

МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Высшая математика»

ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

*Методические рекомендации к практическим занятиям
для студентов направления подготовки
01.03.04 «Прикладная математика»
очной формы обучения*



Могилев 2021

УДК 517.518.45
ББК 22.161.5
Г20

Рекомендовано к изданию
учебно-методическим отделом
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Высшая математика» «24» декабря 2020 г.,
протокол № 4

Составители: Т. Ю. Орлова;
А. А. Романенко

Рецензент канд. физ.-мат. наук, доц. В. А. Ливинская

Методические рекомендации содержат необходимые теоретические сведения по дисциплине «Гармонический анализ», примеры с решениями и примеры для самостоятельной работы.

Учебно-методическое издание

ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Ответственный за выпуск

В. Г. Замураев

Корректор

Т. А. Рыжикова

Компьютерная верстка

Н. П. Полевничая

Подписано в печать . Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Печать трафаретная. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 56 экз. Заказ № .

Издатель и полиграфическое исполнение:
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования
«Белорусско-Российский университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/156 от 07.03.2019.
Пр-т Мира, 43, 212022, г. Могилев.

© Белорусско-Российский
университет, 2021

Содержание

Практическое занятие № 1. Вычисление скалярных произведений функций и их нормирование. Доказательства ортогональности основных тригонометрических систем функций и их нормировка	4
Практическое занятие № 2. Изучение свойств периодических функций: сумма, разность, связь периодов простой и сложной функций, интеграл по периоду. Простейшие гармонические колебания, различные представления. Амплитуда, фаза, частота. Сложные гармонические колебания	6
Практическое занятие № 3. Доказательства ортогональности нетригонометрических систем функций на примере полиномов Лежандра и Чебышева	8
Практические занятия №4, 5. Разложение $T = 2l$ и $T = 2\pi$ периодических функций в тригонометрические ряды Фурье. Построение амплитудно-частотного спектра периодического сигнала	9
Практическое занятие № 6. Разложения в ряды Фурье четных и нечетных функций периода $T = 2l$. Ряды Фурье на промежутке $[0, l]$. Разложение в ряд Фурье непериодической функции	14
Практическое занятие № 7. Почленное интегрирование и дифференцирование тригонометрических рядов Фурье	21
Практическое занятие № 8. Разложения функций в ряды Фурье в комплексной форме. Построение комплексного амплитудно-частотного спектра периодического сигнала	22
Практическое занятие № 9. Разложение непериодической функции на всей действительной оси в интеграл Фурье в комплексной форме	25
Практическое занятие № 10. Построение спектральных характеристик функций	29
Практическое занятие № 11. Разложение в интеграл Фурье четных и нечетных функций в вещественной форме. Косинус- и синус- преобразования Фурье	30
Практическое занятие № 12. Преобразование Фурье для производной от функции. Связь гладкости функции со скоростью убывания ее Фурье образа и наоборот	34
Практическое занятие № 13. Преобразование Фурье для интеграла функции, смещенной функции и смещение спектральной характеристики функции	35
Практическое занятие № 14. Решение задач по нахождению Фурье-преобразований свертки функций	36
Практическое занятие № 15. Решение волнового уравнения, описывающего колебания струны с помощью ряда Фурье	37
Практическое занятие № 16. Решение линейных неоднородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами	42
Практическое занятие № 17. Дельта-функция $\delta(x)$ и ее свойства. Спектральная плотность дельта-функции, функции знака, единичной функции Хевисайда. Прямоугольный импульс. Примеры преобразований сигналов линейными системами	45
Список литературы	48

Практическое занятие № 1. Вычисление скалярных произведений функций и их нормирование. Доказательства ортогональности основных тригонометрических систем функций и их нормировка

Ортогональные системы функций. Скалярным произведением двух функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ на отрезке $[a, b]$ называется число, равное значению интеграла и обозначаемое $(\varphi(x), \psi(x))$:

$$(\varphi(x), \psi(x)) = \int_a^b \varphi(x) \psi(x) dx.$$

Две функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ называются ортогональными на отрезке $[a, b]$, если их скалярное произведение равно нулю, т. е.

$$(\varphi(x), \psi(x)) = \int_a^b \varphi(x) \psi(x) dx = 0.$$

Так, например, функции $\varphi(x) = x$, $\psi(x) = x^2$ ортогональны на $[-1; 1]$. Действительно, $(\varphi(x), \psi(x)) = \int_{-1}^1 x \cdot x^2 dx = \int_{-1}^1 x^3 dx = \frac{x^4}{4} \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{4}(1^4 - (-1)^4) = \frac{1}{4}(1 - 1) = 0$.

Система функций $\{\varphi_n(x)\} = \{\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), \dots\}$ (конечная или бесконечная) называется ортогональной на отрезке $[a, b]$, если все функции этой системы попарно ортогональны на $[a, b]$, т. е.

$$(\varphi_n(x), \varphi_m(x)) = \int_a^b \varphi_n(x) \varphi_m(x) dx = 0, \quad \text{для любых } n \neq m \quad (n, m \in N).$$

Примеры ортогональных систем функций. Система функций вида

$$\left\{1, \sin \frac{\pi x}{l}, \cos \frac{\pi x}{l}, \sin \frac{2\pi x}{l}, \cos \frac{2\pi x}{l}, \sin \frac{3\pi x}{l}, \cos \frac{3\pi x}{l}, \dots, \sin \frac{n\pi x}{l}, \cos \frac{n\pi x}{l}, \dots\right\} =$$

$$= \left\{1, \sin \frac{n\pi x}{l}, \cos \frac{n\pi x}{l}\right\} \quad (n = \overline{1, \infty}) \quad (1)$$

называется основной тригонометрической системой функций ортогональных на промежутке $[-l, l]$, где l – любое число, $n = 1, 2, \dots$. Докажем их попарную ортогональность.

