МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Высшая математика»

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Методические рекомендации к практическим занятиям для студентов направления подготовки 01.03.04 «Прикладная математика» очной формы обучения

Могилев 2021

УДК 512.8
ББК 22.143
Л59

Рекомендовано к изданию
учебно-методическим отделом
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Высшая математика» «5» января 2021 г., протокол № 5

Составители: канд. пед. наук, доц. Е. Л. Старовойтова;
ст. преподаватель. А. Г. Козлов

Рецензент канд. физ.-мат. наук, доц. И. И. Маковецкий

Методические рекомендации содержат необходимые для проведения практических занятий вопросы и задачи.

Учебно-методическое издание

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Ответственный за выпуск	В. Г. Замураев
Корректор	А. А. Подошевко
Компьютерная вёрстка	Н. П. Полевничая

Подписано в печать . Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Печать трафаретная. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 56 экз. Заказ №

Издатель и полиграфическое исполнение:
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования
«Белорусско-Российский университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/156 от 07.03.2019.
Пр-т Мира, 43, 212022, г. Могилев.

Содержание

1 Практическое занятие № 1. Матрицы. Действия над матрицами и их свойства. Определители. Разложение определителя по элементам ряда. Теорема Лапласа. Свойства определителя. Определитель произведения матриц

Вопросы к практическому занятию

1 Сформулируйте определение понятия «матрица».
2 Как обозначаются матрицы, элементы матриц?
3 Сформулируйте определение понятия «порядок матрицы».
4 Сформулируйте определение понятия «прямоугольной матрицы».
5 Какие элементы матрицы образуют главную диагональ?
6 Сформулируйте определение понятия «диагональной матрицы».
7 Сформулируйте определение понятия «единичной матрицы».
8 Сформулируйте определение понятия «треугольной матрицы».
9 Запишите примеры диагональной, единичной, верхней и нижней треугольных матриц.
10 Сформулируйте определение понятия «нулевой матрицы».
11 Какие матрицы называются матрицей-строкой, матрицей-столбцом?
12 Запишите примеры матрицы-строки, матрицы-столбца.
13 Сформулируйте определение понятия «равные матрицы».
14 Какие линейные операции определены над матрицами?
15 Сформулируйте определение понятия «сумма (разность) матриц».
16 Сформулируйте определение понятия «произведение матрицы на число».
17 Сформулируйте свойства операции сложения матриц.
18 Сформулируйте определение понятия «произведение матриц».
19 Продолжите утверждение: «В результате умножения матрицы A на матрицу B получается матрица, содержащая столько строк, …».
20 Сформулируйте условие существования произведения матриц.
21 Сформулируйте свойства операции произведения матриц.
22 Сформулируйте определение понятия «коммутирующие (перестановочные) матрицы».
23 Сформулируйте определение понятия «матрица, транспонированная к данной матрице».
24 Сформулируйте свойства транспонированных матриц.
25 Какие преобразования над матрицами называют элементарными?
26 Сформулируйте определение понятия «эквивалентные матрицы».
27 Сформулируйте определение понятия «определитель (детерминант) квадратной матрицы второго порядка».
28 Сформулируйте определение понятия «определитель (детерминант) квадратной матрицы третьего порядка».
29 Сформулируйте правило Саррюса.
30 Сформулируйте определение понятия «минор элемента определителя».

31 Сформулируйте определение понятия «алгебраическое дополнение элемента определителя».

32 Сформулируйте свойства определителей.

33 Сформулируйте теорему Лапласа.

34 Сформулируйте теорему аннулирования.

35 Запишите формулу разложения определителя квадратной матрицы по i-й строке.

36 Запишите формулу разложения определителя квадратной матрицы по j-му столбцу.

37 Чему равен определитель диагональной и треугольной матриц?

Задачи к практическому занятию

1 Найти сумму матриц $\begin{pmatrix} 2 & -2 & -3 & -1 \\ 1 & 4 & -2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 & 5 \\ 4 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

2 Дана матрица $B = \begin{pmatrix} -5 & 7 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ и $\lambda = -8$. Найти матрицу $-\lambda B$.

3 Найти линейную комбинацию матриц $2A - 4B$, если $A = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 4 & -2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 4 & -4 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$.

4 Проверить, существуют ли произведения AB и BA и найти произведения матриц AB и BA:

а) $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -7 & 2 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$;

б) $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 5 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -2 \\ 1 & 5 & -5 \\ 2 & 5 & 5 \end{pmatrix}$;

в) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & -5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$;

г) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}$;

д) $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 5 & 2 & -3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & -5 & -2 & -5 \\ 1 & -2 & -2 & 2 \\ 2 & 5 & 4 & -4 \end{pmatrix}$;

е) $A=\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & 5 & -5 & -2 \end{pmatrix}$.

5 Найти A^T, если:

а) $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -5 & -4 \\ 3 & 8 \\ -2 & -7 \end{pmatrix}$;   б) $A=\begin{pmatrix} 0 & 3 & -4 \\ -2 & 4 & -4 \end{pmatrix}$.

6 Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 8 & -8 \\ -7 & -3 \end{vmatrix}$;   б) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -3 & -2 & 3 \\ 3 & -3 & 4 \end{vmatrix}$.

7 Дан определитель $\begin{vmatrix} 0 & -7 & -4 \\ 1 & 6 & 2 \\ -5 & 0 & 3 \end{vmatrix}$. Найти A_{22} и A_{13}.

8 Вычислить определитель 3-го порядка $\begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & 4 & 3 \\ -3 & -2 & -5 \end{vmatrix}$, разложив его по элементам второго столбца.

9 Вычислить определитель 4-го порядка $\begin{vmatrix} 5 & 7 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & -4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & -1 \end{vmatrix}$, разложив его по элементам третьей строки.

10 Решить уравнение $\begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 \\ x-1 & 0 & 7 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0$.

11 Решить неравенство $\begin{vmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 2-3x & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \geq 0$.

Домашнее задание

1 Найти сумму матриц $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & -7 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 8 \\ 0 & -9 \end{pmatrix}$.

2 Найти линейную комбинацию матриц $-3A-5B$, если $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -5 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 6 & -2 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

3 Проверить, существуют ли произведения AB и BA и найти произведения матриц AB и BA:

а) $A=\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$;

б) $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 & -4 \\ -2 & 2 & 1 \\ -3 & -4 & 5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -3 & -5 & -4 \\ -4 & 5 & -3 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

в) $A=\begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 4 & -5 & -4 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 3 & -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$;

г) $A=\begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$;

д) $A=\begin{pmatrix} -3 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -4 & 0 & 4 \\ -4 & -5 & -2 \end{pmatrix}$;

е) $A=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -2 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & -5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & -5 \\ -4 & 0 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$.

4 Найти A^T, если:

а) $A=\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$;

б) $A=\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 4 & -2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$.

5 Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} -2 & -5 \\ -4 & -2 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -4 \\ -1 & -2 & 3 \\ 5 & 1 & -3 \end{vmatrix}$.

6 Дан определитель $\begin{vmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 5 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$. Найти A_{32} и A_{11}.

7 Вычислить определитель 3-го порядка $\begin{vmatrix} -5 & 4 & -4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & -3 \end{vmatrix}$, разложив его по элементам третьего столбца.

8 Вычислить определитель 4-го порядка $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 5 \\ 4 & -3 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 3 \\ 2 & 7 & 2 & -2 \end{vmatrix}$, разложив его по элементам второй строки.

9 Решить уравнение $\begin{vmatrix} 2x-1 & x+1 \\ x+2 & x-1 \end{vmatrix} = -6$.

10 Решить неравенство $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & x+5 & 2-x \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} \le 4$.

2 Практическое занятие № 2. Обратная матрица. Линейная зависимость и линейная независимость строк. Необходимое и достаточное условие линейной зависимости строк. Ранг матрицы. Теорема о базисном миноре

Вопросы к практическому занятию

1 Сформулируйте определение понятия «обратная матрица».
2 Сформулируйте определение понятия «присоединенная матрица».
3 Какие квадратные матрицы называются невырожденными?
4 Сформулируйте необходимое и достаточное условие линейной зависимости строк матрицы.
5 Сформулируйте условия существования обратной матрицы и приведите формулу для нахождения обратной матрицы.

6 Сформулируйте определение понятия «ранг матрицы».
7 Перечислите способы нахождения ранга матрицы.

Задачи к практическому занятию

1 Методом присоединенной матрицы найдите матрицу, обратную данной:

а) $A=\begin{pmatrix}2 & -7\\ -3 & 5\end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 6 & 4\\ -4 & -14 & -6\end{pmatrix}$.

2 Методом элементарных преобразований найдите матрицу, обратную данной, предварительно проверив, выполняется ли условие существования обратной матрицы:

а) $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & -1\\ 2 & 2 & 4\end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 6 & 4\\ 3 & 10 & 8\end{pmatrix}$; в) $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 2\\ 1 & -1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 0 & 2 & -1 & -1\end{pmatrix}$.

3 Решите матричные уравнения:

а) $\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 3\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}\cdot X\cdot\begin{pmatrix}-1 & 1/2\\ 0 & 1/2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & 4\end{pmatrix}$.

4 Найти ранг матриц:

а) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 5\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}2 & -1 & 5 & 6\\ 1 & 1 & 3 & 5\\ 1 & -5 & 1 & -3\end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix}1 & 3 & 5 & -1\\ 2 & -1 & -3 & 4\\ 5 & 1 & -1 & 7\\ 7 & 7 & 9 & 1\end{pmatrix}$.

Домашнее задание

1 Методом присоединенной матрицы найдите матрицу, обратную данной:

а) $A=\begin{pmatrix}0 & 3\\ 4 & -9\end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 2 & 3 & 1\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}$.

2 Методом элементарных преобразований найдите матрицу, обратную данной, предварительно проверив, выполняется ли условие существования обратной матрицы:

а) $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ -1 & 2 & 1\\ -1 & 1 & 2\end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix}2 & 7 & 3\\ 3 & 9 & 4\\ 1 & 5 & 3\end{pmatrix}$;

в) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$; г) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

3 Решите матричные уравнения:

а) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$.

4 Найти ранг матриц:

а) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 3 & 5 & 6 & -4 \\ 3 & 8 & 2 & -19 \end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & 1 & 6 & 11 \\ 1 & -1 & -1 & 4 & -3 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 8 & 6 & -7 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & -8 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & -5 \\ 8 & 6 & -1 & 4 & -6 \end{pmatrix}$.

3 Практическое занятие № 3. Системы линейных алгебраических уравнений. Матричный способ решения. Формулы Крамера. Метод Гаусса

Вопросы к практическому занятию

1 Сформулируйте определение понятий «однородная СЛАУ» и «неоднородная СЛАУ».

2 Сформулируйте определение понятий «неоднородная СЛАУ».

3 Сформулируйте определение понятия «совместная СЛАУ».

4 Сформулируйте определение понятия «несовместная СЛАУ».

5 Какие совместные системы называются определенными?

6 Какие совместные системы называются неопределенными?

7 Какие СЛАУ называют эквивалентными?

8 Сформулируйте определение понятия «несовместная СЛАУ»

9 Что такое произвольная СЛАУ?

