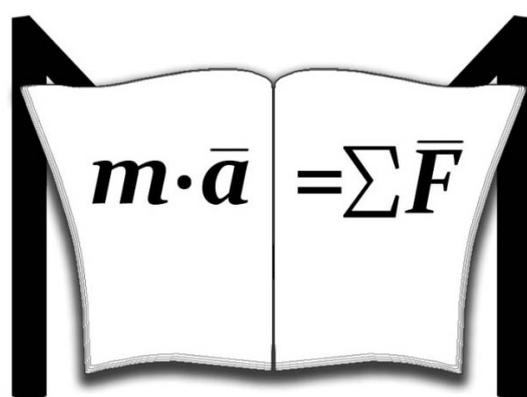


МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Механика»

# СТАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

*Методические рекомендации к практическим занятиям  
для студентов специальности 1-36 01 04 «Оборудование и технологии  
высокоэффективных процессов обработки материалов»  
дневной и заочной форм обучения*



Могилев 2020

УДК 531  
ББК 22.21  
С33

Рекомендовано к изданию  
учебно-методическим отделом  
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Механика» «30» июня 2020 г., протокол № 12

Составители: д-р техн. наук, проф. П. Н. Громыко;  
канд. техн. наук, доц. И. В. Трусов;  
ассистент А. Н. Елисеева

Рецензент А. В. Прудников

Методические рекомендации составлены в соответствии с рабочими программами дисциплины «Статика твердого тела» для студентов специальности 1-36 01 04 «Оборудование и технологии высокоэффективных процессов обработки материалов» дневной и заочной форм обучения. Содержат материал для аудиторной работы студентов.

Учебно-методическое издание

СТАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

|                         |                   |
|-------------------------|-------------------|
| Ответственный за выпуск | П. Н. Громыко     |
| Корректор               | И. В. Голубцова   |
| Компьютерная верстка    | Е. В. Ковалевская |

Подписано в печать . Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.  
Печать трафаретная. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 46 экз. Заказ №

Издатель и полиграфическое исполнение:  
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования  
«Белорусско-Российский университет».  
Свидетельство о государственной регистрации издателя,  
изготовителя, распространителя печатных изданий  
№ 1/156 от 7.03.2019.  
Пр-т Мира, 43, 212022, Могилев.

© Белорусско-Российский  
университет, 2020

## Содержание

|  |    |
|--|----|
| 1 Рекомендации по подготовке к практическим занятиям.....  | 4  |
| 2 Статика.....   | 5  |
| 2.1 Входной рейтинг-контроль. Основные понятия теоретической механики.....   | 5  |
| 2.2 Момент силы относительно точки и оси.....  | 5  |
| 2.3 Пара сил. Основные свойства пары сил.....  | 5  |
| 2.4 Аксиомы статики. Связи. Реакции связей.....  | 5  |
| 2.5 Принцип освобожденности от связей. Основные типы связей и их реакции.....  | 5  |
| 2.6 Плоская система сил.....   | 5  |
| 2.7 Аналитический способ определения равнодействующей системы сходящихся сил.....  | 6  |
| 2.8 Условия равновесия системы сходящихся сил.....   | 6  |
| 2.9 Теорема о равновесии трех непараллельных сил.....  | 7  |
| 2.10 Приведение силы к заданному центру. Приведение произвольной системы сил к силе и паре сил.....  | 8  |
| 2.11 Главный вектор системы сил.....   | 8  |
| 2.12 Главный момент системы сил.....   | 8  |
| 2.13 Произвольная плоская система сил. Приведение плоской системы сил к равнодействующей. Частные случаи приведения плоской системы сил..... | 10 |
| 2.14 Условия равновесия плоской системы сил.....   | 10 |
| 2.15 Сочлененная система сил.....  | 11 |
| 2.16 Равновесие системы тел.....   | 13 |
| 2.17 Понятие о ферме. Статически определимые и статически неопределимые фермы.....   | 14 |
| 2.18 Определение усилий в стержнях плоской фермы.....  | 14 |
| 2.19 Способ вырезания узлов. Способ сечений.....   | 14 |
| 2.20 Пространственная система сил.....   | 18 |
| 2.21 Условия равновесия произвольной пространственной системы сил.....   | 18 |
| 2.22 Сила сцепления. Сила трения скольжения. Условие скольжения и условия отсутствия скольжения.....   | 18 |
| 2.23 Трение качения. Коэффициент трения качения и момент сопротивления качению.....  | 20 |
| 2.24 Равновесие тел при наличии трения.....  | 21 |
| 2.25 Способы определения координат центра тяжести. Центр тяжести некоторых простейших тел.....   | 21 |
| Список литературы.....   | 22 |

## 1 Рекомендации по подготовке к практическим занятиям

Статика твердого тела – фундаментальная дисциплина, которая является базовой для ряда общетехнических и специальных дисциплин: механика материалов, теория механизмов и машин, детали машин, гидравлика, сварные конструкции, теория сварочных процессов и др.

Целью курса является обучение студентов основным законам механики, совершенствование навыков, основанных на законах логического мышления и позволяющих специалисту в дальнейшем самостоятельно повышать свой профессиональный уровень.

Студенты специальности 1-36 01 04 «Оборудование и технологии высокоэффективных процессов обработки материалов» изучают статику твердого тела на протяжении второго семестра. Объемы часов лекций, практических занятий и самостоятельной работы, а также формы контроля приведены в таблице 1.

Таблица 1 – Распределение часов в семестрах по теоретической механике

| Курс | Семестр         | Лекции, ч | Практическое занятие, ч | Самостоятельная работа, ч | Форма контроля | Всего ч/зач. ед. |
|------|-----------------|-----------|-------------------------|---------------------------|----------------|------------------|
| 1    | 2<br>(весенний) | 34        | 50                      | 36                        | Зачет          | 120/3            |

Рейтинг-контроль знаний студентов при изучении курса теоретической механики осуществляется по следующим видам работ:

- проводится опрос по разделам лекционного курса;
- студенты выполняют и защищают индивидуальные задания;
- студенты выполняют восемь контрольных работ;
- на практических занятиях ведется учет активности студентов.