Для $\left(1, \sin \frac{n\pi x}{l}\right) = \int_{-l}^l 1 \cdot \sin \frac{n\pi x}{l} dx = 0$ для любых $(\forall) n = 0, 1, 2, \dots$ в силу нечетности подынтегральной функции и симметрии пределов интегрирования.

Для $\left(1, \cos \frac{n\pi x}{l}\right)$ при $n = 0$, $\cos \frac{0\pi x}{l} = \cos 0 = 1$ имеем

$$(1,1) = \int_{-l}^l (1 \cdot 1) dx = \int_{-l}^l dx = x \Big|_{-l}^l = (l - (-l)) = 2l.$$

При $n \neq 0$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) скалярное произведение

$$\left(1, \cos \frac{n\pi x}{l}\right) = \int_{-l}^l 1 \cdot \cos \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{l}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{l} \Big|_{-l}^l = \frac{l}{n\pi} \left(\sin \frac{n\pi l}{l} - \sin \frac{n\pi(-l)}{l} \right) = \frac{2l}{n\pi} \sin n\pi = 0.$$

Таким образом, получили $\int_{-l}^l 1 \cdot \cos \frac{n\pi x}{l} dx = \begin{cases} 0, & \text{для } \forall n \neq 0, \\ 2l, & \text{для } n = 0. \end{cases}$

Аналогично $\left(\cos \frac{n\pi x}{l}, \sin \frac{n\pi x}{l}\right) = \int_{-l}^l \cos \frac{n\pi x}{l} dx \cdot \sin \frac{n\pi x}{l} dx = 0$ для $\forall n = 0, 1, 2, \dots$

Далее

$$\int_{-l}^l \cos \frac{n\pi x}{l} \cdot \cos \frac{m\pi x}{l} dx = \frac{1}{2} \int_{-l}^l \left(\cos(n+m) \frac{\pi x}{l} + \cos(n-m) \frac{\pi x}{l} \right) dx = \dots = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ l, & n = m. \end{cases}$$

$$\int_{-l}^l \sin \frac{n\pi x}{l} \cdot \sin \frac{m\pi x}{l} dx = \dots = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ l, & n = m. \end{cases} \quad (\text{получить самостоятельно}).$$

Системы функций вида

$$\left\{1, \cos \frac{\pi x}{l}, \cos \frac{2\pi x}{l}, \cos \frac{3\pi x}{l}, \dots, \cos \frac{n\pi x}{l}, \dots\right\} = \left\{\cos \frac{n\pi x}{l}\right\} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2)$$

и вида

$$\left\{\sin \frac{\pi x}{l}, \sin \frac{2\pi x}{l}, \sin \frac{3\pi x}{l}, \dots, \sin \frac{n\pi x}{l}, \dots\right\} = \left\{\sin \frac{n\pi x}{l}\right\} \quad n = 1, 2, \dots \quad (3)$$

ортогональны на промежутке $[0, l]$, где l – любое число (убедиться самостоятельно).

Задачи для самостоятельной работы

1 Найти скалярные произведения функций $f(x)$ и $g(x)$ на отрезке $[a; b]$:

а) $f(x) = x + 1, g(x) = e^x, a = -1, b = 2;$

б) $f(x) = x^3, g(x) = x^2, a = -3, b = 3;$

в) $f(x) = x^2 + ix, g(x) = x^2 - i, a = -1, b = 4;$

г) $f(x) = \sin 2x, g(x) = \sin 4x, a = 0, b = \pi.$

2 Найти значения λ и μ , при которых функция $f(x) = x^2 + \lambda x + \mu$ будет ортогональна функциям $g(x) = 1$ и $\phi(x) = x$ на отрезке $[-1; 1]$.

3 С помощью интегрирования по частям доказать, что многочлены

$$\frac{d^2}{dx^2}(x^2 - 1)^2 \text{ и } \frac{d^3}{dx^3}(x^2 - 1)^3 \text{ ортогональны на отрезке } [-1; 1].$$

4 При каком λ функция $f(x) = \lambda \cos x$ нормирована на отрезке $[-1; 1]$?

5 Доказать, что системы функций ортогональны на $(0; \pi)$:

а) $\{1, \cos x, \cos 2x, \cos 3x, \dots, \cos nx, \dots\}$;

б) $\{\sin x, \sin 2x, \sin 3x, \dots, \sin nx, \dots\}$.

6 Показать, что система функций $\left\{ \sin \frac{\pi x}{l}, \sin \frac{2\pi x}{l}, \sin \frac{3\pi x}{l}, \dots, \sin \frac{n\pi x}{l}, \dots \right\}$ ортогональна на любом отрезке вида $[a; a+l], a \in \mathbb{R}$.

7 Показать, что система функций

$$\left\{ \frac{1}{2} \cos \frac{2\pi x}{b-a}, \sin \frac{2\pi x}{b-a}, \cos \frac{3\pi x}{b-a}, \dots, \sin \frac{n\pi x}{b-a}, \dots \right\}$$
 ортогональна на отрезке $[a; b]$.

Практическое занятие № 2. Изучение свойств периодических функций: сумма, разность, связь периодов простой и сложной функций, интеграл по периоду. Простейшие гармонические колебания, различные представления. Амплитуда, фаза, частота. Сложные гармонические колебания

Периодические функции и периодические колебания. Периодические процессы (колебания) – это процессы, которые повторяются через определённые промежутки времени (периоды), встречаются в радиотехнике, электронике, связи и т. п. Такие процессы описываются периодическими функциями того же периода.