10 Сформулируйте условия совместности и несовместности произвольных СЛАУ (теорема Кронекера-Капелли).

11 При каких условиях совместная СЛАУ имеет единственное решение, множество решений?

12 Перечислите основные способы решений СЛАУ.

13 Какая СЛАУ называется невырожденной и какие используются методы решений невырожденных СЛАУ?

14 Запишите решение невырожденных СЛАУ в матричной форме, а также по формулам Крамера.

15 Какие преобразования над СЛАУ называют элементарными?

16 Какой метод используется при решении произвольных СЛАУ?

17 В чем суть метода Гаусса решения произвольных СЛАУ?

Задачи к практическому занятию

1 Решить следующие СЛАУ матричным методом:

а) $\begin{cases} 3x-8y=4, \\ 2x+5y=13; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 3x-4y=-3, \\ 2x+y=4; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x+2y-z=2, \\ 2x-3y+2z=2, \\ 3x+y+z=8; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3-x_4=0, \\ 2x_1-x_2-3x_4=1, \\ 3x_1-x_3+x_4=-2, \\ 2x_1+2x_2-2x_3+5x_4=-3. \end{cases}$

2 Решить следующие СЛАУ по формулам Крамера:

а) $\begin{cases} x+y=0, \\ 2x-y=15; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 8x-6y+5z=15, \\ 13x-10y+z=32, \\ 2x-2y+z=5; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 7x+9y+z=8, \\ 13x+15y+9z=6, \\ 2x+3y+z=2. \end{cases}$

3 Исследовать систему на совместность и решить методом Гаусса:

а) $\begin{cases} -2x+6y=2, \\ 4x-15y=-7; \end{cases}$ г) $\begin{cases} -8x+4y=12, \\ 2y-5z=7, \\ 3x-2y+z=-6; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x+2y+2z=-2, \\ x+z=-3, \\ 4x+2y+5z=-5; \end{cases}$ д) $\begin{cases} -6x-10y-3z=-7, \\ 2x-5y+3z=-8, \\ x+10y+z=9, \\ 2x+5y-2z=7. \end{cases}$

в) $\begin{cases} x+2y-2z=1, \\ 2x+4z=-2, \\ 7x+2y+10z=-5; \end{cases}$

Домашнее задание

1 Решить следующие СЛАУ матричным методом:

а) $\begin{cases} 3x - 8y = 4, \\ 2x - 5y = 13; \end{cases}$
в) $\begin{cases} 2x - 3y + z = -7, \\ x + 4y + 2z = -1, \\ x - 4y = -5; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x - y + 2z = -6, \\ -2y - 4z = 3, \\ x - y - 2z = 0; \end{cases}$
г) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_4 = 0, \\ 2x_2 - x_3 - 2x_4 = 0, \\ -x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 1, \\ -2x_2 + x_3 - 2x_4 = -2. \end{cases}$

2 Решить следующие СЛАУ по формулам Крамера:

а) $\begin{cases} -x + 2y = -8, \\ -2x - 3y = 5; \end{cases}$
в) $\begin{cases} 4x - 6y + 2z = -12, \\ -5x + 2y + 4z = 3, \\ 2x - 2y = -4; \end{cases}$

б) $\begin{cases} -14x + 9y + 5z = -5, \\ -17x + 15y + z = -2, \\ -4x + 3y + z = -1; \end{cases}$
г) $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 12, \\ 6x_1 + 7x_2 - 7x_3 + 5x_4 = 44, \\ 4x_1 + 5x_2 - 6x_3 + 5x_4 = 36, \\ -x_2 + 3x_3 - 3x_4 = -14. \end{cases}$

3 Исследовать систему на совместность и решить методом Гаусса:

а) $\begin{cases} -6x - 12y = -42, \\ 2x - y = 9; \end{cases}$
г) $\begin{cases} -3x + 4y = -1, \\ 6x - 8y = 2; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x - 3y = -5, \\ 2x - y - 4z = -3, \\ 6x - 5y - 8z = -11; \end{cases}$
д) $\begin{cases} 2x - 3y + 3z = 3, \\ x - y + z = -1, \\ -4x + 7y - 7z = -9; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x_1 + 3x_3 + 2x_4 = 9, \\ -8x_1 - 4x_2 - 4x_3 - 4x_4 = -8, \\ -2x_1 - x_2 - 2x_3 - 2x_4 = -7, \\ -6x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 2x_4 = -1; \end{cases}$
е) $\begin{cases} 4x + 9y - 8z = 13, \\ 7x + 15y - 6z = 22, \\ 2x + 3y - 2z = 5. \end{cases}$

4 Практические занятия № 4 и 5. Однородные системы. Теорема Кронекера-Капелли. Структура множества решений однородной и неоднородной системы. Связь решений однородной и неоднородной системы. Фундаментальная система решений

Вопросы к практическому занятию

1 Сформулируйте определение понятия «однородная СЛАУ».

2 Сформулируйте свойства однородной СЛАУ.

3 Сформулируйте теорему Кронекера-Капелли.

4 Сформулируйте определение понятия «фундаментальная система решений».

5 Сформулируйте определение понятия «неоднородная СЛАУ».

6 Сформулируйте свойства неоднородной СЛАУ.

7 В чем заключается связь решений однородной и неоднородной СЛАУ?

8 Сформулируйте определение понятия «однородная СЛАУ», «Общее решение СЛАУ».

9 В случае множества решений совместной СЛАУ, какие неизвестные выбираются базисными, а какие свободными?

Задачи к практическому занятию

1 Решить однородные системы уравнений:

а) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ 5x_1 - x_2 - x_4 = 0; \end{cases}$ д) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0, \\ 4x_1 - 5x_2 + 8x_3 + x_4 = 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 5x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0; \end{cases}$ е) $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 7x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$

2 Выяснить, существует ли фундаментальная система решений для каждой из систем:

а) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ 8x_1 - 6x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

3 Найти фундаментальную систему решений для систем:

а) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 5x_3 - 3x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 - 6x_3 - 3x_4 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 - 4x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 0. \end{cases}$

Домашнее задание

1 Решить однородные системы уравнений:

а) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = 0, \\ 4x_1 + x_2 + 7x_3 + 5x_4 = 0, \\ 5x_1 - x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 - 6x_4 - 12x_5 + 3x_6 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 - 6x_5 + x_6 = 0, \\ x_1 + x_3 - x_4 - 5x_5 = 0, \\ x_1 + x_3 - 3x_5 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 - 4x_5 - x_6 = 0. \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 + 6x_2 - 2x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 + 9x_2 - 3x_3 + x_4 + x_5 = 0; \end{cases}$

2 Выяснить, существует ли фундаментальная система решений для каждой из систем:

а) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 9x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_3 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$

3 Найти фундаментальную систему решений для систем:

а) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 5x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = 0, \\ 5x_1 - x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 0, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$

5 Практическое занятие № 6. Векторы. Линейные операции над векторами и их свойства. Линейная зависимость и линейная независимость системы векторов. Векторный базис. Свойства координат вектора в базисе. Свойства проекции вектора. Длина вектора. Направляющие косинусы

Вопросы к практическому занятию

1 Сформулируйте определение понятия «вектор».

2 Сформулируйте определение понятий «равные векторы», «нулевой вектор», «коллинеарные векторы», «компланарные векторы».

3 Какие линейные операции определены над векторами?

4 Сформулируйте определение линейной зависимости и линейной независимости системы n векторов.

5 Какие два вектора на плоскости являются линейно зависимыми, а какие линейно независимыми?

6 Сформулируйте утверждение о линейной зависимости трех векторов на плоскости.

7 Какие три вектора в пространстве являются линейно зависимыми, а какие линейно независимыми?

8 Что можно сказать о линейной зависимости четырех векторов в пространстве?

9 Сформулируйте определение понятия «базис системы векторов в пространстве R^n».

10 Сформулируйте определение понятий «базис на плоскости» и «базис в пространстве».

11 Сформулируйте определение понятий «декартовый (ортонормированный) базис на плоскости» и «декартовый (ортонормированный) базис в пространстве».

12 Запишите формулу разложения вектора по векторам декартового базиса в пространстве и дайте геометрическую иллюстрацию.

13 Сформулируйте определение понятия «координаты вектора в декартовом базисе».

14 Запишите формулу для определения длины вектора в трехмерном декартовом базисе.

15 Сформулируйте определение понятия «направляющие косинусы вектора в трехмерном декартовом базисе».

16 Запишите основное свойство направляющих косинусов.

17 В каком отношении находятся координаты равных векторов?

18 Чему равны координаты суммы (разности) двух векторов и координаты произведения вектора на число?

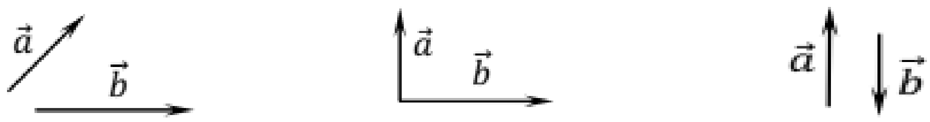
19 Запишите условие коллинеарности двух векторов в координатной форме.

20 Чему равны координаты вектора, заданного координатами начала и конца вектора?

Задачи к практическому занятию

1 Построить векторы $\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{a}-\vec{b}$, если:

а) б) в)



2 Проверить геометрически справедливость равенств:

а) $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=2\vec{a}$; б) $\dfrac{\vec{a}}{2}+\dfrac{\vec{b}}{2}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$.

3 Даны векторы $\vec{a}=(1;-2;3)$ и $\vec{b}=(2;1;-4)$. Найти векторы $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{d}=\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{p}=3\vec{a}+2\vec{b}$, $\vec{q}=5\vec{a}-4\vec{b}.$

4 Найти неизвестную координату вектора $\vec{a}=(4;-12;z)$, если $\left|\vec{a}\right|=13$.

5 Даны вершины $A\left(2;2;2\right)$, $B\left(6;5;0\right)$, $C\left(0;3;8\right)$ параллелограмма $ABCD$. Найти координаты вершины D.

6 Вершины четырехугольника находятся в точках $A\left(2;0;4\right)$, $B\left(7;-15;16\right)$, $C\left(-1;-1;11\right)$ и $D\left(-14;28;-6\right)$. Является ли четырехугольник $ABCD$ трапецией?

7 Даны точки $A\left(1;2;3\right)$, $B\left(4;2;0\right)$. Найти $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ и направляющие косинусы вектора $\overrightarrow{AB}$.

8 Найти длину вектора $\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j}-6\vec{k}$ и его направляющие косинусы.

9 Даны векторы $\vec{a}_1=(1;2;-1)$, $\vec{a}_2=(-2;0;3)$, $\vec{a}_3=(-1;1;-1)$ и $\vec{b}=(-2;3;1)$. Проверить, образуют ли векторы $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}$ и $\overrightarrow{a_3}$ базис. Найти координаты вектора $\vec{b}$ в базисе $\left(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3\right)$.

10 Даны векторы $\vec{a}_1=(2;-1;3)$, $\vec{a}_2=(1;1;-1)$, $\vec{a}_3=(-3;1;2)$ и $\vec{b}=(-6;0;13)$. Проверить, образуют ли векторы $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}$ и $\overrightarrow{a_3}$ базис. Найти координаты вектора $\vec{b}$ в базисе $\left(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3\right)$.