К каждому практическому занятию студент должен:

- проработать по конспекту лекций или учебнику теоретический материал;
- ответить на контрольные вопросы, приведенные в методических рекомендациях;
- составить соответствующие расчетные схемы, вычислить заданные параметры.

На практических занятиях студенты решают задачи из [4] и [5].

Индивидуальные задания выполняются и сдаются в сроки, предусмотренные графиком учебного процесса. Студенты защищают индивидуальные задания во внеучебное время; защита проходит в виде собеседования по заданию.

Студенты, не сдавшие индивидуальные задания, не допускаются к экзамену или зачету по статике твердого тела как не выполнившие график учебного процесса по данной дисциплине.

## 2 Статика

### *2.1 Входной рейтинг-контроль. Основные понятия теоретической механики*

- 1 Входной рейтинг-контроль.
- 2 Основные понятия статики.
- 3 Решить задачи 1.1.5, 1.1.10, 1.1.12, 1.1.31, 1.3.4, 1.3.6, 1.3.9 из [5].

### *2.2 Момент силы относительно точки и оси*

- 1 Дать определение момента силы относительно точки (центра).
- 2 Дать определение линии действия силы.
- 3 Что называется «плечом» силы относительно точки?
- 4 Дать определение момента силы относительно оси.
- 5 Что называется «плечом» силы относительно оси?
- 6 Решить задачи 2.1.1, 2.1.2, 2.1.3, 2.1.4 из [5].

### *2.3 Пара сил. Основные свойства пары сил*

- 1 Дать определение паре сил, плоскости действия пары сил.
- 2 Сформулировать основные свойства пары сил.
- 3 Дать определение момента пары сил.
- 4 Решить задачи 2.1.5, 2.1.6, 2.1.7, 2.1.9 из [5].

### *2.4 Аксиомы статики. Связи. Реакции связей*

- 1 Сформулировать аксиомы статики.
- 2 Назвать две основные задачи статики.
- 3 Дать определения понятий: равновесие тела, связь, реакции связей.

### *2.5 Принцип освобождаемости от связей. Основные типы связей и их реакции*

- 1 Сформулировать принцип освобождаемости от связей.
- 2 Проекция силы на ось.
- 3 Основные типы связей и их реакции.

### *2.6 Плоская система сил*

Контрольная работа № 1. Плоская система сил.

## 2.7 Аналитический способ определения равнодействующей системы сходящихся сил

- 1 Дать определение системы сходящихся сил.
- 2 Как определить равнодействующую системы сходящихся сил?
- 3 Понятие силового многоугольника системы сходящихся сил.
- 4 Решить задачи 2.7 из [4]; 1.2.2, 1.2.7, 1.2.17, 1.2.23 из [5].

## 2.8 Условия равновесия системы сходящихся сил

- 1 Дать определение системы сходящихся сил.
- 2 Дать определение равнодействующей системы сходящихся сил.
- 3 Условие равновесия системы сходящихся сил в векторной форме.
- 4 Условие равновесия системы сходящихся сил в аналитической форме.
- 5 Выполнить индивидуальное задание № 1 «Определение реакций опор твердого тела».
- 6 Решить задачи 2.6, 2.10, 2.19 из [4]; 1.2.9, 1.2.12 из [5].

**Задача 1.** Шар 1 весом 16 Н и шар 2 связаны нитью, перекинутой через блок  $D$ , и удерживаются в равновесии. Определить вес шара 2, если угол  $\alpha = 30^\circ$  (рисунок 1).

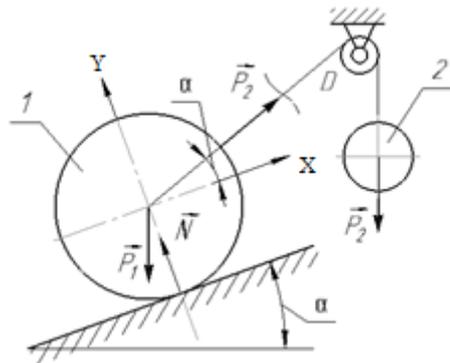


Рисунок 1 – Условие задачи 1

### Решение

Расставим все силы и реакции на расчетной схеме. Применим принцип освобождения от связей. Так как шар 1 удерживается в равновесии шаром 2, то усилие в тросе между двумя шарами будет равно весу шара 2. Шар 1 свободно опирается на наклонную поверхность. В точке касания возникает реакция связи  $N$ , направленная перпендикулярно опоре. Направим оси координат.

Для шара 1 составим уравнение равновесия, спроецировав все силы на координатную ось  $Ox$ :

$$\sum \overline{F_{ix}} = 0 - P_1 \cdot \sin \alpha + P_2 \cdot \cos \alpha = 0. \quad (1)$$

$$P_2 = \frac{P_1 \cdot \sin \alpha}{\cos \alpha} = P_1 \cdot \operatorname{tg} \alpha = 16 \cdot \operatorname{tg} 30^\circ = 9,24 \text{ Н.}$$

Ответ:  $P_2 = 9,24 \text{ Н.}$

## 2.9 Теорема о равновесии трех непараллельных сил

1 Аксиома о равновесии твердого тела, находящегося под действием двух сил.

2 Сформулировать теорему о трех силах.

3 Какие условия необходимы для равновесия системы сил?

**Задача 2.** Какую по модулю силу  $F_3$  надо приложить к сходящимся силам  $F_1 = 2 \text{ Н}$  и  $F_2 = 4 \text{ Н}$ , образующим с осью  $Ox$  углы  $\alpha = 30^\circ$  и  $\beta = 60^\circ$ , чтобы равнодействующая этих трех сил равнялась нулю (рисунок 2)?

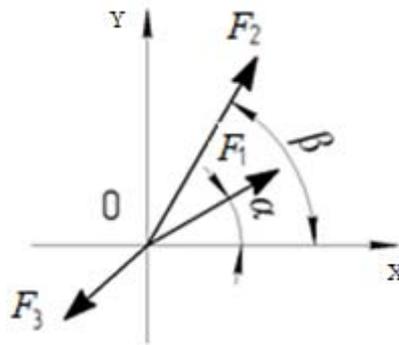


Рисунок 2 – Условие задачи 2

### Решение

Для нахождения равнодействующей сил, расположенных произвольно в плоскости, необходимо спроецировать уравнение  $\vec{R} = \sum \vec{F}_i$  на координатные оси.