Если для функции $f(t)$ выполняется равенство $f(t) = f(t \pm T) = f(t \pm 2T) = \dots = f(t \pm nT)$ для любых t ($n \in \mathbb{N}$), то она называется периодической периода T . В качестве примера на рисунке 1 изображен график периодической функции периода $T = 2$.

Приведем необходимые в дальнейшем некоторые свойства периодических функций.

1 Если $f(t)$ интегрируемая и имеет период T , то

$$\int_a^{a+T} f(t) dt = \int_b^{b+T} f(t) dt = \int_0^T f(t) dt,$$

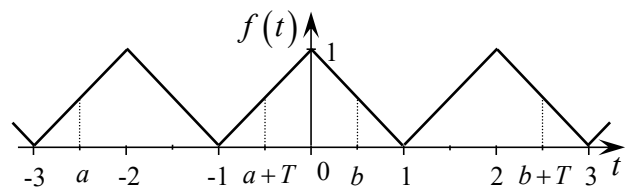


Рисунок 1

где a и b – любые числа.

Данное свойство легко доказывается исходя из геометрического смысла определенного интеграла, равенство соответствующих площадей (см. рисунок 1).

2 Если $f(t) = f(t \pm nT)$, т. е. функция $f(t)$ – периодическая периода T , то функция $f(\alpha t + \beta)$ имеет период T' , который связан с периодом T функ-

ции $f(t)$ соотношением $T' = \frac{T}{\alpha}$, где $\alpha \neq 0$, $\alpha \in R$. Так, например, функция $y = \sin t$ имеет период $T = 2\pi$, а функции $y = \sin 2t$ и $y = \sin 0,5t$ имеют периоды $T' = \pi$ и $T' = 4\pi$ соответственно (рисунок 2).

3 Алгебраическая сумма периодических функций, имеющих период T , есть периодическая функция периода T .

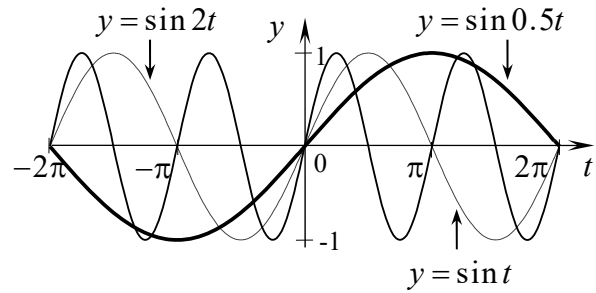


Рисунок 2

Простейшие периодические функции есть тригонометрические функции $\sin t$ и $\cos t$, а колебания, которые они описывают, называют гармоническими или гармоническим процессом. Этот процесс описывается функциями более общего вида:

$$y = A \cos(\omega t + \varphi_0); \quad (4)$$

$$y = A \sin(\omega t + \varphi_0). \quad (5)$$

При этом A называют амплитудой колебаний, $(\omega t + \varphi_0)$ – фазой колебаний, φ_0 – начальной фазой, ω – циклической частотой колебаний, которая связана с частотой колебаний $\nu = \frac{1}{T}$ соотношением $\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$. Период функций (1), (2) есть $T = \frac{2\pi}{\omega}$, поскольку $\sin t$ и $\cos t$ имеют период $T = 2\pi$.

Функции вида (1) и (2) называют простыми гармониками. Используя формулы тригонометрии $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$, $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$, формулы (1) и (2) можно записать иначе, а именно:

$$y = A \cos(\omega t + \varphi_0) = A \cos\omega t \cos\varphi_0 - A \sin\omega t \sin\varphi_0 = a \cos\omega t + b \sin\omega t, \quad (6)$$

где $a = A \cos\varphi_0$, $b = -A \sin\varphi_0$ – числа, при этом $A = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\operatorname{tg} \varphi_0 = -\frac{b}{a}$;

$$y = A \sin(\omega t + \varphi_0) = A \sin\omega t \cos\varphi_0 + A \cos\omega t \sin\varphi_0 = c \sin\omega t + d \cos\omega t, \quad (7)$$

где $c = A \cos\varphi_0$, $d = A \sin\varphi_0$ – числа, при этом $A = \sqrt{c^2 + d^2}$, $\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{d}{c}$.

Таким образом, простое гармоническое колебание описывается функциями вида (1), (3) или (2), (4).

Теоретически доказано и экспериментально подтверждено, что сложное гармоническое колебание представляет собой результат наложения конечного или бесконечного числа простых гармоник вида (4), (6) или (5), (7) разных периодов (частот) и амплитуд.

Задачи для самостоятельной работы

1 Определить периоды и циклические частоты следующих функций:

а) $f(x) = \cos 4x$; б) $f(x) = \cos 0,25x$.

2 Доказать, что $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos x dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos x dx = \int_0^{2\pi} \cos x dx = 0$.

3 Функцию $f(x) = 2 \cos\left(nx + \frac{\pi}{4}\right)$ представить в виде $f(x) = a \cos \omega x + b \sin \omega x$. Определить a и b . Для $n = 2, 3, \dots$ указать T_n и ω_n .

Практическое занятие № 3. Доказательства ортогональности нетригонометрических систем функций на примере полиномов Лежандра и Чебышева

Многочлены $P_k(t)$, где $k = 0, 1, 2, \dots$ – степень многочлена, образуют **ортогональную систему многочленов** на отрезке $[a; b]$ с весом $s(t) \geq 0$, если

$$\int_a^b P_m(t) P_n(t) s(t) dt = N_n \delta_{m,n},$$

где $\delta_{m,n}$ – символ Кронекера.