11 Дан вектор $\vec{a}$, образующий с осью Ou угол $\varphi_1=60°$, и вектор $\vec{b}$, образующий с той же осью угол $\varphi_2=120°$. Найти проекцию суммы $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$, где $\vec{c}=3\vec{a}$, на ось Ou, если известно, что $\left|\vec{a}\right|=6,\ \left|\vec{b}\right|=4.$

12 В параллелограмме $ABCD$ $\overrightarrow{AB}=\vec{p}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{q}$. Выразить векторы $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{DB}$ через $\vec{p}$ и $\vec{q}$.

13 Дан прямоугольник $ABCD$. Коллинеарны ли векторы $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}$?

14 Найти неизвестную координату вектора $\vec{a}=(4;-12;z)$, если $|\vec{a}|=13$.

Домашнее задание

1 Проверить геометрически справедливость равенств:

а) $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)-\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=2\vec{b}$; б) $\dfrac{\vec{a}-\vec{b}}{2}+\vec{b}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$.

2 Даны вершины $A(1;-3;-2)$, $B(8;0;-4)$, $C(4;8;-3)$ параллелограмма $ABCD$. Найти координаты вершины D.

3 Найти координаты линейной комбинации $4\vec{a}-5\vec{b}$, если $\vec{a}=(1;2;3)$ и $\vec{b}=(1;1;2)$.

4 Найти координаты линейной комбинации $2\vec{a}+3\vec{b}$, если $\vec{a}=(1;-1;0)$ и $\vec{b}=(0;1;1)$.

5 Даны векторы $\vec{a}=(2;-5;3)$ и $\vec{b}=(1;3;-7)$. Найти векторы $\vec{c}=4\vec{a}+3\vec{b}$, $\vec{d}=5\vec{a}-2\vec{b}$.

6 Даны точки $A(4;-2;6)$ и $B(1;4;0)$. Найти длину и направление вектора $\overrightarrow{AB}$.

7 Даны векторы $\vec{a}_1=(2;0;1)$, $\vec{a}_2=(1;2;-1)$, $\vec{a}_3=(0;4;-1)$ и $\vec{b}=(-1;-2;3)$. Проверить, образуют ли векторы $\vec{a}_1,\vec{a}_2$ и $\vec{a}_3$ базис. Найти координаты вектора $\vec{b}$ в базисе $\left(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3\right)$.

8 Даны векторы $\vec{a}_1=(1;3;0)$, $\vec{a}_2=(2;-1;1)$, $\vec{a}_3=(0;-1;2)$ и $\vec{b}=(6;12;-1)$. Проверить, образуют ли векторы $\vec{a}_1,\vec{a}_2$ и $\vec{a}_3$ базис. Найти координаты вектора $\vec{b}$ в базисе $\left(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3\right)$.

9 Дан ΔABC, в котором $\overrightarrow{AB}=\vec{p}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{q}$. Выразить векторы $\overrightarrow{AK}$, $\overrightarrow{BL}$, $\overrightarrow{CM}$, где K, L, M – основания медиан, через $\vec{p}$ и $\vec{q}$.

6 Практическое занятие № 7. Скалярное, векторное, двойное векторное и смешанное произведение векторов. Критерии коллинеарности, компланарности и перпендикулярности векторов

Вопросы к практическому занятию

1 Запишите формулы деления отрезка в данном отношении.

2 Чему равны координаты середины отрезка?

3 Сформулируйте определение понятия «скалярное произведением двух ненулевых векторов».

4 Сформулируйте свойства скалярного произведения векторов.

5 Запишите формулу для вычисления скалярного произведения векторов в координатной форме.

6 Запишите формулу для вычисления косинуса угла между двумя векторами.

7 Запишите условие ортогональности двух векторов в координатной форме.

8 Какая тройка векторов называется правой, левой?

9 Сформулируйте определение понятия «векторное произведением двух ненулевых векторов».

10 Сформулируйте свойства векторного произведения векторов.

11 В чем заключается геометрический смысл векторного произведения?

12 Запишите формулу для вычисления векторного произведения векторов в координатной форме.

13 Сформулируйте определение понятия «смешанное произведение двух ненулевых векторов».

14 В чем заключается геометрический смысл смешанного произведения?

15 Запишите формулу вычисления смешанного произведения векторов в координатной форме.

16 Сформулируйте свойства смешанного произведения векторов.

17 Запишите условие компланарности трех векторов

Задачи к практическому занятию

1 Найти скалярное произведение векторов $\vec{a}=(3;4;5)$ и $\vec{b}=(7;8;-2)$.

2 Проверить, коллинеарны ли векторы $\vec{a}=(1;2;-8)$ и $\vec{b}=(2;7;-3)$.

3 Проверить, коллинеарны ли векторы $\vec{a}=(1;2;-8)$ и $\vec{b}=(2;4;-16)$.

4 Проверить, ортогональны ли векторы $\vec{a}=(2;5;-8)$ и $\vec{b}=(4;7;3)$.

5 Проверить, ортогональны ли векторы $\vec{a}=(-2;5;-8)$ и $\vec{b}=(3;6;3)$.

6 Найти скалярное произведение $\left(3\vec{a}-2\vec{b}\right)\cdot\left(5\vec{a}-6\vec{b}\right)$, если $\left|\vec{a}\right|=4$, $\left|\vec{b}\right|=6$, $\varphi=\pi/3$.

7 Найти угол между векторами $\vec{a}=(2;-4;4)$ и $\vec{b}=(-3;2;6)$.

8 Дан треугольник с вершинами в точках $A(-3;5;6)$, $B(1;-5;7)$, $C(8;-3;-1)$. Найти внутренний угол при вершине A и внешний угол при вершине C.

9 Найти, при каких значениях x векторы $\vec{a}=(2;x-3;0)$ и $\vec{b}=(1;x;x^2)$ ортогональны.

10 Даны вершины четырехугольника $A(1;2;3)$, $B(7;3;2)$, $C(-3;0;6)$ и $D(9;2;4)$. Являются ли его диагонали AC и BD взаимно перпендикулярными?

11 Вычислить $\vec{a}\cdot\vec{b}$, если $\vec{a}=2\vec{p}-3\vec{q}$, $\vec{b}=4\vec{p}+2\vec{q}$, где $\vec{p}$ и $\vec{q}$ – единичные векторы, угол между которыми равен $\pi/3$.

12 Даны векторы $\vec{a}=(1;-2;2)$ и $\vec{b}=(3;0;-4)$. Найти их векторное произведение, синус угла между ними и площадь параллелограмма, построенного на этих векторах.

13 Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a}=(3;4;-5)$ и $\vec{b}=(7;1;-3)$.

14 Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}+3\vec{b}$ и $3\vec{a}+\vec{b}$, если $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$, $\varphi=\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)=30°$.

15 Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a}=(1;2;-8)$ и $\vec{b}=(7;-1;6)$.

16 Вычислить площадь треугольника с вершинами в точках $A(-1;0;2)$, $B(1;-2;5)$, $C(3;0;-4)$.

17 Проверить, являются ли перпендикулярными векторы $\vec{a}=(1;2;3)$ и $\vec{b}=(8;-1;-2)$.

18 Найти сумму координат векторного произведения $\vec{a}\times\vec{b}$ векторов $\vec{a}=(5;8;2)$ и $\vec{b}=(7;-9;5)$.

19 Найти координаты векторного произведения $\vec{a}\times\vec{b}$ векторов $\vec{a}=(-8;2;-5)$ и $\vec{b}=(3;4;2)$.

20 Зная векторы $\overrightarrow{AB}=(7;-4;-9)$ и $\overrightarrow{BC}=(-7;1;10)$, вычислить длину высоты AD в треугольнике ABC.

21 Твердое тело закреплено в точке $A(2;1;3)$. В точке $B(0;1;3)$ этого тела приложена сила $\overrightarrow{F}=(0;4;3)$. Найти момент сил относительно точки A.

22 Даны две силы $\overrightarrow{F_1}=(4;1;3)$, $\overrightarrow{F_2}=(-2;2;1)$, приложенные в точке $A(6;-6;-3)$. Определить величину и направляющие косинусы момента равнодействующей этих сил относительно:

а) начала координат; б) точки $B(5;-8;-5)$.

23 Найти смешанное произведение трех векторов $\vec{a}=(1;1;2)$, $\vec{b}=(2;1;1)$ и $\vec{c}=(1;-2;3)$. Какую тройку образуют эти векторы?

24 Являются ли векторы $\vec{a}=(1;2;-2)$, $\vec{b}=(1;-2;1)$ и $\vec{c}=(5;-2;-1)$ компланарными?

25 Проверить, лежат ли в одной плоскости точки $A(5,-1,-1)$, $B(4;2;2)$, $C(5;3;1)$, $D(8;0;-5)$.

26 Проверить, лежат ли в одной плоскости точки $A(-5,7,-2)$, $B(3;1;-1)$, $C(9;-4;-4)$, $D(1;5;0)$.

27 Вычислить объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}=(3;4;6)$, $\vec{b}=(4;1;1)$ и $\vec{c}=(2;0;3)$.

28 Найти объем пирамиды с вершинами в точках $A(0,-2,5)$, $B(6;6;0)$, $C(3;-3;6)$, $D(2;-1;3)$.

29 Найти объем пирамиды, построенной на векторах $\vec{a}=(1;5;9)$, $\vec{b}=(3;-6;0)$ и $\vec{c}=(4;-5;7)$.

Домашнее задание

1 Найти скалярное произведение векторов $\vec{a}=(-3;-4;5)$ и $\vec{b}=(3;8;2)$.

2 Проверить, коллинеарны ли векторы $\vec{a}=(1;2;-8)$ и $\vec{b}=(2;7;-3)$.

3 Проверить, коллинеарны ли векторы $\vec{a}=(-4;2;6)$ и $\vec{b}=(2;-1;-3)$.

4 Проверить, ортогональны ли векторы $\vec{a}=(3;5;-9)$ и $\vec{b}=(2;0;4)$.

5 Проверить, ортогональны ли векторы $\vec{a}=(11;-2;3)$ и $\vec{b}=(2;8;-2)$.

6 Найти угол между векторами $\vec{a}=(3;4;5)$ и $\vec{b}=(4;-5;3)$.

7 Найти внутренние углы треугольника с вершинами в точках $A(5;2;-4)$, $B(9;-8;-3)$, $C(16;-6;-11)$.

8 Даны векторы $\vec{a}=(5;-2;6)$ и $\vec{b}=(7;2;-1)$. Найти их векторное произведение, синус угла между ними и площадь параллелограмма, построенного на этих векторах.

9 Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a}=(-3;-4;5)$ и $\vec{b}=(-7;-1;3)$.

10 Вычислить площадь треугольника с вершинами в точках $A(3;4;-1)$, $B(2;-5;6)$, $C(1;2;-9)$.

11 Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a}=(1;2;-8)$ и $\vec{b}=(7;-1;6)$.

12 Заданы векторы $\vec{a}=(3;-1;2)$ и $\vec{b}=(1;2;-1)$. Найти координаты векторов $\vec{a}\times\vec{b}$, $\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)\times\vec{b}$.