Проекция на ось  $Ox$

$$R_x = F_1 \cdot \cos \alpha + F_2 \cdot \cos \beta - F_{3x}. \quad (2)$$

Проекция на ось  $Oy$

$$R_y = F_1 \cdot \sin \alpha + F_2 \cdot \sin \beta - F_{3y}. \quad (3)$$

Так как  $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$ , то равнодействующая будет равна нулю, когда

каждое слагаемое будет равно нулю:

$$0 = F_1 \cdot \cos \alpha + F_2 \cdot \cos \beta - F_{3X}; \quad (4)$$

$$0 = F_1 \cdot \sin \alpha + F_2 \cdot \sin \beta - F_{3Y}. \quad (5)$$

Из полученных уравнений находим проекции силы  $\vec{F}_3$  на координатные оси  $Ox$  и  $Oy$ :

$$F_{3X} = F_1 \cdot \cos \alpha + F_2 \cdot \cos \beta = 2 \cdot \cos 30^\circ + 4 \cdot \cos 60^\circ = 3,73 \text{ Н};$$

$$F_{3Y} = F_1 \cdot \sin \alpha + F_2 \cdot \sin \beta = 2 \cdot \sin 30^\circ + 4 \cdot \sin 60^\circ = 4,46 \text{ Н}.$$

Тогда

$$F_3 = \sqrt{F_{3X}^2 + F_{3Y}^2} = \sqrt{3,73^2 + 4,46^2} = 5,81 \text{ Н}.$$

Ответ:  $F_3 = 5,81 \text{ Н}$ .

### ***2.10 Приведение силы к заданному центру. Приведение произвольной системы сил к силе и паре сил***

- 1 Пара сил, плоскость действия пары сил, момент пары сил.
- 2 Приведение силы к заданному центру (метод Пуансо).
- 3 Решить задачи 5.4.3, 5.4.7, 5.4.11, 5.4.22 из [5].

### ***2.11 Главный вектор системы сил***

- 1 Дать определение главного вектора системы сил.
- 2 Проекция главного вектора на координатные оси.
- 3 Графический способ определения главного вектора.
- 4 Аналитический способ определения главного вектора.
- 5 Решить задачи 2.2.9, 2.2.12, 2.2.17 из [5].

### ***2.12 Главный момент системы сил***

- 1 Дать определение главного момента системы сил.
- 2 Аналитический способ определения главного момента системы сил.
- 3 Зависимость между главными моментами относительно различных центров приведения.
- 4 Решить задачи 2.2.2, 2.2.6, 2.2.10, 2.2.13 из [5].

**Задача 3.** Привести систему сил, действующую на куб, к простейшему виду, если  $a = 2 \text{ м}$ ,  $F_1 = 8 \text{ Н}$ ,  $F_2 = 16 \text{ Н}$ ,  $F_3 = 8 \text{ Н}$ ,  $F_4 = 8\sqrt{2} \text{ Н}$  (рисунок 3).

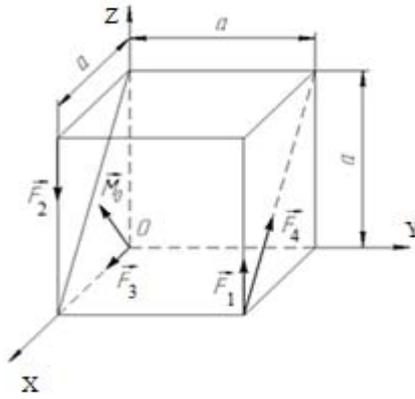


Рисунок 3 – Условие задачи 3

*Решение*

Определим модуль и направление главного вектора:

$$R_X = \sum_{i=1}^n F_{iX} = F_3 - F_4 \cdot \cos 45^\circ = 8 - 8\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0; \quad (6)$$

$$R_Y = \sum_{i=1}^n F_{iY}; \quad (7)$$

$$R_Z = \sum_{i=1}^n F_{iZ} = F_1 - F_2 + F_4 \cdot \cos 45^\circ = 8 - 16 + 8\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0; \quad (8)$$

$$R = \sqrt{R_X^2 + R_Y^2 + R_Z^2} = 0. \quad (9)$$

Определим модуль и направление главного момента:

$$M_X = F_1 \cdot a - F_4 \cdot a \cdot \sin 45^\circ = 8 \cdot 2 + 8\sqrt{2} \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 32 \text{ Н}\cdot\text{м};$$

$$M_Y = F_2 \cdot a - F_2 \cdot a + F_4 \cdot a \cdot \cos 45^\circ = 16 \cdot 2 - 8 \cdot 2 - 8\sqrt{2} \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \text{ Н}\cdot\text{м};$$

$$M_Z = F_4 \cdot a \cdot \cos 45^\circ = 8\sqrt{2} \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 16 \text{ Н}\cdot\text{м};$$

$$M_0 = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} = 0 \text{ Н}\cdot\text{м};$$

$$\cos(x, \hat{\overrightarrow{M_0}}) = \frac{M_x}{M_0} = \frac{32}{16\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}; \quad (10)$$

$$\cos(z, \hat{\overrightarrow{M_0}}) = \frac{M_z}{M_0} = \frac{16}{16\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}. \quad (11)$$

Следовательно, система сил приводится к главному моменту, лежащему в плоскости  $Oxz$ . Направление главного момента определяется найденными косинусами.

### 2.13 Произвольная плоская система сил. Приведение плоской системы сил к равнодействующей. Частные случаи приведения плоской системы сил

- 1 Момент силы относительно точки.
- 2 Сформулировать теорему о моменте равнодействующей силы.
- 3 Как определяется равнодействующая распределенных сил (прямоугольный, треугольный и трапецидальный законы распределения)?
- 4 Метод Пуансо и основная теорема статики.
- 5 Решить задачи 7.6, 7.11 из [4]; 1.1.4, 1.1.10, 2.2.13, 2.2.19 из [5].

