УДК 378

РЕШЕНИЯ НАИБОЛЕЕ СЛОЖНЫХ ЗАДАЧ XI ОТКРЫТОЙ ОЛИМПИАДЫ БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКОГО УНИВЕРСИТЕТА ПО МАТЕМАТИКЕ

В. Г. ЗАМУРАЕВ
Белорусско-Российский университет
Могилев, Беларусь

XI Открытая олимпиада Белорусско-Российского университета по математике [1–4] состоялась 20 февраля 2020 г. В соревновании приняли участие 52 студента и аспиранта из 25 вузов Беларуси, Грузии, Объединенных Арабских Эмиратов, Польши, России, Таджикистана и Эстонии. Участникам было предложено для решения 30 заданий в тестовой форме, которые следовало выполнить в течение 5 ч. Жюри проверяло лишь ответы. При подсчете количества набранных баллов учитывались коэффициенты сложности заданий: чем меньшее число участников дали правильный ответ, тем более сложным считалось задание.

Победителем олимпиады стал студент Университета Николая Коперника (Польша) Камиль Дунст, давший 17 правильных ответов. Второе место занял студент филиала Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова в г. Душанбе (Таджикистан) Хикматулло Исматов (15 правильных ответов), третьим стал студент Санкт-Петербургского государственного университета (Россия) Никита Вяткин (20 правильных ответов).

Наиболее сложными заданиями олимпиады оказались рассматриваемые ниже задачи 1–4. Задачи 1 и 2 не решил ни один участник, а правильные ответы в задачах 3 и 4 смогли дать лишь по три участника.

Задача 1 [5, с. 21]. Ребро правильного тетраэдра $ABCD$ равно 8. На ребре AB как на диаметре построена сфера. Найдите радиус сферы, вписанной в трехгранный угол тетраэдра с вершиной в точке A и касающейся построенной сферы.

Решение

Пусть AO – высота тетраэдра $ABCD$. Так как угол AOB прямой, то точки A и O лежат на сфере, построенной на AB как на диаметре. Следовательно, все внутренние точки отрезка AO лежат внутри этой сферы. Поскольку центр сферы, радиус которой мы ищем, лежит на AO, то возможно лишь внутреннее касание сфер.

Пусть K – середина ребра CD. Построим сечение тетраэдра $ABCD$ плоскостью ABK (рис. 1). Обозначим через O_1 центр сферы, построенной на ребре AB как на диаметре.

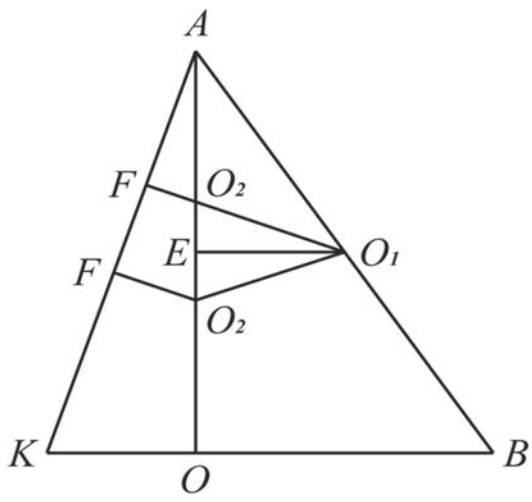

Рис. 1. Сечение тетраэдра $ABCD$ плоскостью ABK

Центр O_2 вписанной сферы соединим с точкой F, в которой происходит касание этой сферы с одной из граней. Из подобия треугольников FO_2A и OKA имеем $AO_2 : 4\sqrt{3} = r : \left(4\sqrt{3}/3\right)$, т. е. $AO_2 = 3r$ (где r – искомый радиус).