13 Сила $\vec{F}=\left(-4;2;4\right)$ приложена к точке $M\left(3;4;-2\right)$. Найти величину и направляющие косинусы момента этой силы относительно начала координат.

14 Три силы $\vec{F_1}=\left(2;4;6\right)$, $\vec{F_2}=\left(1;-2;3\right)$ и $\vec{F_3}=\left(1;1;-7\right)$ приложены к точке $A\left(3;-4;8\right)$. Определите величину и направляющие косинусы момента равнодействующей этих сил относительно точки $B\left(4;-2;6\right)$.

15 Найти смешанное произведение трех векторов $\vec{a}=(7;-1;4)$, $\vec{b}=(-4;5;-6)$ и $\vec{c}=(6;8;-3)$. Какую тройку образуют эти векторы?

16 Являются ли компланарными векторы $\vec{a}=(1;5;4)$, $\vec{b}=(6;-4;4)$ и $\vec{c}=(-10;1;10)$?

17 Проверить, лежат ли в одной плоскости точки $A\left(2,-1,1\right)$, $B\left(-4;2;-2\right)$, $C\left(5;-3;1\right)$, $D\left(-8;0;5\right)$.

18 Проверить, лежат ли в одной плоскости точки $A\left(-5,1,1\right)$, $B\left(-4;2;-2\right)$, $C\left(-5;-3;-1\right)$, $D\left(-8;0;5\right)$.

19 Найти объем пирамиды с вершинами в точках $A\left(0,2,-5\right)$, $B\left(6;-6;0\right)$, $C\left(3;3;-6\right)$, $D\left(-2;1;3\right)$.

20 Найти объем пирамиды, построенной на векторах $\vec{a}=(-1;5;7)$, $\vec{b}=(-3;-6;1)$ и $\vec{c}=(4;5;3)$.

21 Вычислить объём параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}=(-2;1;8)$, $\vec{b}=(0;-8;-6)$ и $\vec{c}=(-1;5;-7)$.

7 Практическое занятие № 8. Комплексные числа. Геометрическое изображение комплексного числа. Алгебраическая запись комплексного числа. Тригонометрическая форма комплексного числа, модуль, аргумент

Вопросы к практическому занятию

1 Сформулируйте определение понятия «комплексное число» в алгебраической форме.

2 Что называют модулем и аргументом комплексных чисел?

3 Какие комплексные числа называются равными?

4 Какие комплексные числа называются комплексно-сопряженными?

5 Запишите формулы для сложения, вычитания, умножения и деления комплексных чисел в алгебраической форме.

6 Определена ли операция сравнения для комплексных чисел (больше, меньше)?

7 Сформулируйте геометрическую интерпретацию комплексных чисел.

8 Запишите тригонометрическую форму комплексных чисел.

9 Каким образом модуль и аргумент комплексных чисел связаны с действительной и мнимой частями комплексных чисел, записанных в алгебраической форме?

10 Укажите связь модулей и аргументов комплексно-сопряженных чисел?

11 Чему равно произведение комплексно-сопряженных чисел?

12 Запишите формулы для умножения и деления комплексных чисел в тригонометрической форме.

Задачи к практическому занятию

1 Данные комплексные числа изобразить векторами на комплексной плоскости и записать в тригонометрической форме:

а) $z = 2 + 2i$; в) $z = -1 + i\sqrt{3}$; д) $z = -5i$;

б) $z = -3 - 2i$; г) $z = -i$; е) $z = -3\left(\cos\frac{\pi}{5} - i\sin\frac{\pi}{5}\right)$.

2 Построить на комплексной плоскости векторы, соответствующие комплексным числам z. Найти $|z|$ и $\arg z$:

а) $z = -5$; в) $z = -1 - i$;

б) $z = 2{,}3i$; г) $z = 3 - i$.

3 Дана точка $z = 2 + 3i$. Построить на этой же плоскости точки:

а) $z = -2 + 3i$; в) $z = -2 - 3i$; д) $z = 2 - 3i$;

б) $z = 2 + 0 \cdot i$; г) $z = 0 + 3i$; е) $z = -2 - 0i$.

4 Представить в алгебраической форме числа:

а) $z = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + \sin\frac{2\pi}{3}\right)$; б) $z = -\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.

5 Найти $\operatorname{Re}(z)$, $\operatorname{Im}(z)$, $|z|$ и $\arg z$ комплексных чисел:

а) $z = 5 + 5i$; б) $z = 2$.

6 Представить в тригонометрической форме комплексные числа:

а) $z = 2 + 4i$; в) $z = \sqrt{3} - i$;

б) $z = 2001$; г) $2\cos\frac{\pi}{3} - 2i\sin\frac{\pi}{3}$.

7 Изобразить на комплексной плоскости множества точек, удовлетворяющих следующим условиям:

а) $|z| = 2$; в) $\arg z = \frac{\pi}{3}$; д) $0 \le \operatorname{Im} z < 1{,}5$; ж) $\operatorname{Re} z > 1$;

б) $|z| > 2$; г) $|\operatorname{Im} z| < 2$; е) $\frac{-\pi}{4} \le \arg z \le 0$; з) $\begin{cases} |z| \le 1, \\ \frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{3\pi}{4}. \end{cases}$

8 Указать на комплексной плоскости множества точек, удовлетворяющих условиям:

а) $1 \le |z| \le 4$, $|\operatorname{Re} z| \ge \sqrt{2}$, $|\operatorname{Im} z| \le 0{,}7$;

б) $\operatorname{Re} z < \operatorname{Im} z$, $|z| > 0{,}2$;

в) $\arg z = (2n+1)\pi,\ n \in Z$.

9 Найти $\sqrt{-15+8i}$.

10 Установить, при каком действительном значении a комплексное число $z = 3i^3 - 2ai^2 + (1-a)i + 5$ будет:

а) действительным; б) чисто мнимым; в) равным нулю.

Домашнее задание

1 Данные комплексные числа изобразить векторами на комплексной плоскости и записать в тригонометрической форме:

а) $z = -i$; в) $z = 1 - i\sqrt{3}$;

б) $z = -5$; г) $z = -4\left(\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}\right)$.

2 Построить на комплексной плоскости векторы, соответствующие комплексным числам z. Найти $|z|$ и $\arg z$:

а) $z = -2$; в) $z = -1 + i$;
б) $z = 3{,}4i$; г) $z = -5 + i$.

3 Дана точка $z = 1 - 2i$. Построить на этой же плоскости точки:

а) $z = -1 + 2i$; в) $z = -1 - 2i$; д) $z = 1 - 2i$;
б) $z = 1 + 0 \cdot i$; г) $z = 0 + 2i$; е) $z = -1 - 0i$.

4 Представить в алгебраической форме числа:

а) $z = 3\left(\cos\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{6}\right)$; б) $z = -\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right)$.

5 Найти $\operatorname{Re}(z)$, $\operatorname{Im}(z)$, $|z|$ и $\arg z$ комплексных чисел:

а) $z = 3 - 3i$; б) $z = 7$.

6 Представить в тригонометрической форме комплексные числа:

а) $z = 3 + 6i$; в) $z = 2 - \sqrt{2}i$;

б) $z = 198$; г) $3\cos\frac{\pi}{4} - 3i\sin\frac{\pi}{4}$.

7 Изобразить на комплексной плоскости множества точек, удовлетворяющих следующим условиям:

а) $|z| = 3$; в) $\arg z = \frac{\pi}{8}$; д) $0 \le \operatorname{Im} z < 2{,}5$; ж) $\operatorname{Re} z > 3$;

б) $|z| > 4$; г) $|\operatorname{Im} z| < 1$; е) $\frac{-\pi}{6} \le \arg z \le 0$; з) $\begin{cases} |z| \le 1, \\ \frac{\pi}{6} < \arg z < \frac{5\pi}{6}. \end{cases}$

8 Указать на комплексной плоскости множества точек, удовлетворяющих условиям:

а) $1 \le |z| \le 3,\ |\operatorname{Re} z| \ge \sqrt{3},\ |\operatorname{Im} z| \le 0{,}8$;

б) $\operatorname{Re} z < \operatorname{Im} z,\ |z| > 0{,}3$;

в) $\arg z = 2n\pi,\ n \in Z$.

9 Установить, при каком действительном значении a комплексное число $z = 3i^3 - 2ai^2 + (1-a)i + 5$ будет:

а) действительным; б) чисто мнимым; в) равным нулю.

10 Представить комплексное число в тригонометрической форме и изобразить его на комплексной плоскости:

а) $z = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; б) $z = \dfrac{1-i}{1+i}$; в) $z = -\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}$.

8 Практическое занятие № 9. Действия над комплексными числами и их свойства. Формула Муавра. Извлечение корня произвольной степени из комплексного числа. Корни из единицы. Формула Эйлера

Вопросы к практическому занятию

1 Запишите формулу Эйлера.

2 Запишите показательную форму комплексных чисел.

3 Запишите формулы для умножения и деления комплексных чисел в показательной форме.

4 Запишите формулу Муавра.

5 Запишите формулу для извлечения корня n-й (натуральной) степени из комплексных чисел (в тригонометрической форме).

6 Сколько значений имеет корень n-й степени из комплексного числа?

Задачи к практическому занятию

1 Даны комплексные числа: $z_1 = 3 + 4i$ и $z_2 = 1 - 2i$. Найти:

а) $z_1 + z_2$; в) $z_1 \cdot z_2$;

б) $z_1 - z_2$; г) $\dfrac{z_1}{z_2}$.

2 Вычислить:

а) $(1-i)\cdot(-3+2i)$; в) $i^2 + i^3 + i^4 + i^5$;

б) $\dfrac{1+2i}{3-i} + (1-i)^2$; г) $i \cdot i^2 \cdot i^3 \cdot \ldots \cdot i^{100}$.

3 Найти $\operatorname{Re} z$ и $\operatorname{Im} z$, если:

а) $z=(2-i)^2\cdot(3+4i)$; б) $z=i^8+\dfrac{5+i}{1-3i}$.

4 Решить уравнения:

а) $z^2+\overline{z}=0$; б) $|z|-3z=-12i$.

5 Вычислить:

а) $\left(\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{9}+i\sin\dfrac{\pi}{9}\right)\right)^{12}$; б) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{i}{\sqrt{2}}\right)^{100}$.

6 Найти:

а) $\left(\dfrac{i^{16}+3}{i^6+3}\right)^5$; б) $(1+i)^{10}$.

7 Проверить справедливость равенств:

а) $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$; б) $\operatorname{Re} z=\dfrac{z+\overline{z}}{2}$.

8 Решить уравнение $z^2+2z+10=0$.

9 Дана система уравнений: $\begin{cases}(2+i)x+(2-i)y=6,\\(3+2i)x+(3-2i)y=8.\end{cases}$

Найти:

а) действительные решения системы;

б) комплексные решения системы.

10 Вычислить $\dfrac{(1+i)^{28}}{(1-i)^{24}-i(1+i)^{24}}$.

11 Вычислить $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$.

12 Решить уравнения:

а) $z^3+27=0$; б) $z^5+32=0$.

13 Найти все значения из корня $\sqrt{-1+i\sqrt{3}}$.

