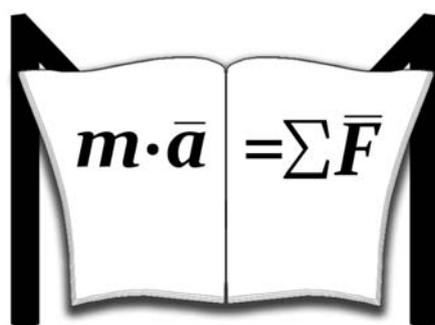


МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Технологии металлов»

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

*Методические рекомендации к практическим занятиям
для студентов направления подготовки
15.03.01 «Машиностроение»
очной формы обучения*



Могилев 2021

УДК 539.3/.6
ББК 30.121
С64

Рекомендовано к изданию
учебно-методическим отделом
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Технологии металлов» «16» декабря 2020 г.,
протокол № 6

Составитель ст. преподаватель Е. Г. Кривоногова

Рецензент канд. техн. наук А. Е. Науменко

Приведены примеры решения задач, которые могут быть использованы
студентами на практических занятиях.

Учебно-методическое издание

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Ответственный за выпуск	Д. И. Якубович
Корректор	И. В. Голубцова
Компьютерная верстка	Н. П. Полевничая

Подписано в печать . Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Печать трафаретная. Усл. печ. л . Уч.-изд. л. . Тираж 36 экз. Заказ № .

Издатель и полиграфическое исполнение:
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования
«Белорусско-Российский университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/156 от 07.03.2019.
Пр-т Мира, 43, 212022, г. Могилев.

© Белорусско-Российский
университет, 2021

Содержание

Введение.....	4
1 Построение эпюр внутренних силовых факторов.....	5
2 Расчет на прочность и жесткость при растяжении (сжатии).....	9
3 Изгиб прямого бруса.....	11
4 Кручение стального стержня.....	16
5 Сложное сопротивление.	18
6 Энергетические методы определения перемещений.....	26
7 Устойчивость центрально-сжатых стержней.....	27
8 Расчет статически неопределимых стержневых систем. Расчеты на прочность и жесткость статически неопределимых балок.....	34
9 Расчеты на прочность и жесткость при ударе	40
Список литературы.....	44

Введение

Цель преподавания дисциплины «Сопротивление материалов» – научить студента правильному решению задач расчета на прочность, жесткость и устойчивость конструкций, используемых в сложных эксплуатационных условиях под действием как статических, так и динамических нагрузок, рациональному назначению конструкционных материалов и формы поперечного сечения, обеспечивающих требуемые показатели надежности, безопасности, экономичности и эффективности изделий.

Методические рекомендации помогут сформировать у студентов нижеперечисленные компетенции.

ОПК-7. Умение применять современные методы для разработки малоотходных, энергосберегающих и экологически чистых машиностроительных технологий, обеспечивающих безопасность жизнедеятельности людей и их защиту от возможных последствий аварий, катастроф и стихийных бедствий; применять способы рационального использования сырьевых, энергетических и других видов ресурсов в машиностроении.

ОПК-13. Умение применять стандартные методы расчета при проектировании деталей и узлов изделий машиностроения.

Методические рекомендации к практическим занятиям предназначены для студентов направления подготовки 15.03.01 «Машиностроение» очной формы обучения в рамках изучения дисциплины «Сопротивление материалов».

1 Построение эпюр внутренних силовых факторов

Пример – Для заданной расчетной схемы балки (рисунок 1.1) построить эпюры внутренних силовых факторов (ВСФ).

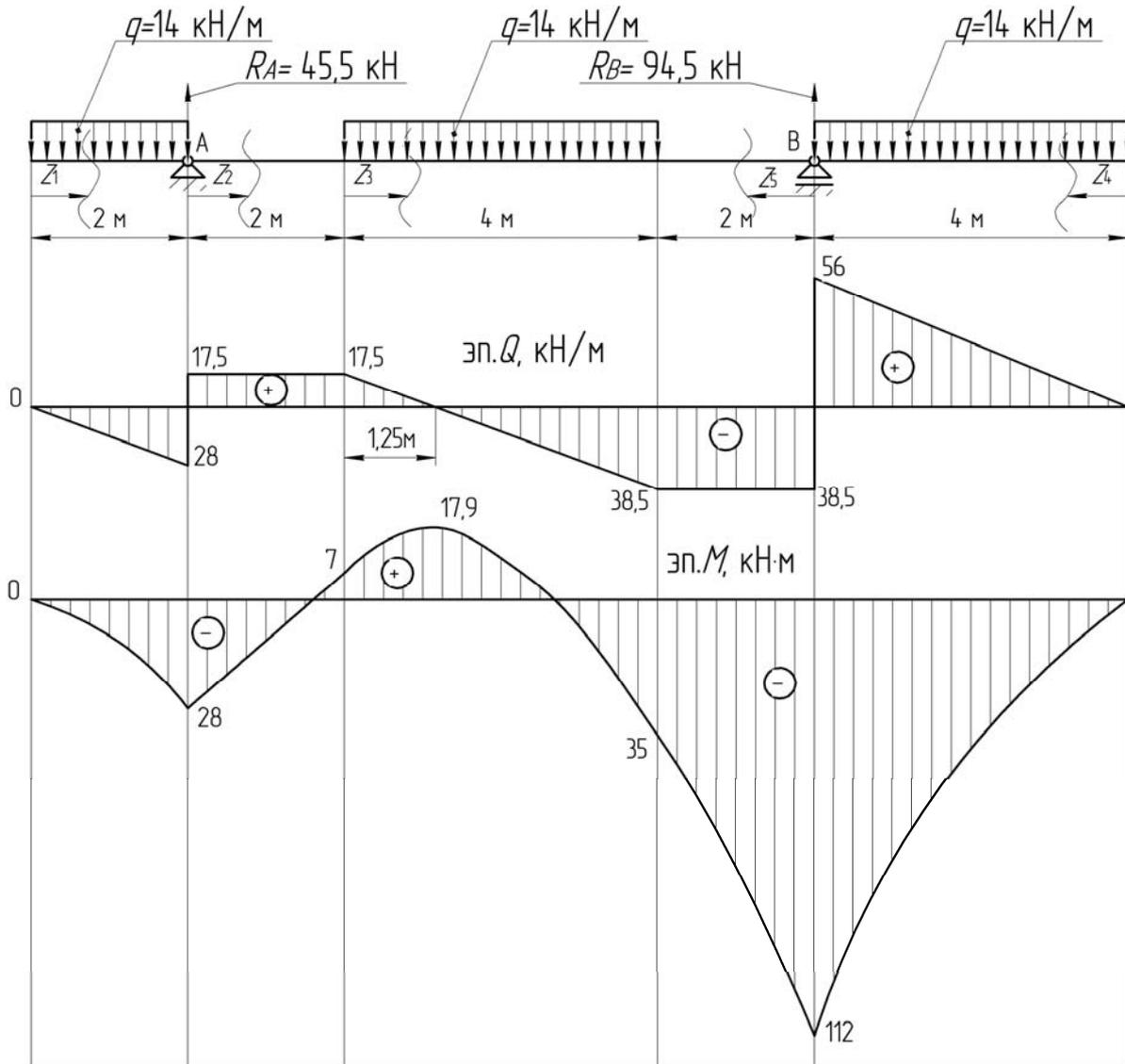


Рисунок 1.1 – Расчетная схема балки и эпюры внутренних силовых факторов

Решение

В поперечных сечениях балки возникают два ВСФ: поперечная сила Q и изгибающий момент M . Вычерчиваем заданную балку с указанием всех нагрузок и линейных размеров. Определяем реакции опор:

$$\sum M_A = 0 ;$$

$$-q \cdot 2 \cdot 1 + q \cdot 4 \cdot 4 + q \cdot 4 \cdot 10 - R_B \cdot 8 = 0 ;$$

$$R_B = \frac{-2q + 16q + 40q}{8} = \frac{54q}{8} = \frac{756}{8} = 94,5 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = 0 ;$$

$$-q \cdot 2 \cdot 9 - q \cdot 4 \cdot 4 + q \cdot 4 \cdot 2 + R_A \cdot 8 = 0 ;$$

$$R_A = \frac{18q + 16q - 8q}{8} = \frac{26q}{8} = \frac{364}{8} = 45,5 \text{ кН.}$$

Проверка правильности определения реакций:

$$\sum Y = 0;$$

$$R_A + R_B - q \cdot 2 - q \cdot 4 - q \cdot 4 = 0;$$

$$45,5 + 94,5 - 28 - 56 - 56 = 0.$$

Разбиваем балку на участки, на каждом из которых проводим произвольное поперечное сечение на расстоянии z от начала соответствующего участка (см. рисунок 1.1). Изображаем нулевые линии для построения эпюр поперечных сил (эпюра Q) и эпюры изгибающего момента (эпюра M). Записываем в общем виде выражения для определения ВСФ для каждого участка балки и при помощи полученных уравнений рассчитываем их численные значения в характерных сечениях.

Первый участок: $0 \leq Z_1 \leq 2$ м.

$$Q_1 = -q \cdot z_1 = \Big|_0^2 0 = \Big|_2 -14 \cdot 2 = -28 \text{ кН};$$

$$M_1 = -q \cdot z_1 \cdot \frac{z_1}{2} = \Big|_0^2 0 = \Big|_2 -14 \cdot 2 = -28 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

Второй участок: $0 \leq Z_2 \leq 2$ м.

$$Q_2 = -q \cdot z_1 + R_A = -14,4 \cdot 2 + 45,5 = 17,5 \text{ кН};$$

$$M_2 = -q \cdot z_1 \cdot \left(\frac{z_1}{2} + z_2 \right) + R_A \cdot z_2 = \Big|_0^2 -28 = \Big|_2 -84 + 91 = 7 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

Третий участок: $0 \leq Z_3 \leq 4$ м.

$$Q_3 = -q \cdot z_1 + R_A - q \cdot z_3 = \Big|_0 17,5 = \Big|_4 -38,5 \text{ кН};$$

$$\begin{aligned} M_3 &= -q \cdot z_1 \cdot \left(\frac{z_1}{2} + z_2 + z_3 \right) + R_A \cdot (z_2 + z_3) - q \cdot z_3 \cdot \frac{z_3}{2} = \Big|_0 -84 + 91 = 7 = \\ &= \Big|_4 -196 + 273 - 112 = -35 \text{ кН} \cdot \text{м}. \end{aligned}$$

Так как на этом участке эпюра Q пересекает нейтральную линию, то в данной точке пересечения изгибающий момент будет иметь экстремальное значение:

$$Q_3 = -q \cdot z_1 + R_A - q \cdot z_3 = 0;$$

$$z_3 = \frac{-q \cdot z_1 + R_A}{q} = \frac{-28 + 45,5}{14} = 1,25 \text{ м}.$$

$$\begin{aligned} M_3 &= -14 \cdot 2 \cdot (1 + 2 + 1,25) + R_A \cdot (2 + 1,25) - q \cdot 1,25 \cdot \frac{1,25}{2} = \\ &= -119 + 147,875 - 10,93 = 17,9 \text{ кН} \cdot \text{м}. \end{aligned}$$

Четвертый участок: $0 \leq Z_4 \leq 4$ м.

$$Q_4 = q \cdot z_4 = \Big|_0 0 = \Big|_4 14 \cdot 4 = 56 \text{ кН};$$

$$M_4 = -q \cdot z_4 \cdot \frac{z_4}{2} = \Big|_0 0 = \Big|_4 -14 \cdot 4 \cdot 2 = -122 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Пятый участок: $0 \leq Z_5 \leq 4$ м.

$$Q_5 = q \cdot z_4 - R_B = 14 \cdot 4 - 94,5 = -38,5 \text{ кН};$$

$$\begin{aligned} M_5 &= -q \cdot z_4 \cdot \left(\frac{z_4}{2} + z_5 \right) + R_B \cdot z_5 = \\ &= \Big|_0 -112 = \Big|_2 -14 \cdot 4 \cdot 4 + 94,5 \cdot 2 = -35 \text{ кН} \cdot \text{м}. \end{aligned}$$

Полученные точки соединяем линиями, замыкающими поле эпюры. В поле эпюры в кружке ставим знак рассматриваемого внутреннего силового

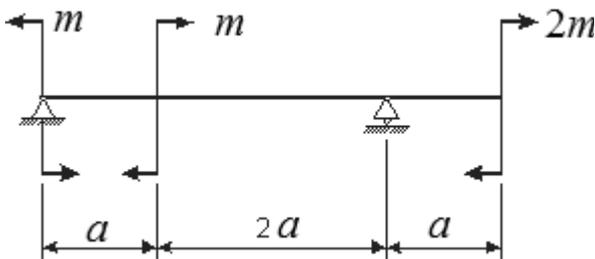
фактора и наносим штриховку. Линии штриховки перпендикулярны нулевой линии эпюры.

Контрольные вопросы

- 1 Какие внутренние силовые факторы возникают в поперечном сечении балки под действием внешних нагрузок?
- 2 Какой метод используется для определения внутренних силовых факторов?
- 3 Какими правилами знаков необходимо руководствоваться при построении эпюр поперечных, продольных сил и изгибающих моментов?
- 4 Как определить величины опорных реакций?
- 5 Что является границами характерных участков балки?
- 6 Как провести контроль правильности построения эпюр?
- 7 Как и в каких случаях выполняется исследование на экстремум?

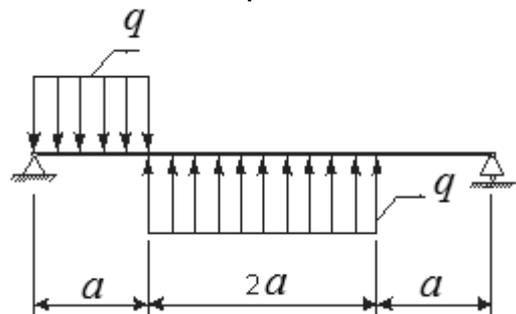
Задания для самостоятельной работы.

