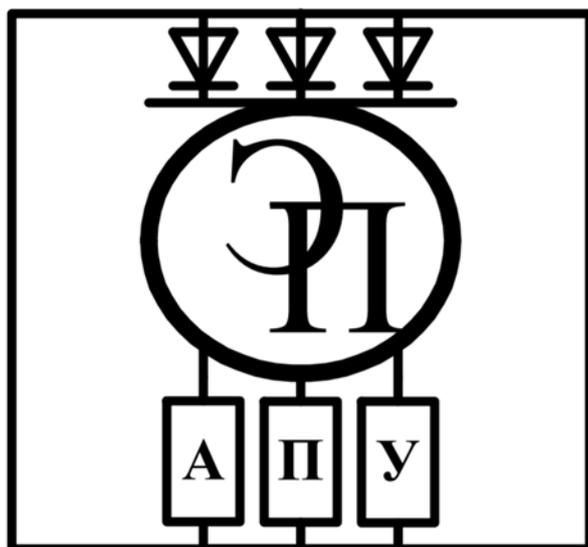


МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Электропривод и АПУ»

# ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

*Методические рекомендации к практическим занятиям для  
студентов специальности 1-53 01 05 «Автоматизированные  
электроприводы» очной и заочной форм обучения*



Могилев 2020

УДК 621.317  
ББК 31.21  
Т45

Рекомендовано к изданию  
учебно-методическим отделом  
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой ЭПиАПУ «30» августа 2019 г., протокол № 1

Составитель ст. преподаватель И. С. Стасенко

Рецензент канд. техн. наук, доц. С. В. Болотов

Методические рекомендации предназначены к практическим занятиям для студентов специальности 1-53 01 05 «Автоматизированные электроприводы» очной и заочной форм обучения.

Учебно-методическое издание

## ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Ответственный за выпуск	Г. С. Ленеvский
Корректор	Е. А. Галковская
Компьютерная верстка	Е. В. Ковалевская

Подписано в печать . Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.  
Печать трафаретная. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 81 экз. Заказ №

Издатель и полиграфическое исполнение:  
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования  
«Белорусско-Российский университет».  
Свидетельство о государственной регистрации издателя,  
изготовителя, распространителя печатных изданий  
№ 1/156 от 07.03.2019.  
Пр-т Мира, 43, 212022, Могилёв.

© Белорусско-Российский  
университет, 2020

## Содержание

Введение.....	4
1 Практическая работа № 1. Методы решения линейных дифференциальных уравнений .....	5
2 Практическая работа № 2. Применение преобразования Лапласа для решения дифференциальных уравнений .....	10
3 Практическая работа № 3. Типовые динамические звенья .....	18
4 Практическая работа № 4. Структурные преобразования.....	22
5 Практическая работа № 5. Устойчивость САР .....	26
6 Практическая работа № 6. Показатели качества САР.....	31
Список литературы .....	35

## **Введение**

Проектирование систем автоматического управления (САУ) – многоэтапный процесс, эффективность которого во многом определяется правильным применением основных принципов построения сложных систем.

Практические занятия являются важным этапом в формировании и закреплении навыков проектирования САУ.

# 1 Практическая работа № 1. Методы решения линейных дифференциальных уравнений

**Цель работы:** закрепление навыков решения линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

## 1.1 Задание для самостоятельной работы

**Задача 1** (0,5 балла). Решить в общем виде дифференциальное уравнение

$$y^{VI} - 2y^{VI} - 7y^{IV} - 4y^{III} = 0.$$

**Задача 2** (1 балл). Решить в общем виде дифференциальное уравнение

$$y'' - 2y' + y = 2t \cdot e^t + e^t \cdot \sin(2t).$$

**Задача 3** (2,5 балла). Для принципиальной схемы, изображенной на рисунке 1.1, необходимо:

- 1) составить дифференциальное уравнение, описывающие систему (0,5 балла);
- 2) представить решение в общем виде для заданного  $u_{вх}(t)$  (1 балл);
- 3) решить задачу Коши для нулевых начальных условий (1 балл).

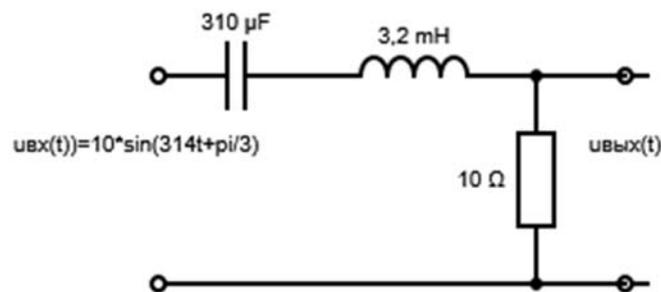


Рисунок 1.1 – Принципиальная схема

## 1.2 Краткие теоретические сведения

Если в линейном однородном уравнении вида

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0 \quad (1.1)$$

все коэффициенты  $a_n$  постоянны, то его частное решение может быть найдено в виде  $y(t) = e^{\lambda t}$ , где  $\lambda$  – некоторая, в общем случае комплексная, константа.

Подставляя выбранное решение в уравнение (1.1), получаем

$$a_0 \lambda^n e^{\lambda t} + a_1 \lambda^{n-1} e^{\lambda t} + \dots + a_{n-1} \lambda e^{\lambda t} + a_n = 0. \quad (1.2)$$

Сокращая выражение (1.2) на множитель  $e^{\lambda t}$ , очевидно не обращающийся в ноль, получаем *характеристическое уравнение*

$$a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0. \quad (1.3)$$

Характеристическое уравнение (1.3) определяет значения  $\lambda$ , при которых функция  $y(t) = e^{\lambda t}$  является решением дифференциального уравнения (1.1).

Возможны три случая [1]:

1) корни характеристического уравнения (1.2) вещественные и различные, в этом случае решение будет иметь следующий вид:

$$y(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + A_n e^{\lambda_n t}; \quad (1.4)$$

2) корни характеристического уравнения (1.2) вещественные кратные, в этом случае решение будет иметь вид:

$$y(t) = e^{\lambda t} (A_0 + t A_1 + t^2 A_2 + \dots); \quad (1.5)$$

3) корни характеристического уравнения (1.2) комплексно-сопряженные, в этом случае решение (для частного случая уравнения второго порядка) будет иметь следующий вид:

$$y(t) = e^{\alpha t} [A \sin(\beta t) + B \cos(\beta t)], \quad (1.6)$$

где  $\alpha$  – вещественная часть корней характеристического уравнения;

$\beta$  – мнимая часть корней характеристического уравнения;

$A, B$  – во всех случаях константы интегрирования.

В качестве примера получим решение однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами:

$$y'' - 3y' + 2y = 0. \quad (1.7)$$

Характеристическое уравнение имеет вид:

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0. \quad (1.8)$$

Определим корни характеристического уравнения по формулам Виета:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 &= 3; \\ \lambda_1 \lambda_2 &= 2, \end{aligned} \right\}$$

отсюда  $\lambda_1 = 2$ ,  $\lambda_2 = 1$ .

Корни вещественные, различные, следовательно, решение (1.7) имеет вид:

$$y(t) = A_1 e^{2t} + A_2 e^t. \quad (1.9)$$

Рассмотрим еще один пример. Решить однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами:

$$y'' - 2y' + 8y = 0. \quad (1.10)$$

Вычислим корни характеристического уравнения:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 8 = 0;$$

$$D = 2^2 - 4 \cdot 8 = -28;$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm i \cdot 2\sqrt{7}}{2} = 1 \pm i\sqrt{7}. \quad (1.11)$$

Поскольку корни комплексно-сопряженные, решение уравнения (1.10) имеет вид:

$$y(t) = e^t \left[ A \sin(\sqrt{7}t) + B \cos(\sqrt{7}t) \right]. \quad (1.12)$$

При решении *линейных неоднородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами* во многих случаях без труда удастся подобрать частные решения и тем самым свести задачу к интегрированию соответствующего однородного уравнения.

Пусть, например, правая часть уравнения является полиномом степени  $k$ , следовательно, уравнение имеет вид:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = b_0 t^k + b_1 t^{k-1} + \dots + b_k, \quad (1.13)$$

где все коэффициенты  $a_n$  и  $b_n$  — постоянные.

Если  $a_n \neq 0$ , то существует частное решение уравнения (1.13), имеющее тот же вид полинома степени  $k$ . Действительно, подставляя функцию

$$y(t) = B_0 t^k + B_1 t^{k-1} + \dots + B_k \quad (1.14)$$

в исходное уравнение (1.13) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $t$  в левой и правой частях уравнения, получаем разрешимую систему уравнений, позволяющую определить неизвестные коэффициенты  $B_n$ :

$$\begin{cases} a_n B_0 = b_0; \\ a_n B_1 + k a_{n-1} B_0 = b_1; \\ a_n B_2 + (k-1) a_{n-1} B_1 + k(k-1) a_{n-2} B_0 = b_2; \\ \dots \\ a_n B_k + a_{n-k} B_{k-1} \dots + \left( \prod_{i=0}^{k-1} (k-i) \right) a_{n-k} B_0 = b_k. \end{cases} \quad (1.15)$$

Таким образом, если  $a_n \neq 0$ , то существует частное решение, имеющее вид полинома, степень которого равна степени полинома в правой части исходного дифференциального уравнения (1.13).

Предположим теперь, что  $a_n = 0$ , причем для общности допустим, что имеет место равенство  $a_{n-1} = a_{n-2} = \dots = a_{n-\alpha+1} = 0$ , однако  $a_{n-\alpha} \neq 0$ , т. е.  $\lambda = 0$  является  $\alpha$ -кратным корнем характеристического уравнения, причем частный случай  $\alpha = 1$  не исключается. В таком случае уравнение (1.13) принимает вид:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-\alpha} y^{(\alpha)} = b_0 t^k + b_1 t^{k-1} + \dots + b_k. \quad (1.16)$$

Замена переменной вида  $z(t) = y^{(\alpha)}$  ведет к уже рассмотренному выше случаю и, следовательно, существует частное решение уравнения (1.16), для которого

$$y^{(\alpha)} = B_0 t^k + B_1 t^{k-1} + \dots + B_k. \quad (1.17)$$

Значит  $y$  является полиномом степени  $k + \alpha$ , причем члены, начиная со степени  $\alpha - 1$  и ниже, у этого полинома будут иметь произвольные постоянные коэффициенты, которые могут быть, в частности, выбраны нулю. Тогда частное решение принимает вид:

$$y = x^\alpha \left[ B_0 t^k + B_1 t^{k-1} + \dots + B_k \right]. \quad (1.18)$$

В качестве примера рассмотрим следующее уравнение:

$$y'' + y = t^2 + t. \quad (1.19)$$

Решение будем искать в виде суммы частного решения неоднородного уравнения  $Y(t)$  и общего решения соответствующего однородного уравнения  $y_o(t)$ :

$$y(t) = Y(t) + y_o(t). \quad (1.20)$$

Характеристическое уравнение имеет вид:

$$\lambda^2 + 1 = 0; \quad (1.21)$$

его корни  $\lambda_{1,2} = \pm i$ .