14 Выполнить действия:

а) $\dfrac{8(\cos 40^\circ+i\sin 40^\circ)}{16(\cos(-50^\circ)+i\sin(-50^\circ))}$; б) $\sqrt{2}(1-i)(1+i\sqrt{3})(\cos 2\varphi+i\sin 2\varphi)$.

15 Записать комплексное число $z=-2+2i$ в показательной форме.

16 Данные комплексные числа изобразить векторами на комплексной плоскости и записать в показательной форме:

а) $z=2+2i$; г) $z=-1+i\sqrt{3}$;

б) $z=-5i$; д) $z=-3-2i$.

в) $z=-3\left(\cos\dfrac{\pi}{5}-\sin\dfrac{\pi}{5}\right)$;

17 Представить числа $z_1 = -1 + i$ и $z_2 = \sqrt{3} + i$ в показательной форме и найти $z_1 \cdot z_2$ и $\dfrac{z_1}{z_2}$.

18 Найти все значения корней из комплексного числа:

а) $\sqrt[3]{-1-i}$ в) $\sqrt[3]{1}$; д) $\sqrt{i}$;

б) $\sqrt{-1}$; г) $\sqrt[4]{-1}$; е) $\sqrt{-1+i\sqrt{3}}$.

19 Представить числа $z_1 = -1 + i$ и $z_2 = \sqrt{3} + i$ в тригонометрической форме и найти $z_1 \cdot z_2$ и $\dfrac{z_1}{z_2}$.

20 Найти действительные решения уравнения:

а) $(2+3i)x + (1-4i)y = 3 + 10i$; б) $x + y + ixy = i$.

Домашнее задание

1 Даны комплексные числа: $z_1 = 3 + 4i$ и $z_2 = 1 - 2i$. Найти:

а) $z_1 + z_2$; в) $z_1 \cdot z_2$;

б) $z_1 - z_2$; г) $\dfrac{z_1}{z_2}$.

2 Вычислить:

а) $\dfrac{2+3i}{4-2i} + \dfrac{1-3i}{2i}$; б) $i^4 + i^{14} + i^{24} + i^{34} + i^{44} + i^{54} + i^{64} + i^{74} + i^{84}$.

3 Найти $\operatorname{Re} z$ и $\operatorname{Im} z$, если:

а) $z = (3+i)^2 \cdot (2-i)$; б) $z = i^6 + \dfrac{2-i}{3+i}$.

4 Вычислить:

а) $\left(\sqrt{3}\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)\right)^{10}$; б) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{i}{\sqrt{2}}\right)^{100}$.

5 Найти:

а) $\dfrac{1+i}{\left(\sqrt{3}+i\right)\left(1+i\sqrt{3}\right)}$; б) $(-1+i)^5$.

6 Проверить справедливость равенств:

а) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$; б) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.

7 Решить уравнение $z^2 + 2z + 5 = 0$.

8 Решить уравнения:

а) $z^3 + 1 = 0$; б) $z^4 + 16 = 0$.

9 Найти все значения из корня $\sqrt{-1+i\sqrt{2}}$.

10 Записать комплексное число $z = -2 - 2i$ в показательной форме.

11 Данные комплексные числа изобразить векторами на комплексной плоскости и записать в показательной форме:

а) $z = -i;$; б) $z = -5$; в) $z = 1 - i\sqrt{3}$.

12 Представить числа $z_1 = -1 - i$ и $z_2 = -\sqrt{3} + i$ в показательной форме и найти $z_1 \cdot z_2$ и $\dfrac{z_1}{z_2}$.

13 Найти все значения корней из комплексного числа:

а) $\sqrt[3]{1-i}$; б) $\sqrt{-1-i\sqrt{3}}$.

14 Представить числа $z_1 = -1 - i$ и $z_2 = \sqrt{3} - i$ в тригонометрической форме и найти $z_1 \cdot z_2$ и $\dfrac{z_1}{z_2}$.

15 Найти действительные решения уравнения $(1+i)x + (1-i)y = 3 - i$.

9 Практическое занятие № 10. Многочлены и действия над ними. Делимость многочленов. Наибольший общий делитель. Корни многочленов. Теорема Безу. Формулировка основной теоремы алгебры

Вопросы к практическому занятию

1 Сформулируйте определение понятия «многочлен».

2 Чем определяется степень многочлена?

3 Какие многочлены называют полными, а какие – неполными?

4 Какие многочлены называются тождественно равными?

5 Что называют корнем многочлена?

6 Сформулируйте утверждения о корнях многочленов.

7 Сформулируйте теорему о делимости с остатком.

8 Сформулируйте определение понятий «делитель», «неполное частное», «остаток».

9 Сформулируйте свойства делимости многочленов.

10 В чем заключается суть метода неопределенных коэффициентов?

11 Сформулируйте определение понятия «общий делитель системы многочленов».

12 Сформулируйте определение понятия «наибольший общий делитель системы многочленов».

13 Сформулируйте определение понятия «общее кратное системы многочленов».

14 Сформулируйте определение понятия «наименьшее общее кратное системы многочленов».

15 Сформулируйте определение понятия «значение многочлена в точке».

16 Сформулируйте определение понятий «корень многочлена», «простой

корень», «корень кратности n».

17 Сформулируйте теорему Безу.

18 Сформулируйте следствия из теоремы Безу.

19 Сформулируйте основную теорему алгебры.

Задачи к практическому занятию

1 Найти числа a и b из тождественного равенства:

а) $x^4-3x+2=(x-1)\left(x^3+bx^2+ax-2\right)$;

б) $3x^5-x^4+9x^3-12x^2-27=\left(x^2+3\right)\left(3x^3-x^2+ax+b\right)$.

2 Известно, что многочлен $P_4(x)=x^4+3x^3-6x^2-8x$ делится нацело на многочлен $Q_2(x)=2x^2-4x$. Методом неопределенных коэффициентов найти частное от деления $P(x)$ на $Q(x)$.

3 Методом неопределенных коэффициентов найти частное и остаток от деления многочлена $P(x)$ на многочлен $Q(x)$:

а) $P_3(x)=x^3-19x-30;\ Q_2(x)=x^2+1$;

б) $P_4(x)=5x^4-x^3-x-4;\ Q_2(x)=x^2-4$.

4 Разделить «уголком» многочлен $P(x)$ на многочлен $Q(x)$:

а) $P_3(x)=5x^3-2x^2-2x-1;\ Q_2(x)=x^2+4x+3$;

б) $P_4(x)=-12x^4+4x^3+9x^2-1;\ Q_2(x)=x^2+7$;

в) $P_5(x)=x^5+x^4+x^3+x^2+1;\ Q_2(x)=x^2-x-2$.

5 Расположить по степеням $(x-3)$ многочлен:

а) $P_3(x)=x^3-9x^2+27x-27$;

б) $P_4(x)=x^4-12x^3+54x^2-108x+81$.

6 Заданы многочлены:

$P(x)=(x-1)^2(x+1)^3(x-3)(x-4)$, $Q(x)=\left(x^2-1\right)^4$;

$K(x)=\left(x^3-1\right)\left(x^2-2x+1\right)^2$, $M(x)=2x^3-3x^2+5x+4$;

$P(x)=(x+1)(x-1)^5(x-4)^2(x+2)$.

Найти:

а) НОД каждой пары многочленов;

б) НОД каждой тройки многочленов;

в) НОД всех многочленов;

г) НОК каждой пары многочленов.

7 Найти остаток от деления многочлена $P_4(x)=x^4+x^3+3x^2+2x+2$ на $x-1$.

8 Проверить справедливость утверждения «многочлен $P_{17}(x)=x^{17}-15x^{14}+37x^{10}-16x^{8}-7$ делится на $x-1$».

9 Пользуясь следствиями из теоремы Безу, разделить многочлен $P_5(x)=x^5-32$ на $x-2$.

10 Пользуясь следствиями из теоремы Безу, разделить многочлен $P_5(x)=x^{10}+1$ на x^2+1.

Домашнее задание

1 Найти числа a и b из тождественного равенства:

а) $x^6-x^4+3x^2-60=(x-2)\left(x^5+2x^4+bx^3+6x^2+ax+30\right)$;

б) $\left(x^2-1\right)\left(x^2+ax+b\right)=x^4+x^3-x-1$.

2 Известно, что многочлен $P_4(x)=x^4+6x^3+3x^2-26x-24$ делится нацело на многочлен $Q_2(x)=x^2+4x+3$. Методом неопределенных коэффициентов найти частное от деления $P(x)$ на $Q(x)$.

3 Методом неопределенных коэффициентов найти частное и остаток от деления многочлена $P(x)$ на многочлен $Q(x)$:

а) $P_3(x)=x^3+6x^2+11x+6;\ Q_2(x)=x^2-1$;

б) $P_5(x)=x^5-4x^4-2x^2-x+5;\ Q_2(x)=x^2-9$.

4 Разделить «уголком» многочлен $P(x)$ на многочлен $Q(x)$:

а) $P_3(x)=x^3-9x^2+27x-27;\ Q_2(x)=x^2-2x+4$;

б) $P_4(x)=-20x^4-13x^3+20x^2+7x+6;\ Q_2(x)=x^2+x$;

в) $P_5(x)=x^5-x^3+2x^2+x+1;\ Q_2(x)=x^2+2x+3$.

5 Расположить по степеням $(x+2)$ многочлен:

а) $P_3(x)=2x^3+13x^2+25x+14$;

б) $P_4(x)=3x^4+24x^3+70x^2+87x+38$.

6 Найти НОД и НОК многочленов $P(x)$ и $Q(x)$:

а) $P(x)=x^4+5x^3+4x^2+x+4$, $Q(x)=x^3+3x^2-3x+4$;

б) $P(x)=x^5-2x^4-x^2-3x-1$, $Q(x)=x^4-2x^3-x^2$.

7 Найти остаток от деления многочлена $P_3(x)=x^3-3x^2+5x+7$ на $2x+1$.

8 Пользуясь следствиями из теоремы Безу, разделить многочлен $P_5(x)=x^6-64$ на $x-2$.

9 Пользуясь следствиями из теоремы Безу, разделить многочлен $P_5(x)=x^6-1$ на x^2-1.

10 Практическое занятие № 11. Разложение рациональной дроби на простейшие. Распределение вещественных корней многочлена с вещественными коэффициентами. Определение линейного пространства и простейшие следствия из аксиом. Линейная зависимость и независимость. Базис и координаты. Размерность линейного пространства, связь между размерностью и базисом

Вопросы к практическому занятию

1 Сформулируйте теорему о разложении многочлена на множители.

2 Сформулируйте теорему о разложении многочлена на линейные и квадратичные множители.

3 Какую функцию называют дробно-рациональной (рациональной дробью)?

4 Какую дробь называют правильной, а какую неправильной?

5 В каком виде можно представить неправильную рациональную дробь?

6 Запишите простейшие правильные рациональные дроби.

7 Сформулируйте теорему о разложении правильной рациональной дроби, знаменатель которой представлен в виде произведения линейных и квадратичных множителей, на сумму простейших.

8 Назовите методы и приемы нахождения неопределенных коэффициентов при разложении рациональной дроби на простейшие.

