = 400 \text{ Н};$$

$$\sum M_B = 0; \quad R_A = \frac{Q \cdot 6}{9} = 800 \text{ Н}.$$

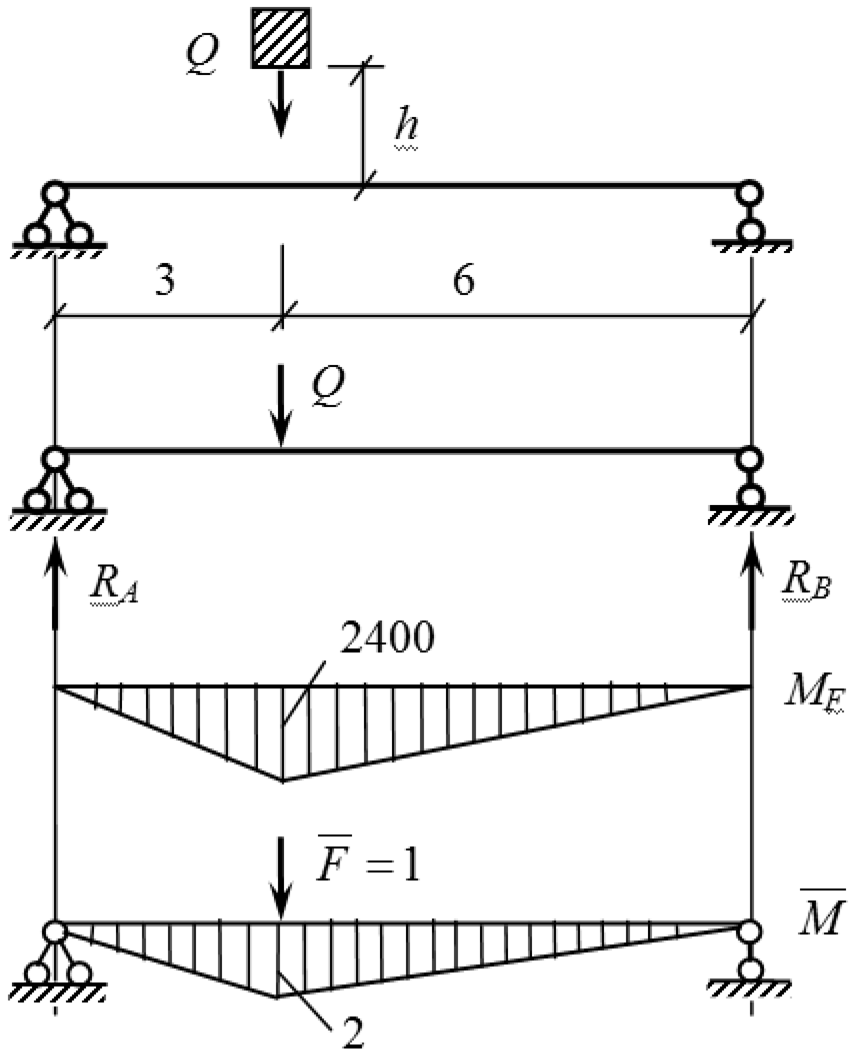


Рисунок 10.1

Максимальный момент

$$M_{\max} = R_A \cdot 3 = 800 \cdot 3 = 2400 \text{ Н·м.}$$

2 В место падения груза прикладываем единичную силу и строим единичную эпюру (эпюру моментов от единичной нагрузки):

$$\sum M_A = 0; \quad R_B^{'} = \frac{\overline{F} \cdot 3}{9} = \frac{1}{3};$$

$$\sum M_B = 0; \quad R_A^{'} = \frac{\overline{F} \cdot 6}{9} = \frac{2}{3}.$$

Максимальный момент

$$M_{\max} = R_A^{'} \cdot 3 = \frac{2}{3} \cdot 3 = 2 \text{ м.}$$

3 Определяем максимальный прогиб балки в месте падения груза при статическом действии нагрузки по любому методу определения перемещений.