Вариант 1



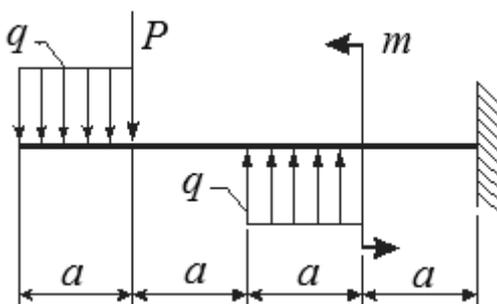
$$m = 20 \text{ кН}\cdot\text{м}, a = 2 \text{ м}$$

Вариант 2



$$a = 1,5 \text{ м}, q = 12 \text{ кН/м}$$

Вариант 3



$$m = 8 \text{ кН}\cdot\text{м}, a = 2 \text{ м}, q = 13 \text{ кН/м}, \\ P = 15 \text{ кН}$$

Рисунок 1.2 – Примеры заданий для самостоятельной работы

2 Расчет на прочность и жесткость при растяжении (сжатии)

Пример – Для данного ступенчатого бруса (рисунок 2.1) построить эпюры нормальных сил, нормальных напряжений и определить перемещение свободного конца стержня, если $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

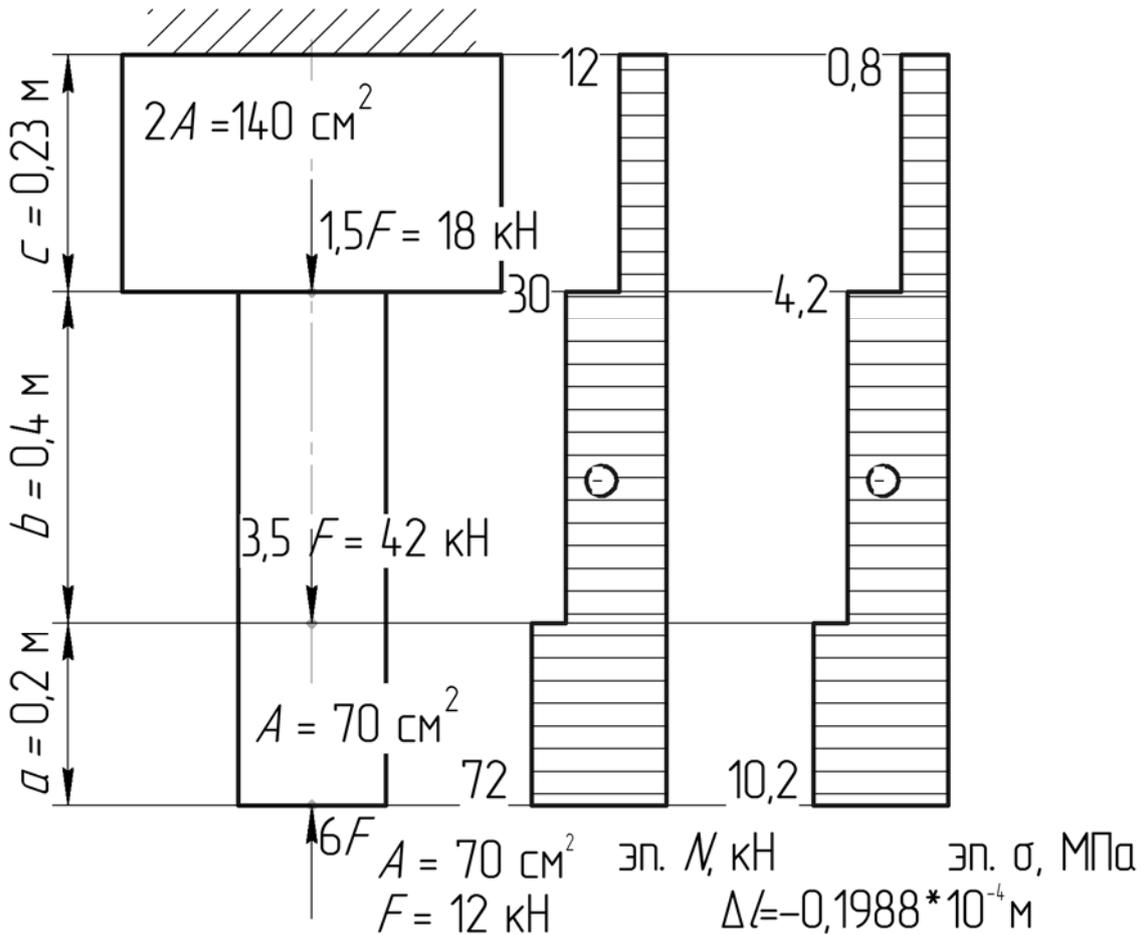


Рисунок 2.1 – Расчетная схема и построенные эпюры нормальных сил и нормальных напряжений

Осуществляем перевод значений в СИ.

$$F = 12 \text{ кН} = 12 \cdot 10^3 \text{ Н.}$$

$$A = 70 \text{ см}^2 = 70 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

$$2A = 2 \cdot 70 = 140 \text{ см}^2 = 140 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

Решение

- 1 Отмечаем участки на рисунке 2.1.
- 2 Определяем значения продольной (нормальной) силы N на участках бруса:

$$N_1 = -F = -6 \cdot 12 = -72 \text{ кН};$$

$$N_2 = -6F + 3,5F = -72 + 42 = -30 \text{ кН};$$

$$N_3 = -6F + 3,5F + 1,5F = -72 + 42 + 18 = -12 \text{ кН}.$$

Строим эпюру продольных сил (см. рисунок 2.1).

3 Вычисляем значения нормальных напряжений:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A} = -\frac{72 \cdot 10^3}{70 \cdot 10^{-4}} = -1,028 \cdot 10^7 \text{ Па} = -10,28 \text{ МПа};$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = -\frac{30 \cdot 10^3}{70 \cdot 10^{-4}} = -0,428 \cdot 10^7 \text{ Па} = -4,28 \text{ МПа};$$

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{2A_3} = -\frac{12 \cdot 10^3}{140 \cdot 10^{-4}} = -0,0857 \cdot 10^7 \text{ Па} = -0,86 \text{ МПа}.$$

Строим эпюру нормальных напряжений (см. рисунок 2.1).

4 Определяем перемещение свободного конца:

$$\Delta l = \pm \Delta l_1 \pm \Delta l_2 \pm \Delta l_3;$$

$$\begin{aligned} \Delta l &= \pm \frac{N_1 \cdot a}{E \cdot A} \pm \frac{N_2 \cdot b}{E \cdot A} \pm \frac{N_3 \cdot c}{E \cdot A} = -\frac{72 \cdot 10^3 \cdot 0,2 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 70 \cdot 10^{-4}} - \frac{30 \cdot 10^3 \cdot 0,4 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 70 \cdot 10^{-4}} - \\ & - \frac{12 \cdot 10^3 \cdot 0,23 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 140 \cdot 10^{-4}} = -0,10286 \cdot 10^{-4} - 0,0857 \cdot 10^{-4} - 0,00986 \cdot 10^{-4} = \\ & = 0,198 \cdot 10^{-4} \text{ м}. \end{aligned}$$

Задания для самостоятельной работы.

Для расчетных схем заданий для самостоятельной работы, представленных на рисунке 2.2, требуется:

- 1) построить эпюры нормальных (продольных) сил и нормальных напряжений;
- 2) определить перемещение свободного конца.

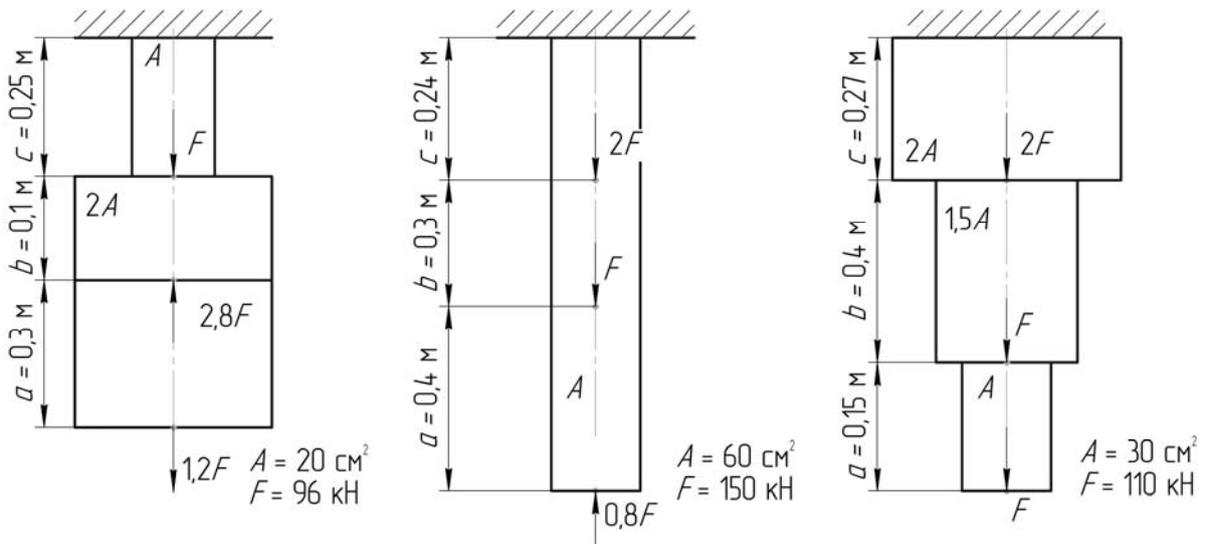


Рисунок 2.2 – Задания для самостоятельной работы

3 Изгиб прямого бруса

При прямом поперечном изгибе балки в ее поперечных сечениях возникают нормальные σ и касательные τ напряжения.

Нормальные напряжения в любом слое произвольного поперечного сечения можно определить по формуле

$$\sigma = \frac{M_x}{W_x} \leq [\sigma], \quad (3.1)$$

где M_x – изгибающий момент в рассматриваемом сечении;

W_x – осевой момент сопротивления поперечного сечения;

$[\sigma]$ – допускаемое напряжение для материала, из которого изготовлена балка.

Пример – Для заданной схемы балки, с указанием численных величин нагрузок и линейных размеров, величины допускаемого нормального и касательного напряжений, подобрать поперечное сечение балки в виде двутавра из условия прочности по нормальным напряжениям, если допускаемое напряжение $[\sigma] = 160$ МПа.

Решение

Вычерчиваем заданную балку с указанием внешних нагрузок и линейных размеров (рисунок 3.1). Определяем опорные реакции:

$$\sum M_A = q \cdot 2 \cdot 3 - R_B \cdot 4 + P \cdot 5 = 20 \cdot 2 \cdot 3 - R_B \cdot 4 + 25 \cdot 5 = 0;$$

$$R_B = \frac{20 \cdot 2 \cdot 3 + 25 \cdot 5}{4} = 61,25 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = -q \cdot 2 \cdot 1 + R_A \cdot 4 + P \cdot 1 = -20 \cdot 2 \cdot 1 + R_A \cdot 4 + 25 \cdot 1 = 0;$$

$$R_A = \frac{20 \cdot 2 \cdot 1 - 25 \cdot 1}{4} = 3,75 \text{ кН}.$$

Проверка:

$$\sum y = R_A - q \cdot 2 + R_B - P = 3,75 - 20 \cdot 2 + 61,25 - 25 = 0.$$

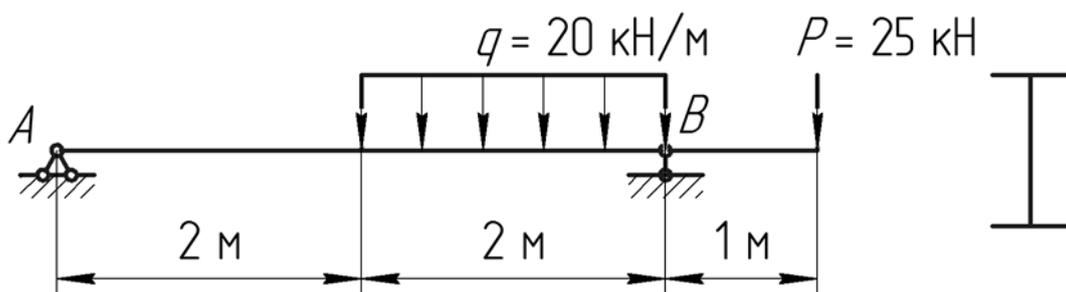


Рисунок 3.1 – Расчетная схема балки

Разбиваем балку на характерные участки (рисунок 3.2, а).