Таким образом,

$$y(t) = A \sin(t) + B \cos(t) + Y(t). \quad (1.22)$$

Частное решение будем искать в виде

$$Y(t) = B_0 t^2 + B_1 t + B_2. \quad (1.23)$$

Вычислим производные функции (1.23):

$$Y' = 2B_0 t + B_1; \quad Y'' = 2B_0. \quad (1.24)$$

Подставляем (1.23) и (1.24) в исходное уравнение (1.19), тогда

$$2B_0 + B_0 t^2 + B_1 t + B_2 = t^2 + t. \quad (1.25)$$

Теперь приравняем коэффициенты при одинаковых степенях:

$$\begin{cases} B_0 = 1; \\ B_1 = 1; \\ 2B_0 + B_2 = 0 \rightarrow B_2 = -2. \end{cases}$$

Таким образом, частное решение (1.19) будет иметь следующий вид:

$$Y(t) = t^2 + t - 2. \quad (1.26)$$

Окончательно получаем решение уравнения (1.19):

$$y(t) = A \sin(t) + B \cos(t) + t^2 + t - 2. \quad (1.27)$$

Рассмотрим теперь линейное неоднородное уравнение

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-\alpha} y^{(\alpha)} = e^{st} (b_0 t^k + b_1 t^{k-1} + \dots + b_k), \quad (1.28)$$

где все коэффициенты  $a_n$  и  $b_n$  – постоянные.

Замена переменных вида  $y(t) = e^{st}z$ , преобразуем уравнение (1.28) к виду (1.16), частное решение которого, как было получено выше, имеет вид:

$$z = B_0 t^k + B_1 t^{k-1} + \dots + B_k, \quad (1.29)$$

значит, частное решение уравнения (1.27) представлено как

$$y = e^{st} (B_0 t^k + B_1 t^{k-1} + \dots + B_k), \quad (1.30)$$

при этом  $\lambda = s$  не является корнем характеристического уравнения. Если же указанное значение является корнем кратности  $\alpha$ , то частное решение будет иметь вид:

$$y = t^\alpha e^{st} (B_0 t^k + B_1 t^{k-1} + \dots + B_k). \quad (1.31)$$

## 2 Практическая работа № 2. Применение преобразования Лапласа для решения дифференциальных уравнений

**Цель работы:** закрепление навыков решения линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами при помощи преобразования Лапласа.

### 2.1 Задание для самостоятельной работы

**Задача 1** (2 балла). Получить преобразование Лапласа для функций:

а)  $f(t) = te^{at} + t$  (0,5 балла);

б)  $f(t) = \operatorname{ch}(t)$  (0,5 балла);

в)  $f(t) = \sqrt[n]{t}$  (1 балл).

**Задача 2** (1 балл). По заданному решению дифференциального уравнения определить дифференциальное уравнение, описывающее систему:

$$f(t) = -15e^{15t} \cdot \sin(10t) + 5 \cdot \cos(15t).$$

**Задача 3** (2 балла). Для схемы, представленной на рисунке 2.1, необходимо:

а) вывести дифференциальное уравнение (1 балл);

б) определить передаточную функцию (0,5 балла);

в) определить реакцию на единичное ступенчатое воздействие (0,5 балла).

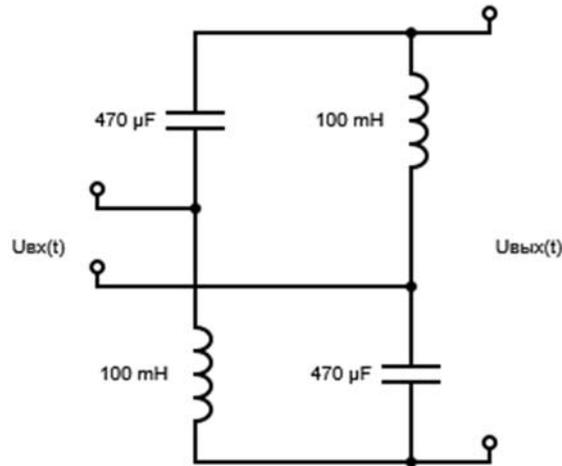


Рисунок 2.1 – Схема к задаче 3

## 2.2 Краткие теоретические сведения

Пусть задана некоторая функция  $f(t)$  вещественной переменной  $t$ , для которой существует преобразование Лапласа, определяемое интегралом вида

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt. \quad (2.1)$$

Существование преобразования Лапласа означает, что для заданной функции  $f(t)$  интеграл (2.1) сходится. Такие функции называются *оригиналами*. Каждому оригиналу можно поставить в соответствие изображение  $F(s)$ .

Преобразование Лапласа обладает рядом интересных свойств. Рассмотрим некоторые из них [2]:

1) дифференцированию функции-оригинала по независимой переменной при условии, что  $f(0) = 0$ , соответствует умножение изображения на  $s$ , а интегрированию оригинала при тех же условиях соответствует операция деления на  $s$ .

Докажем, например, первое свойство. Пусть  $f(t)$  – оригинал, у которого существует первая производная, причем  $f(0) = 0$ . Используя формулу (2.1), получаем

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^{\infty} \frac{df(t)}{dt} \cdot e^{-st} dt = \int_0^{\infty} df(t) \cdot e^{-st} = \left. \begin{array}{l} u = e^{-st}; \quad du = -se^{-st} dt; \\ dv = df(t); \quad v = f(t); \end{array} \right|_0^{\infty} = \\ &= f(t)e^{-st} \Big|_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt = -f(0) + sF(s) = sF(s). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Таким образом, операции дифференцирования и интегрирования оригинала заменяются в пространстве изображений более простыми алгебраическими операциями умножения и деления. Это свойство используется при решении линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами;

2) преобразование Лапласа является линейным. Это означает, что сумме оригиналов соответствует сумма изображений, а постоянный множитель можно вынести.

Проиллюстрируем доказанное свойство следующим примером. Решить дифференциальное уравнение, учитывая, что  $y(0) = y'(0) = 0$ , тогда

$$y'' - 3y' + 2y = 2\sin(t). \quad (2.3)$$

Для начала определим изображение функции, стоящей в правой части уравнения,

$$\begin{aligned} \sin(t) \cdot e^{-st} &= \int_0^{\infty} \sin(t) \cdot e^{-st} dt = \left[ \begin{array}{l} u = e^{-st}; \quad du = -se^{-st} dt; \\ dv = \sin(t) dt; \quad v = -\cos(t); \end{array} \right] = \left( -\cos(t)e^{-st} \Big|_0^{\infty} - s \int_0^{\infty} \cos(t) \cdot e^{-st} dt \right) = \\ &= 1 - s \int_0^{\infty} \cos(t) \cdot e^{-st} dt = \left[ \begin{array}{l} u = e^{-st}; \quad du = -se^{-st} dt; \\ dv = \cos(t) dt; \quad v = \sin(t); \end{array} \right] = 1 - s \left( \sin(t)e^{-st} \Big|_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} \sin(t) \cdot e^{-st} dt \right) = \\ &= 1 - s^2 \int_0^{\infty} \sin(t) \cdot e^{-st} dt. \end{aligned}$$

Приводим интеграл к самому себе и получаем изображение искомой функции:

$$J(p) = -s^2 \cdot J(p) + 1; \rightarrow J(p) = \frac{1}{s^2 + 1}.$$

*В литературе по операционному исчислению имеются таблицы, содержащие изображения широкого класса функций, в дальнейшем мы будем пользоваться таблицей оригиналов и изображений, приведенной на рисунках 2.2 и 2.3.*

Применяя к уравнению (2.3) свойство (2.2) и определенное выше изображение, получаем

$$s^2 Y(s) - 3sY(s) + 2Y(s) = 2 \frac{1}{s^2 + 1}. \quad (2.4)$$

Выражаем изображение искомой функции:

$$\begin{aligned} Y(s)(s^2 - 3s + 2) &= 2 \frac{1}{s^2 + 1}; \\ Y(s) &= \frac{2}{(s^2 + 1)(s^2 - 3s + 2)}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

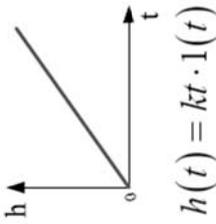
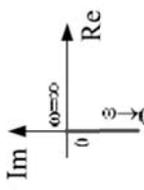
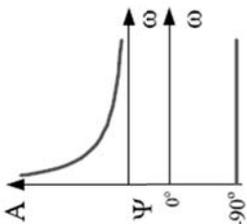
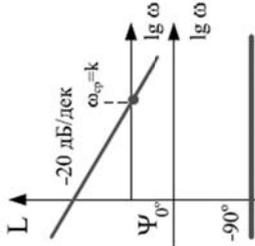
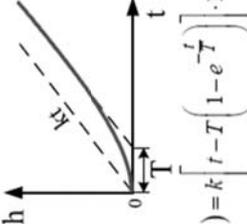
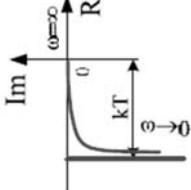
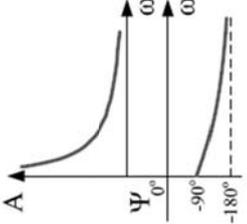
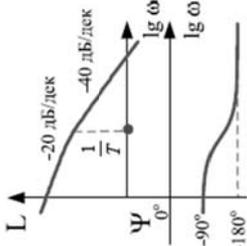
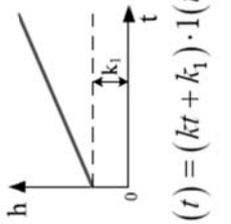
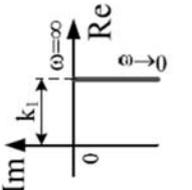
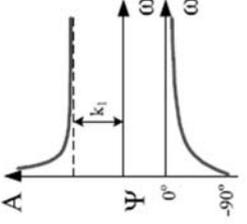
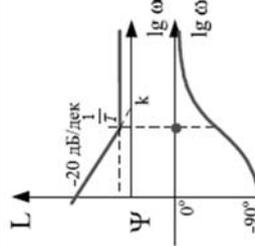
Звено и его передаточная функция	Переходная функция $h(t)$	Амплитудно-фазовая	Амплитудная и фазовая	Логарифмические
<p>Идеальное интегрирующее</p> $W(p) = \frac{k}{p}$	 <p><math>h(t) = kt \cdot 1(t)</math></p>			
<p>Интегрирующее с замедлением</p> $W(p) = \frac{k}{p(Tp + 1)}$	 <p><math>h(t) = k \left[ t - T \left( 1 - e^{-\frac{t}{T}} \right) \right] \cdot 1(t)</math></p>			
<p>Изодромное</p> $W(p) = \frac{k}{p} + k_1 = \frac{k(Tp + 1)}{p}$ $T = \frac{k_1}{k}$	 <p><math>h(t) = (kt + k_1) \cdot 1(t)</math></p>			