Например, по правилу Верещагина

$$\Delta_{ст} = \frac{1}{EI_x}\left(\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 2400\cdot\frac{2}{3}\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 2400\cdot\frac{2}{3}\cdot 1\right)=$$

$$=\frac{7200}{2\cdot 10^{11}\cdot 1840\cdot 10^{-8}}=1{,}95\cdot 10^{-3}\ \text{м}.$$

4 Определяем динамический коэффициент

$$k = 1+\sqrt{1+\frac{2H}{\delta_{ст}}}=1+\sqrt{1+\frac{2\cdot 5\cdot 10^{-3}}{0{,}195\cdot 10^{-3}}}=8{,}2\,.$$

5 Наибольшее нормальное напряжение в балке при ударе

$$\sigma^{d}_{\max}=k\cdot\sigma^{ст}_{\max}=k\cdot\frac{M_{\max}}{W_x}=8{,}2\cdot\frac{2400}{184\cdot 10^{-6}}=107\ \text{МПа}.$$

6 Наибольший прогиб при ударе

$$\Delta_{дин}=k\cdot\Delta_{ст}=8{,}2\cdot 0{,}195=1{,}6\ \text{см}.$$

11 Расчеты сжатых стержней на устойчивость: проверочный, проектировочный, определение несущей способности

Пример 1 **(*проверочный расчет*) –** Проверить устойчивость стального стержня (рисунок 11.1), определить его критическую силу $F_{кр}$ и коэффициент запаса устойчивости n_y.

Исходные данные: R = 200 МПа; γ_c = 0,9; коэффициент приведения длины μ = 0,7; коэффициенты $a = 310$ МПа, $b = 1{,}14$ МПа .

Решение

Площадь сечения $A = 6\cdot 9 = 54\ \text{см}^2$.

Минимальный осевой момент инерции

$$I_y = I_{\min} = \frac{h\cdot b^3}{12}=\frac{9\cdot 6^3}{12}=162\ \text{см}^4\,.$$

Минимальный радиус инерции

$$i_y = i_{\min} = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{162}{54}} = 1,73 \text{ см}.$$

Максимальная гибкость стержня

$$\lambda_{\max} = \frac{\mu \cdot \ell}{i_{\min}} = \frac{0,7 \cdot 2,4}{1,73 \cdot 10^{-2}} = 97,1.$$

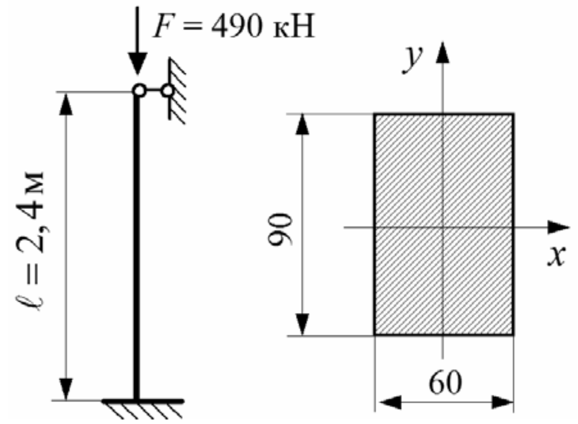


Рисунок 11.1

Определяем коэффициент продольного изгиба φ методом линейной интерполяции, используя данные [8, таблица 5.1]: при $\lambda = 90$ $\varphi = 0,665$; при $\lambda = 100$ $\varphi = 0,599$.

$$\varphi = 0,665 - \frac{0,665 - 0,599}{100 - 90} \cdot (97,1 - 90) = 0,618.$$

Проверяем устойчивость стержня по формуле

$$\sigma = \frac{F}{A} \le \varphi \cdot R \cdot \gamma_c;$$

$$\sigma = \frac{490 \cdot 10^3}{54 \cdot 10^{-4}} = 90,74 \cdot 10^6 \text{ Па} = 90,74 \text{ МПа} < \varphi \cdot R \cdot \gamma_c = 0,618 \cdot 200 \cdot 0,9 = 111,24 \text{ МПа}.$$

Критическую силу определяем по формуле Ясинского, т. к. гибкость стержня меньше предельной гибкости для стали (97,1 < 100):

$$F_{кр} = (a - b \cdot \lambda) \cdot A = (310 \cdot 10^6 - 1,14 \cdot 10^6 \cdot 97,1) \cdot 54 \cdot 10^{-4} = 1076 \cdot 10^3 \text{ Н}.$$

Коэффициент запаса устойчивости найдем по формуле

$$n_y = \frac{F_{кр}}{F} = \frac{1076}{490} = 2,2.$$

Пример 2 (***проектировочный расчет***) **–** Подобрать размеры поперечного сечения стального стержня (рисунок 11.2).