Первый участок: $0 \leq z_1 \leq 2$ м.

$$Q_1 = R_A = 3,75 \text{ кН};$$

$$M_1 = R_A \cdot z_1 = 3,75 \cdot z_1 = \Big|_0^2 3,75 \cdot z_1 = \Big|_0^2 3,75 \cdot 2 = 7,5 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Второй участок: $0 \leq z_2 \leq 2$ м.

$$Q_2 = R_A - q \cdot z_2 = 3,75 - q \cdot z_2 = \Big|_0^2 3,75 = \Big|_2^2 3,75 - 20 \cdot 2 = -36,25 \text{ кН};$$

$$\begin{aligned} M_2 &= R_A \cdot (2 + z_2) - q \cdot \frac{z_2^2}{2} = 3,75 \cdot (2 + z_2) - q \cdot \frac{z_2^2}{2} = \\ &= \Big|_0^2 7,5 \text{ кН} \cdot \text{м} = \Big|_2^2 3,75 \cdot (2 + 2) - 20 \cdot \frac{2^2}{2} = -25 \text{ кН} \cdot \text{м}; \end{aligned}$$

$$M_2 = R_A \cdot (2 + z_2) - q \cdot \frac{z_2^2}{2} = 3,75 \cdot (2 + z_2) - 20 \cdot \frac{z_2^2}{2} = 7,5 - 10z_2^2 + 3,75z_2$$

$$= 3,75 \cdot (2 + 2) - 20 \cdot \frac{2^2}{2} = -25 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

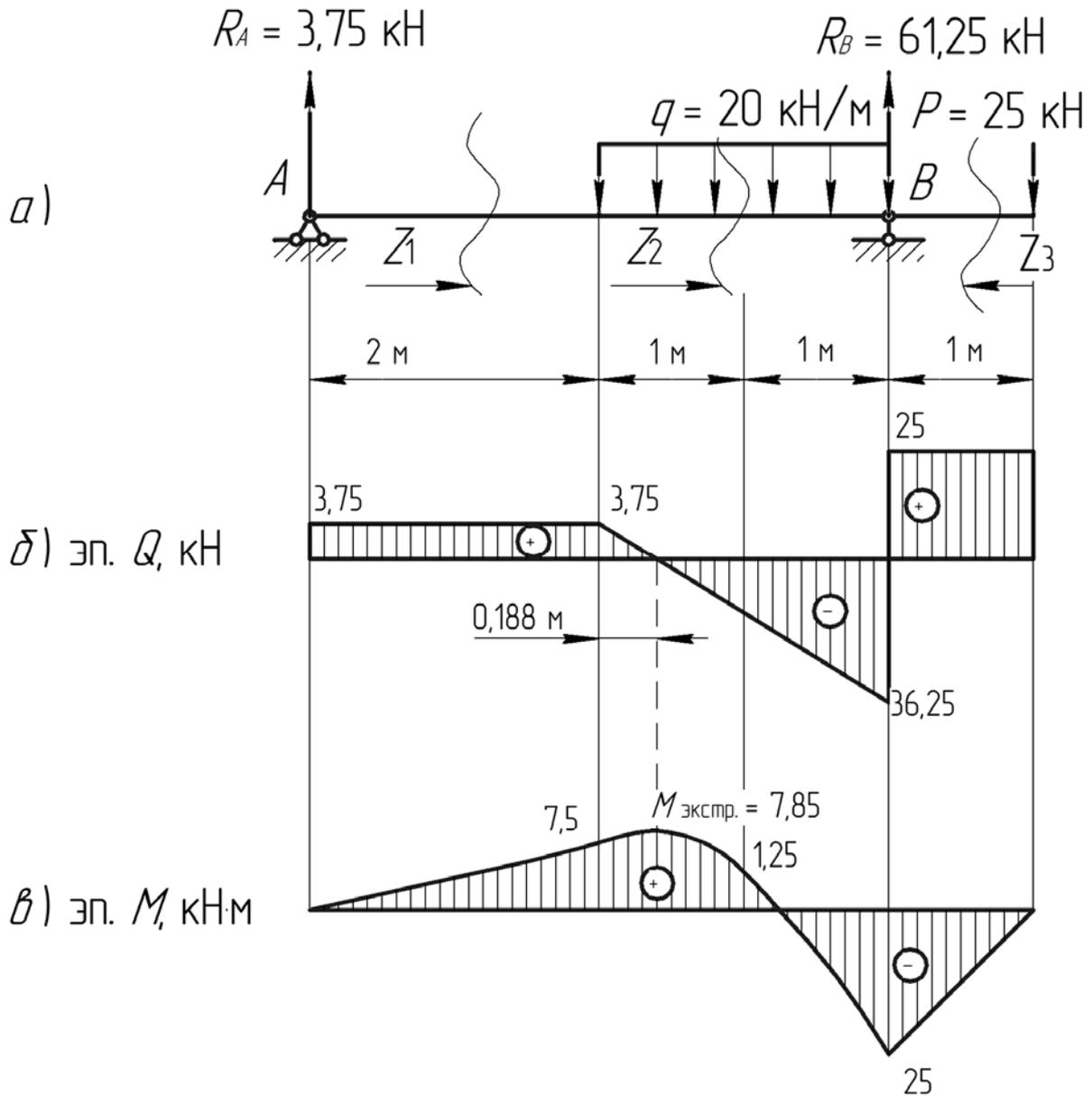


Рисунок 3.2 – Расчетная схема балки и эпюры поперечных сил и изгибающих моментов

Исследование на экстремум:

$$Q_2 = R_A - q \cdot z_2 = 3,75 - 20 \cdot z_2 = 0;$$

откуда

$$z_2 = \frac{3,75}{20} = 0,188 \text{ м}.$$

$$M_2^{эктр} = 3,75 \cdot (2 + 0,188) - 20 \cdot \frac{0,188^2}{2} = 7,85 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Третий участок: $0 \leq z_3 \leq 1 \text{ м}$.

$$Q_3 = P = 25 \text{ кН};$$

$$M_3 = -P \cdot z_3 = -25 \cdot z_3 = \Big|_0^1 0 = \Big|_1 -25 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

По рассчитанным значениям строим эпюры поперечных сил и изгибающих моментов (рисунок 3.2, б, в).

Максимальное значение изгибающего момента $M_{\max} = 25 \text{ кН} \cdot \text{м}$. Из условия прочности рассчитываем величину осевого момента сопротивления поперечного сечения:

$$W_x \geq \frac{M_{\max}}{\sigma} = \frac{25 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 156 \text{ см}^3.$$

По ГОСТ 8239–89 выбираем сечения с близкими значениями осевых моментов сопротивления: двутавр № 18 ($W_x = 143 \text{ см}^3$) и двутавр № 20 ($W_x = 184 \text{ см}^3$). Проверяем прочность выбранных двутавровых сечений по нормальным напряжениям.

$$\sigma_{\max} = \frac{25 \cdot 10^3}{143 \cdot 10^{-6}} = 174,8 \text{ МПа}.$$

Находим величину перенапряжения балки:

$$\delta = \frac{\sigma_{\max} - [\sigma]}{[\sigma]} \cdot 100 \% = \frac{174,8 - 160}{160} \cdot 100 \% = 9,27 \%,$$

что превышает допустимые 5 %. Следовательно, проверяем на прочность двутавр № 20:

$$\sigma_{\max} = \frac{25 \cdot 10^3}{184 \cdot 10^{-6}} = 135,9 \text{ МПа} < [\sigma] = 160 \text{ МПа}.$$

Условие прочности по нормальным напряжениям выполняется.

Вывод: в качестве поперечного сечения балки выбран двутавр № 20, для которого выполняется условие прочности.

Задания для самостоятельной работы.

Подобрать поперечное сечение балки в виде двутавра из условия прочности по нормальным напряжениям для расчетных схем, представленных на рисунке 3.3, если допускаемое напряжение $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$.

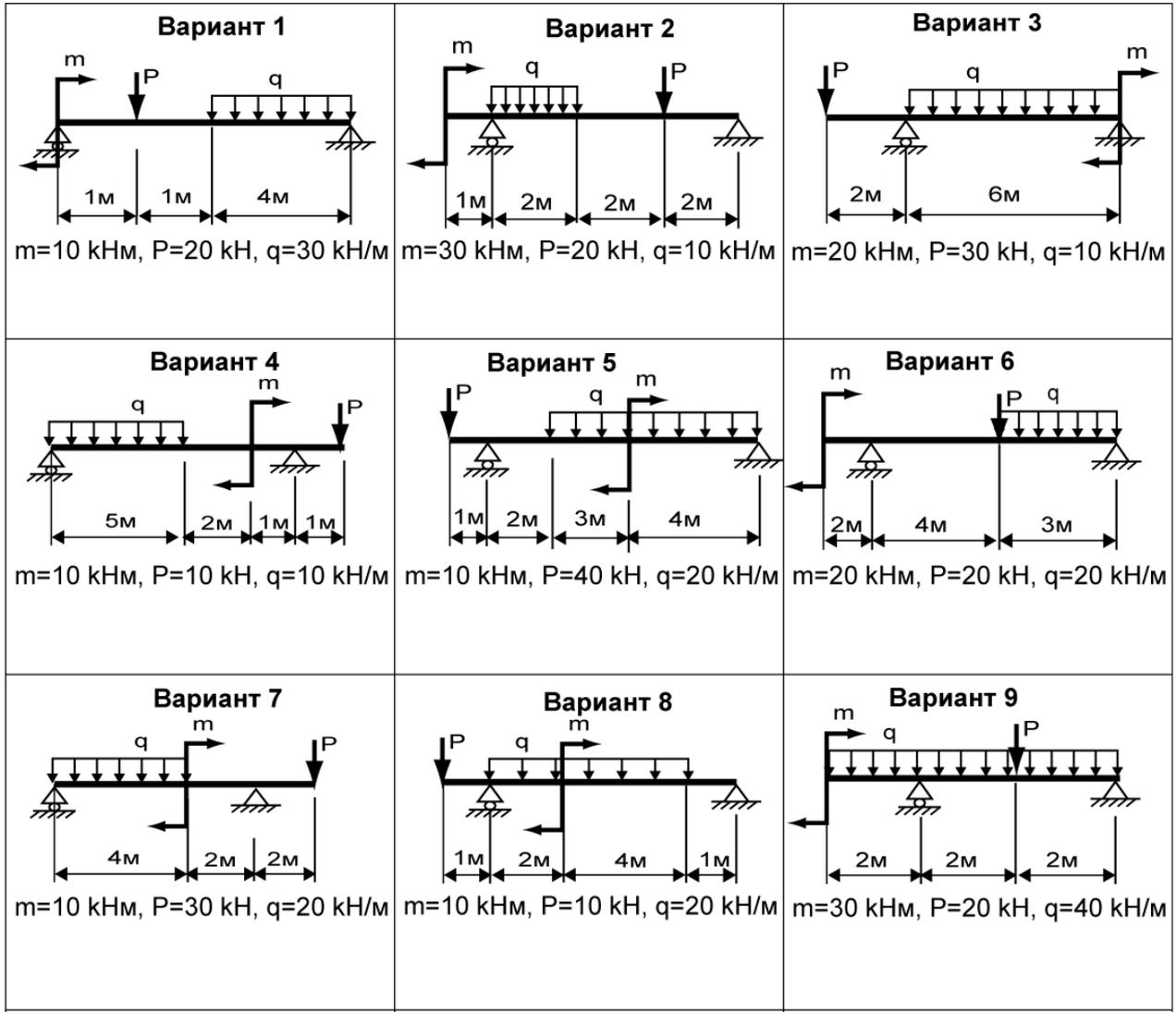


Рисунок 3.3 – Задания для самостоятельной работы

4 Кручение стального стержня

Пример – Для стального стержня постоянного поперечного сечения (рисунок 4.1) $[\tau_k] = 30$ МПа, $[\varphi_0] = 0,02$ рад/м, $G = 8 \cdot 10^4$ МПа.

Требуется:

- 1) определить значения моментов M_1, M_2, M_3, M_4 ;
- 2) построить эпюру крутящих моментов;
- 3) определить диаметр вала из условий прочности и жесткости, приняв поперечное сечение стержня в виде окружности.

Окончательно принимаемое значение диаметра должно быть округлено до ближайшего четного или оканчивающегося на пять числа.

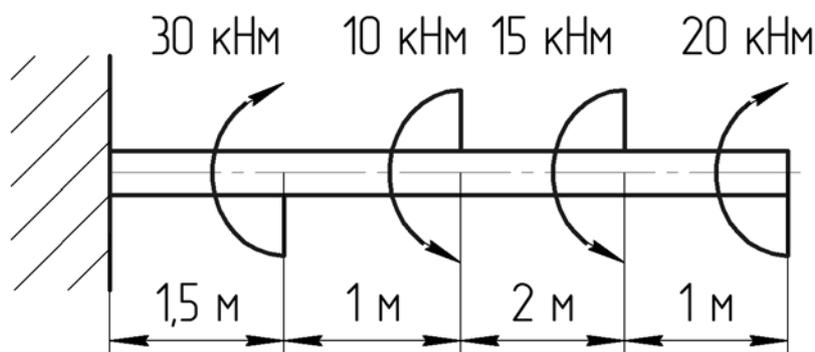


Рисунок 4.1 – Расчетная схема

Решение

- 1 Определяем крутящий момент по участкам вала.

$$M_1 = 20 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_2 = 20 - 15 = 5 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_3 = 20 - 15 - 10 = -5 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

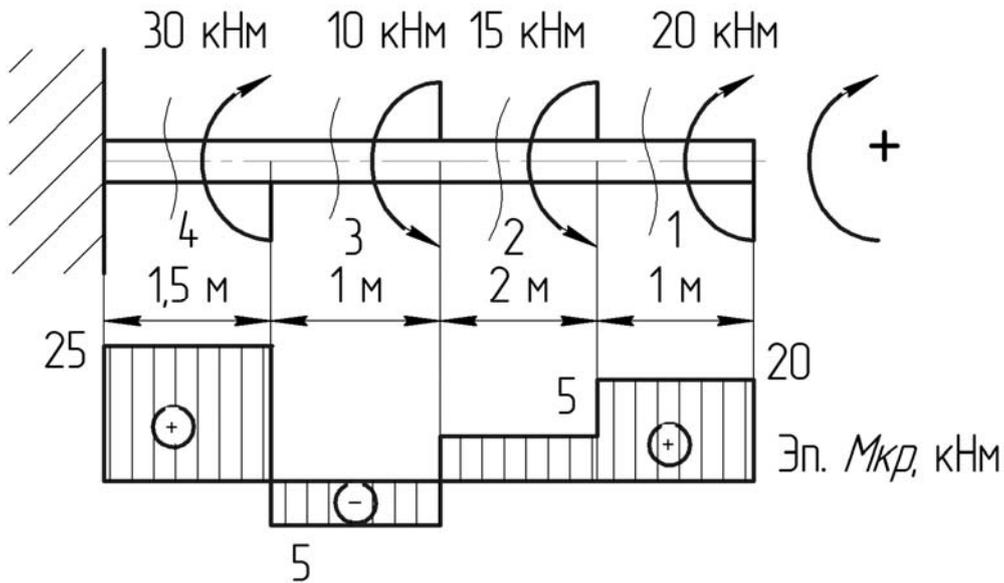
$$M_4 = 20 - 15 - 10 + 30 = 25 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Строим эпюру крутящих моментов (рисунок 4.2).

- 2 Определяем диаметр вала из условий прочности и жесткости.

$$M_{кр \max} = 25 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

В поперечном сечении вала окружность.

Рисунок 4.2 – Построение эпюры $M_{кр}$

Из условия прочности

$$d = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_{кр \max}}{\pi \cdot [\tau_k]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 25 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 30 \cdot 10^6}} = 0,162 \text{ м} = 162 \text{ мм.}$$

Принимаем $d = 162 \text{ мм.}$

Из условия жесткости

$$d = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot M_{кр \max}}{\pi \cdot G \cdot [\varphi_0]}} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 25 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 8 \cdot 10^{10} \cdot 0,02}} = 112,3 \text{ мм.}$$

Принимаем $d = 112 \text{ мм.}$

Вывод: требуемые диаметры окончательно принимаем из расчетов на прочность: $d = 162 \text{ мм.}$

Задания для самостоятельной работы.