Полиномы Лежандра определяются следующим образом:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \cdot \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Например,

$$P_0(x) = 1,$$

$$P_1(x) = x,$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1),$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x),$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3).$$

Для полиномов Лежандра характерно рекуррентное соотношение

$$P_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1} x P_n(x) - \frac{n}{n+1} P_{n-1}(x) \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Полиномы Чебышева первого рода определяются следующим образом:

$$T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \arccos x) \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Например,

$$T_0(x) = \cos(0 \cdot \arccos x) = \cos 0 = 1,$$

$$T_1(x) = \cos(1 \cdot \arccos x) = x,$$

$$T_2(x) = \cos(2 \arccos x) = 2x^2 - 1,$$

$$T_3(x) = \cos(3 \arccos x) = 4x^3 - 3x,$$

$$T_4(x) = \cos(4 \arccos x) = 8x^4 - 8x^2 + 1,$$

$$T_5(x) = \cos(5 \arccos x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x.$$

Для полиномов Чебышева характерно рекуррентное соотношение

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Задачи для самостоятельной работы

1 Доказать, что полиномы Лежандра различных порядков ортогональны на отрезке $[-1; 1]$.

2 Показать, что полиномы Чебышева ортогональны на интервале $(-1; 1)$ с весом $s(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, т.е. $\int_{-1}^1 \frac{T_i(x) \cdot T_j(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi}{2^{n-1}} \delta_{ij}$, где $\delta_{ij} = \begin{cases} 0, i \neq j, \\ 1, i = j. \end{cases}$

Практическое занятие № 4, 5. Разложение $T = 2l$ и $T = 2\pi$ периодических функций в тригонометрические ряды Фурье. Построение амплитудно-частотного спектра периодического сигнала

Обобщенные ряды Фурье по ортогональным системам функций. Пусть система функций $\{\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), \dots\} = \{\varphi_n(x)\}$ ортогональная на $[a, b]$ ($n \in N, n = \overline{0, \infty}$) и на $[a, b]$ задана некоторая функция $f(x)$.

Выражение

$$f(x) = c_0 \varphi_0(x) + c_1 \varphi_1(x) + c_2 \varphi_2(x) + \dots + c_n \varphi_n(x) + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x) \quad (8)$$

называется обобщенным рядом Фурье по ортогональной системе функций $\{\varphi_n(x)\}$ ($n \in N, n = \overline{0, \infty}$) на $[a, b]$, где c_n — действительные числа называемые коэффициентами ряда. Тогда возникает вопрос: как найти коэффициенты ряда (8), т.е. c_n ? Ответ. Умножая поочередно левую и правую части (8) на $\varphi_n(x)$

$(n=\overline{0,\infty})$ и интегрируя от a до b с учетом, что система функций $\{\varphi_n(x)\}$ ортогональна на $[a,b]$, получаем значение c_n $(n=\overline{0,\infty})$. Действительно,

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx &= c_0 \int_a^b \varphi_0(x)\varphi_n(x)dx + c_1 \int_a^b \varphi_1(x)\varphi_n(x)dx + \\ &+ c_2 \int_a^b \varphi_2(x)\varphi_n(x)dx + \dots + c_n \int_a^b \varphi_n(x)\varphi_n(x)dx + \dots\end{aligned}$$

С учетом того, что $\int_a^b \varphi_n(x)\varphi_m(x)dx = 0$ $(n \neq m)$, получаем

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx &= c_0 0 + c_1 0 + c_2 0 + \dots + c_n \int_a^b \varphi_n^2(x)dx + \dots + 0 + \dots \\ c_n &= \frac{\int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx}{\int_a^b \varphi_n^2(x)dx}.\end{aligned}\quad (9)$$

Таким образом, получили формулу для вычисления коэффициентов ряда (8).

Тригонометрический ряд Фурье для функции периода $T = 2l$. Изучение периодических процессов и их преобразований устройствами проводят, раскладывая функции, которые их описывают, в тригонометрический ряд Фурье, представляющий собой бесконечную сумму синусов и косинусов (простых гармоник) разных периодов (частот) и амплитуд.

Если в качестве ортогональной системы функций использовать основную тригонометрическую систему функций (1), то ряд (8) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{a_0}{2} + \left(a_1 \cos \frac{\pi x}{l} + b_1 \sin \frac{\pi x}{l}\right) + \left(a_2 \cos \frac{2\pi x}{l} + b_2 \sin \frac{2\pi x}{l}\right) + \dots + \\ &+ \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l}\right) + \dots = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l}\right),\end{aligned}\quad (10)$$

а коэффициенты этого ряда, согласно (9), находятся по формулам

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x)dx; \quad (11)$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n=1,2,\dots; \quad (12)$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n=1,2,\dots \quad (13)$$

Ряд (10), коэффициенты которого определяются по формулам (11) – (13), называется **тригонометрическим рядом Фурье** для функции $f(x)$.

Из (10) видно, что основная гармоника ряда (10) ($n=1$)

$$a_1 \cos \frac{\pi x}{l} + b_1 \sin \frac{\pi x}{l} = a_1 \cos \omega_1 x + b_1 \sin \omega_1 x$$

имеет циклическую частоту $\omega_1 = \frac{\pi}{l}$, которая связана с периодом T_1 выражением

$\omega_1 = \frac{\pi}{l} = \frac{2\pi}{2l} = \frac{2\pi}{T_1}$, где $T_1 = 2l$, и его называют основным периодом, а $\frac{1}{T_1} = \nu_1$ – ос-

новной частотой колебаний. Остальные гармоники, соответственно, имеют периоды, кратные основному периоду: $T'_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = \frac{2\pi}{\frac{n\pi}{l}} = \frac{2l}{n} = \frac{T_1}{n}$.