Исходные данные: R = 240 МПа; γ_c = 0,9; коэффициент приведения длины стержня, закрепленного жестко с одной стороны μ = 2.

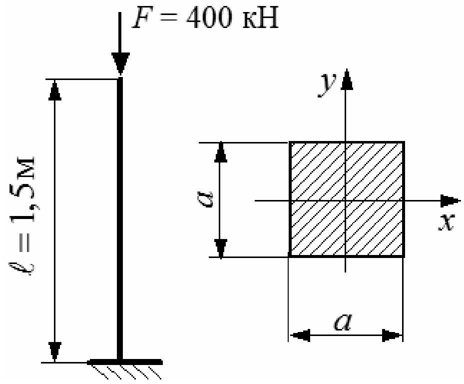
Решение

Расчет ведется методом последовательного приближения.

Первое приближение.

Задаёмся начальным коэффициентом продольного изгиба $\varphi_1 = 0,5$.

Из условия устойчивости вычисляем площадь поперечного сечения



$$A_1 = \frac{F}{\varphi_1 \cdot R \cdot \gamma_c} = \frac{400 \cdot 10^3}{0,5 \cdot 240 \cdot 10^6 \cdot 0,9} = 37 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 .$$

Рисунок 11.2

По найденной площади определяем размеры квадратного поперечного сечения

$$a_1 = \sqrt{A_1} = \sqrt{37 \cdot 10^{-4}} = 0,061 \text{ м}.$$

Вычисляем минимальный радиус инерции этого поперечного сечения

$$i_y = i_x = i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{a^4}{12 \cdot a^2}} = \frac{a^2}{3,46} = \frac{0,061^2}{3,46} = 0,0176 \text{ м}.$$

Определяем гибкость стержня найденного поперечного сечения

$$\lambda_1 = \frac{\mu \cdot \ell}{i_{\min}} = \frac{2 \cdot 1,5}{0,0176} = 170,5.$$

Находим коэффициент продольного изгиба методом линейной интерполяции, используя данные [8, таблица 5.1]: при $\lambda = 170$ $\varphi = 0,218$; при $\lambda = 180$ $\varphi = 0,196$.

$$\varphi_1^{/} = 0,218 - \frac{0,218 - 0,196}{180 - 170} \cdot (170,5 - 170) = 0,217.$$

Сравниваем начальный и конечный коэффициенты продольного изгиба первого приближения: $\varphi_1^{/} \neq \varphi_1$.

Второе приближение.

Определяем начальный коэффициент продольного изгиба

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi_1^{/}}{2} = \frac{0,5 + 0,217}{2} = 0,36.$$

Из условия устойчивости вычисляем площадь поперечного сечения

$$A_2 = \frac{F}{\varphi_2 \cdot R \cdot \gamma_c} = \frac{400 \cdot 10^3}{0,36 \cdot 240 \cdot 10^6 \cdot 0,9} = 51,4 \cdot 10^{-4}\ \text{м}^2.$$

По найденной площади определяем размеры квадратного поперечного сечения

$$a_2 = \sqrt{A_2} = \sqrt{51,4 \cdot 10^{-4}} = 0,072\ \text{м}.$$

Вычисляем минимальный радиус инерции этого поперечного сечения

$$i_{\min} = \frac{a_2^2}{3,46} = \frac{0,072^2}{3,46} = 0,0207\ \text{м}.$$

Определяем гибкость стержня найденного поперечного сечения

$$\lambda_2 = \frac{\mu \cdot \ell}{i_{\min}} = \frac{2 \cdot 1,5}{0,0207} = 144,9.$$

Находим коэффициент продольного изгиба методом линейной интерполяции, используя данные [8, таблица 5.1]: при $\lambda = 140$ $\varphi = 0,315$; при $\lambda = 150$ $\varphi = 0,276$.

$$\varphi_2^{/} = 0,315 - \frac{0,315 - 0,276}{150 - 140} \cdot (144,9 - 140) = 0,296.$$

Сравниваем начальный и конечный коэффициенты продольного изгиба второго приближения: $\varphi_2^{/} \neq \varphi_2$.