Для расчетных схем, представленных на рисунке 4.3, требуется:

- 1) определить значения моментов M_1, M_2, M_3, M_4 ;
- 2) построить эпюру крутящих моментов;
- 3) определить диаметр вала из условий прочности и жесткости, приняв поперечное сечение стержня в виде окружности.

Окончательно принимаемое значение диаметра должно быть округлено до ближайшего четного или оканчивающегося на пять числа.

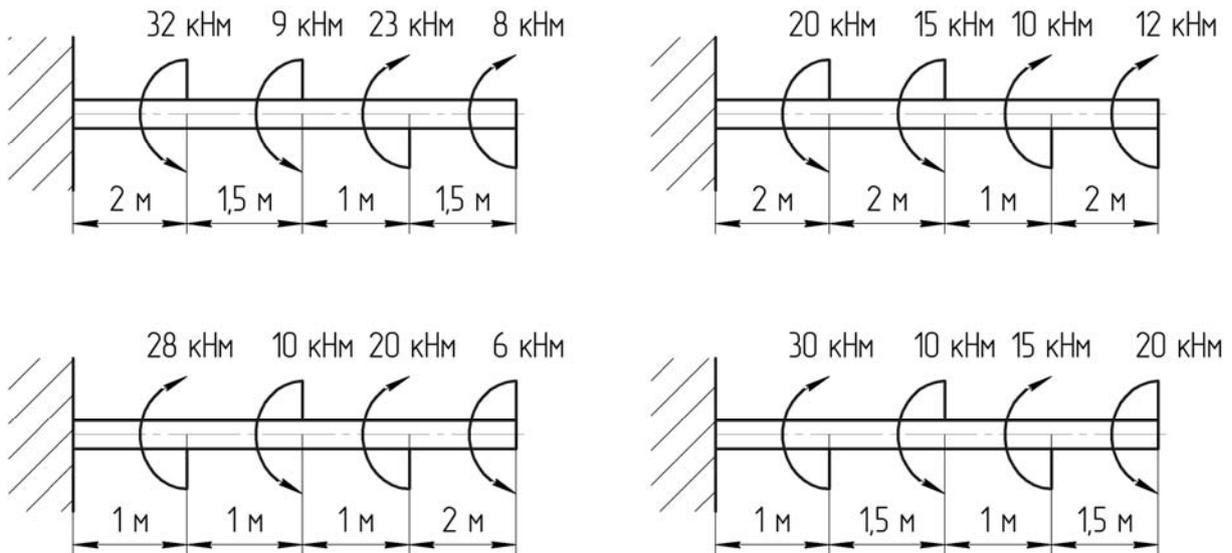


Рисунок 4.3 – Задания для самостоятельной работы

5 Сложное сопротивление

5.1 Косой изгиб

Пример 1 – Проверить прочность балки, если $[\sigma] = 160$ МПа .

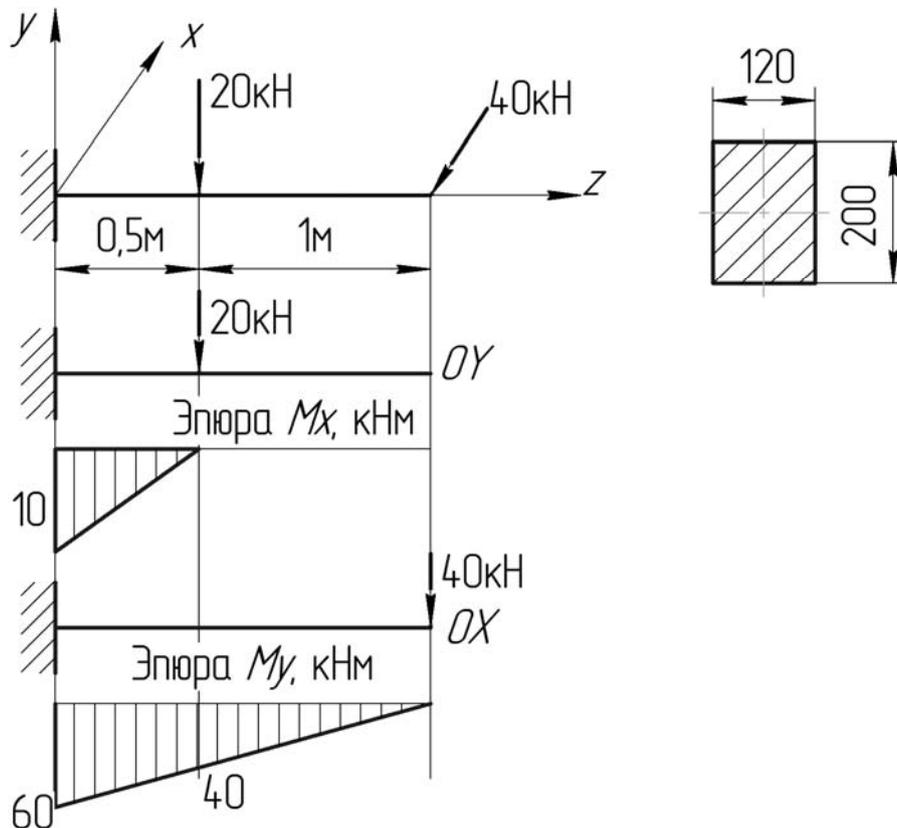


Рисунок 5.1 – Расчетная схема и эпюры действующих моментов

Решение

Определяем изгибающие моменты в вертикальной и горизонтальной плоскостях и строим соответствующие эпюры.

Определяем моменты сопротивления по формулам

$$W_x = \frac{b \cdot h^2}{6}, \quad (5.1)$$

где b, h – размеры поперечного сечения, см;

$$W_x = \frac{12 \cdot 20^2}{6} = 800 \text{ см}^3;$$

$$W_y = \frac{b^2 \cdot h}{6}, \quad (5.2)$$

где b, h – размеры поперечного сечения, см;

$$W_y = \frac{20 \cdot 12^2}{6} = 480 \text{ см}^3.$$

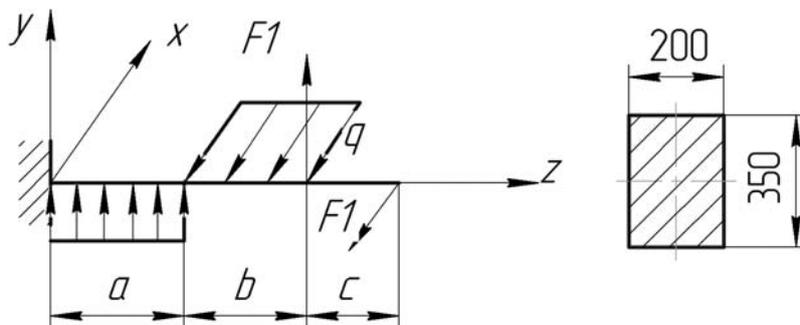
Выполняем проверку прочности:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} = \frac{10 \cdot 10^3}{800 \cdot 10^{-6}} + \frac{60 \cdot 10^3}{480 \cdot 10^{-6}} = 137,5 \text{ МПа} < [\sigma] = 160 \text{ МПа}.$$

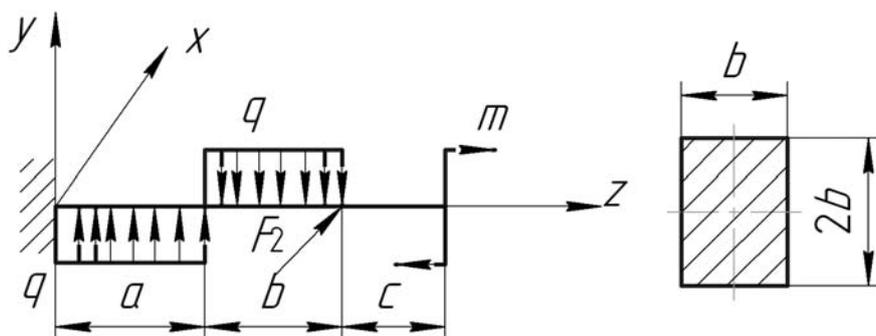
Прочность обеспечена.

Задания для самостоятельной работы.

1 Проверить прочность балки, если $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$, $F_1 = 30 \text{ кН}$, $F_2 = 10 \text{ кН}$, $q = 25 \text{ кН/м}$, $a = 2 \text{ м}$, $b = 1,5 \text{ м}$, $c = 1 \text{ м}$.



2 Определить размеры поперечного сечения балки, если $[\sigma]=160$ МПа, $F_1 = 20$ кН, $F_2 = 15$ кН, $q = 10$ кН/м, $a = 1$ м, $b = 2$ м, $c = 1$ м.



3 Определить допустимую нагрузку на балку, если $[\sigma]=160$ МПа, $a = 3$ м, $b = 2$ м, $c = 1$ м.

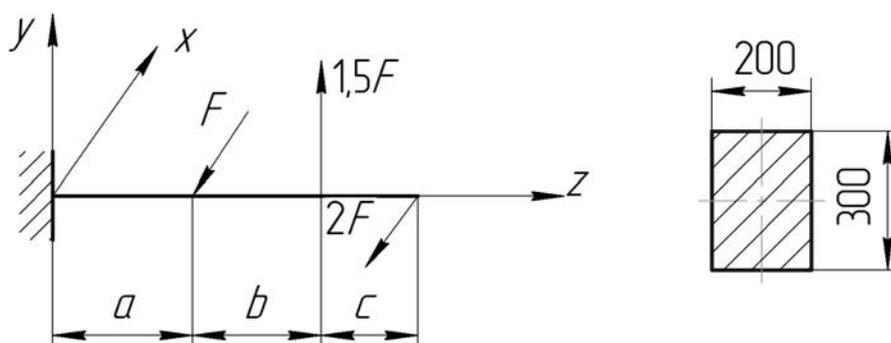


Рисунок 5.2 – Задания для самостоятельной работы

5.2 Совместное действие изгиба и кручения

Пример 2 – На вал круглого сплошного сечения насажены шестерня средним диаметром $D_1 = 0,23$ м и шкив ременной передачи диаметром $D_2 = 0,39$ м (рисунок 5.3, а). Вес шкива $G = 600$ Н, собственным весом шестерни и вала пренебречь. Вал делает 660 об/мин и передает мощность, равную 40 кВт. Допустимое напряжение материала вала $[\sigma]=80$ МПа.

Определить необходимый диаметр вала по четвертой теории прочности.

Решение

Определяем внешние крутящие моменты, передаваемые валом через шестерню и шкив:

$$m = \frac{N \cdot 30}{\pi \cdot n} = \frac{40000 \cdot 30}{3,14 \cdot 660} = 579 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Схема действия крутящих моментов показана на рисунке 5.3, б.

Построение эпюры внутреннего силового фактора (крутящего момента $M_{кр}$), возникающего в сечениях вала, производим по участкам слева направо:

- участок 1: $M_{кр} = 0$;
- участок 2: $M_{кр} = m = 579 \text{ Н}\cdot\text{м}$;
- участок 3: $M_{кр} = m - m = 0$.

Определяем окружное усилие F_1 , действующее на шестерню и вал в вертикальной плоскости:

$$F_1 = \frac{2 \cdot m}{D_1} = \frac{2 \cdot 579}{0,23} = 5035 \text{ Н}.$$

Рассчитываем изгибающую силу F_2 от ременной передачи на шкиве, действующую на вал в горизонтальной плоскости:

$$F_2 = 3 \cdot \frac{2 \cdot m}{D_2} = 3 \cdot \frac{2 \cdot 579}{0,39} = 8908 \text{ Н}.$$

Схема действия вертикальных изгибающих сил показана на рисунке 5.3, в.

Для определения опорных реакций R_{Ay} и R_{By} составим уравнения статического равновесия вала:

$$\sum m_B = 0; \quad R_{Ay} \cdot 1,2 - 5035 \cdot 0,8 - 600 \cdot 0,3 = 0;$$

$$R_{Ay} = \frac{4208}{1,2} = 3507 \text{ Н}.$$

$$\sum m_A = 0; \quad R_{By} \cdot 1,2 - 5035 \cdot 0,4 - 600 \cdot 0,9 = 0;$$

$$R_{By} = \frac{2554}{1,2} = 2128 \text{ Н}.$$

Выполним проверку:

$$\sum y = 0; \quad R_{Ay} - F_1 - G + R_{By} = 3507 - 5035 - 600 + 2128 = 0.$$

Построение эпюры изгибающих моментов M_x по участкам.