Первое слагаемое ряда $\frac{a_0}{2}$ является константой, а постоянной функции можно приписать любой период или сказать, что она не имеет периода. Эту константу называют нулевой гармоникой. Очевидно, что сумма ряда (10) будет периодической функцией периода $T = T_1 = 2l$. А поскольку сумма ряда должна быть равна $f(x)$, то можно заключить, что в тригонометрический ряд Фурье раскладываются периодические функции. Тем не менее остаётся вопрос: для каких функций $f(x)$ ряд Фурье будет сходиться к $f(x)$, т. е. для каких функций сумма ряда $S(x)$ будет равна $f(x)$? Ответ дает теорема [1].

Теорема Дирихле. Если функция $f(x)$ и ее производная на промежутке $[-l, l]$ являются непрерывными или имеют конечное число точек разрыва первого рода, то в точках непрерывности сумма ряда $S(x)$ равна $f(x)$, а в точках разрыва первого рода сумма ряда равна среднему арифметическому пределов функции $f(x)$ слева и справа, т. е. $S(x) = \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}$, где $f(x-0) = \lim_{x \rightarrow x-0} f(x)$, а $f(x+0) = \lim_{x \rightarrow x+0} f(x)$.

Амплитудно-частотный спектр периодического сигнала. Совокупность величин $\left\{ \omega_n = \frac{n\pi}{l}, A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \right\}$ ($n=0,1,2,\dots$) называют **амплитудно-частотным спектром периодического сигнала**. Соответствие $\omega_n \rightarrow A_n$ принято изображать графически (рисунок 3). При этом квадрат амплитуды A_n характеризует энергию, переносимую гармоникой с частотой ω_n . Следовательно, амплитудно-частотный спектр содержит информацию об энергии периодического сигнала и показывает, как она распределена по частотам. Спектр периодической функции линейчатый, а частоты равноотстоящие $\Delta\omega = \omega_{n+1} - \omega_n = \frac{\pi}{l}$.

Разложение периодических функций в ряды Фурье, т. е. нахождение коэффициентов ряда и, соответственно, амплитудно-частотного спектра периодического сигнала называют **гармоническим анализом**. Сложение отдельных гармоник и получение результирующего колебания называют **гармоническим синтезом**. Большинство функций, которые встречаются в математике, удовлетворяют условиям теоремы Дирихле, раскладываются в ряд Фурье.

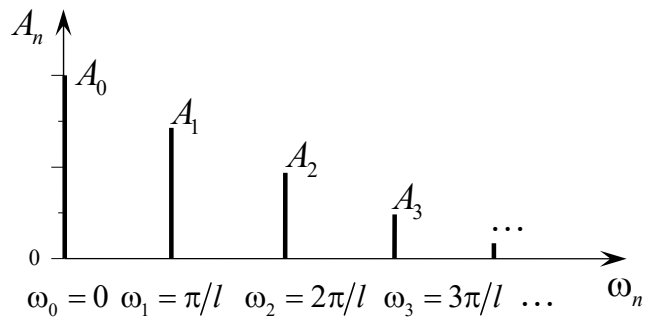


Рисунок 3

Пример 1 – Разложить периодическую функцию $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } -\pi \leq x < 0, \\ x, & \text{при } 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$ в ряд Фурье $T = 2\pi$ ($l = \pi$) (рисунок 4).

Решение

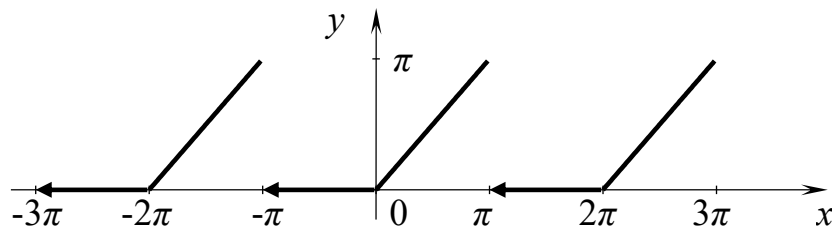


Рисунок 4

Функция удовлетворяет условиям теоремы Дирихле, значит, её можно разложить в ряд Фурье. Она не обладает свойством четности-нечетности, т. е. является функцией общего вида, следовательно, для её разложения следует воспользоваться формулами (10) – (13).

Найдём коэффициенты ряда. Учитывая, что $f(x) = 0$ для $x \in (-\pi, 0)$, получаем

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \, dx = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2\pi} = \frac{\pi}{2};$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx \, dx = \left[\begin{array}{l} u = x, \quad du = dx; \\ dv = \cos nx \, dx, \quad v = \frac{1}{n} \sin nx \end{array} \right] =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\frac{x}{n} \sin nx \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{1}{n} \sin nx \, dx \right) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi}{n} \sin n\pi + \frac{1}{n^2} \cos nx \Big|_0^{\pi} \right) = \frac{1}{\pi n^2} ((-1)^n - 1);$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx \, dx = \left[\begin{array}{l} u = x, \quad du = dx; \\ dv = \sin nx \, dx, \quad v = -\frac{1}{n} \cos nx \end{array} \right] =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(-\frac{x}{n} \cos nx \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{1}{n} \cos nx \, dx \right) = \frac{1}{\pi} \left(-\frac{\pi}{n} \cos n\pi + \frac{1}{n^2} \sin nx \Big|_0^{\pi} \right) = (-1)^{n-1} \frac{1}{n}.$$

Таким образом, ряд Фурье для заданной функции принимает вид:

$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\pi n^2} ((-1)^n - 1) \cos nx + \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin nx \right) \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Ряд сходится к заданной функции при всех $x \neq (2n-1)\pi$. В точках разрыва $x = (2n-1)\pi$ сумма ряда равна $\frac{\pi}{2}$ и равна среднеарифметическому значению пределов функции слева и справа в этих точках. Например, для $x = \pi$ имеем

$$f(\pi) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\pi n^2} ((-1)^n - 1) \cos n\pi + \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin n\pi \right) =$$

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi} \left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{(2k+1)^2} + \dots \right) = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi}{2}.$$

Очевидно, сумма ряда в скобках равна $\frac{\pi^2}{8}$. Графики частичных сумм и ам-

плитудно-частотный спектр построить самостоятельно.

