

На данный момент система находится на этапе тестирования, протестировано функционирование БД продуктов и работа всех первоначально предусмотренных функций приложения. Предполагается нарастить функции системы, дополнить систему функционалом учета особенностей здоровья (например, авитаминоза, дефицита железа и других микроэлементов) с привлечением эксперта в соответствующей предметной области.

УДК 372.851

ДИСТАНЦИОННЫЙ ЭКЗАМЕН ПО КУРСУ
«МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ. ЧАСТЬ 3 – РЯДЫ»

Н. В. БЕЛЕЦКАЯ

Российский технологический университет (РТУ МИРЭА)
Москва, Россия

Курс математического анализа, читаемый автором в РТУ МИРЭА в течение многих лет, содержит четыре части. Часть 3 – «Ряды» включает в себя следующие темы, нашедшие отражение при подборе экзаменационного материала: «Числовые ряды»; «Функциональные ряды»; «Степенные ряды и их применение»; «Ряды Фурье и их применение для решения задач математической физики».

Достаточно очевидно, что проводить дистанционный экзамен по таким темам в виде теста практически невозможно. Какие варианты можно предложить на выбор, например, по первой теме: ряд сходится или ряд расходится? Понятно, что в этом разделе математического анализа важнее именно ход рассуждений и доказательств, нежели просто ответ. Поэтому был выбран вариант проведения экзамена «в форме эссе». Были составлены 30 билетов, отражающих все перечисленные темы и имеющих одинаковый уровень сложности. Система, действующая на платформе Moodle, произвольным образом выдает каждому студенту вариант экзаменационного задания. Решения и ответы студенты должны оформить в виде файла в формате .pdf и прикрепить в заданную для этого область на сайте дистанционного обучения РТУ МИРЭА <https://online-edu.mirea.ru/>. Конечно, на такую проверку экзаменационной работы от преподавателя требуются гораздо большие трудозатраты, чем на тест, проверяемый системой автоматически, но иной путь в данном случае представить сложно.

При составлении заданий было использовано пособие [1] и методические материалы кафедры высшей математики Института кибернетики РТУ МИРЭА.

Приведу пример экзаменационного билета с некоторыми комментариями.

1. (4 балла). Исследовать на сходимость числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$.

Комментарий. Предполагается знание признаков сходимости знакоположительных числовых рядов, например, интегрального признака Коши.

2. (4 балла). Исследовать на сходимость числовой ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1-n}{n+2} \right)^{7n+5}$.

Комментарий. Предполагается, что студент должен заметить, что ряд не является знакоположительным и что применение радикального признака Коши невозможно.

3. (6 баллов). Показать, что числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n5^n}$ сходится и найти его сумму.

Комментарий. Рассмотреть степенной ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$, найти его сумму с помощью формулы суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии, почленно проинтегрировать в области сходимости и подставить значение $x = \frac{1}{5}$, входящее в область сходимости.

4. (6 баллов). Найти круг сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2z-1)^n}{(3n-1)^2 3^n}$.

Изобразить его на чертеже. Исследовать поведение ряда в точках пересечения границы круга с вещественной осью.

Комментарий. Теорема Абеля доказывается в обсуждаемом курсе в комплексной форме. Кроме этого, данное задание проверяет готовность студента к изучению следующей части курса, которая посвящена теории функций комплексной переменной.

5. (10 баллов). Разложить данную функцию $f(x)$ в ряд Маклорена. Указать область сходимости полученного ряда $f(x) = \frac{1}{(1-x)^3}$.

Комментарий. Использовать табличное разложение и теорему о почленном дифференцировании степенных рядов. В этом задании функции, предлагаемые к разложению в ряды Маклорена, весьма разнообразны. В некоторых случаях требуется применить теорему о почленном интегрировании и другие приемы. Например, $f(x) = \int_0^x \frac{\ln(1+2t)}{t} dt$

или $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{x+3}{x-3}$.

6. (10 баллов). Методом Фурье найти решение уравнения теплопроводности $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\partial U}{\partial t}$ для стержня с теплоизолированной боковой поверхностью, единичной длины, на концах которого поддерживается нулевая температура, если в начальный момент времени температура в стержне распределялась следующим образом: $U(x, 0) = 5 \sin \pi x + 3 \sin 8\pi x$.

Комментарий. Решение методом Фурье. Обратит внимание на то, что в начальном условии фигурирует функция, уже разложенная по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля. Среди вариантов также могут встречаться задания на непосредственное вычисление коэффициентов Фурье. Например, разложить функцию, заданную на полупериоде, в ряд Фурье по синусам: $y = 1 - x$, $(0, 2)$. С помощью полученного ряда

найти сумму числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

7. (10 баллов). Доказать равномерную сходимость ряда на указанном множестве $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{3^n(1+n^2x^2)}$, $x \in (-\infty, +\infty)$.

Комментарий. Используются теорема Вейерштрасса и различные методы построения мажоранты для данного функционального ряда. Например, в приведенном выше примере можно использовать неравенство

$\frac{2ab}{a^2 + b^2} \leq 1$. А для рядов типа $\sum_{n=1}^{\infty} x^3 e^{-nx}$, $x \in [0, +\infty)$ построение мажоранты

можно осуществить непосредственным отысканием локального максимума общего члена функционального ряда.

Задания различного уровня сложности позволяют дифференцировать контингент экзаменуемых и выявить среди них перспективных студентов, в том числе подготовленных к участию в студенческих олимпиадах по математике.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сборник задач по математическому анализу: учебное пособие. Т. 2: Интегралы. Ряды / Л. Д. Кудрявцев [и др.]; под ред. Л. Д. Кудрявцева. – 2-е изд., перераб. – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2003.