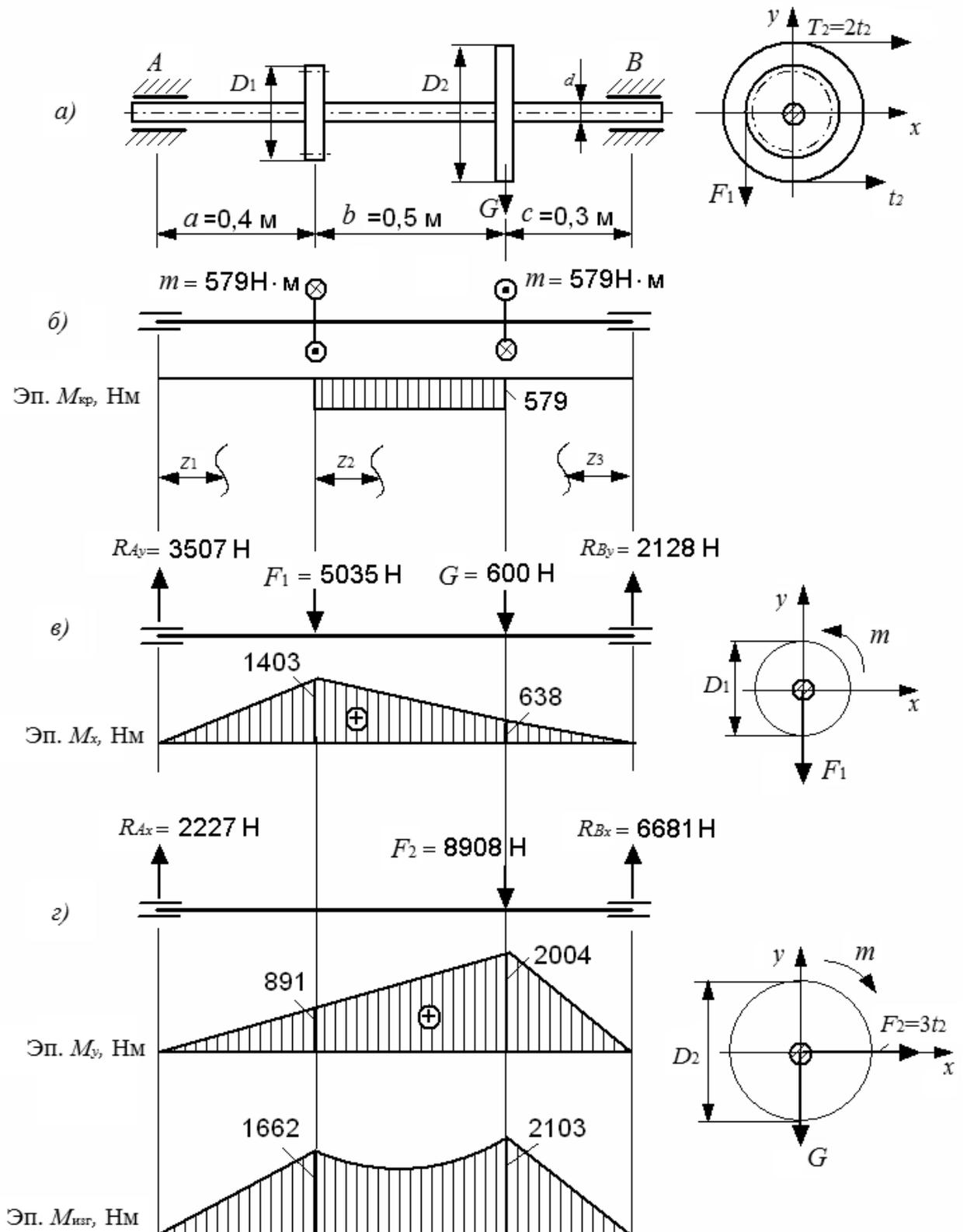


Рисунок 5.3 – Заданная схема вала и вспомогательные схемы и эпюры для примера к задаче 1 (эпюры изгибающих моментов M_x и M_y построены на сжатом волокне)

Участок 1: $0 \leq z_1 \leq 0,4$ м.

$$M_x = R_{Ay} \cdot z_1 = 3507 \cdot z_1;$$

$$z_1 = 0; \quad M_x = 0;$$

$$z_1 = 0,4 \text{ м}; \quad M_x = 1403 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Участок 2: $0 \leq z_2 \leq 0,5$ м.

$$M_x = R_{Ay} \cdot (0,4 + z_2) - F_1 \cdot z_2 = 3507 \cdot (0,4 + z_2) - 5035 \cdot z_2;$$

$$z_2 = 0; \quad M_x = 1403 \text{ Н}\cdot\text{м};$$

$$z_2 = 0,5 \text{ м}; \quad M_x = 638 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Участок 3: $0 \leq z_3 \leq 0,3$ м.

$$M_x = R_{By} \cdot z_3 = 2128 \cdot z_3;$$

$$z_3 = 0; \quad M_x = 0;$$

$$z_3 = 0,3 \text{ м}; \quad M_x = 638 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Схема действия горизонтальных изгибающих сил, повернутых в плоскость чертежа, показана на рисунке 5.3, *з*.

Для определения опорных реакций R_{Ax} и R_{Bx} составим уравнения статического равновесия вала:

$$\sum m_B = 0; \quad R_{Ax} \cdot 1,2 - 8908 \cdot 0,3 = 0;$$

$$R_{Ax} = \frac{2672,4}{1,2} = 2227 \text{ Н}.$$

$$\sum m_A = 0; \quad R_{Bx} \cdot 1,2 - 8908 \cdot 0,9 = 0;$$

$$R_{Bx} = \frac{8017,2}{1,2} = 6681 \text{ Н}.$$

Выполним проверку:

$$\sum x = 0; \quad R_{Ax} - F_2 + R_{Bx} = 2227 - 8908 + 6681 = 0.$$

Построение эпюры изгибающих моментов M_y по участкам.

Участок 1: $0 \leq z_1 \leq 0,4$ м.

$$M_y = R_{Ax} \cdot z_1 = 2227 \cdot z_1;$$

$$z_1 = 0; \quad M_y = 0;$$

$$z_1 = 0,4 \text{ м}; \quad M_y = 891 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Участок 2: $0 \leq z_2 \leq 0,5$ м.

$$M_y = R_{Ax} \cdot (0,4 + z_2) = 2227 \cdot (0,4 + z_2);$$

$$z_2 = 0; \quad M_y = 891 \text{ Н}\cdot\text{м};$$

$$z_2 = 0,5 \text{ м}; \quad M_y = 2004 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Участок 3: $0 \leq z_3 \leq 0,3$ м.

$$M_y = R_{Bx} \cdot z_3 = 6681 \cdot z_3;$$

$$z_3 = 0; \quad M_y = 0;$$

$$z_3 = 0,3 \text{ м}; \quad M_y = 2004 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Вычисляем значения полных изгибающих моментов M_{uz2} в характерных сечениях вала по формуле

$$M_{uz2} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}.$$

$$M_{D_1} = \sqrt{1403^2 + 891^2} = 1662 \text{ Н}\cdot\text{м}; \quad M_{D_2} = \sqrt{638^2 + 2004^2} = 2103 \text{ Н}\cdot\text{м};$$

$$M_A = 0; \quad M_B = 0.$$

Эпюра полных изгибающих моментов M_{uz2} показана на рисунке 5.3.

Опасным сечением вала является сечение по месту расположения шкива

диаметром D_2 , т. к. в нем действуют наибольший изгибающий момент $M_{изг} = 2103 \text{ Н}\cdot\text{м}$ и крутящий момент $M_{кр} = 579 \text{ Н}\cdot\text{м}$.

Определим значение эквивалентного момента в опасном сечении вала по четвертой теории прочности:

$$M_{экв}^{IV} = \sqrt{M_{изг}^2 + 0,75 \cdot M_{кр}^2} = \sqrt{2103^2 + 0,75 \cdot 579^2} = 2162 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Определим диаметр вала:

$$d = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot M_{экв}^{IV}}{\pi \cdot [\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 2162}{3,14 \cdot 80 \cdot 10^6}} = 0,065 \text{ м} = 65 \text{ мм}.$$

Диаметр вала принимаем $d = 65 \text{ мм}$.

Задания для самостоятельной работы.

На вал круглого сплошного сечения диаметром d насажены шестерня средним диаметром D_1 и шкив ременной передачи диаметром D_2 (рисунок 5.4). Вес шкива равен G , собственными весами вала и шестерни пренебречь. Вал делает n оборотов в минуту и передает мощность, равную N киловатт. Допускаемое напряжение материала вала $[\sigma] = 80 \text{ МПа}$.

Определить необходимый диаметр вала по четвертой теории прочности. Исходные данные к задаче представлены в таблице 5.1.

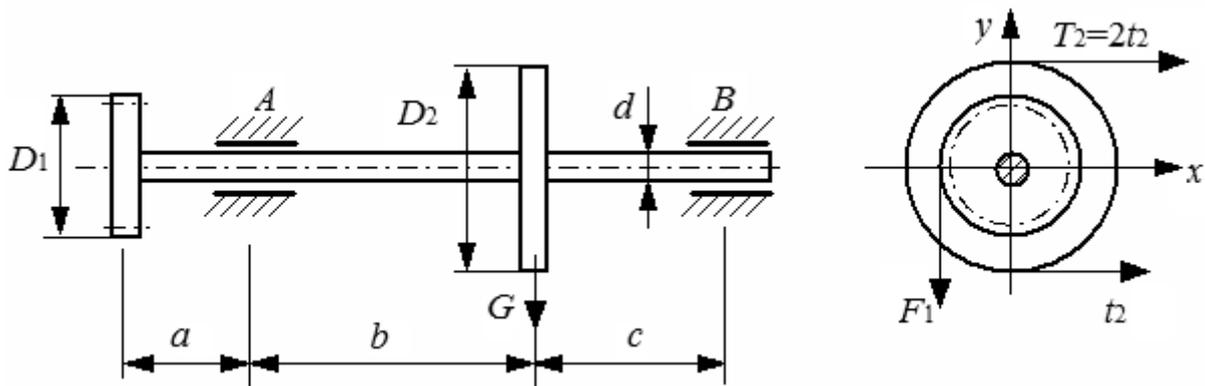


Рисунок 5.4 – Расчетная схема вала

Таблица 5.1 – Значения исходных данных

Номер строки	N , кВт	n , об/мин	G , Н	a , м	b , м	c , м	D_1 , мм	D_2 , мм
1	10	1100	200	0,11	0,41	0,31	110	310
2	20	1200	220	0,12	0,42	0,32	120	320
3	30	1300	240	0,13	0,43	0,33	130	330
4	40	1400	260	0,14	0,44	0,34	140	340
5	50	1500	280	0,15	0,45	0,35	150	350
6	60	1600	300	0,16	0,46	0,36	160	360
7	70	1700	320	0,17	0,47	0,37	170	370
8	80	1800	340	0,18	0,48	0,38	180	380
9	90	1900	360	0,19	0,49	0,39	190	390
10	100	2000	380	0,20	0,50	0,40	200	400

6 Энергетические методы определения перемещений

Пример – Определить линейное перемещение u_B и угловое перемещение Θ_C методом Верещагина при $EI_x = \text{const}$.

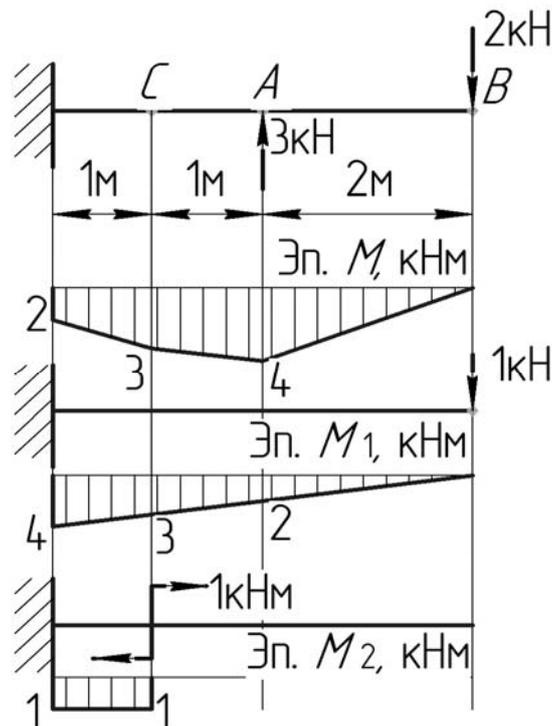


Рисунок 6.1 – Расчетная схема и эпюры моментов

Решение

Строим грузовую эпюру, предварительно определив изгибающие моменты.

Строим эпюры моментов от единичной силы и от единичного момента.

Определяем перемещения путем перемножения соответствующих эпюр.

Можно использовать готовую формулу перемножения трапеций, которая имеет вид:

$$\frac{l}{6} \cdot (2 \cdot a \cdot c + 2 \cdot b \cdot d + a \cdot d + c \cdot b). \quad (6.1)$$

где a, b, c, d – основания трапеций.

Определяем линейное перемещение:

$$y_B = \left(\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 \right) + \frac{1}{6} \cdot (2 \cdot 3 \cdot 3 + 2 \cdot 4 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 2 \cdot 3) +$$

$$+ \frac{1}{6} \cdot (2 \cdot 2 \cdot 4 + 2 \cdot 3 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 2 \cdot 3) = \frac{68}{3} = 22,67 \text{ ед.}$$

Находим угловое перемещение:

$$\Theta_C = \frac{2+3}{2} \cdot 1 \cdot 1 = 2,5 \text{ ед.}$$

Задания для самостоятельной работы.

Для приведенных расчетных схем определить линейное перемещение y_B и угловое перемещение Θ_A методом Верещагина при $EI_x = \text{const}$.

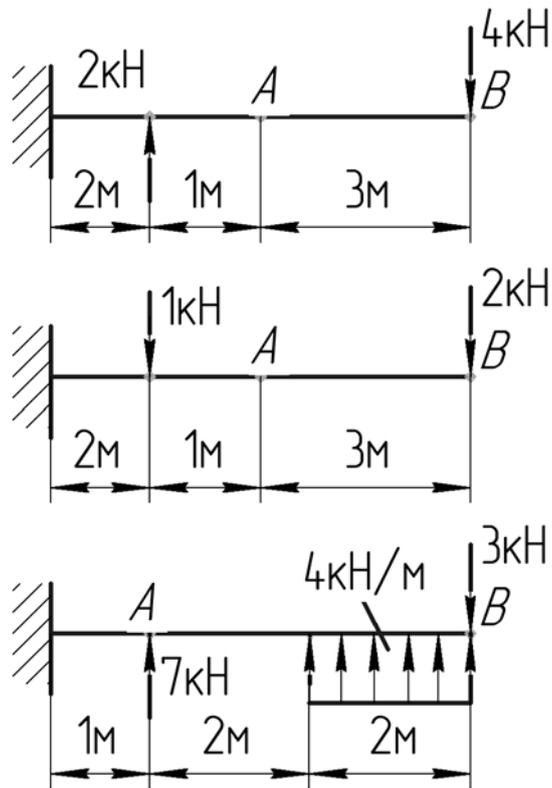


Рисунок 6.2 – Задания для самостоятельной работы

7 Устойчивость центрально-сжатых стержней

Пример – Подобрать поперечное сечение колонны в виде двух двутавров (рисунок 7.1) при помощи метода последовательных приближений, определить величину критической силы $P_{кр}$ и коэффициент запаса устойчивости. Допускаемое напряжение $[\sigma] = 160$ МПа.