Замечание 1 – Тригонометрические ряды Фурье имеют ряд приложений, в частности, в акустике. Известно, что высота ноты определяется частотой основной гармоники. Однако одна и та же нота, взятая на разных музыкальных инструментах, имеет разный тембр, т. е. «окраску». Это связано с тем, что высшие гармоники на разных инструментах имеют разные амплитуды. Это и придает при сложении гармоник характерные окраски звучания одних и тех же нот на разных инструментах.

Задача для самостоятельной работы

Разложить в ряд Фурье с $T = 2l$ периодическую функцию $f(x)$ и построить амплитудно-частотный спектр периодического сигнала:

- | | |
|---|--|
| 1) $f(x) = \begin{cases} -1, & -l < x < 0, \\ 2, & 0 \leq x \leq l, \end{cases} \quad l = 2;$ | 5) $f(x) = \begin{cases} -1, & -l < x < 0, \\ 0, & 0 \leq x \leq l, \end{cases} \quad l = \pi;$ |
| 2) $f(x) = x - 0,5, \quad -l < x < l, \quad l = 1;$ | 6) $f(x) = - x + 0,5, \quad -l < x < l, \quad l = 1;$ |
| 3) $f(x) = \begin{cases} 0, & -l \leq x < 0, \\ 2, & 0 \leq x < l, \end{cases} \quad l = 2;$ | 7) $f(x) = \begin{cases} -2, & l \leq x < 0, \\ 1, & 0 \leq x < l, \end{cases} \quad l = \pi;$ |
| 4) $f(x) = \begin{cases} 1, & -l \leq x < 0, \\ x, & 0 \leq x < l, \end{cases} \quad l = 1;$ | 8) $f(x) = \begin{cases} 2x, & -l \leq x < 0, \\ -x, & 0 \leq x < l, \end{cases} \quad l = \pi.$ |

Практическое занятие № 6. Разложения в ряды Фурье четных и нечетных функций периода $T = 2l$. Ряды Фурье на промежутке $[0, l]$. Разложение в ряд Фурье непериодической функции

Ряд Фурье для четных и нечетных функций. Отметим некоторые необходимые свойства четных и нечетных функций и интегралов от них в симметричных пределах.

1 Произведение двух четных или двух нечетных функций является четной функцией.

2 Произведение четной и нечетной функций есть нечетная функция.

$$3 \int_{-l}^l f(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{если } f(x) - \text{нечетная,} \\ 2 \int_0^l f(x) dx, & \text{если } f(x) - \text{четная.} \end{cases}$$

То есть интеграл от нечетной функции в симметричных пределах равен нулю, а от четной – удвоенному значению интеграла по полупространству.

Напомним, что график четной функции симметричен относительно оси Oy , нечетной – относительно начала координат. График функции, не обладающей свойством четности-нечетности, не имеет осевой и центральной симметрий.

Если $f(x)$ – **четная** $2l$ периодическая функция удовлетворяет условиям теоремы Дирихле, то ряд Фурье для неё имеет вид:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l}, \quad (14)$$

где $a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx$ ($n=0, 1, 2, \dots$), а $b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx = 0$ в силу симметрии пределов интегрирования и нечетности подынтегральной функции.

Если $f(x)$ – **нечетная** $2l$ периодическая функция удовлетворяет условиям теоремы Дирихле, то ряд Фурье для неё имеет вид:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad (15)$$

где $b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx$ ($n=1, 2, \dots$), а $a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx = 0$ в силу симметрии пределов интегрирования и нечетности подынтегральной функции.

Из изложенного следует, что:

– четные функции раскладываются в ряд Фурье по четным функциям, т. е. по системе (2);

– нечетные – по нечетным функциям, т. е. по системе (3);

– функции, не обладающие свойством четности-нечетности раскладываются по полной тригонометрической системе (1).

Если $f(x)$ задана на интервале $(0, l)$, то для разложения в ряд Фурье ее необходимо продолжить (доопределить) на $(-l, 0)$. Это можно сделать двумя способами, продолжив ее четным (рисунок 5, а) или нечетным (рисунок 5, б) образом (тонкие пунктирные линии), а затем воспользоваться формулами (14) или (15) соответственно.

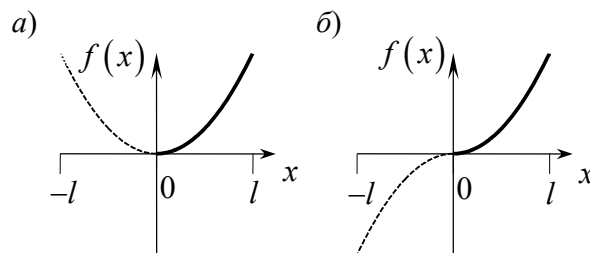


Рисунок 5

Ряд Фурье для непериодических функций. Если функция $f(x)$ непериодическая и задана на (a, b) (рисунок 6), то она также может быть представлена рядом Фурье на (a, b) , где $b - a = 2l$, $l = \frac{(b-a)}{2}$. При этом сумма этого ряда $S(x)$ будет совпадать с $f(x)$ на (a, b) , т. е. $S(x) = f(x)$, вне (a, b) сумма ряда $S(x)$ и исходная функция $f(x)$ – совершенно разные функции, т. е. $S(x) \neq f(x)$, поскольку $S(x)$ есть периодическая функция.