Рисунок 2.2 – Временные и частотные характеристики дифференцирующих звеньев

Звено и его передаточная функция	Переходная функция $h(t)$	Амплитудно-фазовая	Амплитудная и фазовая	Логарифмические
<b>Идеальное дифференцирующее</b> $W(p) = kp$	<p><math>h(t) = k \cdot \delta(t)</math></p>			
<b>Дифференцирующее с замедлением (реальное дифференцирующее)</b> $W(p) = \frac{kp}{Tp + 1}$	<p><math>h(t) = \frac{k}{T} e^{-\frac{t}{T}}</math></p>		<p><math>\Psi(\omega) = 90^\circ - \arctg(\omega T)</math></p>	
<b>Форсирующее звено</b> $W(p) = k \cdot (Tp + 1)$	<p><math>h(t) = k[1 + T\delta(t)]</math></p>			
<b>Форсирующее звено 2-го порядка</b> $W(p) = k \cdot (T^2 p^2 + 2\zeta Tp + 1)$				

Рисунок 2.3 – Временные и частотные характеристики дифференцирующих звеньев

Следует обратить внимание на то, что выражение в скобках совпадает с характеристическим уравнением (1.8).

Теперь необходимо восстановить оригинал. Воспользуемся для этого рисунком 2.2, предварительно выполнив разложение дроби (2.5) в сумму простейших.

Получаем

$$Y(s) = \frac{2}{(s^2 + 1)(s^2 - 3s + 2)} = 2 \left( \frac{1}{(s^2 + 1)(s - 2)(s - 1)} \right) = 2 \left( \frac{(3/10)s}{s^2 + 1} + \frac{(1/10)}{s^2 + 1} - \frac{1/2}{s - 1} + \frac{1/5}{s - 2} \right).$$

Окончательно

$$y(t) = \frac{1}{5} e^{2t} - \frac{1}{2} e^t + \frac{1}{10} (3 \cos(t) + \sin(t)).$$

Исследуем теперь вопрос характеристик динамической системы. К их числу относятся две характеристики: переходная функция (переходная характеристика)  $h(t)$  и импульсная переходная функция (импульсная переходная характеристика, весовая функция)  $w(t)$ .

*Переходной функцией*  $h(t)$  называется реакция звена (системы) на единичное ступенчатое воздействие  $g(t) = 1(t)$ . Характеристика  $h(t)$  представляет собой переходный процесс (см. рисунок 2.2) на выходе звена  $y(t) = h(t)$  при входном сигнале  $g(t) = 1(t)$ . При этом следует иметь в виду, что при  $t < 0$   $g(t) = 0$  и  $y(t) = 0$ , а при  $t \geq 0$   $g(t) = 1(t)$  и  $y(t) = h(t)$ . Это соответствует нулевым начальным условиям.

Если входное ступенчатое воздействие имеет величину ступеньки в  $N$  раз большую единицы, т. е.  $g(t) = N \cdot 1(t)$ , то выходная величина будет равна  $y(t) = N \cdot h(t)$ .

Ступенчатая функция представляет собой распространенный вид входного воздействия в автоматических системах. К такому виду сводятся мгновенное изменение нагрузки электрического генератора, мгновенное возрастание нагрузки на валу электродвигателя, мгновенный поворот входного валика следящей системы и т. п.

*Импульсной переходной функцией*  $w(t)$  называют реакцию звена (системы) на единичную импульсную функцию  $\delta(t)$ .

Единичная импульсная функция (дельта-функция, дельта-импульс, функция Дирака)  $\delta(t)$  представляет собой производную от единичной ступенчатой функции  $\delta(t) = 1'(t)$  и соответствует идеальному прямоугольному импульсу с бесконечно большой амплитудой и бесконечно малой длительностью, возникающему в момент времени  $t = 0$ . Площадь этого импульса равна единице, т. е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1. \quad (2.6)$$

Установим связь между характеристиками  $h(t)$  и  $w(t)$ . Для линейного звена или системы справедливо следующее утверждение: производной входного сигнала будет соответствовать и производная выходного сигнала. Это означает, что если на вход звена (системы) подаётся входной сигнал, представляющий собой единичное ступенчатое воздействие, т. е.  $g(t)=1(t)$ , то выходной сигнал будет равен переходной функции, т. е.  $y(t)=h(t)$ . Если же на вход звена подается дельта-импульс  $\delta(t)$ , представляющий собой производную от единичного ступенчатого воздействия, т. е.  $g(t)=\delta(t)=d1(t)/dt$ , то выходной сигнал будет равен производной от переходной функции, которая и будет равна импульсной переходной функции  $w(t)$ , т. е.  $y(t)=dh(t)/dt=w(t)$ .

Таким образом, нами получено уравнение

$$w(t) = \frac{dh(t)}{dt}, \quad (2.7)$$

из которого следует, что импульсная переходная функция  $w(t)$  равна производной от переходной функции  $h(t)$  и характеризует скорость изменения функции  $h(t)$ , т. е. скорость протекания переходного процесса. Кроме того, функция  $w(t)$  является оригиналом передаточной функции звена (системы)  $W(s)$ .

Можно записать

$$h(t) = \int_0^t w(t) dt, \quad (2.8)$$

т. е. переходная функция  $h(t)$  равна интегралу от импульсной переходной функции.

Установим связь между изображением по Лапласу переходной функции  $H(s)$  и передаточной функцией звена (системы)  $W(s)$ , где  $W(s) = Y(s)/G(s)$ , а изображение по Лапласу выходного сигнала

$$Y(s) = G(s)W(s). \quad (2.9)$$

Для получения переходной функции  $h(t)$  входной сигнал берется равным  $g(t)=1(t)$ . Тогда выходной сигнал будет равен переходной функции, т. е.  $y(t)=h(t)$ . Представив эти сигналы в изображениях по Лапласу:  $g(t) \rightarrow G(s)$ ;  $1(t) \rightarrow 1/s$ ;  $y(t) \rightarrow Y(s)$ ;  $h(t) \rightarrow H(s)$  и подставив полученные значения  $Y(s)=H(s)$ ;  $G(s)=1/s$  в уравнение (2.9), будем иметь уравнение

$$H(s) = \frac{W(s)}{s}. \quad (2.10)$$

Уравнение (2.10) позволяет определить изображение по Лапласу переходной функции  $H(s)$  звена или системы по известной передаточной функции  $W(s)$ . Для получения самой переходной функции  $h(t)$  переходят от изображения  $H(s)$  к

оригиналу функции  $h(t)$ , т. е.  $H(s) \rightarrow h(t)$ , с использованием формулы обратного преобразования Лапласа или же справочных таблиц, в которых приведены временные функции (оригиналы) и их изображения по Лапласу.

Из (2.10) видно, что передаточную функцию звена можно определить умножением изображения переходной функции  $H(s)$  на параметр преобразования  $s$ :

$$W(s) = sH(s),$$

а сама функция  $H(s)$  может быть определена по формуле прямого преобразования Лапласа:

$$H(s) = \int_0^{\infty} h(t)e^{-st} dt. \quad (2.11)$$

Функция веса  $w(t)$  звена связана с его передаточной функцией интегральным преобразованием Лапласа:

$$W(s) = \int_0^{\infty} w(t)e^{-st} dt. \quad (2.12)$$

**Пример** – Решить дифференциальное уравнение, описывающее некоторую динамическую систему со ступенчатым воздействием, заданным функцией Хевисайда:

$$y'' - 4y' + 8y = 1(t). \quad (2.13)$$

В операторной форме

$$Y(p)(s^2 - 4s + 8) = \frac{1}{s}. \quad (2.14)$$

Выражаем изображение функции и, применяя таблицу, получаем оригинал:

$$Y(s) = \frac{1}{s(s^2 - 4s + 8)} = \frac{1}{s[(s-2)^2 + 4]} = \frac{(1/8)}{s} - \frac{(1/8)s}{(s-2)^2 + 4} - \frac{(1/2)}{(s-2)^2 + 4};$$

$$y(t) = \frac{1}{8} \left( 1 + e^{2t} [\cos(2t) - \sin(2t)] \right).$$

### 3 Практическая работа № 3. Типовые динамические звенья

**Цель работы:** изучение передаточных функций типовых динамических звеньев.

#### 3.1 Задание для самостоятельной работы

**Задача 1** (1 балл). Построить амплитудно-частотную (АЧХ) и фазово-частотную характеристики (ФЧХ) для типовых звеньев:

а)  $W(s) = \frac{5s + 2}{10s + 3}$  (0,5 балла);

б)  $W(s) = \frac{3s + 3}{s^2 + 10s + 25}$  (0,5 балла).

**Задача 2** (1 балл). Построить амплитудно-фазовую характеристику (АФХ) для типовых звеньев:

а)  $W(s) = \frac{2s + 10}{5s - 3}$  (0,5 балла);

б)  $W(s) = \frac{2s + 10}{s^2 + 8s + 6}$  (0,5 балла).

**Задача 3** (2 балла). Для передаточной функции  $W(s) = 5 \cdot e^{-10s}$  построить:

- а) амплитудно-фазовую характеристику АФХ (1 балл);
- б) логарифмическую амплитудно-частотную характеристику (ЛАЧХ) и логарифмическую фазово-частотную характеристику (ЛФЧХ) (1 балл).

#### 3.2 Краткие теоретические сведения

Большинство технических объектов можно представить как совокупность типовых динамических звеньев, представленных на рисунках 2.2 и 2.3 [3].

Следует отметить, что в реальных системах не существует динамических звеньев с порядком числителя старше порядка знаменателя.