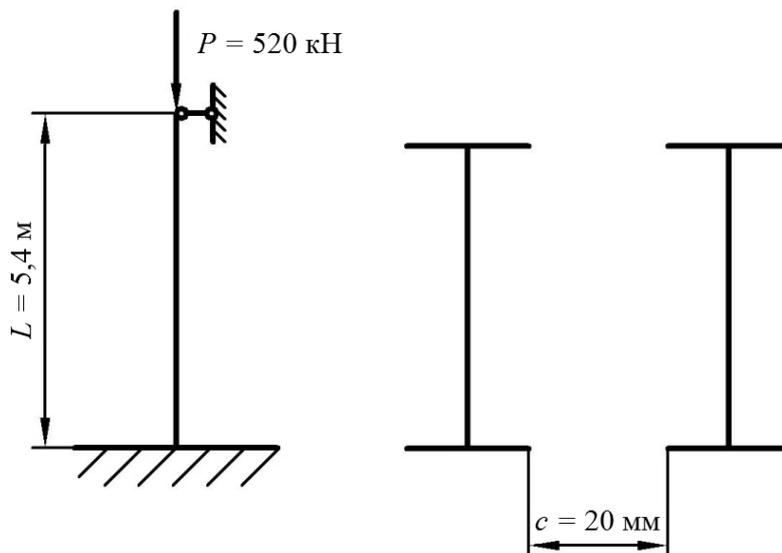


Рисунок 7.1 – Схема закрепления и поперечное сечение колонны

Решение

Расчет размеров поперечного сечения ведем методом последовательных приближений из условия устойчивости.

Первое приближение.

Пусть $\varphi_1 = 0,5$.

Тогда расчетная площадь одного двутавра

$$A_1^{расч} = \frac{1}{2} \cdot \frac{P}{\varphi_1 \cdot [\sigma]} = \frac{520 \cdot 10^3}{2 \cdot 0,5 \cdot 160 \cdot 10^6} = 3,25 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 32,5 \text{ см}^2.$$

По ГОСТ 8239–89 выбираем двутавр № 24: $A_1^{ог} = 34,8 \text{ см}^2$; $I_{x1} = 3460 \text{ см}^4$; $I_{y1} = 198 \text{ см}^4$; $b_1 = 115 \text{ мм}$.

Определяем геометрические характеристики всего сечения относительно главных центральных осей инерции X_c и Y_c (рисунок 7.2).

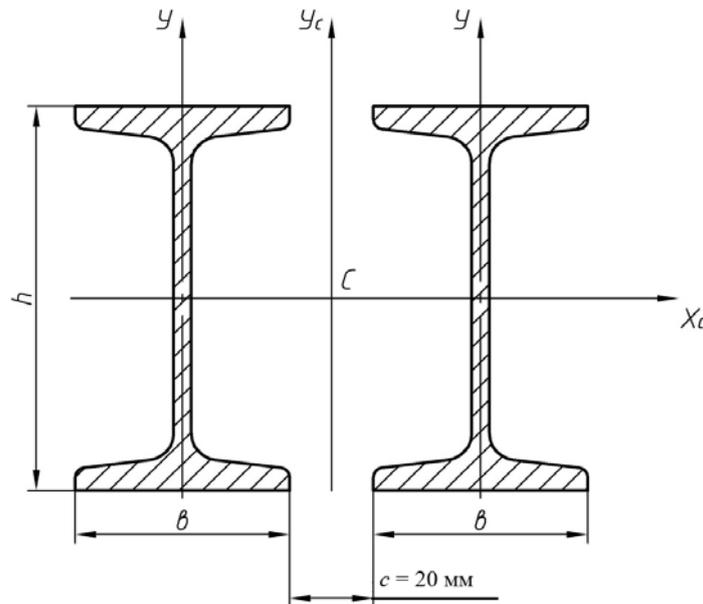


Рисунок 7.2 – Поперечное сечение колонны

Площадь сечения определяем следующим образом:

$$A_1 = 2 \cdot A_1^{ог} = 2 \cdot 34,8 = 69,6 \text{ см}^2.$$

Главные центральные моменты инерции сечения определяем следующим образом:

$$I_{xc1} = 2 \cdot (I_{x1} + a^2 \cdot A_1) = 2 \cdot (3460 + 0^2 \cdot 34,8) = 6920 \text{ см}^4;$$

$$\begin{aligned}
 I_{yc1} &= 2 \cdot (I_{y1} + b^2 \cdot A_1) = 2 \cdot (I_{y1} + (\frac{b_1}{2} + \frac{c}{2})^2 \cdot A_1) = \\
 &= 2 \cdot (198 + (\frac{11,5}{2} + \frac{2}{2})^2 \cdot 34,8) = 3567,15 \text{ см}^4.
 \end{aligned}$$

Главные центральные радиусы инерции находим по формулам

$$\begin{aligned}
 i_{xc1} &= \sqrt{\frac{I_{xc1}}{A_1}} = \sqrt{\frac{6920}{69,6}} = 9,97 \text{ см}; \\
 i_{yc1} &= \sqrt{\frac{I_{yc1}}{A_1}} = \sqrt{\frac{3567,15}{69,6}} = 7,16 \text{ см}.
 \end{aligned}$$

Гибкость стержня относительно материальной оси X_c

$$\lambda_{x1} = \frac{\mu \cdot L}{i_{xc1}} = \frac{0,7 \cdot 540}{9,97} = 37,91,$$

где μ – коэффициент приведения длины для заданной схемы закрепления колонны, $\mu = 0,7$.

Гибкость стержня относительно свободной оси Y_c определяем следующим образом:

$$\lambda_{y1} = \sqrt{40^2 + \left(\frac{\mu \cdot L}{i_{yc1}}\right)^2} = \sqrt{40^2 + \left(\frac{0,7 \cdot 540}{7,16}\right)^2} = 66,24.$$

Дальнейший расчет ведем по максимальной гибкости: $\lambda_{\max} = \lambda_{y1} = 66,24$.

Уточняем коэффициент продольного изгиба (φ): $\varphi = 0,86$ при $\lambda = 60$, $\varphi = 0,81$ при $\lambda = 70$.

Линейно интерполируя, получаем

$$\varphi'_1 = 0,86 - \frac{0,86 - 0,81}{70 - 60} \cdot (66,24 - 60) = 0,829.$$

Так как $\varphi_1 \neq \varphi'_1$, то проводим следующее приближение.

Второе приближение.

Коэффициент продольного изгиба рассчитываем по формуле

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_2 + \varphi_1'}{2} = \frac{0,5 + 0,829}{2} = 0,6645.$$

Повторяем расчет, как в первом приближении.

$$A_2^{расч} = \frac{1}{2} \cdot \frac{P}{\varphi_2 \cdot [\sigma]} = \frac{520 \cdot 10^3}{2 \cdot 0,6645 \cdot 160 \cdot 10^6} = 2,445 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 24,45 \text{ см}^2.$$

По ГОСТ 8239–89 выбираем двутавр № 20: $A_2^{дв} = 26,8 \text{ см}^2$; $I_{x2} = 1840 \text{ см}^4$; $I_{y2} = 115 \text{ см}^4$; $b_2 = 100 \text{ мм}$.

Геометрические характеристики сечения

$$A_2 = 2 \cdot A_2^{дв} = 2 \cdot 26,8 = 53,6 \text{ см}^2;$$

$$I_{x_c2} = 2 \cdot 1840 = 3680 \text{ см}^4;$$

$$I_{y_c1} = 2 \cdot \left(115 + \left(\frac{10}{2} + \frac{2}{2} \right)^2 \cdot 26,8 \right) = 2159,6 \text{ см}^4;$$

$$i_{x_c2} = \sqrt{\frac{I_{x_c2}}{A_2}} = \sqrt{\frac{3680}{53,6}} = 8,29 \text{ см};$$

$$i_{y_c2} = \sqrt{\frac{I_{y_c2}}{A_2}} = \sqrt{\frac{2159,6}{53,6}} = 6,35 \text{ см}.$$

Гибкости колонны

$$\lambda_{x2} = \frac{\mu \cdot L}{i_{x_c2}} = \frac{0,7 \cdot 540}{8,29} = 45,6;$$

$$\lambda_{yc} = \sqrt{40^2 + \left(\frac{\mu \cdot L}{i_{y_c2}} \right)^2} = \sqrt{40^2 + \left(\frac{0,7 \cdot 540}{6,35} \right)^2} = 71,72;$$

$$\lambda_{\max} = \lambda_{y_c} = 71,72.$$

Уточняем коэффициент Φ : при $\lambda = 70$ $\varphi = 0,81$, при $\lambda = 80$ $\varphi = 0,75$.
Тогда

$$\varphi'_2 = 0,81 - \frac{0,8 - 0,75}{80 - 70} \cdot (71,72 - 70) = 0,8; \quad \varphi_2 \neq \varphi'_2.$$

Третье приближение.

Коэффициент продольного изгиба определяем следующим образом:

$$\varphi_3 = \frac{\varphi_2 + \varphi'_2}{2} = \frac{0,6645 + 0,8}{2} = 0,732;$$

$$A_3^{расч} = \frac{1}{2} \cdot \frac{P}{\varphi_3 \cdot [\sigma]} = \frac{520 \cdot 10^3}{2 \cdot 0,732 \cdot 160 \cdot 10^6} = 2,22 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 22,2 \text{ см}^2.$$

По ГОСТ 8239–89 выбираем двутавр № 18: $A_3^{ог} = 23,4 \text{ см}^2$; $I_{x3} = 1290 \text{ см}^4$;
 $I_{y3} = 82,6 \text{ см}^4$; $b_3 = 90 \text{ мм}$.

Геометрические характеристики сечения

$$A_3 = 2 \cdot A_3^{ог} = 2 \cdot 23,4 = 46,8 \text{ см}^2;$$

$$I_{x,3} = 2 \cdot 1290 = 2580 \text{ см}^4;$$

$$I_{y,3} = 2 \cdot \left(82,6 + \left(\frac{9}{2} + \frac{2}{2} \right)^2 \cdot 23,4 \right) = 1580,9 \text{ см}^4;$$

$$i_{x,3} = \sqrt{\frac{I_{x,3}}{A_3}} = \sqrt{\frac{2580}{46,8}} = 7,42 \text{ см};$$

$$i_{y,3} = \sqrt{\frac{I_{y,3}}{A_3}} = \sqrt{\frac{1580,9}{46,8}} = 5,81 \text{ см}.$$

Гибкости колонны

$$\lambda_{x3} = \frac{\mu \cdot L}{i_{x,3}} = \frac{0,7 \cdot 540}{7,42} = 50,49;$$

$$\lambda_{y3} = \sqrt{40^2 + \left(\frac{\mu \cdot L}{i_{y^c3}}\right)^2} = \sqrt{40^2 + \left(\frac{0,7 \cdot 540}{5,81}\right)^2} = 76,37;$$

$$\lambda_{\max} = \lambda_{y3} = 76,37.$$

Уточняем коэффициент φ :

$$\varphi'_3 = 0,81 - \frac{0,8 - 0,75}{80 - 70} \cdot (76,37 - 70) = 0,772; \quad \varphi_3 \neq \varphi'_3.$$

Четвертое приближение.

Коэффициент продольного изгиба определяем следующим образом:

$$\varphi_4 = \frac{\varphi_3 + \varphi'_3}{2} = \frac{0,732 + 0,772}{2} = 0,752;$$

$$A_4^{\text{расч}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{P}{\varphi_4 \cdot [\sigma]} = \frac{520 \cdot 10^3}{2 \cdot 0,752 \cdot 160 \cdot 10^6} = 2,16 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 21,6 \text{ см}^2.$$

По ГОСТ 8239–89 повторно выпадает двутавр № 18. Проверяем его устойчивость ($A = 46,8 \text{ см}^2$; $\lambda_{\max} = 76,37$; $\varphi = 0,772$):

$$\sigma_{\text{уст}} = \frac{P}{A} = \frac{520 \cdot 10^3}{46,8 \cdot 10^{-4}} = 11,1 \cdot 10^7 \text{ Па} = 111 \text{ МПа};$$

$$\varphi[\sigma] = 0,772 \cdot 160 = 123,52 \text{ МПа};$$

$$\sigma = 111 \text{ МПа} < \varphi[\sigma] = 123,52 \text{ МПа}.$$

Условие устойчивости соблюдается.

Так как значение максимальной гибкости для выбранного сечения не превышает предельного значения гибкости для стали $\lambda_{\max} = 76,37 < \lambda_{\text{пред}} = 100$, то критическую силу определяем по формуле Ясинского:

$$P_{\text{кр}} = (a - b \cdot \lambda_{\max}) \cdot A,$$

где a , b – коэффициенты формулы Ясинского, зависящие от материала, МПа; $a = 310 \text{ МПа}$, $b = 1,14 \text{ МПа}$ – для малоуглеродистой стали.

$$P_{\text{кр}} = (310 - 1,14 \cdot 76,37) \cdot 10^6 \cdot 46,8 \cdot 10^{-4} = 1043,35 \cdot 10^3 \text{ Н} = 1043,35 \text{ кН}.$$

Коэффициент запаса устойчивости

$$n_{уст} = \frac{P_{кр}}{P} = \frac{1043,35}{520} \approx 2.$$

Вывод: для заданной колонны выбрано поперечное сечение, состоящее из двух двутавров № 18, для которого выполняется условие устойчивости с коэффициентом запаса 2.

Задания для самостоятельной работы.

Подобрать размеры поперечного сечения колонны при помощи метода последовательных приближений, определить величину критической силы $P_{кр}$ и коэффициент запаса устойчивости. Допускаемое напряжение $[\sigma] = 160$ МПа.