Спроектируем точку O_1 на AO и рассмотрим прямоугольный треугольник O_1EO_2. В нем O_1O_2 равно разности радиусов, т. е. $O_1O_2 = 4 - r$, EO_1 равно половине OB, т. е. $EO_1 = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$. Отрезок $O_2E = \left|AE - AO_2\right|$. Знак абсолютной величины означает, что точка O_2 может оказаться ниже точки E либо выше ее. Так как $AE = \dfrac{1}{2}AO = \dfrac{4\sqrt{6}}{3}$, а $AO_2 = 3r$, то

$$O_2E = \left|\frac{4\sqrt{6}}{3} - 3r\right|.$$

По теореме Пифагора $O_2O_1^{\,2} = O_2E^2 + EO_1^{\,2}$, т. е.

$$\left(4 - r\right)^2 = \left(\frac{4\sqrt{6}}{3} - 3r\right)^2 + \frac{16}{3}.$$

После простых преобразований получим уравнение $r^2 + \left(1 - \sqrt{6}\right)r = 0$, откуда $r = \sqrt{6} - 1$.

Так как $AO_2 = 3r$, то $AO_2 = 3\left(\sqrt{6} - 1\right)$, в то время как $AE = \dfrac{4\sqrt{6}}{3}$.

Сравнивая AO_2 и AE, мы видим, что AO_2 больше. Следовательно, точка O_2 должна располагаться ниже точки E.

Ответ: $\sqrt{6}-1$.

Задача 2 [6, с. 9]. Последовательности $\left(a_n\right)$ и $\left(b_n\right)$ заданы следующим образом: $a_{-1}=0$, $b_{-1}=1$, $a_0=b_0=1$,

$$a_n=2a_{n-1}+\left(2n-1\right)^2 a_{n-2},\ b_n=2b_{n-1}+\left(2n-1\right)^2 b_{n-2}, \text{ при } n\geq 1.$$

Найдите $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}$.

Решение

Индукцией по n легко показать, что при $n\geq 1$

$$b_n=\prod_{k=0}^{n}\left(2k+1\right),$$

$$a_n=a_{n-1}\left(2n+1\right)+\left(-1\right)^n\prod_{k=0}^{n-1}\left(2k+1\right).$$

Отсюда следует, что

$$\frac{a_n}{b_n}=\frac{a_{n-1}\left(2n+1\right)}{b_n}+\frac{\left(-1\right)^n\prod\limits_{k=0}^{n-1}\left(2k+1\right)}{b_n}=\frac{a_{n-1}}{b_{n-1}}+\frac{\left(-1\right)^n}{2n+1},$$

$$\frac{a_n}{b_n}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots+\frac{\left(-1\right)^n}{2n+1},$$

и, таким образом, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}$ существует и равен сумме условно сходящегося ряда $1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}+\ldots$.

Для вычисления этой суммы вспомним разложение $\operatorname{arctg} x$ в ряд Тейлора:

$$\operatorname{arctg} x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots+\frac{\left(-1\right)^n}{2n+1}x^{2n+1}+\ldots,\ x\in\left[-1,1\right].$$

Подставляя значение $x = 1$, получим

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + ... = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{4}$.

Задача 3 [7, с. 45]. Найдите интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^4 7x - \sin^4 5x}{x} dx$.

Решение

Преобразовывая разность $\sin^4 7x - \sin^4 5x$ к виду

$$\sin^4 7x - \sin^4 5x = \frac{1}{4}\left(\left(1 - \cos 14x\right)^2 - \left(1 - \cos 10x\right)^2\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(2\cos 10x - 2\cos 14x + \cos^2 14x - \cos^2 10x\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(2\cos 10x - 2\cos 14x - \frac{1}{2}\cos 20x + \frac{1}{2}\cos 28x\right) = \frac{1}{4}\left(f\left(5x\right) - f\left(7x\right)\right),$$

$$f\left(x\right) = 2\cos 2x - \frac{1}{2}\cos 4x,$$

запишем

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^4 7x - \sin^4 5x}{x} dx = \frac{1}{4}\int\limits_0^{+\infty} \frac{f\left(5x\right) - f\left(7x\right)}{x} dx.$$

Теперь применим формулу Фруллани [7, с. 36]

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{f\left(ax\right) - f\left(bx\right)}{x} dx = f\left(0\right)\ln\frac{b}{a},\ a > 0,\ b > 0,$$

где f – непрерывная функция

и интеграл $\int\limits_A^{+\infty} \frac{f\left(x\right)}{x} dx$ сходится $\forall A > 0$.