Третье приближение.

Определяем начальный коэффициент продольного изгиба

$$\varphi_3 = \frac{\varphi_2 + \varphi_2^{/}}{2} = \frac{0,36 + 0,296}{2} = 0,328.$$

Из условия устойчивости вычисляем площадь поперечного сечения

$$A_3 = \frac{F}{\varphi_3 \cdot R \cdot \gamma_c} = \frac{400 \cdot 10^3}{0,328 \cdot 240 \cdot 10^6 \cdot 0,9} = 56,4 \cdot 10^{-4}\ \text{м}^2.$$

По найденной площади определяем размеры квадратного поперечного сечения

$$a_3 = \sqrt{A_3} = \sqrt{56,4 \cdot 10^{-4}} = 0,075 \text{ м.}$$

Вычисляем минимальный радиус инерции этого поперечного сечения

$$i_{\min} = \frac{a_3^2}{3,46} = \frac{0,075^2}{3,46} = 0,0217 \text{ м}.$$

Определяем гибкость стержня найденного поперечного сечения

$$\lambda_3 = \frac{\mu \cdot \ell}{i_{\min}} = \frac{2 \cdot 1,5}{0,0217} = 138,25.$$

Находим коэффициент продольного изгиба методом линейной интерполяции, используя данные [8, таблица 5.1]: при $\lambda = 130$ $\varphi = 0,364$; при $\lambda = 140$ $\varphi = 0,315$.

$$\varphi_3^{/} = 0,364 - \frac{0,364 - 0,315}{140 - 130} \cdot (138,25 - 130) = 0,324.$$

Сравниваем начальный и конечный коэффициенты продольного изгиба третьего приближения: $\varphi_3^{/} \approx \varphi_3$.

Принимаем квадратное поперечное сечение стержня со стороной 75 мм.

***Пример 3* (*определение несущей способности*)** – Определить допустимое значение сжимающей силы [*F*] стального стержня двутаврового поперечного сечения (рисунок 11.3), его критическую силу $F_{кр}$ и коэффициент запаса устойчивости n_y.

Исходные данные: коэффициент приведения длины $\mu = 0,5$; расчетное сопротивление $R = 200$ МПа; $\gamma_c = 0,8$; модуль упругости $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

Решение

Площадь и минимальный радиус инерции двутавра № 10 следующие: $A = 12$ см^2; $i_y = i_{\min} = 1,22$ см.

Максимальная гибкость стержня

$$\lambda_{\max} = \frac{\mu \cdot \ell}{i_{\min}} = \frac{0,5 \cdot 4}{1,22 \cdot 10^{-2}} = 163,9.$$

Определим коэффициент продольного изгиба φ методом линейной интерполяции, используя данные [8, таблица 5.1]: при λ = 160 φ = 0,29; при λ = 170 φ = 0,259.

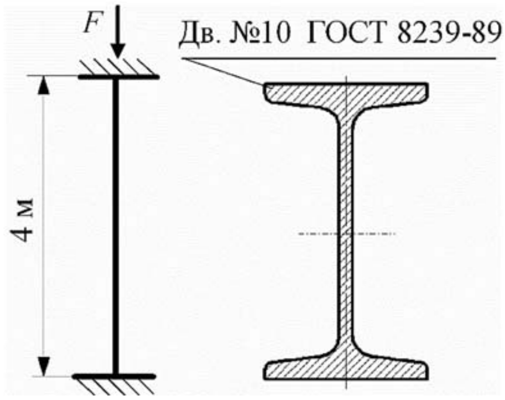


Рисунок 11.3

$$\varphi = 0{,}29 - \frac{0{,}29 - 0{,}259}{170 - 160} \cdot (163{,}9 - 160) = 0{,}278.$$