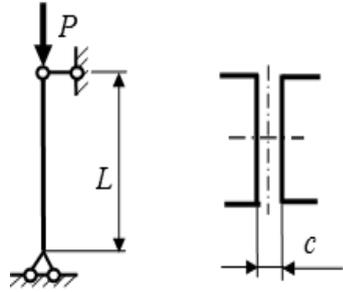
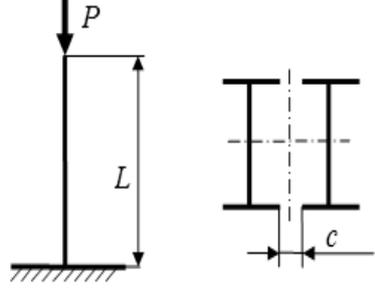
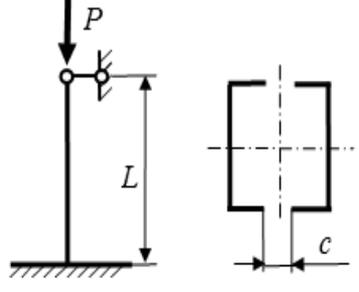
		
$L = 2,5$ м, $P = 250$ кН, $c = 15$ мм	$L = 2$ м, $P = 320$ кН, $c = 20$ мм	$L = 2,8$ м, $P = 180$ кН, $c = 25$ мм

Рисунок 7.3 – Задания для самостоятельной работы

8 Расчет статически неопределимых стержневых систем. Расчеты на прочность и жесткость статически неопределимых балок

Пример – Подобрать необходимое поперечное сечение в виде двутавра для статически неопределимой балки (рисунок 8.1), если допускаемое напряжение $[\sigma] = 160$ МПа.

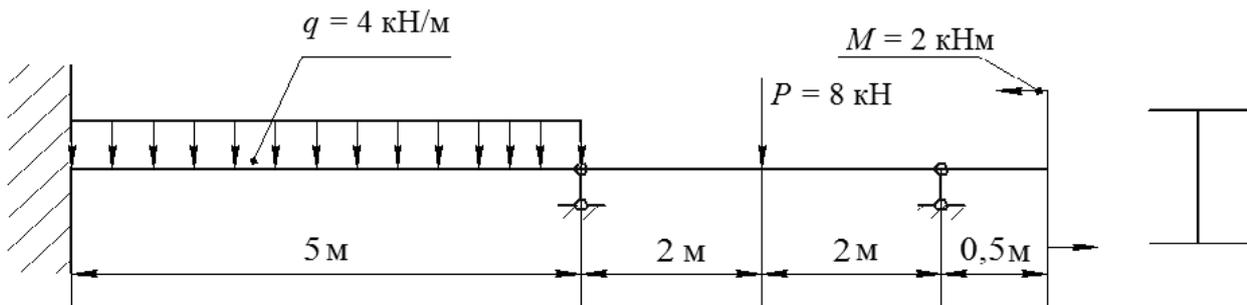


Рисунок 8.1 – Расчетная схема статически неопределимой балки

Решение

Находим степень статической неопределимости [5]:

$$S = 5 - 3 = 2.$$

Образовываем основную систему, отбрасывая две «лишние» связи. Проще всего в качестве основной системы выбрать конструкцию с жестким защемлением (рисунок 8.2, б). Составляем систему канонических уравнений метода сил:

$$\begin{cases} \delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \Delta_{1P} = 0; \\ \delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \Delta_{2P} = 0. \end{cases}$$

Показываем расчетные схемы и строим единичные эпюры изгибающих моментов \overline{M}_1 и \overline{M}_2 от действия $X_1=1$ и $X_2=1$, а также грузовую эпюру моментов M_P от действия заданной нагрузки (рисунок 8.2, в-з). Перемножая эпюры соответствующим образом, находим коэффициенты уравнения:

$$\delta_{11} = \frac{\overline{M}_1 \cdot \overline{M}_1}{EI} = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 9 \cdot \frac{2}{3} \cdot 9 = \frac{729}{3 \cdot EI};$$

$$\delta_{22} = \frac{\overline{M}_2 \cdot \overline{M}_2}{EI} = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 5 = \frac{125}{3 \cdot EI};$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{\overline{M}_1 \cdot \overline{M}_2}{EI} = \frac{1}{EI} \cdot \frac{5}{6} \cdot (2 \cdot 9 \cdot 5 + 5 \cdot 4) = \frac{275}{3 \cdot EI};$$

$$\Delta_{1P} = \frac{M_P \cdot \overline{M}_1}{EI} = \frac{1}{EI} \cdot (-2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{2}{6} \cdot (-2 \cdot 2 \cdot 2 + 2 \cdot 4 \cdot 14 + 14 \cdot 2 - 2 \cdot 4)) +$$

$$+ \frac{5}{6} \cdot (2 \cdot 4 \cdot 14 + 2 \cdot 9 \cdot 104 + 14 \cdot 9 + 104 \cdot 4) - \frac{4 \cdot 5^3}{12} \cdot \frac{9+4}{2} = \frac{5614,5}{3 \cdot EI};$$

$$\Delta_{2P} = \frac{M_P \cdot \overline{M}_2}{EI} = \frac{1}{EI} \cdot \left(\frac{5}{6} \cdot (2 \cdot 5 \cdot 104 + 5 \cdot 14) - \frac{4 \cdot 5^3}{12} \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \right) = \frac{2462,5}{3 \cdot EI}.$$

Подставляя найденные коэффициенты в систему уравнений и решая ее, находим неизвестные усилия X_1 и X_2 :

$$\begin{cases} \frac{729}{3 \cdot EI} \cdot X_1 + \frac{275}{3 \cdot EI} \cdot X_2 + \frac{5614,5}{3 \cdot EI} = 0; \\ \frac{275}{3 \cdot EI} \cdot X_1 + \frac{125}{3 \cdot EI} \cdot X_2 + \frac{2462,5}{3 \cdot EI} = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 729 \cdot X_1 + 275 \cdot X_2 + 5614,5 = 0; \\ 275 \cdot X_1 + 125 \cdot X_2 + 2462,5 = 0; \end{cases}$$

$$X_1 = -1,59 \text{ кН}, \quad X_2 = -16,2 \text{ кН}.$$

Суммарная единичная эпюра \overline{M}_s , получаемая сложением ординат единичных эпюр по характерным участкам, отображена на рисунке 8.2, *и*.

Показываем расчетную схему балки, приложив внешнюю нагрузку и найденные усилия X_1 и X_2 , причем направление X_1 и X_2 меняем на противоположное, т. к. по расчету они получились со знаком « \leftarrow » (рисунок 8.2, *к*). Используя обычный метод сечений, строим эпюры Q и M (рисунок 8.2, *л, м*).

Проводим деформационную проверку:

$$\begin{aligned} \delta = \frac{M \cdot \overline{M}_s}{EI} &= \frac{1}{EI} \cdot \left(\frac{2}{6} \cdot (-2 \cdot 2 \cdot 5,18 - 2 \cdot 2) + \frac{2}{6} \cdot (-2 \cdot 5,18 \cdot 2 + 2 \cdot 4 \cdot 7,64 + \right. \\ &+ 7,64 \cdot 2 - 5,18 \cdot 4) + \frac{5}{6} \cdot (2 \cdot 14 \cdot 8,69 + 2 \cdot 7,64 \cdot 4 + 8,69 \cdot 4 + 7,64 \cdot 14) - \\ &\left. - \frac{4 \cdot 5^3}{12} \cdot \frac{14 + 4}{2} \right) = \frac{383,453 - 383,24}{EI} = \frac{0,213}{EI}. \end{aligned}$$

Процент расхождения

$$\delta = \frac{0,213}{383,24} \cdot 100 \% = 0,06 \% < 3 \%.$$

Из условия прочности при изгибе

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} \leq [\sigma]$$

выражаем осевой момент сопротивления:

$$W_x \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{8,69 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 0,0543 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 54,3 \text{ см}^3.$$

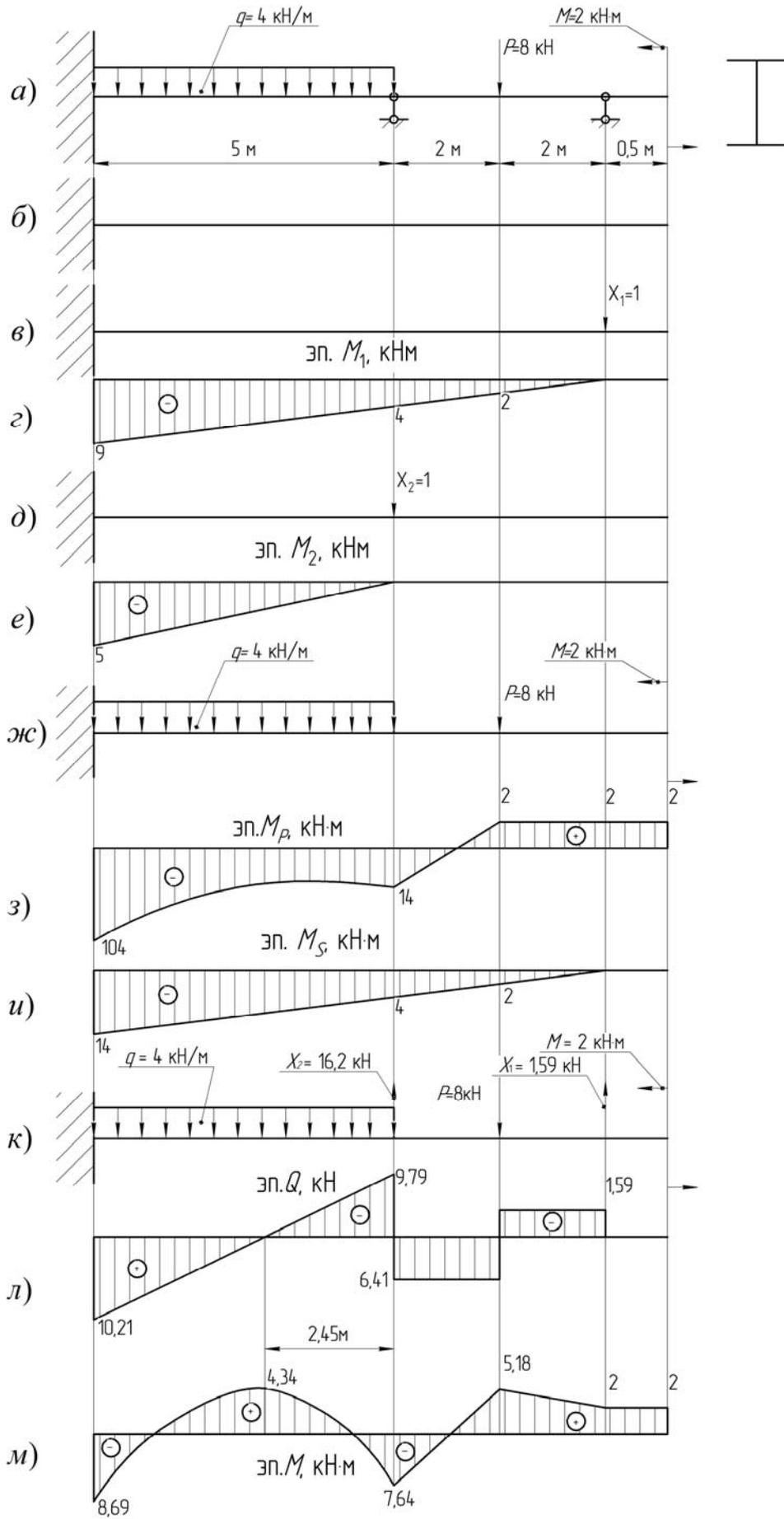


Рисунок 8.2 – К расчету статически неопределимой балки

Полученному значению соответствует двутавр № 12 (ГОСТ 8239–89), у которого $W_x = 58,4 \text{ см}^3$. Находим величину напряжения, возникающего в опасном сечении балки:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{8,69 \cdot 10^3}{58,4 \cdot 10^{-6}} = 148,8 \text{ МПа} < [\sigma] = 160 \text{ МПа}.$$

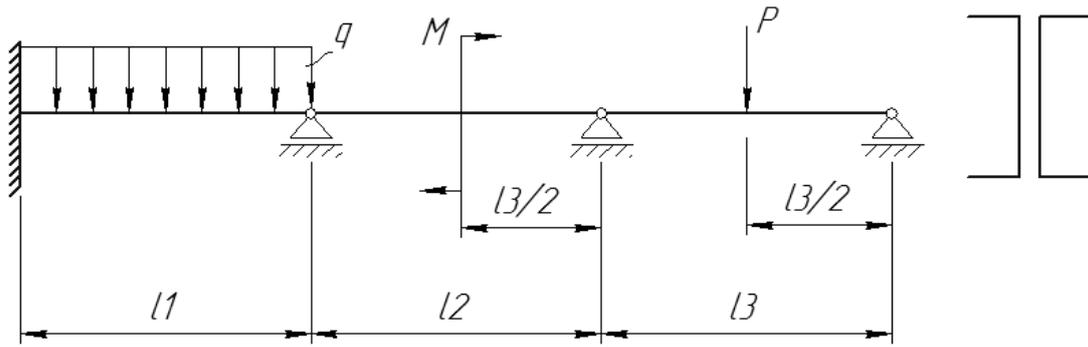
Таким образом, выбранный двутавр № 12 работает с небольшим запасом прочности

$$\delta = \frac{160 - 148,8}{148,8} \cdot 100 \% = 7,5 \%$$

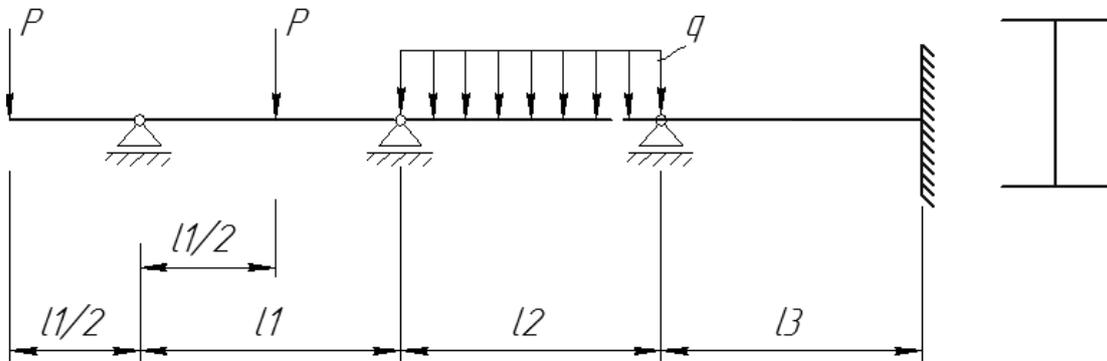
Вывод: для заданной балки выбрано поперечное сечение в виде двутавра № 12, для которого выполняется условие прочности.