### 2.14 Условия равновесия плоской системы сил

- 1 Написать уравнения равновесия произвольной плоской системы сил в векторном виде.
- 2 Различные формы уравнений равновесия произвольной плоской системы сил в аналитическом виде.
- 3 Условия равновесия плоской системы параллельных сил.
- 4 Решить задачи 4.27, 4.29 из [4]; 2.3.11, 2.4.2, 2.4.10, 2.4.24 из [5].

**Задача 4.** Определить реакции опор балки  $AB$  (рисунок 4), если  $F=10$  кН,  $q=2$  кН/м,  $M=3$  кН·м.

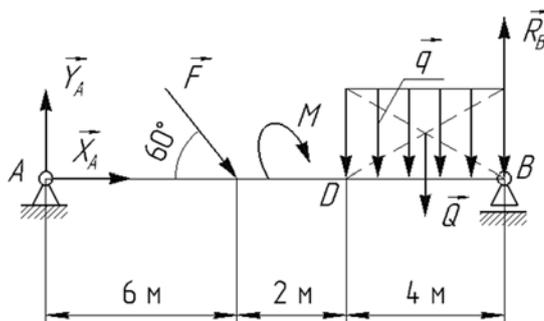


Рисунок 4 – Условие задачи 4

#### Решение

Рассмотрим равновесие балки  $AB$  под действием силы  $F$ , момента  $M$ , равномерно распределенной нагрузки и реакций связей  $\vec{X}_A$ ,  $\vec{Y}_A$ ,  $\vec{R}_B$ .

Составим три уравнения равновесия по первой форме. Равномерно распределенную нагрузку заменим равнодействующей  $Q = 4q = 8$  кН, которая приложена в середине участка  $BD$ :

$$\sum_{i=1}^n F_{iX} = X_A + F \cdot \cos 60^\circ = 0; \quad (12)$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iY} = Y_A - F \cdot \sin 60^\circ - Q + R_B = 0; \quad (13)$$

$$\sum_{i=1}^n \vec{M}_A(\vec{F}_i) = -6 \cdot F \cdot \sin 60^\circ - M - 10 \cdot Q + 12 \cdot R_B = 0. \quad (14)$$

Из (12) находим

$$X_A = -F \cdot \cos 60^\circ = -10 \cdot 0,5 = -5 \text{ кН};$$

из (14)

$$R_B = \frac{6 \cdot F \cdot \sin 60^\circ + M + 10 \cdot Q}{12} = \frac{6 \cdot 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 3 + 10 \cdot 8}{12} = 11,25 \text{ кН};$$

из (13)

$$Y_A = F \cdot \sin 60^\circ + Q - R_B = 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 8 - 11,25 = 5,41 \text{ кН}.$$

*Ответ:*  $X_A = -5$  кН,  $Y_A = 5,41$  кН,  $R_B = 11,25$  кН.

Знак «минус» показывает, что направление  $X_A$  противоположно направлению, отображенному на рисунке 4.

## 2.15 Сочлененная система тел

1 Дайте определение понятия сочлененной системы тел.

2 Статически определимые и статически неопределимые системы.

3 Методика расчета сочлененных систем тел: возможные варианты составления расчетных схем, используемые аксиомы, количество линейно независимых уравнений равновесия.

4 Решить задачи 8.14, 8.15, 8.16, 8.24 из [4]; 5.7.2, 5.7.7, 5.7.9, 5.7.13 из [5].

5 Контрольная работа № 2. Равновесие плоской системы сил.

**Задача 5.** Определить реакции опор  $A$ ,  $B$  и шарнира  $C$  составной балки (рисунок 5), если  $M = 8$  кНм,  $q = 2$  кН/м,  $P = 6$  кН.

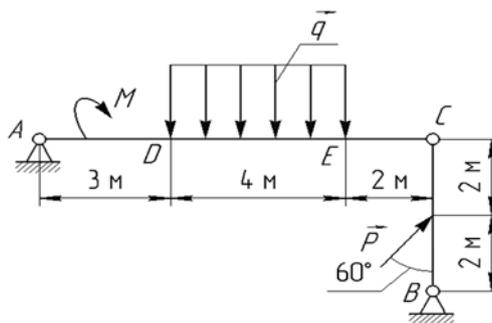


Рисунок 5 – Условие задачи 5

## Решение

Расчленим составную балку по шарниру  $C$  и рассмотрим равновесие балки  $AC$  под действием момента  $M$ , равномерно распределенной нагрузки интенсивностью  $q$  и реакций  $\vec{X}_A, \vec{Y}_A$  шарнирно-неподвижной опоры  $A$  и реакций  $\vec{X}_C, \vec{Y}_C$  шарнира  $C$  (рисунок 6).

Для полученной уравновешенной плоской произвольной системы сил составим три уравнения равновесия. Заменим равномерно распределенную нагрузку сосредоточенной силой  $Q = 4q = 8 \text{ кН}$ , приложенной к середине нагруженного участка  $DE$ . Направление осей координат показано на рисунке 6.

$$\sum_{i=1}^n F_{iX} = X_A + X_C = 0; \quad (15)$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iY} = Y_A + Y_C - Q = 0; \quad (16)$$

$$\sum_{i=1}^n \vec{M}_A(\vec{F}_i) = -M - Q \cdot 5 + Y_C \cdot 9 = 0. \quad (17)$$

Теперь рассмотрим равновесие другой части, на которую действуют сила  $\vec{P}$ , реакции шарнирно-неподвижной опоры  $B$  и реакции шарнира  $C$  (рисунок 7).