Из условия устойчивости найдем допустимое значение сжимающей силы

$$[F] = A \cdot \varphi \cdot R \cdot \gamma_c = 12 \cdot 10^{-4} \cdot 0{,}278 \times$$

$$\times 200 \cdot 10^{6} \cdot 0{,}8 = 53{,}4 \cdot 10^{3} \text{ Н} = 53{,}4 \text{ кН}.$$

Критическую силу определяем по формуле Эйлера, т. к. гибкость стержня больше предельной гибкости для стали (163,95 > 100):

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2} \cdot A = \frac{3{,}14^2 \cdot 2 \cdot 10^{11}}{163{,}9^2} \cdot 12 \cdot 10^{-4} = 88{,}1 \cdot 10^3 \text{ Н} = 88{,}1 \text{ кН}.$$

Коэффициент запаса устойчивости найдем по формуле

$$n_y = \frac{F_{кр}}{[F]} = \frac{88{,}1}{53{,}4} = 1{,}65.$$

Тестовые вопросы и задачи для самопроверки

1 Условие устойчивости:

а) $\sigma = A/F \le \varphi \cdot R \cdot \gamma_c$; в) $\sigma = F/A \le R \cdot \gamma_c$;

б) $\sigma = \varphi \cdot F/A \le R \cdot \gamma_c$; г) $\sigma = F/A \le \varphi \cdot R \cdot \gamma_c$.

2 Формула Ясинского для стального стержня справедлива при:

а) $0 < \lambda \le 40$; в) $40 < \lambda \le 100$;

б) $100 < \lambda \le 140$; г) $\lambda \ge 100$.

3 Формула Эйлера для стального стержня справедлива при:

а) $0 < \lambda \le 40$; в) $40 < \lambda \le 100$;

б) $80 < \lambda \le 140$; г) $\lambda \ge 100$.

4 Коэффициент приведения длины μ зависит от:

а) гибкости стержня;
б) условий закрепления стержня;
в) величины критической силы;
г) формы поперечного сечения.

12 Расчет составного сечения продольно сжатого стержня

Пример **–** Определить максимальную гибкость составного сечения колонны, состоящего из двух швеллеров № 18, показанного на рисунке 12.1, *а*. Условия закрепления колонны показаны на рисунке 12.1, *б*.

Исходные данные: коэффициент приведения длины μ = 0,5.

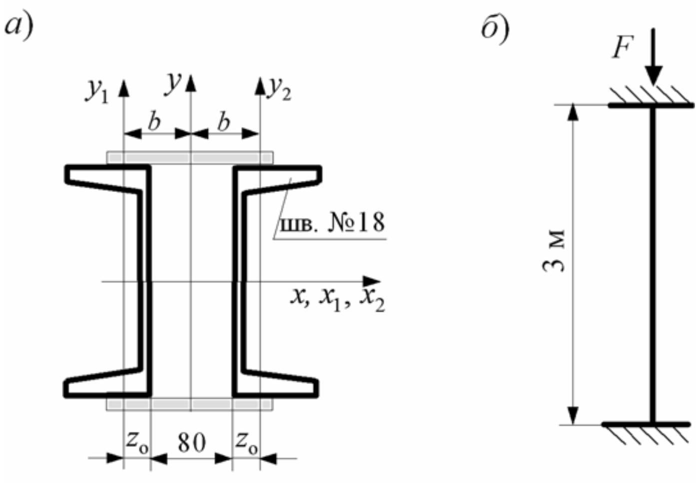


Рисунок 12.1

Решение

Геометрические характеристики швеллера № 18 следующие: $A = 20{,}7$ см^2; $I_{x_1} = 1090$ см^4; $I_{y_1} = 86$ см^4; $z_o = 1{,}94$ см.