Поскольку функция f непрерывна и интеграл $\int\limits_A^{+\infty} \frac{f\left(x\right)}{x} dx$ по признаку Дирихле сходится $\forall A > 0$, то по указанной формуле

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin^4 7x-\sin^4 5x}{x}dx=\frac{1}{4}\int\limits_0^{+\infty}\frac{f\left(5x\right)-f\left(7x\right)}{x}dx=\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{2}\ln\frac{7}{5}=\frac{3}{8}\ln\frac{7}{5}.$$

Ответ: $\frac{3}{8}\ln\frac{7}{5}$.

Задача 4 [8, с. 51]. Найдите площадь фигуры, ограниченной кривой

$$\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{3}\right)^4=4xy\,.$$

Решение

Так как левая часть уравнения неотрицательна при любых значениях x и y, то и правая часть неотрицательна, поэтому x и y имеют одинаковые знаки. Следовательно, кривая расположена в первой и третьей четвертях, причем она симметрична относительно начала координат.

Введем замену переменных: $x=2r\cos^2\varphi$, $x=3r\sin^2\varphi$. Уравнение кривой в новых координатах принимает вид $r^2=6\sin^2 2\varphi$. Пределы изменения переменных φ и r для части фигуры, расположенной в первой четверти, следующие:

$$0\le\varphi\le\frac{\pi}{2},\ 0\le r\le\sqrt{6}\sin 2\varphi\,.$$

Якобиан $I\left(r,\varphi\right)=6r\sin 2\varphi$. Тогда площадь фигуры

$$S=2\int\limits_0^{\pi/2}d\varphi\int\limits_0^{\sqrt{6}\sin 2\varphi}6r\sin 2\varphi dr=12\int\limits_0^{\pi/2}\sin 2\varphi d\varphi\int\limits_0^{\sqrt{6}\sin 2\varphi}rdr=36\int\limits_0^{\pi/2}\sin^3 2\varphi d\varphi=$$

$$=18\int\limits_0^{\pi/2}\left(\cos^2 2\varphi-1\right)d\cos 2\varphi=18\left(\frac{1}{3}\cos^3 2\varphi-\cos 2\varphi\right)\Bigg|_0^{\pi/2}=24\,.$$

Ответ: 24.

Правильные ответы в задаче 3 дали Камиль Дунст, Хикматулло Исматов и Шохрух Хусенов (Таджикский национальный университет). Правильные ответы в задаче 4 дали Камиль Дунст, Владимир Щербаков (Российский экономический университет имени Г. В. Плеханова) и Евгений Кичак (МИРЭА – Российский технологический университет).

Наиболее простыми заданиями олимпиады оказались приведенные ниже задачи 5–7, правильные ответы в которых дали 39, 35 и 34 участника соответственно.

Задача 5 [9, с. 67]. В некоторой стране 30 городов, причем каждый соединен с каждым дорогой. Если дорогу закрывают на ремонт, то по ней нельзя проехать ни туда, ни обратно. Какое наибольшее число дорог можно закрыть на ремонт так, чтобы из каждого города можно было проехать в каждый?

Ответ: 406.

Задача 6 [10, с. 19]. Найдите число различных путей длины 10, ведущих из начала координат в точку $(6,4)$ и состоящих из отрезков, параллельных осям координат, при условии, что концами отрезков служат точки с целочисленными координатами.

Ответ: 210.