Укажем основные свойства типовых динамических звеньев:

- переходная характеристика;
- АЧХ и ФЧХ;
- ЛАЧХ и ЛФЧХ;
- частотный годограф (АФХ). След передаточной функции на комплексной плоскости. Отображение сдвига по амплитуде и фазе частоты среза.

Рассмотрим пример получения частотных характеристик для звена 2-го порядка в общем виде.

Запишем дифференциальное уравнение по второму закону Кирхгофа для звена 2-го порядка:

$$L \frac{di_L(t)}{dt} + i_R(t)R + u_C(t) = u_{ex}(t). \quad (3.1)$$

Так как все элементы цепи соединены последовательно, имеем

$$i_R = i_L = i_C.$$

Можем записать

$$i_R = i_L = i_C = C \frac{du_C}{dt}. \quad (3.2)$$

Подставляя (3.2) в (3.1), получаем

$$LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + RC \frac{du_C}{dt} + u_C(t) = u_{ex}(t). \quad (3.3)$$

Полагая  $u_C(t) = u_{\text{вых}}(t)$ , получаем дифференциальное уравнение для звена 2-го порядка

$$LC \frac{d^2 u_{\text{вых}}}{dt^2} + RC \frac{du_{\text{вых}}}{dt} + u_{\text{вых}}(t) = u_{ex}(t). \quad (3.4)$$

Применяя преобразование Лапласа к уравнению (3.4), получаем

$$LCs^2 \cdot U_{\text{вых}}(s) + RCs \cdot U_{\text{вых}}(s) + U_{\text{вых}}(s) = U_{ex}(s). \quad (3.5)$$

Выразим передаточную функцию как отношение изображений выходного и входного сигналов

$$W(s) = \frac{U_{\text{вых}}(s)}{U_{ex}(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}. \quad (3.6)$$

Введем следующие обозначения:

$$T = \sqrt{LC}; \quad \xi = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}.$$

Окончательно получаем

$$W(s) = \frac{1}{T^2 s^2 + 2\xi Ts + 1}. \quad (3.7)$$

Исследуем частотные свойства звена, передаточная функция которого имеет вид (3.7). Для этого введем в выражении (3.7) замену  $s = i\omega$ , тогда

$$W(i\omega) = \frac{1}{-T^2 s^2 + 2\xi T \cdot i\omega + 1} = \frac{1}{(1 - T^2 \omega^2) + i \cdot 2\xi T \omega}. \quad (3.8)$$

Выделяя в (3.8) вещественную и мнимую части, получим

$$W(i\omega) = \frac{(1 - T^2 \omega^2) - i \cdot 2\xi T \omega}{[(1 - T^2 \omega^2) + i \cdot 2\xi T \omega][(1 - T^2 \omega^2) - i \cdot 2\xi T \omega]} = \frac{1 - T^2 \omega^2}{(1 - T^2 \omega^2)^2 + (2\xi T \omega)^2} + i \frac{-2\xi T \omega}{(1 - T^2 \omega^2)^2 + (2\xi T \omega)^2}$$

Вещественная и мнимая части имеют вид

$$\operatorname{Re}[W(i\omega)] = \frac{1 - T^2 \omega^2}{(1 - T^2 \omega^2)^2 + 4\xi^2 T^2 \omega^2}; \quad \operatorname{Im}[W(i\omega)] = \frac{-2\xi T \omega}{(1 - T^2 \omega^2)^2 + 4\xi^2 T^2 \omega^2}. \quad (3.9)$$

Используя выражения (3.9), построим частотный годограф (АФХ). Проследим за изменением АФХ, варьируя параметр  $\xi$  при фиксированном значении параметра  $T$  (рисунок 3.1).

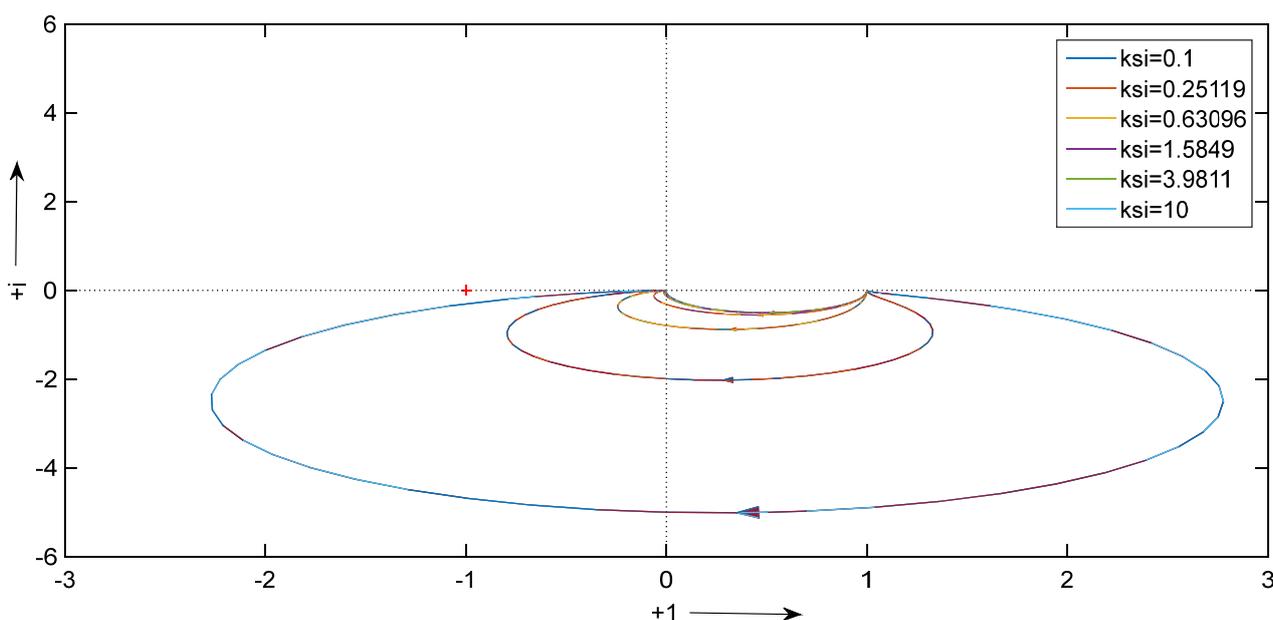


Рисунок 3.1 – Амплитудно-фазовая характеристика звена

Получим АЧХ:

$$\begin{aligned}
 A(\omega) &= \sqrt{\operatorname{Re}[W(i\omega)]^2 + \operatorname{Im}[W(i\omega)]^2} = \\
 &= \sqrt{\left(\frac{1-T^2\omega^2}{(1-T^2\omega^2)^2 + 4\xi^2 T^2\omega^2}\right)^2 + \left(\frac{-2\xi T\omega}{(1-T^2\omega^2)^2 + 4\xi^2 T^2\omega^2}\right)^2} = \sqrt{\frac{(1-T^2\omega^2)^2 + 4\xi^2 T^2\omega^2}{[(1-T^2\omega^2)^2 + 4\xi^2 T^2\omega^2]^2}} = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{(1-T^2\omega^2)^2 + 4\xi^2 T^2\omega^2}}. \tag{3.10}
 \end{aligned}$$

Получим теперь выражение для ФЧХ:

$$\begin{aligned}
 \varphi(\omega) &= \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{Im}[W(i\omega)]}{\operatorname{Re}[W(i\omega)]}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{-2\xi T\omega}{(1-T^2\omega^2)^2 + 4\xi^2 T^2\omega^2} \cdot \frac{(1-T^2\omega^2)^2 + 4\xi^2 T^2\omega^2}{1-T^2\omega^2}\right) = \\
 &= -\operatorname{arctg}\left(\frac{2\xi T\omega}{1-T^2\omega^2}\right). \tag{3.11}
 \end{aligned}$$

Обратим внимание, что данное звено может представлять собой три типовых звена в зависимости от значения параметра  $\xi$ : колебательное, апериодическое 2-го порядка и консервативное. Полученные согласно формулам (3.10) и (3.11) характеристики представлены на рисунке 3.2.

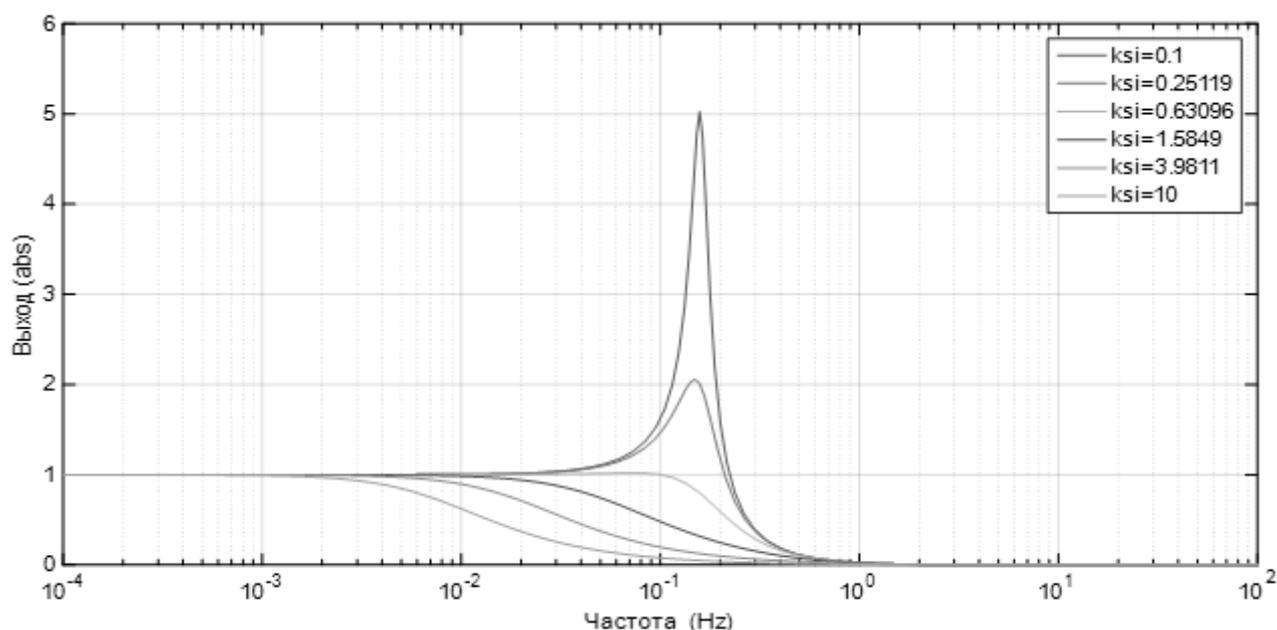


Рисунок 3.2 – Амплитудно-частотная характеристика звена

Переходная характеристика звена с передаточной функцией (3.7) имеет вид, представленный на рисунке 3.3.