9 Сформулируйте теорему Маклорена.

10 Сформулируйте теорему Штурма.

11 Дайте определение линейного пространства.

12 Охарактеризуйте линейную зависимость и независимость и линейном пространстве.

13 Дайте определение базиса и координат в некотором линейном пространстве.

14 Дайте определение размерности линейного пространства.

15 Охарактеризуйте связь между размерностью и базисом.

Задачи к практическому занятию

1 Представить дробь в виде суммы простейших дробей и найти коэффициенты разложения:

а) $\dfrac{x^2}{x^3-6x^2+11x-6}$; в) $\dfrac{x^4+1}{x^5+x^4-x^3-x^2}$; д) $\dfrac{1}{x^4+5x^2+4}$.

б) $\dfrac{x}{(x+2)(x^2+3)}$; г) $\dfrac{2x-1}{(x-1)(x^2-2x-3)}$;

2 Найти коэффициенты многочлена третьей степени со старшим коэффициентом единицей, имеющего:

а) корни 1, 2, 3; б) корень 1 кратности 2 и корень 3.

3 Известно, что уравнение $ax^3+bx^2+cx+6=0$, $a \in Z$, имеет три различных целых отрицательных корня. Найдите a.

4 Каким должно быть число a, что система векторов $(0,1,a)$, $(a,0,1)$, $(a,1,a)$ была базисом в T_3?

5 Рассмотрим множество всех векторов из T_n, каждая компонента которых равна 0 или 1. Сколько различных базисов пространства T_n содержится в этом множестве.

Домашнее задание

1 Представить дробь в виде суммы простейших дробей и найти коэффициенты разложения:

а) $\dfrac{1}{(x-1)(x+1)(x+3)}$;

б) $\dfrac{x}{(x-1)(x-3)^2}$;

в) $\dfrac{2x}{(x-1)(x^2+4)}$;

г) $\dfrac{2x+1}{x\left(x^2+5x-6\right)}$;

д) $\dfrac{x}{(x-1)(x+3)^2}$.

2 Известно, что уравнение $x^3+\left(a^2-1\right)x^2-7ax+3(a+1)=0$ имеет три вещественных корня, сумма которых равна нулю. Найдите a.

3 Доказать, что совокупность симметричных вещественных матриц порядка n образует линейное пространство, если за операции взять сложение и умножение матрицы на действительное число. Найти базис и размерность этого пространства.

4 Найти какой-нибудь базис и размерность линейного пространства, состоящего из всех векторов пространства T_n, компоненты которых удовлетворяют уравнению $x_1+x_2+\ldots+x_n=0$.

11 Практическое занятие № 12. R^n как пример аффинного, евклидова и метрического пространств. Подпространства. Сумма и пересечение подпространств, прямая сумма. Линейная оболочка системы элементов линейного пространства. Размерность линейной оболочки строк или столбцов матрицы. Преобразования базиса и координат, матрица перехода от одного базиса к другому

Вопросы к практическому занятию

1 R^n как пример аффинного, евклидова и метрического пространств.

2 Дайте определение подпространства.

3 Как находятся сумма и пересечение подпространств, прямая сумма?

4 Линейная оболочка системы элементов линейного пространства.

5 Как найти размерность линейной оболочки строк или столбцов матрицы?

6 Преобразования базиса и координат, матрица перехода от одного базиса к другому.

Задачи к практическому занятию

1 Найти базис суммы и пересечения подпространств, натянутых на системы векторов $a_1 = (2,1,0)$, $a_2 = (1,2,3)$, $a_3 = (-5,-2,1)$ и $b_1 = (1,1,2)$, $b_2 = (-1,3,0)$, $b_3 = (2,0,3)$.

2 Для подпространства L_1, натянутого на векторы $a_1 = (2,3,0,1)$, $a_2 = (4,3,2,1)$, $a_3 = (8,9,2,3)$, найти дополнительное подпространство.

3 В пространстве V_3 радиус-векторов с общим началом в точке O заданы подпространства L_0, L_1 и L_2 – три множества радиус-векторов, принадлежащих пересекающимся в точке O прямым l_0, l_1 и l_2 соответственно; $П_1$ и $П_2$ – два множества радиус-векторов, принадлежащих пересекающимся плоскостям π_1 и π_2 соответственно; прямая l_1 принадлежит плоскости π_1, прямая l_2 принадлежит плоскости π_2, плоскости пересекаются по прямой l_0 (рисунок 1). Найти суммы и пересечения каждых двух из указанных пяти подпространств.

4 В задаче 3 найдены алгебраические суммы подпространств. Какие суммы являются прямыми?

5 Проверить, является ли линейным действительным пространством множество всех векторов плоскости, образующих с данным ненулевым вектором a_0 угол φ, $0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$.

6 В множестве положительных действительных чисел определены следующие операции: $x \oplus y = xy$, $\alpha \cdot x = x^{\alpha}$. Показать, что множество относительно указанных операций является действительным линейным пространством.

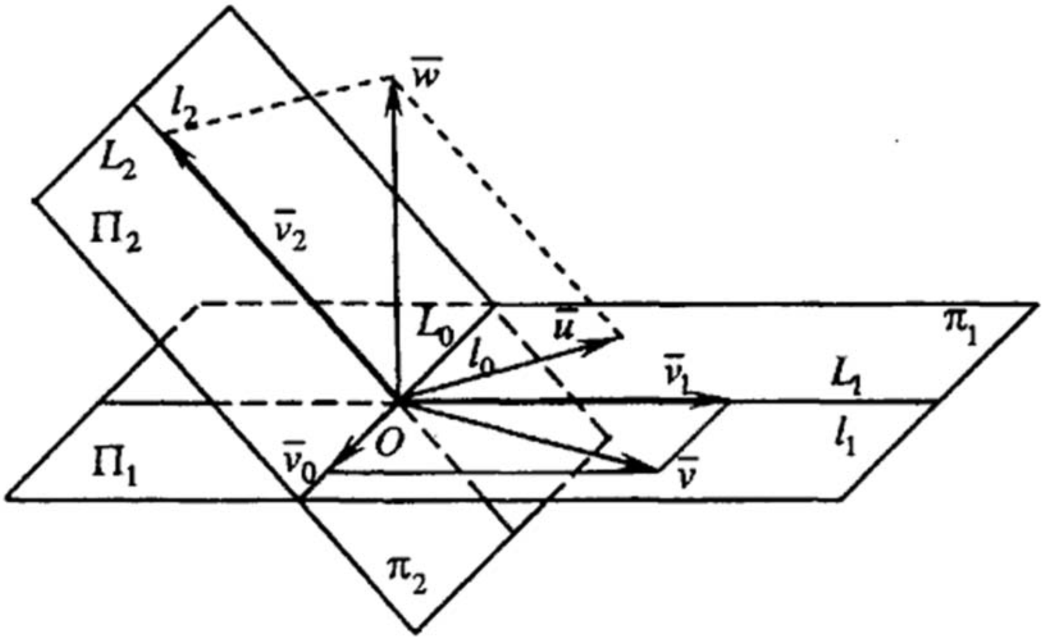


Рисунок 1 – Пересечение плоскостей

7 Является ли линейным пространством над R множество отрицательных действительных чисел?

8 Является ли линейным пространством над R множество векторов плоскости, исходящих из начала координат, с концами на прямой $y = kx$?

9 Является ли линейным пространством над R множество векторов плоскости, исходящих из начала координат, с концами на прямой $y = kx + b$, $b \neq 0$?

Домашнее задание

1 Проверить, является ли следующее множество векторов плоскости действительным линейным пространством:

а) множество R всех векторов плоскости;

б) множество S всех радиус-векторов точек первой четверти прямоугольной декартовой системы координат;

в) множество T всех радиус-векторов точек плоскости, составляющих данную прямую;

г) множество всех векторов плоскости, за исключением векторов, параллельных данной прямой.

2 Доказать, что множество S матриц порядка n с действительными элементами составляет действительное линейное пространство.

3 Является ли множество M_n симметрических матриц порядка n с действительными элементами действительным линейным пространством?

4 Является ли множество $M_{m \times n}$ всех матриц размера с элементами из относительно обычных операций сложения матриц и умножения матриц на число действительным линейным пространством?

5 Является ли множество чисел из отрезка [0; 1] числовой прямой относительно обычных операций сложения и умножения чисел линейным пространством над полем R?

6 Является ли множество векторов плоскости (пространства) с рациональными координатами относительно обычных операций сложения и умножения векторов на число линейным пространством над полем R?

7 Является ли множество монотонно возрастающих на числовой оси функций относительно обычных операций сложения функций и умножения функции на число линейным пространством над полем R?

12 Практическое занятие № 13. Понятие линейного оператора. Образ и ядро линейного оператора. Матрица линейного оператора. Преобразование матрицы линейного оператора при переходе к новому базису. Операции над линейными операторами. Обратный оператор. Изоморфизм линейных пространств. Собственные значения и собственные векторы. Присоединенные векторы. Приведение квадратной матрицы к диагональному виду

Вопросы к практическому занятию

1 Дайте определение линейного оператора.

2 Дайте определение образа и ядра линейного оператора.

3 Охарактеризуйте матрицу линейного оператора.

4 Как осуществляется преобразование матрицы линейного оператора при переходе к новому базису?

5 Операции над линейными операторами.

6 Дайте определение обратного оператора.

7 Какие линейные пространства называются изоморфными?

8 Собственные значения и собственные векторы.

9 Присоединенные векторы.

10 Приведение квадратной матрицы к диагональному виду.

Задачи к практическому занятию

1 В линейном пространстве A_3 задано линейное преобразование φ, при котором $x=\left(x_1,x_2,x_3\right)$: $\varphi x=\left(x_2+x_3, 2x_1+x_3, 3x_1-x_2+x_3\right)$. Доказать, что φ – линейное преобразование. Найти его матрицы в базисах:

а) $e_1=\left(1,0,0\right)$, $e_2=\left(0,1,0\right)$, $e_3=\left(0,0,1\right)$;

б) $a_1=\left(1,1,1\right)$, $a_2=\left(2,1,3\right)$, $a_3=\left(4,1,6\right)$.

2 Векторы $a_1=(2,3,5)$, $a_2=(0,1,2)$, $a_3=(1,0,0)$ линейным преобразованием φ преобразуются соответственно в векторы $b_1=(1,1,1)$, $b_2=(1,1,-1)$, $b_3=(2,1,2)$. Найти матрицу этого оператора в том базисе, в котором указаны координаты всех векторов.

3 Дана матрица $M=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ линейного преобразования в базисе e_1,e_2,e_3. Найти образы векторов e_1, e_2, e_3, $a=2e_1-e_2+3e_3$.

4 Описать образ и ядро линейного преобразования дифференцирования пространства многочленов степени меньше или равно n.

5 Найти собственные значения и собственные векторы линейных преобразований, заданных матрицами:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

6 Найти координаты вектора $\overline{x}=-i+2\overline{j}+\overline{k}$ в базисе ξ', состоящем из векторов $\overline{\ell_1'}=\overline{i}+\overline{j}$, $\overline{\ell_2'}=\overline{j}+\overline{k}$, $\overline{\ell_3'}=\overline{i}+\overline{k}$.