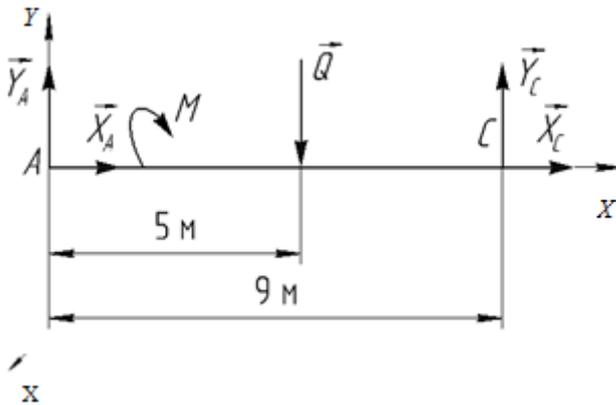


Рисунок 6 – Первая часть задачи 5

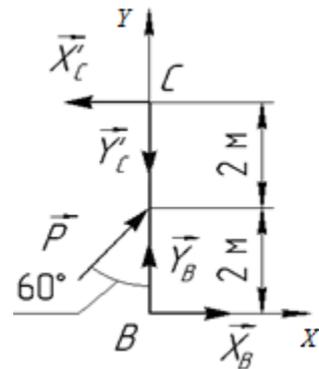


Рисунок 7 – Вторая часть задачи 5

На основании аксиомы действия-противодействия реакции в шарнире  $C$  равны по модулю и противоположно направлены:

$$X_C = X'_C; Y_C = Y'_C;$$

$$\vec{X}_C = -\vec{X}'_C; \vec{Y}_C = -\vec{Y}'_C.$$

Для полученной уравновешенной плоской произвольной системы сил составим три уравнения равновесия:

$$\sum_{i=1}^n F_{iX} = X_B - X'_C + P \cdot \cos 30^\circ = 0; \quad (18)$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iY} = -Y'_C + P \cdot \sin 30^\circ + Y_B = 0; \quad (19)$$

$$\sum_{i=1}^n \vec{M}_C(\vec{F}_i) = P \cdot 2 \cos 30^\circ + X_B \cdot 4 = 0. \quad (20)$$

Находим из уравнения (20)

$$X_B = \frac{-P \cdot 2 \cos 30^\circ}{4} = \frac{-6 \cdot 2 \cos 30^\circ}{4} = -2,6 \text{ кН};$$

из (18)

$$X'_C = X_B + P \cdot \cos 30^\circ = -2,6 + 6 \cos 30^\circ = 2,6 \text{ кН};$$

из (17)

$$Y_C = \frac{M + Q \cdot 5}{9} = \frac{8 + 8 \cdot 5}{9} = 5,33 \text{ кН};$$

из (19)

$$Y_B = -P \cdot \sin 30^\circ + Y'_C = -6 \sin 30^\circ + 5,33 = 2,33 \text{ кН};$$

из (16)

$$Y_A = -Y_C + Q = -5,33 + 8 = 2,67 \text{ кН};$$

из (15)

$$X_A = -X_C = -2,6 \text{ кН}.$$

*Ответ:*  $X_A = -2,6$  кН,  $Y_A = 2,67$  кН,  $X_B = -2,6$  кН,  $Y_B = 2,33$  кН,  $X_C = 2,6$  кН,  $Y_C = 5,33$  кН.

Знак «минус» показывает, что реакции  $X_A$  и  $X_B$  направлены противоположно направлениям, отображенным на рисунках 6 и 7.

### 2.16 Равновесие системы тел

1 Дайте определение понятия сочлененной системы тел.

2 Условие равновесия произвольной плоской системы сил.

3 Методика расчета сочлененных систем тел: возможные варианты составления расчетных схем, используемые аксиомы, количество линейно независимых уравнений равновесия.

4 Выполнить индивидуальное задание № 2 «Определение реакций опор составной конструкции (система двух тел)».

### 2.17 Понятие о ферме. Статически определимые и статически неопределимые фермы

- 1 Что такое ферма?
- 2 Какую ферму называют плоской?
- 3 Простейшая и простая плоские фермы.
- 4 Решить задачи 4.1.2, 4.1.4, 4.1.6, 4.1.8 из [5].

### 2.18 Определение усилий в стержнях плоской фермы

- 1 К чему сводится расчет ферм?
- 2 Назовите основные допущения при расчете ферм.
- 3 Какими способами производится расчет ферм?
- 4 Решить задачи 4.1.1, 4.1.3, 4.1.5, 4.1.7 из [5].

### 2.19 Способ вырезания узлов. Способ сечений

- 1 Назовите способы определения усилий в стержнях фермы.
- 2 В чем заключается способ вырезания узлов?
- 3 Сколько и каких уравнений равновесия можно составить для одного узла фермы?
- 4 В чем заключается способ сечений?
- 5 Что называется «точкой Риттера»?
- 6 Решить задачи 4.2.3, 4.2.5, 4.2.12, 4.3.4, 4.3.13, 4.3.15 из [5].

**Задача 6.** Определить опорные реакции и усилия в стержнях фермы, если  $P_1 = 20 \text{ Н}$ ,  $P_2 = 40 \text{ Н}$ ,  $\alpha = 30^\circ$ ,  $a = 4 \text{ м}$  (рисунок 8).

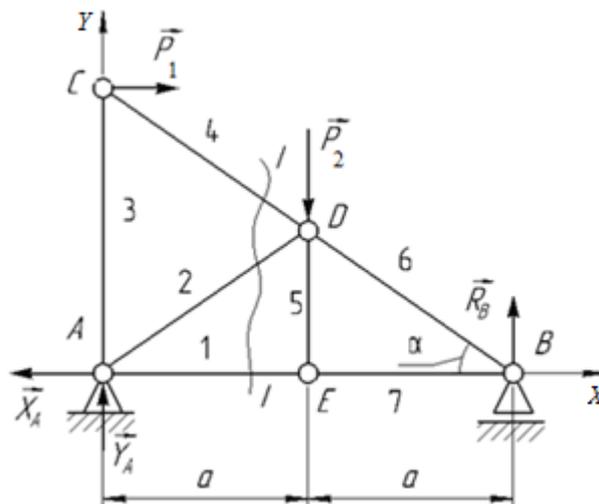


Рисунок 8 – Условие задачи 6

## Решение

Рассмотрим равновесие фермы, считая ее абсолютно твердым телом. Отбросим связи и заменим их реакциями связей.