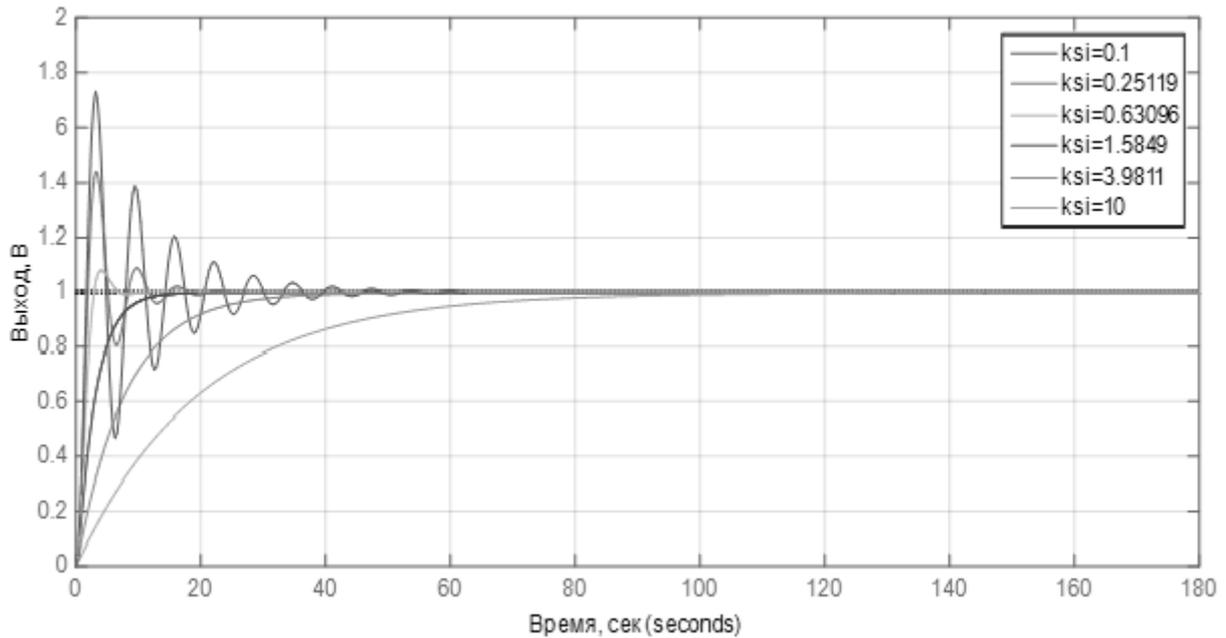


Рисунок 3.3 – Переходная характеристика звена

## 4 Практическая работа № 4. Структурные преобразования

**Цель работы:** изучение передаточных функций типовых динамических звеньев.

### 4.1 Задание для самостоятельной работы

**Задача 1** (1 балл). Определить передаточную функцию системы (рисунок 4.1), считая входным сигналом  $U_{in}$ , а выходным  $U_{out}$ .

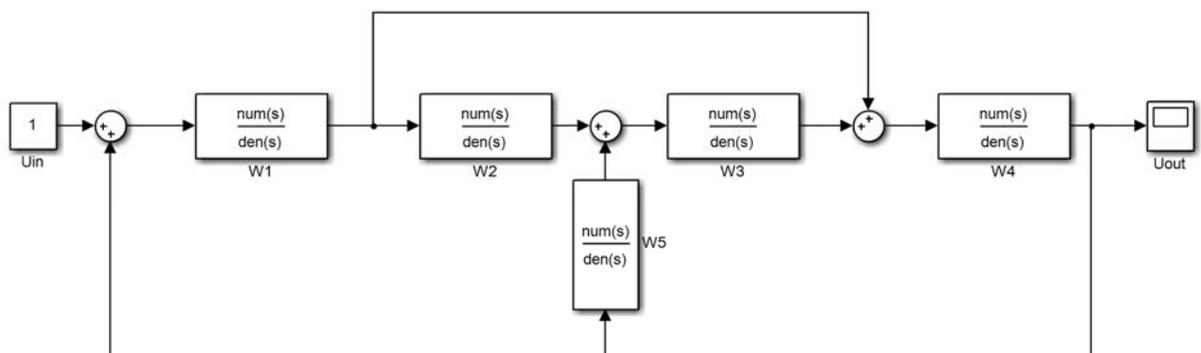


Рисунок 4.1 – Структурная схема к задаче 1

**Задача 2** (1,5 балла). Определить передаточную функцию системы, представленной на рисунке 4.2, считая входным сигналом  $U_{in}$ , а выходным  $U_{out}$ .

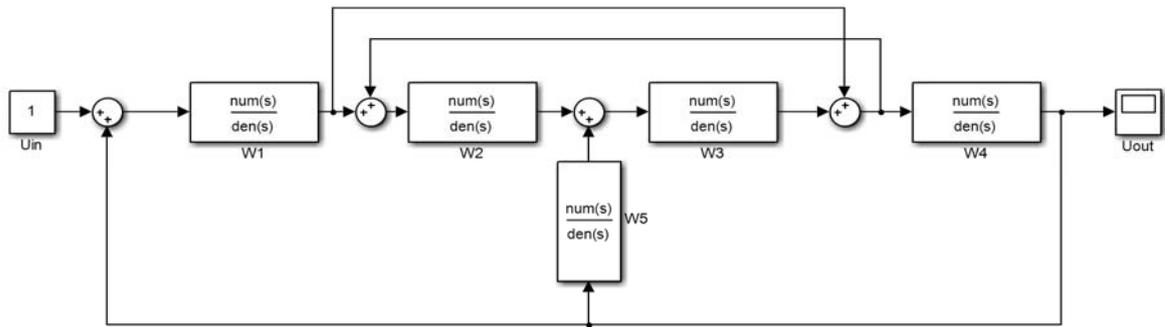


Рисунок 4.2 – Структурная схема к задаче 2

**Задача 3** (2,5 балла). Представить систему (рисунок 4.3) в SISO виде. Для схемы определить  $W(s)$ ,  $\Phi(s)$ ,  $\Phi_X(s)$ ,  $\Phi_F(s)$ ,  $\Phi_{FX}(s)$ .

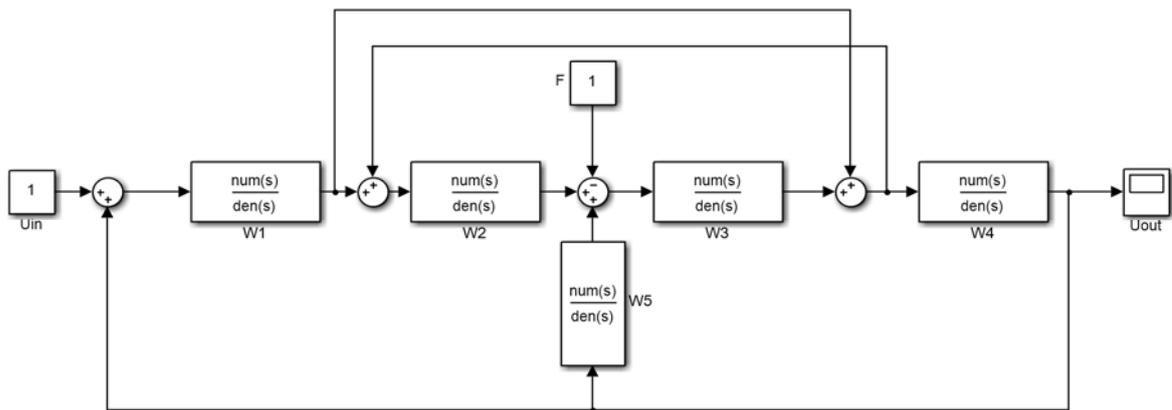


Рисунок 4.3 – Структурная схема к задаче 3

## 4.2 Краткие теоретические сведения

В сложных технических системах математическое описание представляется в виде систем дифференциальных уравнений. Между уравнениями в системе существует связь, поэтому для упрощения анализа используют структурные схемы, на которых изображают блоки и связи.

Основными элементами структурных схем являются [4]:

1) блоки передаточных функций. Пример блока передаточной функции представлен на рисунке 4.4.

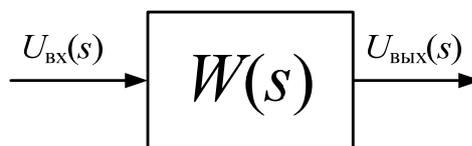


Рисунок 4.4 – Блок передаточной функции

На структурной схеме передаточные функции обозначаются в виде прямоугольников с входящими сигналами управления и сигналами выхода;

2) узел (рисунок 4.5) – это элемент структурной схемы, в который входит только один сигнал, а выходит произвольное их число (более двух), причем все сигналы будут связаны соотношением

$$U_{\text{вх}}(s) = U_{\text{вых1}}(s) = \dots = U_{\text{выхn}}(s). \quad (4.1)$$

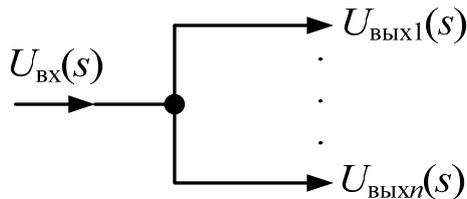


Рисунок 4.5 – Узел на структурной схеме

Узел можно разбивать на произвольное число узлов. В качестве примера рассмотрим узел, представленный на рисунке 4.5. На рисунке 4.6 представлено разбиение этого узла в два узла.