Осевые моменты инерции составного сечения:

$$I_x = 2 \cdot I_{x_1} = 2 \cdot 1090 = 2180 \text{ см}^4;$$

$$I_y = 2 \cdot (I_{y_1} + b^2 \cdot A) = 2 \cdot (86 + (1{,}94 + 4)^2 \cdot 20{,}7) = 1632{,}7 \text{ см}^4.$$

Определяем радиусы инерции поперечного сечения:

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{2 \cdot A}} = \sqrt{\frac{2180}{2 \cdot 20{,}7}} = 7{,}26 \text{ см};$$

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{2 \cdot A}} = \sqrt{\frac{1632,7}{2 \cdot 20,7}} = 6,28 \text{ см}.$$

Вычисляем гибкость относительно материальной оси x:

$$\lambda_{мат} = \lambda_x = \frac{\mu \cdot \ell}{i_x} = \frac{0,5 \cdot 6}{7,26 \cdot 10^{-2}} = 41,3.$$

Находим гибкость относительно свободной оси y:

$$\lambda_{св} = \lambda_y = \sqrt{40^2 + \left(\frac{\mu \cdot \ell}{i_y}\right)^2} = \sqrt{40^2 + \left(\frac{0,5 \cdot 6}{6,28 \cdot 10^{-2}}\right)^2} = 62,3.$$

Максимальная гибкость $\lambda_{\max} = 62,3$.

Тестовые вопросы и задачи для самопроверки

1 Свободная ось составного сечения:

а) не проходит через центр тяжести поперечного сечения;
б) является главной центральной осью инерции;
в) проходит через зазор между отдельными частями составного сечения;
г) пересекает поперечное сечение по материалу составных частей.

2 Материальная ось составного сечения:

а) не проходит через центр тяжести поперечного сечения;
б) является главной центральной осью инерции;
в) проходит через зазор между отдельными частями составного сечения;
г) пересекает поперечное сечение по материалу составных частей.

3 Укажите свободные оси для поперечного сечения (рисунок 12.2):

а) только x;
б) только y;
в) нет свободных осей;
г) x и y.

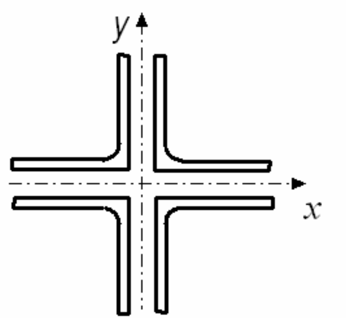


Рисунок 12.2

Список литературы

1 **Кривошапко, С. Н.** Сопротивление материалов: учебник и практикум для прикладного бакалавриата / С. Н. Кривошапко. – Москва: Юрайт, 2016. – 413 с.

2 **Муморцев**, **А. Н.** Сборник задач по сопротивлению материалов: учебное пособие / А. Н. Муморцев, Е. А. Фролов. – Москва: ФОРУМ; ИНФРА-М, 2015. – 112 с. : ил.

3 Сопротивление материалов. Практикум: учебно-методическое пособие / С. И. Зиневич [и др.]. – Минск: Новое знание; Москва: ИНФРА-М, 2015. – 316 с.: ил.

4 **Скопинский, В. Н.** Практическое руководство к расчетам по сопротивлению материалов: учебное пособие / В. Н. Скопинский. – Москва: МГИУ, 2007. – 240 с.

5 **Писаренко, Г. С.** Справочник по сопротивлению материалов / Г. С. Писаренко, Ф. П. Яковлев, В. В. Матвеев. – 5-е изд., перераб. и доп. – Киев: Дельта, 2008. – 816 с.

6 **Подскребко, М. Д.** Сопротивление материалов: учебник для вузов / М. Д. Подскребко. – Минск: Вышэйшая школа, 2007. – 797 с.

7 **Старовойтов, Э. И.** Сопротивление материалов: учебник для вузов / Э. И. Старовойтов. – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2008. – 384 с.

8 Сопротивление материалов. Сопротивление материалов и теория упругости: методические рекомендации к самостоятельной работе для студентов специальностей 1-70 02 01 «Промышленное и гражданское строительство» и 1-70 03 01 «Автомобильные дороги» / Сост. А. А. Катькало, И. А. Леонович. – Могилев: Белорус.-Рос. ун-т, 2015. – 48 с.