Задача 7 [11, с. 8]. Найдите отношение суммы квадратов длин медиан треугольника к сумме квадратов длин его сторон.

Ответ: $\frac{3}{4}$.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Замураев, В. Г.** Открытая олимпиада Белорусско-Российского университета по математике / В. Г. Замураев // Преподавание математики в высшей школе и работа с одаренными студентами в современных условиях: материалы Междунар. науч.-практ. семинара. – Могилев: Белорус.-Рос. ун-т, 2017. – С. 22–24.

2. **Замураев, В. Г.** Решения наиболее сложных задач VIII Открытой олимпиады Белорусско-Российского университета по математике / В. Г. Замураев // Преподавание математики в высшей школе и работа с одаренными студентами в современных условиях : материалы Междунар. науч.-практ. семинара. – Могилев: Белорус.-Рос. ун-т, 2018. – С. 12–15.

3. **Замураев, В. Г.** Решения наиболее сложных задач IX Открытой олимпиады Белорусско-Российского университета по математике / В. Г. Замураев // Преподавание математики в высшей школе и работа с одаренными студентами в современных условиях: материалы Междунар. науч.-практ. семинара. – Могилев : Белорус.-Рос. ун-т, 2019. – С. 40–45.

4. **Замураев, В. Г.** Решения наиболее сложных задач X Открытой олимпиады Белорусско-Российского университета по математике / В. Г. Замураев // Преподавание математики в высшей школе и работа с одаренными студентами в современных условиях: материалы Междунар. науч.-практ. семинара. – Могилев: Белорус.-Рос. ун-т, 2020. – С. 42–47.

5. **Ваховский, Е. Б.** Задачи по элементарной математике повышенной трудности / Е. Б. Ваховский, А. А. Рывкин. – Москва: Наука, 1969. – 496 с.

6. **Садовничий, В. А.** Задачи студенческих математических олимпиад / В. А. Садовничий, А. А. Григорьян, С. В. Конягин. – Москва: МГУ, 1987. – 310 с.

7. Справочное пособие по высшей математике. Т. 3: Математический анализ: кратные и криволинейные интегралы / И. И. Ляшко [и др.]. – Москва: Едиториал УРСС, 2001. – 224 с.

8. **Борисенко, О. Ф.** Задачи студенческих олимпиад БГУИР по математике / О. Ф. Борисенко, И. Н. Лущакова. – Минск: БГУИР, 2019. – 84 с.

9. **Горбачев, Н. В.** Сборник олимпиадных задач по математике / Н. В. Горбачев. – Москва: МЦНМО, 2004. – 560 с.

10. Комбинаторный анализ. Задачи и упражнения: учебное пособие / Под ред. К. А. Рыбникова. – Москва: Наука, 1982. – 368 с.

11. **Беркович, Ф. Д.** Задачи студенческих математических олимпиад с указаниями и решениями: учебное пособие / Ф. Д. Беркович, В. С. Федий, В. И. Шлыков. – Ростов-на-Дону: Феникс, 2008. – 171 с.

УДК 378.141.4

ОБ УЧЕБНОМ ПЛАНЕ ПРОГРАММЫ БАКАЛАВРИАТА ПО ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКЕ В БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

В. Г. ЗАМУРАЕВ
Белорусско-Российский университет
Могилев, Беларусь

Прикладная математика – новое для Белорусско-Российского университета направление подготовки студентов. Программа бакалавриата по данному направлению была разработана в июне – октябре 2019 г. в соответствии с федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования 3++ [1]. Установленный профиль программы – разработка программного обеспечения. Срок обучения по программе – 4 года, форма обучения – очная. Объем программы составляет 240 зачетных единиц (з. е.), за каждый учебный год реализуется 60 з. е.

В феврале 2020 г. университетом была получена лицензия на право оказывать образовательные услуги по реализации данной программы [2]. Первый набор студентов запланирован на 2021–2022 учебный год.