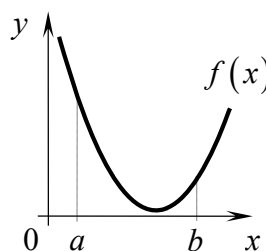


Рисунок 6

Пример 2 – Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = |x|$ на промежутке $-1 < x \leq 1$ и построить амплитудно-частотный спектр периодического сигнала.

Решение

Поскольку $l=1$, то период $T = 2l = 2$.

Ее график $f(x) = |x| = \begin{cases} -x, & x \in (-l, 0] = (-1, 0], \\ x, & x \in (0, l] = (0, 1] \end{cases}$ изображен на рисунке 7.

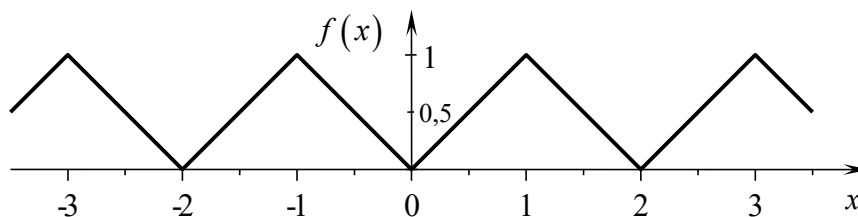


Рисунок 7

Функция удовлетворяет условиям теоремы Дирихле, значит, её можно разложить в ряд Фурье. Кроме того, она является четной, следовательно, для её разложения следует воспользоваться формулой (14), т. е.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l},$$

где $a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx$ ($n=0,1,2,\dots$), $b_n=0$.

Найдём коэффициенты ряда. Для $n=0$ имеем

$$a_0 = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) dx = \frac{2}{1} \int_0^1 x dx = \frac{2}{1} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = 1.$$

Для нахождения a_n ($n=1,2,\dots$) используем формулу интегрирования по частям $\int_a^b u dv = u \cdot v \Big|_a^b - \int_a^b v du$:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{2}{1} \int_0^1 x \cos n\pi x dx = \\ &= \left[\begin{array}{l} u = x, \quad du = dx; \\ dv = \cos n\pi x dx, \quad v = \int \cos n\pi x dx = \frac{1}{n\pi} \sin n\pi x \end{array} \right] = \\ &= 2 \left(\frac{x}{n\pi} \sin n\pi x \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{n\pi} \sin n\pi x dx \right) = 2 \left(\frac{1}{n\pi} \sin n\pi + \frac{1}{n^2 \pi^2} \cos n\pi x \Big|_0^1 \right) = \frac{2}{n^2 \pi^2} ((-1)^n - 1) = \\ &= \begin{cases} 0, & \text{при четном } n=2k, k=1,2,3,\dots, \\ -\frac{4}{n^2 \pi^2}, & \text{при нечетном } n=2k+1, k=0,1,2,3,\dots \end{cases} \end{aligned}$$

Видно, что амплитуды четных гармоник равны нулю.

Таким образом, ряд Фурье для функции $f(x)=|x|$ принимает вид:

$$\begin{aligned} |x| &= \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)\pi x}{(2k+1)^2} = \\ &= \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \cos \pi x - \frac{4}{3^2 \pi^2} \cos 3\pi x - \frac{4}{5^2 \pi^2} \cos 5\pi x - \dots - \frac{4}{(2k+1)^2 \pi^2} \cos(2k+1)\pi x - \dots \quad (16) \end{aligned}$$

На рисунке 8 представлены графики нескольких гармоник: $y_0=0,5$ – нулевая гармоника, $y_1=\frac{4}{\pi^2} \cos \pi x$ – первая гармоника, $y_3=\frac{4}{3^2 \pi^2} \cos 3\pi x$ – третья гармоника, $y_5=\frac{4}{5^2 \pi^2} \cos 5\pi x$ – пятая гармоника.

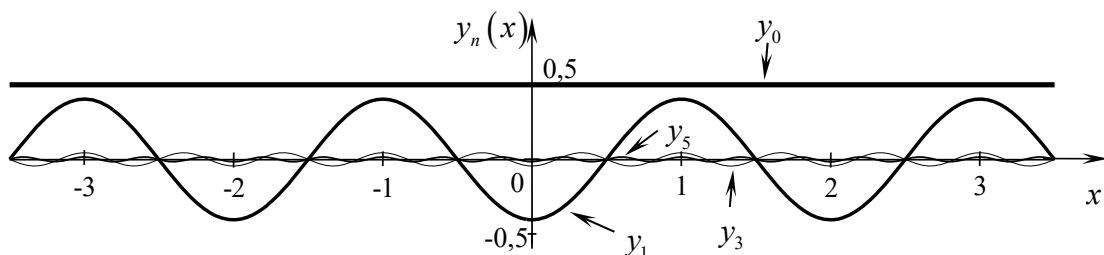


Рисунок 8

Убедимся в сходимости ряда к функции на частных значениях аргумента x . Видно, что при $x = \frac{1}{2}$ из представления (*) имеем $\left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} - 0$, поскольку $\cos(2k+1)\frac{\pi}{2} = 0$ при любом k . Для других значений x требуется компьютер.