На опоре  $A$  имеются две составляющие  $\vec{X}_A$  и  $\vec{Y}_A$ , на опоре  $B$  – одна составляющая  $\vec{R}_B$ . Для полученной уравновешенной плоской произвольной системы сил составим три уравнения равновесия и найдем реакции связей:

$$\sum F_{iX} = -X_A + P_1 = 0 ; \quad (21)$$

$$\sum F_{iY} = -Y_A + R_B - P_2 = 0 ; \quad (22)$$

$$\sum M_A(\vec{F}_i) = -P_1 \cdot 2a \cdot \operatorname{tg}\alpha - P_2 \cdot a + R_B \cdot 2a = 0 . \quad (23)$$

Находим из первого уравнения

$$X_A = P_1 - 20 \text{ Н};$$

из третьего

$$R_B = \frac{P_1 \cdot 2a \cdot \operatorname{tg}\alpha + P_2 \cdot a}{2a} = \frac{20 \cdot 2 \cdot 4 \cdot \operatorname{tg}30^\circ + 40 \cdot 4}{2 \cdot 4} = 31,55 \text{ Н};$$

из второго

$$Y_A = -R_B + P_2 = -31,55 + 40 = 8,45 \text{ Н}.$$

Определение усилий в стержнях начинаем с узла  $B$  (рисунок 9), где число неизвестных равно двум. Составим для узла  $B$  два уравнения равновесия в проекции на оси  $x$  и  $y$ . Направление осей показано на рисунке 8.

$$\sum F_{iX} = -S_7 - S_6 \cdot \cos \alpha ;$$

$$\sum F_{iY} = R_B + S_6 \cdot \sin \alpha .$$

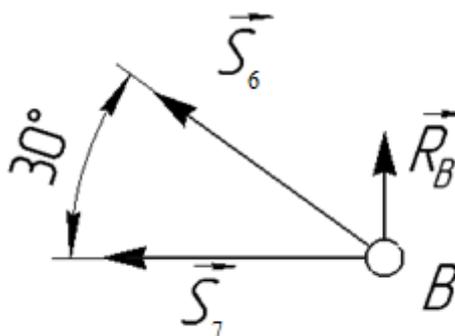


Рисунок 9 – Первая часть задачи 6

Находим из второго уравнения

$$S_6 = \frac{-R_B}{\sin \alpha} = \frac{-31,55}{\sin 30^\circ} = -63,1 \text{ Н};$$

из первого

$$S_7 = -S_6 \cdot \cos \alpha = 63,1 \cdot \cos 30^\circ = 54,65 \text{ Н}.$$

Рассмотрим узел  $E$  (рисунок 10).  
Составим два уравнения равновесия:

$$\sum F_{iX} = S_7' - S_1 = 0;$$

$$\sum F_{iY} = S_5 = 0.$$

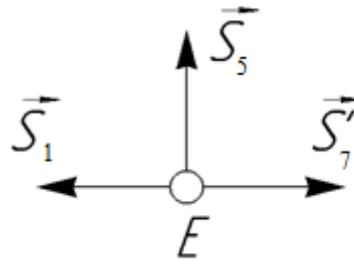


Рисунок 10 – Вторая часть задачи 6

Из первого уравнения находим

$$S_1 = S_7' = 54,65 \text{ Н.}$$

Рассмотрим узел  $C$  (рисунок 11).  
Составим два уравнения равновесия:

$$\sum F_{iX} = S_4 \cdot \cos \alpha + P_1 = 0;$$

$$\sum F_{iY} = -S_3 - S_4 \cdot \sin \alpha = 0.$$

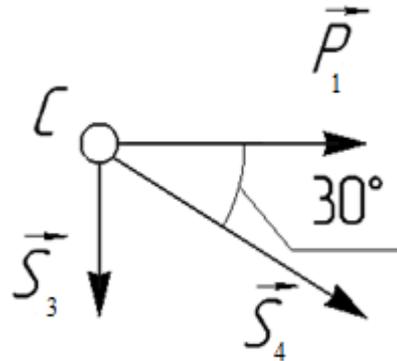


Рисунок 11 – Третья часть задачи 6

Находим из первого уравнения

$$S_4 = \frac{P_1}{\cos \alpha} = \frac{-20}{\cos 30^\circ} = -23,09 \text{ Н;}$$

из второго

$$S_3 = -S_4 \cdot \sin \alpha = 23,09 \cdot \sin 30^\circ = 11,55 \text{ Н.}$$

Рассмотрим узел  $A$  (рисунок 12).  
Составим одно уравнение равновесия:

$$\sum F_{iY} = Y_A + S_3 + S_2 \cdot \sin \alpha = 0.$$

Находим

$$S_2 = \frac{-Y_A - S_3}{\sin \alpha} = \frac{-8,45 - 11,55}{\sin 30^\circ} = -40 \text{ Н.}$$

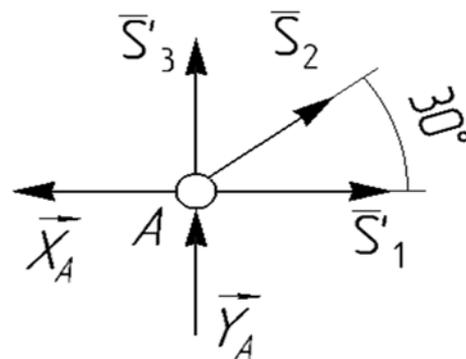


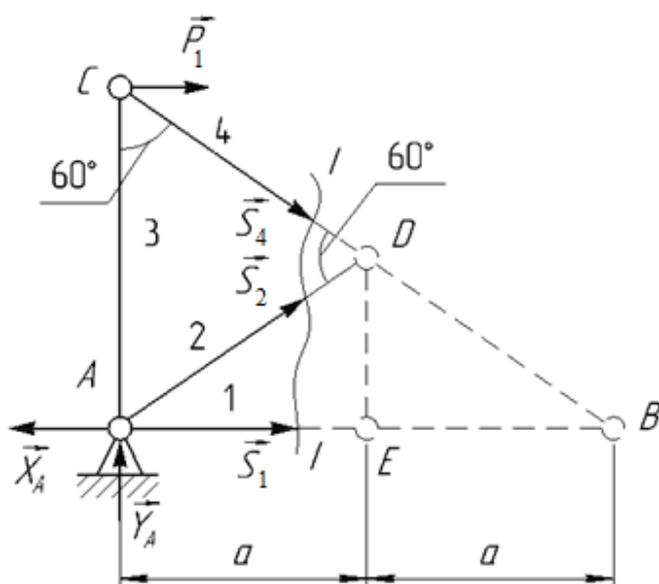
Рисунок 12 – Четвертая часть задачи 6

Результаты вычислений сведем в таблицу 2.