Домашнее задание

1 Показать, что умножение квадратных матриц второго порядка на матрицу $M=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ справа есть линейное преобразование. Найти его матрицу в базисе $E_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_3=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_4=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2 Пусть $\varphi : L \to L$, $\dim L = 2$ – линейное преобразование, имеющее в базисе $g_1=(1,2)$, $g_2=(2,3)$ матрицу $M=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$, а линейное преобразование $\eta : L \to L$ в базисе $u_1=(3,1)$, $u_2=(4,2)$ задается матрицей $N=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Найти матрицы линейных преобразований $\varphi+\eta$, $\varphi\cdot\eta$, в базисе g_1, g_2.

3 Дана матрица $M=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ линейного преобразования в базисе e_1, e_2, e_3. Найти образы векторов e_1, e_2, e_3, $a=4e_1-3e_2+e_3$.

4 В линейном пространстве A_3 задано линейное преобразование φ, при котором $x=(x_1,x_2,x_3)$ в вектор $\varphi x=(x_1-x_2+x_3, x_1-x_2+x_3, x_1-x_2+x_3)$. Найти базисы и размерности образа и ядра этого линейного преобразования.

5 Найти собственные значения и собственные векторы линейных преобразований, заданных матрицами:

а) $\begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 5 & 9 & 7 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

13 Практическое занятие № 14. Билинейная форма и ее матрица. Изменение матрицы билинейной формы при изменении базиса. Симметричные билинейные формы

Вопросы к практическому занятию

1 Дайте определение билинейной формы и ее матрицы.
2 Изменение матрицы билинейной формы при изменении базиса.
3 Симметричные билинейные формы.

Задачи к практическому занятию

1 Найти матрицу билинейной формы:

а) $x_1y_1-2x_1y_2+5x_1y_3-3x_2y_1+4x_2y_2-6x_2y_3-9x_3y_1+8x_3y_3-7x_3y_3$;

б) $2x_1y_1+3x_1y_2-4x_1y_3-x_2y_1+2x_2y_2+6x_2y_3+5x_3y_1+3x_3y_3-8x_3y_3$;

в) $-2x_1y_1+x_1y_2-3x_1y_3+x_2y_1+8x_2y_2+x_2y_3+x_3y_1-4x_3y_3+7x_3y_3$;

г) $6x_1y_1+9x_1y_2-7x_1y_3+2x_2y_1-7x_2y_2+6x_2y_3+9x_3y_1-3x_3y_3+4x_3y_3$.

2 По заданной матрице написать билинейную форму:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 5 & -9 \\ 8 & -7 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 8 & 0 & -4 \\ 5 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} -3 & 7 & 1 \\ 0 & 5 & 7 \\ 8 & 0 & -7 \end{pmatrix}$.

3 Построить симметричную билинейную форму:

а) $5x_1y_1+2x_1y_2+5x_1y_3+x_2y_1-4x_2y_2+6x_2y_3+2x_3y_1-4x_3y_3+5x_3y_3$;

б) $8x_1y_1-2x_1y_2+x_1y_1+3x_2y_1-5x_2y_2+2x_2y_3-8x_3y_1+4x_3y_3-3x_3y_3$;

в) $-x_1y_1+x_1y_2-x_1y_1+2x_2y_1+4x_2y_2+6x_2y_3+x_3y_1-2x_3y_3+4x_3y_3$;

г) $3x_1y_1+2x_1y_2-x_1y_1+x_2y_1-2x_2y_2+3x_2y_3+3x_3y_1-3x_3y_3+3x_3y_3$.

4 Найти базис билинейной формы заданной матрицей:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & 8 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -5 & 4 & 2 \\ 8 & 3 & -9 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 7 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

5 Для заданной билинейной формы найти ей квадратичную функцию:

а) $-8x_1y_1 + 2x_1y_2 - 5x_1y_3 + 2x_2y_1 - 3x_2y_2 + 6x_2y_3 + x_3y_1 + 8x_3y_3 + 5x_3y_3$;

б) $3x_1y_1 + x_1y_2 - x_1y_3 - 4x_2y_1 + 2x_2y_2 + 7x_2y_3 - 5x_3y_1 + 8x_3y_3 + 5x_3y_3$;

в) $7x_1y_1 - 9x_1y_2 + 3x_1y_3 - 6x_2y_1 + 2x_2y_2 - x_2y_3 + x_3y_1 + 4x_3y_3 - 4x_3y_3$;

г) $3x_1y_1 - 9x_1y_2 + 5x_1y_3 + 2x_2y_1 + 5x_2y_2 + 3x_2y_3 + x_3y_1 - x_3y_3 + x_3y_3$.

Домашнее задание

1 Найти матрицу билинейной формы:

а) $2x_1y_1 + 2x_1y_2 - 5x_1y_3 + 3x_2y_1 + 9x_2y_2 - x_2y_3 - x_3y_1 + 3x_3y_3 - x_3y_3$;

б) $-3x_1y_1 + 3x_1y_2 - 5x_1y_3 + x_2y_1 - 9x_2y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 + 7x_3y_3 + x_3y_3$.

2 По заданной матрице написать билинейную форму:

а) $\begin{pmatrix} 6 & 5 & 4 \\ 8 & -4 & 0 \\ 2 & 7 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 7 & -5 & 6 \\ -3 & 7 & 8 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} -2 & 5 & 8 \\ 7 & 6 & 1 \\ -8 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

3 Построить симметричную билинейную форму:

а) $x_1y_1 + 5x_1y_2 + x_1y_3 - x_2y_1 + x_2y_2 - x_2y_3 + x_3y_3$;

б) $-2x_1y_2 + 3x_2y_1 + 2x_2y_3 + 4x_3y_3 - 3x_3y_3$.

4 Найти базис билинейной формы заданной матрицей:

а) $\begin{pmatrix} -6 & 5 & 4 \\ 8 & 1 & -2 \\ 7 & 3 & 5 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -2 & 4 & 7 \\ 3 & 4 & -9 \\ 0 & 7 & 4 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} -5 & 5 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \\ -3 & 3 & 7 \end{pmatrix}$.

5 Для заданной билинейной формы найти ей квадратичную функцию:

а) $x_1y_1 - 2x_1y_2 - x_2y_1 + 4x_2y_2$; б) $2x_1y_1 + 3x_1y_2 + 5x_2y_1 + 2x_2y_2$.

14 Практическое занятие № 15. Аксиоматическое определение скалярного произведения. Евклидовы и унитарные пространства, псевдоевклидовы пространства. Понятия длины и угла. Неравенства Коши-Буняковского и треугольника. Существование ортонормированного базиса

Вопросы к практическому занятию

1 Аксиоматическое определение скалярного произведения.
2 Евклидовы и унитарные пространства, псевдоевклидовы пространства.
3 Понятия длины и угла.
4 Дайте определение Неравенства Коши-Буняковского и треугольника.
5 Существование ортонормированного базиса.

Задачи к практическому занятию

1 Даны векторы евклидовых пространств, найти:

а) $x=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $y=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ – элементы пространства R^2 со скалярным произведением $\langle x,y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2$;

б) $x=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $y=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ – элементы пространства R^2 со скалярным произведением $\langle x,y\rangle = x^T\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}y = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2$;

в) $f(x)=\sin x$, $g(x)=\cos x$ – элементы пространства $C[-\pi;\pi]$ со скалярным произведением $\langle f,g\rangle = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$;

г) $p(x)=x^2+2x+1$, $g(x)=x+2$ – элементы пространства P_2 со скалярным произведением $\langle p,g\rangle = a_2b_2 + a_1b_1 + a_0b_0$;

д) $p(x)=x^2+2x+1$, $g(x)=x+2$ – элементы пространства P_2 со скалярным произведением $\langle p,g\rangle = p(1)\cdot q(1) + p(2)\cdot q(2) + p(3)\cdot q(3)$.

В каждом пространстве найти длины двух данных векторов и угол между ними.

2 Даны векторы евклидовых пространств, найти:

а) $x=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $y=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$, $z=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ – элементы пространства R^2 со скалярным произведением $\langle x,y\rangle = x^T\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}y = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2$;

б) $f_1(x)=1$, $f_2(x)=x^2$, $f_3(x)=x^2$ – элементы пространства $C[-1;1]$ со скалярным произведением $\langle f,g\rangle=\int\limits_{-1}^{1}f(x)g(x)dx$.

Провести ортогонализацию данных векторов.

3 Ортогональное преобразование A: $V \to V$ в базисе e_1, e_2, e_3 имеет матрицу $A=\begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \end{pmatrix}$. Привести это преобразование к каноническому виду, т. е. найти базис s_1, s_2, s_3, в котором матрица преобразования имеет канонический вид.

4 Самосопряженное преобразование A: $E \to E$ в ортонормированном базисе e_1, e_2, e_3 имеет матрицу $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Привести это преобразование к диагональному виду, т. е. найти ортонормированный базис s_1, s_2, s_3, в котором матрица преобразования имеет диагональный вид, и найти эту диагональную матрицу.

5 В пространстве R^4 со стандартным скалярным произведением заданы: вектор $v=(-3,2,0,0)^T$ и подпространство L – множество $\{Ax = 0\}$ решений однородной системы:

$$\begin{cases} x_1+x_2+2x_3+x_4=0; \\ 2x_1+3x_2+x_4=0; \\ 3x_1+4x_2+2x_3+2x_4=0. \end{cases}$$

Требуется найти расстояние $|h|$ от конца вектора v до подпространства L и угол между вектором v и подпространством L.

Домашнее задание

1 Даны векторы евклидовых пространств, найти:

а) $x=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $y=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ – элементы пространства R^2 со скалярным произведением $\langle x,y\rangle=x_1y_1+x_2y_2$;

б) $x=\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $y=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ – элементы пространства R^2 со скалярным произведением $\langle x,y\rangle=x^T\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}y=2x_1y_1+x_1y_2+x_2y_1+x_2y_2$.

В каждом пространстве найти длины двух данных векторов и угол между ними.

2 Даны векторы евклидовых пространств, найти:

а) $x=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $y=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$, $z=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ – элементы пространства R^2 со скалярным произведением $\langle x,y\rangle = x^T\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}y = 2x_1y_1+x_1y_2+x_2y_1+x_2y_2$;

б) провести ортогонализацию данных векторов.

3 Ортогональное преобразование $A{:}V\to V$ в базисе e_1,e_2 имеет матрицу $A=\begin{pmatrix}1/2&-1/2\\1/2&1/2\end{pmatrix}$. Привести это преобразование к каноническому виду, т. е. найти базис s_1,s_2, в котором матрица преобразования имеет канонический вид.

4 Самосопряженное преобразование $A{:}E\to E$ в ортонормированном базисе e_1,e_2 имеет матрицу $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$. Привести это преобразование к диагональному виду, т.е. найти ортонормированный базис s_1,s_2, в котором матрица преобразования имеет диагональный вид, и найти эту диагональную матрицу.

15 Практическое занятие № 16. Приведение квадратичной формы к каноническому виду методом ортогональных преобразований. Одновременное приведение к каноническому виду пары квадратичных форм. Приведение к каноническому виду уравнений линий и поверхностей второго порядка

Вопросы к практическому занятию

1 Приведение квадратичной формы к каноническому виду методом ортогональных преобразований.