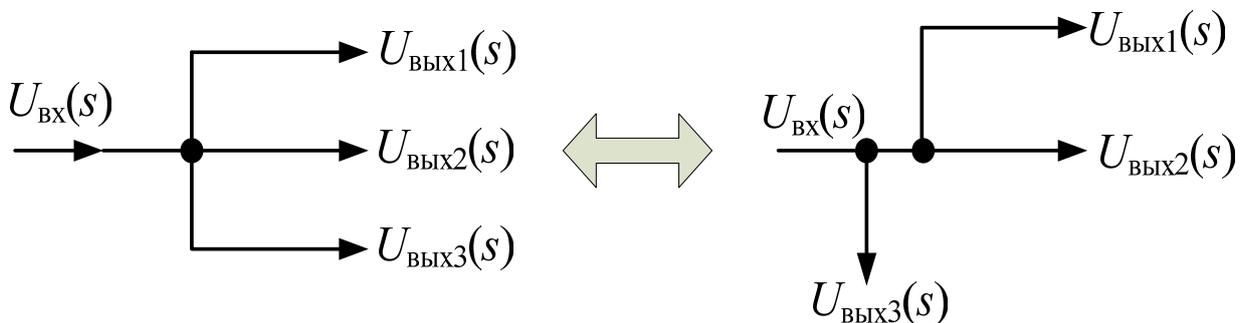


Рисунок 4.6 – Преобразование узла

Более того в узел можно добавлять произвольное число выходных сигналов, единственное условие накладываемое на эти выходные сигналы является равенство 4.1;

3) сумматор (рисунок 4.7) – это элемент структурной схемы, в который входит произвольное число входных сигналов и выходит один суммарный сигнал. Сумматоры предназначены для объединения сигналов в структурных схемах. Выходной сигнал при этом связан с входными следующим соотношением:

$$U_{\text{вых}}(s) = U_{\text{вх1}}(s) + U_{\text{вх2}}(s) + \dots + U_{\text{вхn}}(s). \quad (4.2)$$

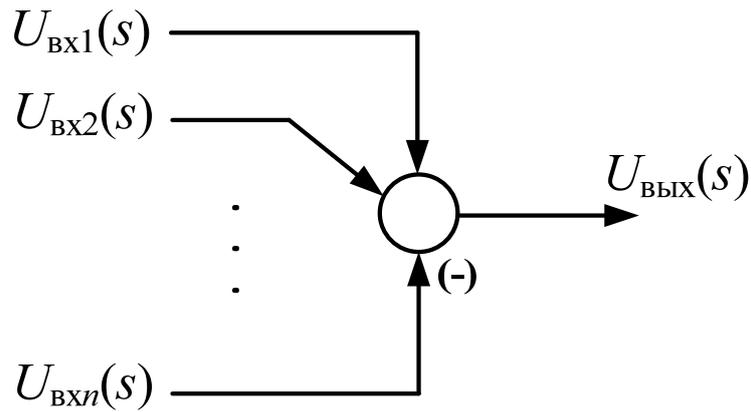


Рисунок 4.7 – Сумматор на структурной схеме

Как и узел, сумматор можно преобразовать в произвольное число сумматором, например, преобразуем сумматор с тремя входными сигналами (рисунок 4.8).

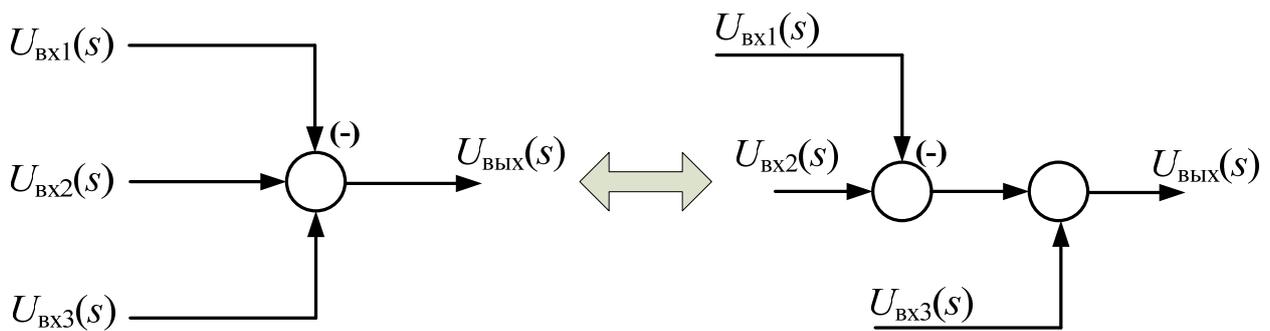


Рисунок 4.8 – Преобразование сумматора

Рассмотрим теперь типовые соединения блоков передаточных функций.

- 1 Последовательное соединение (каскадное соединение).
- 2 Параллельное соединение (рисунок 4.9).

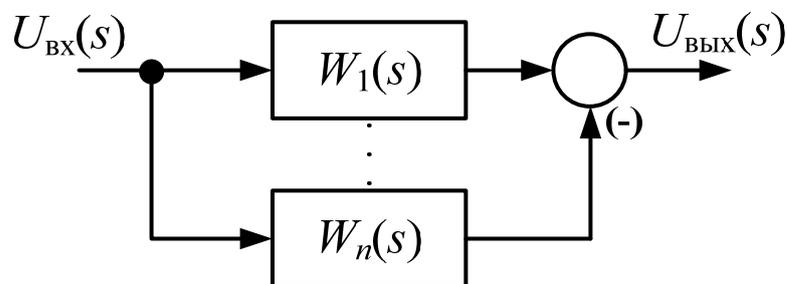


Рисунок 4.9 – Параллельное соединение блоков передаточных функций

$$W(s) = \frac{U_{\text{вых}}(s)}{U_{\text{вх}}(s)} = W_1(s) \pm W_2(s) \pm \dots \pm W_n(s). \quad (4.3)$$

3 Соединение с обратной связью (встречно-параллельное) (рисунок 4.10).

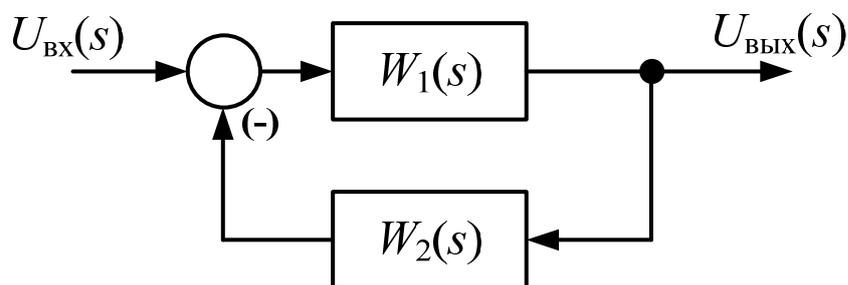


Рисунок 4.10 – Соединение с обратной связью

$$W(s) = \frac{W_1(s)}{1 \mp W_1(s)W_2(s)}. \quad (4.4)$$

Рассмотрим пример построения и преобразования типового объекта ЭП двигателя постоянного тока с независимым возбуждением.

Для структурных схем с несколькими входами и выходами можно выделить передаточные функции по каждому из каналов управления и каждому входному сигналу.

Существуют технические объекты со сложными перекрестными связями. Для приведения структурной схемы ММО к SISO виду необходимо выполнить ряд структурных преобразований.

## 5 Практическая работа № 5. Устойчивость САР

**Цель работы:** изучение критериев устойчивости САР.

### 5.1 Задание для самостоятельной работы

**Задача 1** (2 балла). Определить:

а) устойчивость замкнутой системы, если передаточная функция разомкнутой системы имеет вид:

$$W(p) = \frac{s+3}{s^2+4s+1};$$

- б) устойчивость по критерию Ляпунова (0,5 балла);
- в) устойчивость по критерию Гурвица (0,5 балла);
- г) устойчивость по критерию Найквиста (0,5 балла);
- д) устойчивость по критерию Михайлова (0,5 балла).

**Задача 2** (2 балла). Определить диапазон значений  $k$ , при которых замкнутая система устойчива, если разомкнутая система представлена в виде передаточной функции

$$W(p) = \frac{k}{s^2 (4s + 1) (2s + 1)}.$$

## 5.2 Краткие теоретические сведения

*Теорема А. М. Ляпунова.*

1 Для обеспечения устойчивости САУ, описываемой линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами, необходимо и достаточно, чтобы вещественные корни характеристического уравнения, соответствующего исходному дифференциальному уравнению, были отрицательными, а комплексные корни имели отрицательную вещественную часть.

2 Если вещественная часть корней меньше нуля, но среди корней имеются нулевые или чисто мнимые корни, то система стремится к некоторому установившемуся процессу (консервативная система).

3 Если хотя бы один вещественный корень положительный или положительна вещественная часть хотя бы одного комплексного корня, то система неустойчива.

*Критерии оценки устойчивости систем автоматического регулирования (САУ).* Прямой метод анализа устойчивости систем, основанный на вычислении корней характеристического уравнения, очень сложен, особенно для уравнений высоких степеней. Поэтому в инженерной практике используют методы, которые позволяют определять устойчивость системы без вычисления корней [5].

Эти методы называются критериями устойчивости. С помощью критериев устойчивости можно не только установить, является ли система устойчивой или нет, но и выяснить, как влияют на устойчивость те или иные параметры и структурные изменения в системе.

Различают две группы критериев устойчивости: алгебраические (Рауса и Гурвица), основанные на анализе коэффициентов характеристического уравнения, и частотные (Михайлова и Найквиста), базирующиеся на анализе частотных характеристик. Частотные критерии позволяют оценивать устойчивость системы, даже если в наличии имеются экспериментальные частотные характеристики, а уравнения динамики неизвестны.

*Критерий Гурвица.* Пусть имеем характеристическое уравнение (знаменатель  $\Phi(\lambda)$ )

$$C_0 \cdot \lambda^n + C_1 \cdot \lambda^{n-1} + \dots + C_{n-1} \cdot \lambda + C_n = 0. \quad (5.1)$$

Сначала строится главный определитель Гурвица по следующему правилу: по главной диагонали определителя слева направо выписываются все коэффициенты характеристического уравнения от  $C_1$  до  $C_n$  в порядке возрастания индекса.

Столбцы вверх от главной диагонали дополняются коэффициентами характеристического уравнения с последовательно возрастающими индексами, а столбцы вниз – с последовательно убывающими.

Вместо коэффициентов с индексами больше  $n$  (где  $n$  – порядок характеристического уравнения) и меньше нуля записывают нули:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} C_1 & C_3 & C_5 & C_7 & \dots & 0 \\ C_0 & C_2 & C_4 & C_6 & \dots & 0 \\ 0 & C_1 & C_3 & C_5 & \dots & 0 \\ 0 & C_0 & C_2 & C_4 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & C_n \end{vmatrix}. \quad (5.2)$$

Далее выделяются в главном определителе Гурвица главные диагональные миноры и получаются определители Гурвица низшего порядка. В итоге проверяется  $n$  определителей, которые являются главными диагональными минорами матрицы Гурвица.