Таблица 2 – Результаты вычислений задачи 9

| Параметры   | Номер стержня |    |       |      |   |      |       |
|-------------|---------------|----|-------|------|---|------|-------|
|             | 1             | 2  | 3     | 4    | 5 | 6    | 7     |
| Знак усилия | +             | -  | +     | -    | 0 | -    | +     |
| Усилие, Н   | 54,56         | 40 | 11,55 | 23,1 | 0 | 63,1 | 54,65 |

Знак «минус» показывает, что стержни 2, 4, 6 сжаты, а не растянуты, как предполагалось.



Для фермы, рассмотренной ранее, найти усилия в стержнях 1, 2, 4.

Рисунок 13 – Условие задачи 6

### Решение

Произведем сечение через стержни (1, 2, 4) и рассмотрим равновесие сечения  $I-I$ , лежащего слева (рисунок 13). Составим уравнение моментов относительно точки  $D$ :

$$\sum M_D(\vec{F}_i) = -X_A \cdot a \cdot \operatorname{tg} \alpha - P_1 \cdot a \cdot \operatorname{tg} \alpha - Y_A \cdot a + S_1 \cdot a \cdot \operatorname{tg} \alpha = 0.$$

Находим

$$S_1 = \frac{X_A \cdot a \cdot \operatorname{tg} \alpha + P_1 \cdot a \cdot \operatorname{tg} \alpha + Y_A \cdot a}{a \cdot \operatorname{tg} \alpha} = \frac{20 \cdot 4 \cdot \operatorname{tg} 30^\circ + 20 \cdot 4 \cdot \operatorname{tg} 30^\circ + 8,45 \cdot 4}{4 \cdot \operatorname{tg} 30^\circ} = 54,64 \text{ Н.}$$

Составим уравнение моментов относительно точки  $A$ :

$$\sum M_A(\vec{F}_i) = -P_1 \cdot AC - S_4 \cdot AC \cdot \cos \alpha = 0;$$

$$S_4 = \frac{P_1 \cdot AC}{AC \cdot \cos \alpha} = \frac{-20}{\cos 30^\circ} = -23,1 \text{ Н.}$$

Для определения  $S_2$  рассмотрим равновесие сечения  $I-I$ , лежащего справа (рисунок 14).

Составим уравнение моментов относительно точки  $B$ :

$$\sum M_B(\vec{F}_i) = P_2 \cdot a + S_2 \cdot \cos \alpha \cdot a \cdot \operatorname{tg} \alpha + S_2 \cdot \sin \alpha \cdot a = 0;$$

$$S_2 = \frac{-P_2 \cdot a}{\cos \alpha \cdot a \cdot \operatorname{tg} \alpha + \sin \alpha \cdot a} = \frac{-40}{\sin 30^\circ + \sin 30^\circ} = -40 \text{ Н.}$$

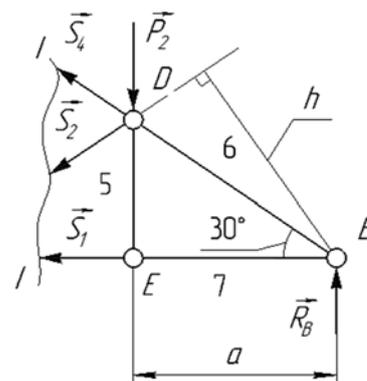


Рисунок 14 – Решение задачи 6

Результаты, полученные способами вырезания узлов и Риттера, совпадают.

## 2.20 Пространственная система сил

- 1 Проекция силы на ось.
- 2 Момент силы относительно оси.
- 3 Главный вектор и главный момент пространственной системы сил.
- 4 Основные типы связей и их реакции для произвольной пространственной системы сил.
- 5 Контрольная работа № 3. Пространственная система сил.

## 2.21 Условия равновесия произвольной пространственной системы сил

- 1 Запишите геометрические и аналитические условия равновесия произвольной пространственной системы сил.
- 2 Количество линейно независимых уравнений равновесия.
- 3 Методика расчета сочлененных систем тел: возможные варианты составления расчетных схем, используемые аксиомы.
- 4 Решить задачи 8.14, 8.15, 8.16, 8.24 из [4]; 5.7.2, 5.7.7, 5.7.9, 5.7.13 из [5].

## 2.22 Сила сцепления. Сила трения скольжения. Условие скольжения и условия отсутствия скольжения

- 1 Запишите формулу для определения значения максимальной силы сцепления.
- 2 Дайте определение трения скольжения. В чем разница между силой сцепления и силой трения скольжения?
- 3 Что называют углом трения, конусом трения?
- 4 Условия наличия и отсутствия скольжения.
- 5 Что Вы знаете о коэффициенте трения скольжения и его размерности?

6 Решить задачи 2.5.2, 2.5.4, 2.5.8 из [5].

7 Выполнить индивидуальное задание № 3 «Равновесие тел с учетом сцепления».

**Задача 7.** Каким должен быть вес тела  $l$ , для того чтобы началось скольжение вверх по наклонной плоскости, если  $F = 90$  Н, а коэффициент трения скольжения  $f = 0,3$  (рисунок 15)?

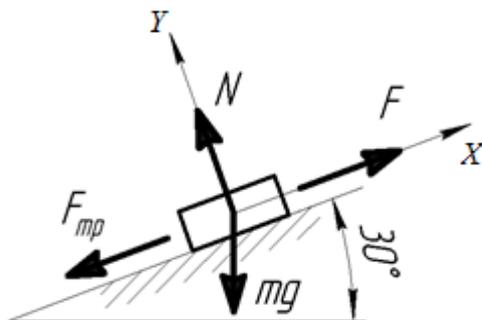


Рисунок 15 – Условие задачи 7

*Решение*

Для решения задачи составим уравнение равновесия в проекциях на ось  $x$ :

$$\sum F_x = 0; \quad (24)$$

$$F - F_{\text{тр}} - G \cdot \sin 30^\circ = 0. \quad (25)$$

Сила трения скольжения определяется из выражения

$$F_{\text{тр}} = f \cdot N, \quad (26)$$

где  $N$  – нормальная составляющая полной реакции опоры.