2 Одновременное приведение к каноническому виду пары квадратичных форм.

3 Приведение к каноническому виду уравнений линий и поверхностей второго порядка.

Задачи к практическому занятию

1 Найти канонический вид и невырожденную замену переменных, приводящую к каноническому виду, для квадратичной формы:

а) $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3+2x_1x_4-2x_2x_4$; в) $2x_1x_2+2x_1x_3+x_2x_3-x_1x_4+x_2x_4$;

б) $4x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3+x_1x_4-x_2x_4$; г) $x_1x_2+4x_1x_3+8x_2x_3+4x_1x_4-8x_2x_4$.

2 Найти канонический вид и невырожденную замену переменных, приводящую к каноническому виду, для квадратичной формы:

а) $9x_1^2 - 12x_1x_2 - 6x_1x_3 + 4x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$;

б) $x_1^2 - 2x_1x_2 - x_1x_3 + 4x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$;

в) $5x_1^2 - 10x_1x_2 - 5x_1x_3 + 2x_2^2 + 2x_2x_3 + 2x_3^2$;

г) $4x_1^2 - 12x_1x_2 - 6x_1x_3 + 8x_2^2 - 4x_2x_3 + 4x_3^2$.

3 Привести к главным осям квадратичную форму:

а) $2x_1^2 + 6x_2^2 + 6x_3^2 + 4x_4^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 6x_2x_3 + 2x_3x_4$;

б) $x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_4^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 3x_2x_3 + x_3x_4$;

в) $3x_1^2 + 9x_2^2 + 9x_3^2 + 6x_4^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + 6x_3x_4$;

г) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 + 2x_3x_4$.

4 Найти каноническую систему координат, канонические уравнения и определить тип квадрики в зависимости от значения параметра α:

а) $4x^2 + 4y^2 - 2z^2 + 4xy - 8xz + 8yz - 12x - 12y + 24z + \alpha = 0$;

б) $2x^2 + 4y^2 + 2z^2 - 4xy + 8xz - 8yz + 12x + 12y + 24z + \alpha = 0$;

в) $x^2 + y^2 + z^2 - 4xy + 4xz - 4yz + 8x + 8y + 8z + \alpha = 0$;

г) $x^2 - y^2 - z^2 + 8xy - 8xz + 8yz + 6x + 6y + 24z + \alpha = 0$.

5 Выяснить, эквивалентны ли над полем $\boldsymbol{R}$ квадратичные формы:

$f = 2x_1^2 + 9x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 10x_2x_3$;

$g = 2y_1^2 + 3y_2^2 + 6y_3^2 - 4y_1y_2 - 4y_1y_3 + 8y_2y_3$.

Домашнее задание

1 Найти канонический вид и невырожденную замену переменных, приводящую к каноническому виду, для квадратичной формы:

а) $2x_1x_2 + 8x_1x_3 + 8x_2x_3 + 2x_1x_4 - 2x_2x_4$;

б) $x_1x_2 + x_1x_3 + 2x_2x_3 - 2x_1x_4 + 2x_2x_4$;

в) $2x_1x_2 + 4x_1x_3 + x_2x_3 + 2x_1x_4 - x_2x_4$;

г) $4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 8x_2x_3 + 8x_1x_4 - 8x_2x_4$.

2 Найти канонический вид и невырожденную замену переменных, приводящую к каноническому виду, для квадратичной формы:

а) $3x_1^2 - 12x_1x_2 - 6x_1x_3 + 2x_2^2 + 2x_2x_3 + 4x_3^2$;

б) $8x_1^2 + 12x_1x_2 - 8x_1x_3 + 4x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$;

в) $x_1^2 + 10x_1x_2 + 5x_1x_3 + x_2^2 + x_2x_3 - x_3^2$;

г) $x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + x_2^2 - x_2x_3 + x_3^2$.

3 Привести к главным осям квадратичную форму:

а) $-2x_1^2 - 4x_2^2 - 4x_3^2 + 4x_4^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 3x_2x_3 - 2x_3x_4$;

б) $-2x_1^{\ 2}+4x_2^{\ 2}+4x_3^{\ 2}-2x_4^{\ 2}+2x_1x_2-2x_1x_3+x_2x_3+2x_3x_4$.

4 Найти каноническую систему координат, канонические уравнения и определить тип квадрики в зависимости от значения параметра α:

а) $-x^2-y^2+z^2+4xy-8xz+8yz-x-y+z+\alpha=0$;

б) $2x^2+4y^2+2z^2-xy+xz-yz+x+y+z+\alpha=0$.

5 Выяснить, эквивалентны ли над полем $\boldsymbol{R}$ квадратичные формы:

$f=4x_1^{\ 2}+6x_2^{\ 2}+6x_3^{\ 2}+8x_1x_2-8x_1x_3-20x_2x_3$;

$g=y_1^{\ 2}-y_2^{\ 2}+6y_3^{\ 2}+4y_1y_2+4y_1y_3+4y_2y_3$.

16 Практическое занятие № 17. Квадратичные формы и их связь с билинейными. Изменение матрицы квадратичной формы при изменении базиса. Канонический и нормальный виды квадратичной формы. Закон инерции. Знакоопределенные квадратичные формы. Критерий Сильвестра знакоопределенности квадратичных форм

Вопросы к практическому занятию

1 Квадратичные формы и их связь с билинейными.
2 Изменение матрицы квадратичной формы при изменении базиса.
3 Канонический и нормальный виды квадратичной формы.
4 Закон инерции.
5 Знакоопределенные квадратичные формы.
6 Критерий Сильвестра знакоопределенности квадратичных форм.

Задачи к практическому занятию

1 Исследовать квадратичную форму на знакоопределенность:

а) $f(x_1,x_2,x_3)=-2x_1^2-5x_2^2-3x_3^2+4x_1x_2+6x_1x_3$;

б) $f(x_1,x_2,x_3)=-x_1^2-3x_2^2-5x_3^2+8x_1x_2+4x_1x_3$;

в) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+5x_2^2+3x_3^2-6x_1x_2+8x_1x_3$;

г) $f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+10x_2^2+10x_3^2-10x_1x_2-10x_1x_3$.

2 Найти все значения параметра α, при которых квадратичная форма является положительно определенной:

а) $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+5x_3^2+4\alpha x_1x_2+2x_1x_3-2\alpha x_2x_3$;

б) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+6x_2^2+4x_3^2+8\alpha x_1x_2+4x_1x_3+4\alpha x_2x_3$;

в) $f(x_1,x_2,x_3)=4x_1^2+8x_2^2+8x_3^2-16\alpha x_1x_2-4x_1x_3+4\alpha x_2x_3$;

г) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2-4\alpha x_1x_3-x_2x_3$.

3 Найти среди квадратичных форм положительно определённую и найти невырожденную замену переменных, которая приводит положительно определенную форму к нормальному, а другую к каноническому виду:

$$f = x_1^2 + 4x_3^2 + 4x_4^2 - 4x_2x_3 - 4x_3x_4;$$

$$g = x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 - x_2x_3 + 2x_3^2 - 2x_3x_4 + 2x_4^2.$$

4 Исследовать знакоопределенность квадратичной формы в зависимости от значения параметра λ:

а) $f(x_1, x_2) = 2\lambda x_1^2 + (2\lambda + 8)x_1x_2 + (\lambda + 1)x_2^2$;

б) $f(x_1, x_2) = \lambda x_1^2 + (\lambda + 4)x_1x_2 + \lambda x_2^2$;

в) $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 8(\lambda + 1)x_1x_2 + (2\lambda + 1)x_2^2$;

г) $f(x_1, x_2) = 2(\lambda + 2)x_1^2 + 12x_1x_2 + (\lambda + 3)x_2^2$.

5 Доказать, что если квадратичная форма распадается в произведение двух линейных сомножителей, то ее ранг не превосходит 2.

6 Доказать, что в положительно определенной квадратичной форме все коэффициенты при квадратах переменных положительны. Является ли это условие достаточным для положительной определенности формы?

7 Сформулировать необходимое и достаточное условие, при котором квадратичные формы $f(x)$ и $-f(x)$ могут быть приведены к одному и тому же каноническому виду.

8 Доказать, что квадратичная форма является положительно определенной тогда и только тогда, когда все собственные значения ее матрицы положительны, и отрицательно определенной тогда и только тогда, когда все собственные значения ее матрицы отрицательны.

9 Привести квадратичную форму $f(x, y, z) = -x^2 + 2y^2 - z^2 + 4xy - 2xz - 4yz$ к каноническому виду:

а) методом Лагранжа; б) ортогональным преобразованием.

Домашнее задание

1 Исследовать квадратичную форму на знакоопределенность.

а) $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 6x_2^2 + 6x_3^2 - 8x_1x_2 - 6x_1x_3$;

б) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 3x_2^2 - 7x_3^2 + 2x_1x_2 - 8x_1x_3$.

2 Найти все значения параметра α, при которых квадратичная форма является положительно определенной:

а) $f(x_1, x_2, x_3) = -2x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 + 6\alpha x_1x_2 - 4x_1x_3 + 10\alpha x_2x_3$;

б) $f(x_1, x_2, x_3) = 8x_1^2 + 4x_2^2 + 3x_3^2 + 10x_1x_2 + 10\alpha x_1x_3 - 2x_2x_3$.

3 Найти среди квадратичных форм положительно определённую и найти невырожденную замену переменных, которая приводит положительно определенную форму к нормальному, а другую у каноническому виду:

$$f = 2x_1^2 - 8x_3^2 + 6x_4^2 + x_1x_2 + 4x_2x_3 + 4x_3x_4;$$

$$g = 2x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2 - 8x_2x_3 + 6x_3^2 - 6x_3x_4 + x_4^2.$$

4 Исследовать знакоопределенность квадратичной формы в зависимости от значения параметра λ:

а) $f(x_1, x_2) = (\lambda + 2)x_1^2 + (\lambda - 8)x_1x_2 + (\lambda + 4)x_2^2$;

б) $f(x_1, x_2) = \lambda x_1^2 + 16x_1x_2 + (\lambda - 2)x_2^2$.

Список литературы

1 **Бортаковский, А. С.** Линейная алгебра и аналитическая геометрия. Практикум: учебное пособие / А. С. Бортаковский, А. В. Пантелеев. – Москва: ИНФРА-М, 2015. – 352 с.

2 **Смолин, Ю. Н.** Алгебра и теория чисел: учебное пособие / Ю. Н. Смолин. – 5-е изд., стер. – Москва : ФЛИНТА, 2017. – 464 с.

3 Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре: учебное пособие / Под ред. Ю. М. Смирнова. – 2-е изд., перераб. и доп. – Москва: Логос, 2005. – 369 с.

4 **Тыртышников, Е. Е.** Матричный анализ и линейная алгебра / Е. Е. Тыртышников. – Москаа: ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 480 с.

5 **Шевцов, Г. С.** Линейная алгебра: теория и прикладные аспекты: учебное пособие / Г. С. Шевцов. – 3-е изд., испр. и доп. – Москва: Магистр; ИНФРА-М, 2014. – 544 с.