Для характеристического уравнения, записанного в виде

$$C_0 \cdot \lambda^3 + C_1 \cdot \lambda^2 + C_2 \cdot \lambda + C_3 = 0, \quad (5.3)$$

определитель Гурвица и диагональные миноры имеют вид

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} C_1 & C_3 & 0 \\ C_0 & C_2 & 0 \\ 0 & C_1 & C_3 \end{vmatrix}; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} C_1 & C_3 \\ C_0 & C_2 \end{vmatrix}; \quad \Delta_1 = |C_1|.$$

Определение критерия: чтобы САУ была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы определитель Гурвица и его диагональные миноры были положительными, т. е.  $\Delta_1 > 0$ ;  $\Delta_2 > 0$ ;  $\Delta_3 > 0$  и т. д.

*Критерий Михайлова.* А. В. Михайлов предложил частотный критерий устойчивости, применение которого во многих случаях оказалось предпочтительнее. Этот критерий основан на расположении годографа вектора  $M(i\omega)$ , определяемого характеристическим уравнением системы в плоскости комплексного переменного.

*Условия устойчивости по Михайлову.* САУ будет устойчивой, если годограф функции  $M(i\omega)$  при изменении  $\omega$  от нуля до бесконечности обходит последовательно в положительном направлении (против часовой стрелки)  $n$  квадрантов комплексной плоскости (где  $n$  – степень характеристического уравнения данной системы) и уходит в бесконечность.

Вектор  $M(i\omega)$  можно найти, если в характеристическом уравнении заменить оператор Лапласа  $p$  на комплексную частоту  $i\omega$ .

Пусть система автоматического управления имеет следующее характеристическое уравнение:

$$C_0 \cdot \lambda^n + C_1 \cdot \lambda^{n-1} + \dots + C_{n-1} \cdot \lambda + C_n = 0. \quad (5.4)$$

Заменяя  $\lambda$  на  $i\omega$ , получаем

$$M(i\omega) = C_0 \cdot (i\omega)^n + C_1 \cdot (i\omega)^{n-1} + \dots + C_{n-1} \cdot (i\omega) + C_n = 0. \quad (5.5)$$

Для каждого значения  $\omega$  функция  $M(i\omega)$  будет представлять собой вектор в комплексной плоскости. Если величине  $\omega$  придавать последовательно значения от нуля до бесконечности, то получится семейство векторов. Кривая, являющаяся геометрическим местом точек концов вектора при изменении значений  $\omega$  от нуля до бесконечности, называется годографом Михайлова (рисунок 5.1). По расположению годографа на комплексной плоскости можно определить, устойчива система или нет.

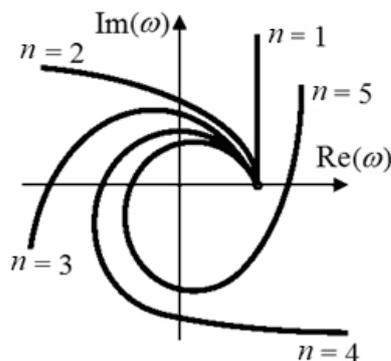
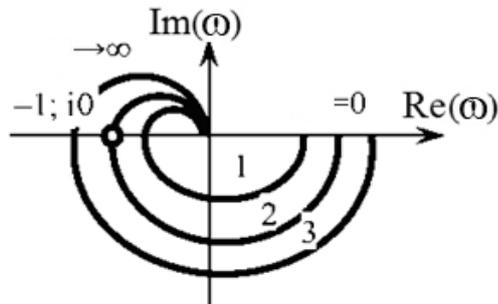


Рисунок 5.1 – Годографы Михайлова для устойчивых систем

**Критерий Найквиста.** Критерий Найквиста позволяет судить об устойчивости замкнутой системы по виду амплитудно-фазовой частотной характеристики (АФЧХ) системы в разомкнутом состоянии. Различают формулировки критерия для случаев, когда система в разомкнутом состоянии устойчива и неустойчива.

Критерий устойчивости формулируется следующим образом: САУ, устойчивая в разомкнутом состоянии, будет устойчива в замкнутом состоянии, если годограф Найквиста разомкнутой системы не охватывает точку на комплексной плоскости с координатами  $(-1, i0)$ .

На рисунке 5.2 показаны амплитудно-фазовые частотные характеристики системы. Годограф 1 не охватывает критическую точку, поэтому система, имеющая эту характеристику, устойчива. Амплитудно-фазовая частотная характеристика 3 охватывает точку  $(-1, i0)$ , поэтому система 3 неустойчива. Амплитудно-фазовая частотная характеристика 2 проходит через критическую точку – соответствующая система находится на границе устойчивости.



1 – годограф для устойчивой САУ; 2 – годограф для САУ, находящейся на границе устойчивости; 3 – годограф для неустойчивой САУ

Рисунок 5.2 – Годографы Найквиста

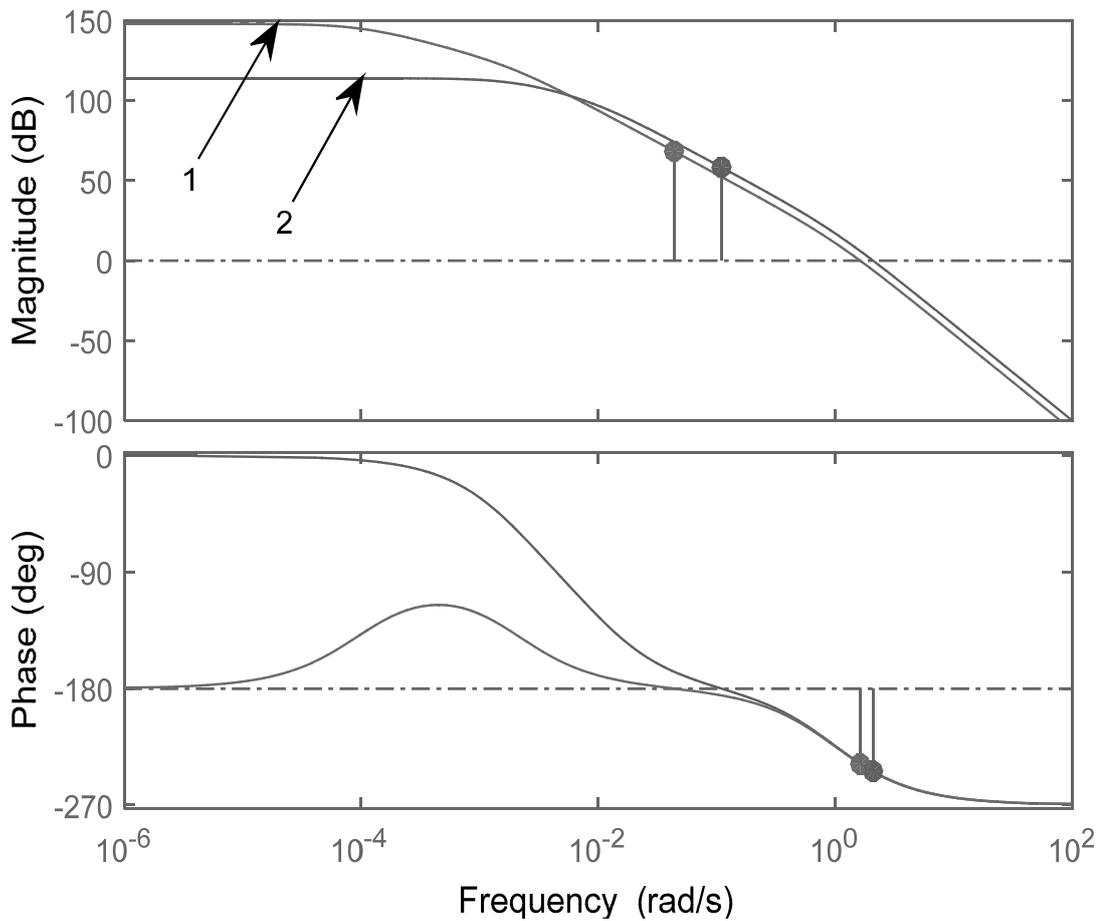
*Логарифмический частотный критерий устойчивости.* Применительно к логарифмическому критерию условие устойчивости можно сформулировать следующим образом: система автоматического управления, устойчивая в разомкнутом состоянии, будет устойчива и в замкнутом состоянии, если ордината логарифмической фазово-частотной характеристики (аргумент АФЧХ) на частоте среза  $\omega_{cp}$  системы по абсолютной величине меньше, чем  $180^\circ$ , т. е. если  $|\Psi(\omega_{cp})| < 180^\circ$ .

Система, имеющая ЛАЧХ 1 (рисунок 5.3), устойчива, поскольку  $|\Psi_1(\omega_{cp})| < 180^\circ$ , а система с ЛАЧХ 2 неустойчива, т. к.  $|\Psi_2(\omega_{cp})| > 180^\circ$ .

Запас устойчивости по амплитуде  $h$  определяется как число децибел, на которое нужно увеличить усиление системы, чтобы система достигла границы устойчивости. Запас устойчивости по фазе  $\gamma$  определяется как разность между  $180^\circ$  и абсолютным значением аргумента АФЧХ при частоте среза  $\omega_{cp}$ , т. е.