Для определения силы  $N$  составим уравнения проекций на ось  $Y$ :

$$\sum F_Y = 0; \quad (27)$$

$$N - G \cdot \cos 30^\circ = 0; \quad N = G \cdot \cos 30^\circ; \quad (28)$$

$$F - f \cdot G \cdot \cos 30^\circ - G \cdot \sin 30^\circ = 0. \quad (29)$$

Из полученного выражения вес

$$G = \frac{F}{f \cdot \cos 30^\circ + \sin 30^\circ}.$$

Подставляя числовые значения, имеем  $G = \frac{90}{0,3 \cdot \cos 30^\circ + \sin 30^\circ} = 118,45 \text{ Н}$ .

Ответ:  $G = 118,45 \text{ Н}$ .

### 2.23 Трение качения. Коэффициент трения качения и момент сопротивления качению

- 1 Дайте определение трения качения.
- 2 Как определяется момент сопротивления качению?
- 3 Условия наличия и отсутствия качения.
- 4 Решить задачи 2.6.4, 2.6.11, 2.6.12, 2.6.13 из [5].

**Задача 8.** На наклонной поверхности находится цилиндр радиусом  $r$  (рисунок 16). Определить, при каких углах  $\alpha$  наклона плоскости к горизонту цилиндр будет находиться в равновесии, если  $f$  – коэффициент трения скольжения,  $f_k$  – коэффициент трения качения.

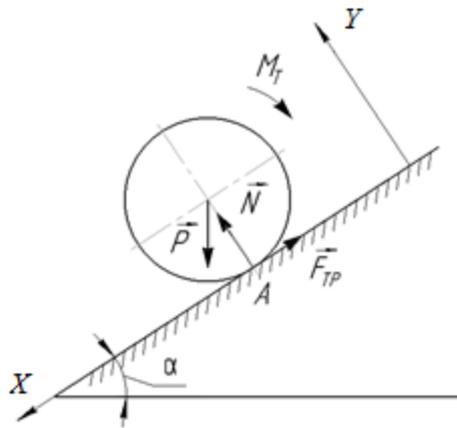


Рисунок 16 – Условие задачи 8

#### Решение

Изобразим действующие на цилиндр силы. Силу трения скольжения направим вверх по наклонной поверхности, момент трения качения – по часовой стрелке, одну из осей – по наклонной поверхности (см. рисунок 16).

Составим три уравнения равновесия для уравновешенной плоской произвольной системы сил:

$$\sum F_{iX} = -F_{mp} + P \cdot \sin \alpha = 0; \quad (30)$$

$$\sum F_{iY} = N + P \cdot \cos \alpha = 0; \quad (31)$$

$$\sum M_A(\vec{F}_i) = M_T - P \cdot \sin \alpha \cdot r = 0. \quad (32)$$

Находим из первого уравнения

$$F_{mp} = P \cdot \sin \alpha ;$$

из второго

$$N = P \cdot \cos \alpha ;$$

из третьего

$$M_T = P \cdot \sin \alpha \cdot r .$$

Для равновесия необходимо, чтобы выполнялись следующие неравенства:

$$F_{mp} \leq f \cdot N ; M_T = f_k \cdot N. \quad (33)$$

Подставим  $F_{mp}$ ,  $N$ ,  $M_T$  в неравенства (13):

$$P \cdot \sin \alpha \leq f \cdot P \cdot \cos \alpha \rightarrow \operatorname{tg} \alpha \leq f ; \quad (34)$$

$$P \cdot \sin \alpha \cdot r \leq f_k \cdot P \cdot \cos \alpha \rightarrow \operatorname{tg} \alpha \leq \frac{f_k}{r} . \quad (35)$$

Для равновесия цилиндра на наклонной поверхности необходимо, чтобы неравенства (34) и (35) выполнялись одновременно.

Если  $\frac{f_k}{r} \leq f$ , то потеря равновесия произойдет путем перехода к качению, так как нарушится неравенство (35).

Если  $\frac{f_k}{r} \geq f$ , то потеря равновесия произойдет за счет трения скольжения, так как нарушится неравенство (34).

## ***2.24 Равновесие тел при наличии трения***

Контрольная работа № 4. Равновесие тел при наличии трения.

## ***2.25 Способы определения координат центра тяжести. Центр тяжести некоторых простейших тел***

1 Центр тяжести твердого тела.

2 Центр тяжести объема, площади, линии.

3 Способы определения положения центров тяжести тел.

4 Решить задачи 9.7, 9.12, 9.27 из [4]; 6.1.11, 6.2.8, 6.2.10, 6.3.8, 6.3.10 из [5].

## Список литературы

1 **Цивильский, В. Л.** Теоретическая механика: учебник / В. Л. Цивильский. – 4-е изд., перераб. и доп. – Москва: КУРС; ИНФРА-М, 2016. – 368 с.

2 **Чигарев, А. В.** Теоретическая механика. Решение задач: учебное пособие / А. В. Чигарев, Ю. В. Чигарев, И. С. Крук. – Минск: Минфин, 2016. – 478 с.

3 Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике. Теория. Задания. Подробные примеры решения задач: учебное пособие / Б. Е. Ермаков [и др.]; под общ. ред. Б. Е. Ермакова. – Москва: ЛЕНАНД, 2015. – 464 с.

4 **Мещерский, И. В.** Задачи по теоретической механике: учебное пособие / И. В. Мещерский; под ред. В. А. Пальмова, Д. Р. Меркина. – 46-е изд., стереотип. – Москва: Лань, 2006. – 448 с.

5 Сборник коротких задач по теоретической механике: учебное пособие для вузов / Под ред. О. Э. Кепе. – Санкт-Петербург: Лань, 2009. – 368 с.

6 **Бать, И. М.** Теоретическая механика в примерах и задачах: учебное пособие для вузов / М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон. – Москва: Наука, 1990. – Т. 1–3. – 1655 с.

7 **Кирсанов, М. Н.** Теоретическая механика. Сборник задач: учебное пособие / М. Н. Кирсанов. – Москва: ИНФРА-М, 2015. – 430 с.