Задания для самостоятельной работы.

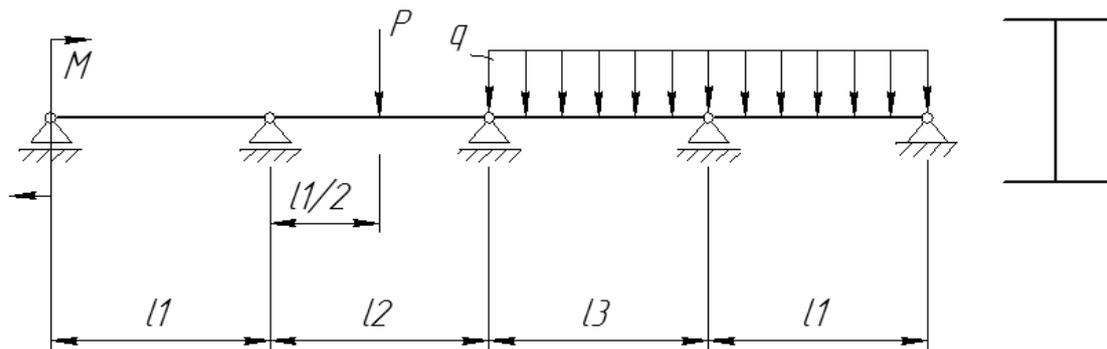
Подобрать необходимое поперечное сечение для статически неопределимых балок (рисунок 8.3), если допускаемое напряжение $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$.



$$l_1 = 1 \text{ м}, l_2 = 2 \text{ м}, l_3 = 3 \text{ м}, P = 25 \text{ кН}, q = 20 \text{ кН/м}, m = 10 \text{ кН}\cdot\text{м}$$



$$l_1 = 2 \text{ м}, l_2 = 1 \text{ м}, l_3 = 2 \text{ м}, P = 15 \text{ кН}, q = 40 \text{ кН/м}, m = 20 \text{ кН}\cdot\text{м}$$



$$l_1 = 2 \text{ м}, l_2 = 4 \text{ м}, l_3 = 2 \text{ м}, P = 25 \text{ кН}, q = 40 \text{ кН/м}, m = 30 \text{ кН}\cdot\text{м}$$

Рисунок 8.3 – Примеры заданий для самостоятельной работы

9 Расчеты на прочность и жесткость при ударе

Пример – На двутавровую стальную балку (рисунок 9.1) с высоты h падает груз весом G , если $h = 16$ мм, $G = 1,6$ кН, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа = $2 \cdot 10^{11}$ Па; двутавр № 24: $W_x = 289$ см³ = $289 \cdot 10^{-6}$ м³; $I_x = 3460$ см⁴ = $3460 \cdot 10^{-8}$ м⁴.

Требуется: найти максимальное нормальное напряжение, возникающее в балке.

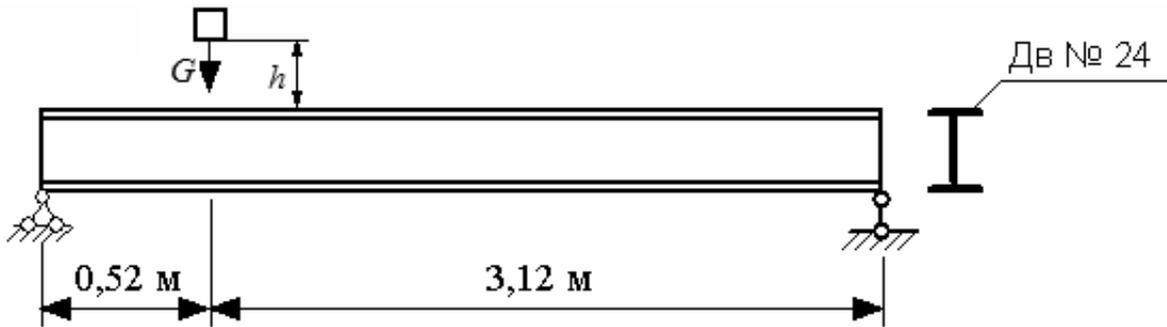


Рисунок 9.1 – Заданная схема балки

Решение

Для определения опасного сечения балки и деформаций в точке удара рассмотрим вспомогательные схемы, для которых построим эпюры изгибающих моментов (рисунок 9.2).

Для схемы балки, в которой груз G применен статически, строится грузовая эпюра изгибающих моментов M_p (рисунок 9.2, а).

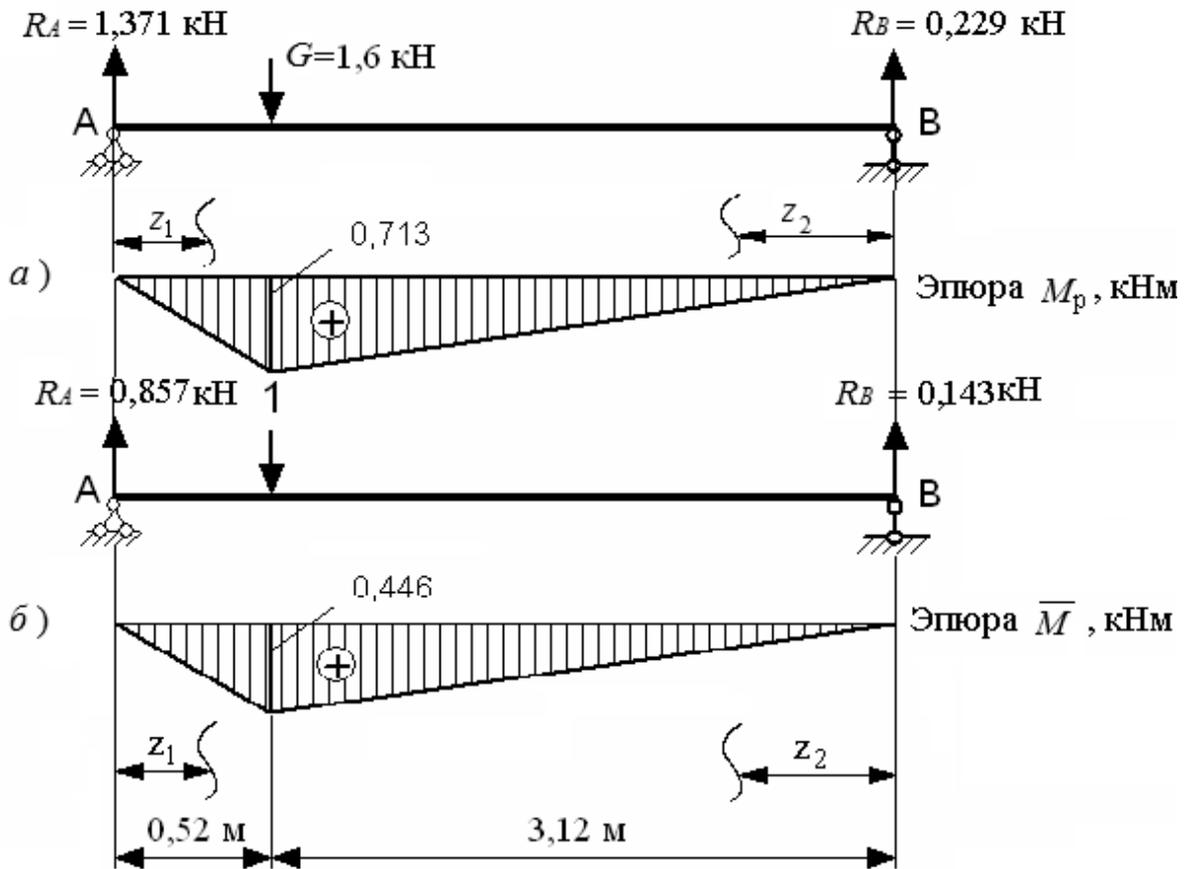
Определим реакции на опорах:

$$\sum M_A = 0; \quad G \cdot 0,52 - R_g \cdot 3,12 = 0;$$

$$R_g = \frac{1,6 \cdot 0,52}{3,12} = 0,229 \text{ кН};$$

$$\sum y = 0; \quad R_A + R_B - G = 0;$$

$$R_A = G - R_g = 1,6 - 0,229 = 1,371 \text{ кН}.$$



а – грузовая; б – единичная

Рисунок 9.2 – Вспомогательные схемы балки и эпюры изгибающих моментов

Рассчитаем ординаты эпюры M_p по участкам:

– участок I: $0 \leq z_1 \leq 0,52$ м.

$$M = R_A \cdot z_1 = 1,371 \cdot z_1;$$

$$z_1 = 0; \quad M = 0;$$

$$z_1 = 0,52 \text{ м}; \quad M = 0,713 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

– участок II: $0 \leq z_2 \leq 3,12$ м.

$$M = R_B \cdot z_2 = 0,229 \cdot z_2;$$

$$z_2 = 0; \quad M = 0;$$

$$z_2 = 3,12 \text{ м}; \quad M = 0,713 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

От схемы балки, в которой в месте падения груза приложена единичная сила, строится единичная эпюра изгибающих моментов \bar{M} (рисунок 9.2, б).

Определим реакции на опорах:

$$\sum M_A = 0; \quad 1 \cdot 0,52 - R_B \cdot 3,12 = 0;$$

$$R_B = \frac{1 \cdot 0,52}{3,12} = 0,143 \text{ кН.}$$

$$\sum y = 0; \quad R_A + R_B - 1 = 0;$$

$$R_A = 1 - R_B = 1 - 0,143 = 0,857 \text{ кН.}$$

Рассчитаем ординаты эпюры \bar{M} по участкам:

– участок I: $0 \leq z_1 \leq 0,52$ м.

$$M = \bar{R}_A \cdot z_1 = 0,857 \cdot z_1;$$

$$z_1 = 0; \quad M = 0;$$

$$z_1 = 0,52 \text{ м; } M = 0,446 \text{ кН}\cdot\text{м;}$$

– участок II: $0 \leq z_2 \leq 3,12$ м.

$$M = R_B \cdot z_2 = 0,143 \cdot z_2;$$

$$z_1 = 0; \quad M = 0;$$

$$z_2 = 3,12 \text{ м; } M = 0,446 \text{ кН}\cdot\text{м.}$$

По грузовой эпюре M_p определим опасное сечение, в котором $M_{\max} = 0,713$ кН·м.

Максимальное статическое напряжение

$$\sigma_{ст}^{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{0,713 \cdot 10^3}{289 \cdot 10^{-6}} = 2,47 \cdot 10^6 \text{ Па} = 2,47 \text{ МПа}.$$

Рассчитаем статическое перемещение в точке удара по формуле Верещагина, перемножив эпюры \bar{M} и M_p :

$$\Delta_{cm} = \frac{1}{E \cdot I_x} \left(\frac{1}{2} \cdot 0,713 \cdot 0,52 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,446 + \frac{1}{2} \cdot 0,713 \cdot 3,12 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,446 \right) =$$

$$= \frac{0,386}{E \cdot I_x} = \frac{0,386 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 3460 \cdot 10^{-8}} = 0,0557 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

Определим динамический коэффициент по формуле

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{cm}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 16}{0,0557}} = 25.$$

Определим максимальное динамическое напряжение

$$\sigma_d^{\max} = \sigma_{cm}^{\max} \cdot k_d = 2,47 \cdot 25 = 61,65 \text{ МПа.}$$

Задания для самостоятельной работы.

На двутавровую стальную балку (рисунок 9.3) с высоты h падает груз G . Модуль продольной упругости материала $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

Требуется найти максимальное нормальное напряжение в балке.

Исходные данные берутся из таблицы 9.1.

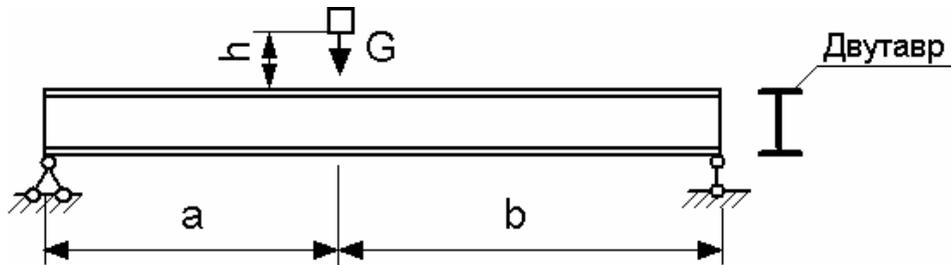


Рисунок 9.3 – Расчетная схема для самостоятельной работы

Таблица 9.1 – Исходные данные

Номер строки	a , м	b , м	h , мм	Номер двутавра	G , кН
1	1,1	3,1	11	14	2,1
2	1,2	3,2	12	16	2,2
3	1,3	3,3	13	18	2,3
4	1,4	3,4	14	20	2,4
5	1,5	3,5	15	22	2,5
6	1,6	3,6	16	24	2,6
7	1,7	3,7	17	27	2,7
8	1,8	3,8	18	30	2,8

Список литературы

1 **Александров, А. В.** Сопротивление материалов: учебник для вузов / А. В. Александров, В. Д. Потапов, Б. П. Державин. – 2-е изд., испр. – Москва: Высшая школа, 2000. – 560 с.

2 **Окопный, Ю. А.** Механика материалов и конструкций: учебник для вузов / Ю. А. Окопный, В. П. Радин, В. П. Чирков. – 2-е изд., доп. – Москва: Машиностроение, 2002. – 436 с.

3 **Писаренко, Г. С.** Справочник по сопротивлению материалов / Г. С. Писаренко, Ф. П. Яковлев, В. В. Матвеев. – 5-е изд., перераб. и доп. – Киев: Дельта, 2008. – 816 с.

4 **Подскребко, М. Д.** Сопротивление материалов: учебник для вузов / М. Д. Подскребко. – Минск: Вышэйшая школа, 2007. – 797 с.

5 **Старовойтов, Э. И.** Сопротивление материалов: учебник для вузов / Э. И. Старовойтов. – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2008. – 384 с.