$$\gamma = 180^\circ - |\Psi(\omega_{cp})|.$$

### Bode Diagram



1 – логарифмические характеристики для устойчивых САУ; 2 – для неустойчивых САУ

Рисунок 5.3 – Логарифмические характеристики систем

## 6 Практическая работа № 6. Показатели качества САУ

**Цель работы:** изучение показателей качества САУ.

### 6.1 Задание для самостоятельной работы

**Задача 1** (1 балл). Построить ЛАЧХ асимптотическим методом.

$$W(s) = \frac{10(s+5)(s^2+10s+10)}{s(5s+1)(s+10)(10s+1)}$$

**Задача 2** (1,5 балла). Построить ЛАЧХ звена двумя способами.

$$W(s) = \frac{5}{s(s+10)}$$

**Задача 3** (1,5 балла). По заданной ЛАЧХ (рисунок 6.1) определить передаточную функцию объекта.

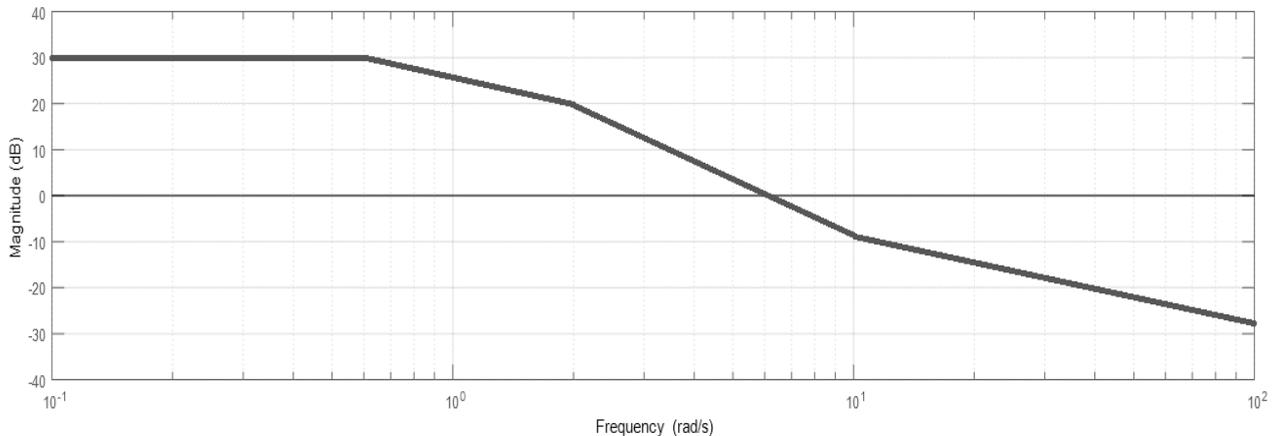


Рисунок 6.1 – Частотная характеристика к задаче 3

## 6.2 Краткие теоретические сведения

В общем случае качество переходных процессов в системе обычно оценивают для типового воздействия на входе при нулевых начальных условиях. В качестве типового входного воздействия рассматривается единичный скачок; в этом случае кривая переходного процесса для управляемой величины будет представлять собой переходную характеристику системы  $h(t)$ . Примерный вид переходной характеристики показан на рисунке 6.2.

По виду переходной характеристики системы можно оценить такие динамические свойства системы регулирования, как перерегулирование и быстродействие [6].

Качество регулирования может быть охарактеризовано максимальным значением управляемой величины  $h_{\max}$  или так называемым перерегулированием  $\sigma\%$  :

$$\sigma\% = \frac{h_{\max} - h_{уст}}{h_{уст}} \cdot 100\%, \quad (6.1)$$

где  $h_{уст}$  – установившееся значение управляемой величины после завершения переходного процесса.

Допустимое значение перерегулирования для той или иной системы может быть установлено на основании опыта эксплуатации подобных систем. В большинстве случаев считается, что качество системы является приемлемым, если величина перерегулирования не превышает 10...30%. Однако в некоторых случаях требуется, чтобы переходный процесс протекал вообще без перерегулирования, т. е. был монотонным; в ряде других случаев может допускаться перерегулирование 50...70%.

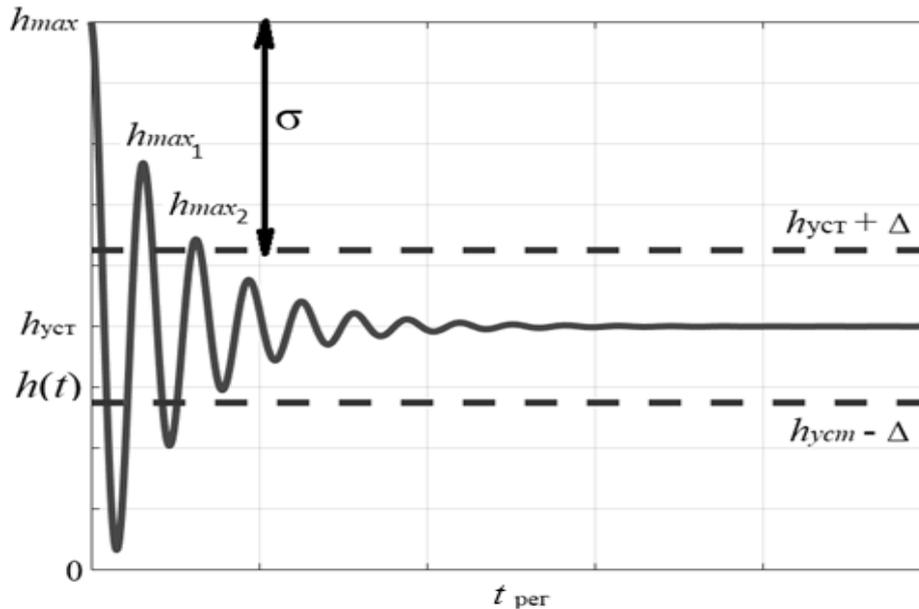


Рисунок 6.2 – Оценка динамических свойств системы регулирования по переходной характеристике

Быстродействие системы или время регулирования  $t_{рег}$  определяется как время, протекающее от момента приложения на вход единичного скачка до момента, после которого имеет место неравенство

$$h(t) - h_{уст} \leq \Delta h_{уст},$$

где  $\Delta$  – заданная малая постоянная величина, представляющая собой обычно допустимую ошибку.

Под величиной  $\Delta$  понимают некоторую долю выходного воздействия, составляющую, как правило, 5 % величины сигнала на выходе (так называемая 5-процентная трубка). Величина  $h_{уст}$  в частном случае может равняться нулю.

Допустимое значение времени переходного процесса определяется на основании опыта эксплуатации конкретных систем управления.

Иногда дополнительно к величине перерегулирования  $\sigma$  % (или к величине  $h_{max}$ ) задается допустимое число колебаний  $N$ , которое может наблюдаться в течение времени переходного процесса. Это число составляет обычно 1–2. В некоторых системах колебания могут вообще не допускаться, а иногда может допускаться до 3–4 колебаний.

Кроме времени регулирования, переходные процессы характеризуются еще временем максимума  $t_{max}$ , отсчитываемым от начала движения до момента достижения первого максимума.

Склонность системы к колебаниям оценивается колебательностью переходного процесса  $\frac{h_{max2}}{h_{max1}}$  – отношением соседних максимумов.

Эта величина выражается в процентах. Незатухающие колебания при этом соответствуют колебательности 100 %. Колебательность стремится к нулю при уменьшении до нуля второго максимума переходной характеристики, когда получается неколебательный процесс. Монотонная переходная характеристика, показанная на рисунке 6.1 пунктирной линией, имеет колебательность, равную нулю.

При исследованиях качества процесса регулирования часто используются косвенные методы, в частности метод распределения корней, в котором для приближенной оценки времени регулирования и перерегулирования используются значения корней характеристического уравнения замкнутой системы  $D(\lambda)$ . Метод основывается на отыскании наименьшего по абсолютному значению вещественного корня или пары комплексно-сопряженных корней с наименьшей вещественной частью. Указанные корни могут быть представлены геометрически на комплексной плоскости соответствующими точками.

На рисунке 6.3 показаны для примера корни системы шестого порядка – два отрицательных вещественных  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  и две пары комплексно-сопряженных корней с отрицательными вещественными частями  $\lambda_{3-4} = -\alpha \pm i\beta$  и  $\lambda_{5-6} = -\xi \pm i\lambda$ .

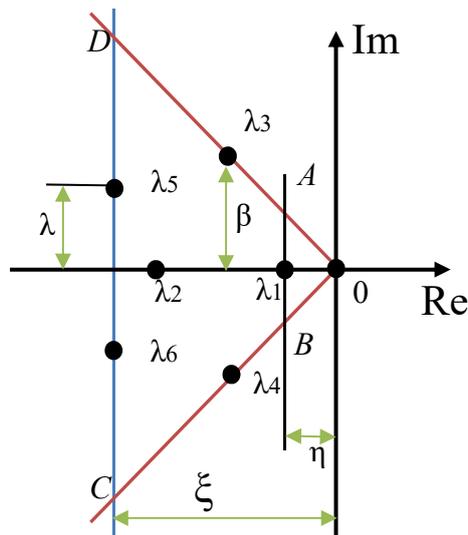


Рисунок 6.3 – Возможное расположение корней на комплексной плоскости

Для оценки качества регулирования обычно используются понятия:

- степень устойчивости  $\eta$ ;
- колебательность  $\mu = \operatorname{tg}\varphi$ ;
- абсолютное значение  $\xi$  вещественной части наиболее удаленного от мнимой оси корня (см. рисунок 6.3).

Указанные характеристики распределения корней образуют трапецию  $A B C D$ , внутри которой и на ее сторонах располагаются корни характеристического уравнения.

Степенью устойчивости  $\eta$  называется абсолютная величина вещественной части корня, расположенного ближе всех остальных к мнимой оси (доминирующего корня или доминирующей пары корней). В данном случае доминирующим является вещественный корень  $\lambda_1$  как наиболее близко расположенный к мнимой оси, следовательно,  $\eta = |\lambda_1|$ .

Понятие степени устойчивости в качественном отношении связано с понятием быстродействия или длительности переходного процесса. Оценивая приближенно длительность переходного процесса только по затуханию составляющей, определяемой ближайшим к мнимой оси корнем, получим выражение для времени регулирования  $t_{рег}$ , %, следующую форму:

$$t_{рег} = \frac{3}{\eta}. \quad (6.2)$$

Колебательностью  $\mu = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)_{\max}$  называется отношение мнимой части  $\beta$  к действительной  $\alpha$  в той паре комплексных сопряженных корней  $\lambda_{3-4} = -\alpha \pm i\beta$ , которые дают наибольший угол  $2\varphi$  (см. рисунок 6.3).

Максимальная величина перерегулирования в переходном процессе может быть оценена приближенным равенством

$$t_{рег} = \frac{3}{\eta} \sigma\%_{\max} \approx e^{\frac{\pi}{\mu}} \cdot 100 \%. \quad (6.3)$$

## Список литературы

- 1 **Ким, Д. П.** Теория автоматического управления. Линейные системы: учебник / Д. П. Ким. – 3-е изд., испр. и доп. – Москва: Юрайт, 2018. – 309 с.
- 2 **Юревич, Е. И.** Теория автоматического управления / Е. И. Юревич. – Санкт-Петербург: БХВ-Петербург, 2007. – 560 с.
- 3 **Бесекерский, В. А.** Теория систем автоматического управления / В. А. Бесекерский, Е. П. Попов. – Санкт-Петербург: Профессия, 2004. – 752 с.
- 4 Теория автоматического управления: учебник / Под ред. А. А. Воронова. – 2-е изд. – Москва: Высшая школа, 1986. – 367 с.
- 5 Сборник задач по теории автоматического регулирования и управления / Под ред. В. А. Бесекерского. – Москва: Наука, 1978. – 512 с.
- 6 **Васильев, Д. В.** Системы автоматического управления. Примеры расчета / Д. В. Васильев, В. Г. Чуич. – Москва: Высшая школа, 1967. – 419 с.