Для наглядной демонстрации сходимости построим графики исходной функции и нескольких частичных сумм ряда. На рисунке 9 изображены графики исходной функции $f(x) = |x|$ и частичной суммы ряда $S_2(x) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \cos \pi x$, состоящей

из первых двух гармоник, а на рисунке 10 – графики $f(x) = |x|$ и частичной суммы $S_4(x) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \cos \pi x - \frac{4}{3^2 \pi^2} \cos 3\pi x - \frac{4}{5^2 \pi^2} \cos 5\pi x$.

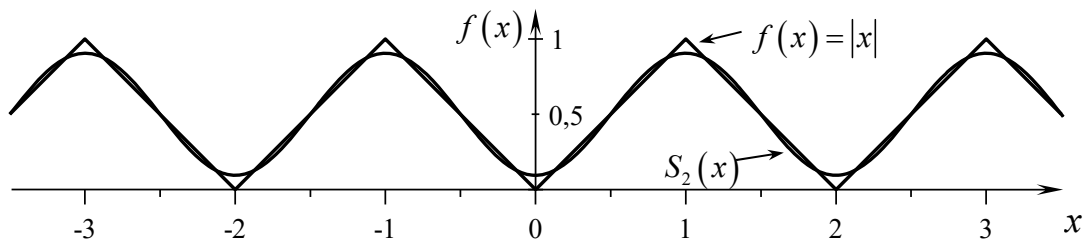


Рисунок 9

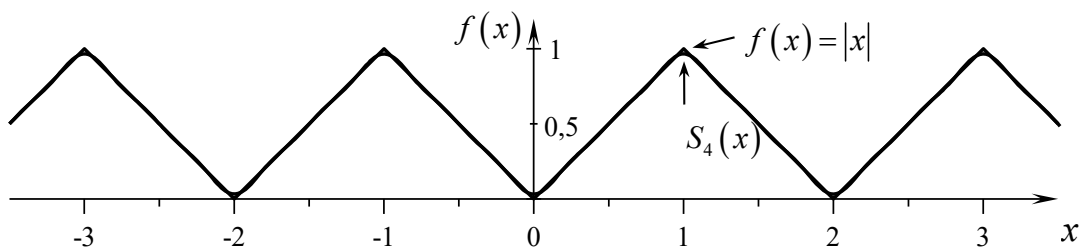


Рисунок 10

Из графиков видно, что частичные суммы $S_n(x)$ ряда Фурье все точнее и точнее представляют функцию $f(x)$ при $n \rightarrow \infty$.

Построим теперь амплитудно-частотный спектр

$$\left\{ \omega_n = \frac{n\pi}{l} = n\pi, A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \sqrt{a_n^2 + 0} = |a_n| \right\} \quad (n = 0, 1, 3, 5, \dots).$$

В данном случае $l = 1$, $b_n = 0$.

Для $n = 0$, $\omega_0 = 0$, $A_0 = |a_0| = 1$ – нулевая гармоника.

В общем случае для нечетных $n = 2k + 1$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) имеем

$$\omega_n = (2k + 1)\pi, A_n = |a_n| = \left| -\frac{4}{(2k + 1)^2 \pi^2} \right| = \frac{4}{\pi^2 (2k + 1)^2}.$$

Последовательно придавая значения $k = 0, 1, 2, 3, \dots$, получаем:

– для $k=0$ $n=1$, $\omega_1 = \pi$ $A_1 = |a_1| = \frac{4}{\pi^2} \approx 0,4$ – первая гармоника;

– для $k=1$ $n=3$, $\omega_3 = 3\pi$ $A_3 = |a_3| = \left| -\frac{4}{9\pi^2} \right| = \frac{4}{9\pi^2} \approx 0,04$ – третья гармоника;

– для $k=2$ $n=5$, $\omega_5 = 5\pi$ $A_5 = |a_5| = \left| -\frac{4}{25\pi^2} \right| = \frac{4}{25\pi^2} \approx 0,016$ – пятая гармоника

и т. д. для более высоких порядков гармоник.

Изобразим спектр наглядно, графически (рисунок 11). Как указывалось ранее, амплитуды четных гармоник равны нулю.

Из графиков частичных сумм и амплитудно-частотного спектра (амплитуды гармоник резко убывают) видно, что тригонометрический ряд сходится к функции очень быстро.

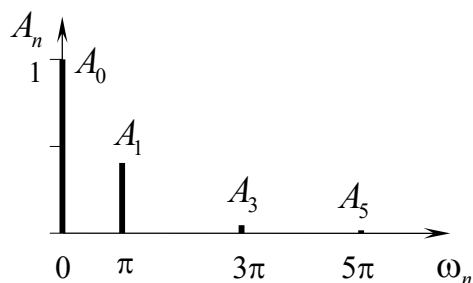


Рисунок 11

Замечание 2 – Ряды Фурье позволяют находить суммы числовых рядов. Так, например, при $x=1$ из представления (16) имеем равенство

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2} \left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{(2k+1)^2} + \dots \right),$$

а в скобках имеем ряд типа Дирихле $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$. Очевидно, что сумма ряда равна $S = \frac{\pi^2}{8}$.

Пример 3 – Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x \leq 0, \\ 1, & 0 < x \leq \pi \end{cases}$ с периодом $T = 2\pi$ ($l = \pi$).

Решение

Изобразим график исходной функции (рисунок 12). Функция удовлетворяет условиям теоремы Дирихле, значит, её можно разложить в ряд Фурье. Кроме того, она является нечетной функцией (график симметричен относительно начала координат), следовательно, для её разложения следует воспользоваться формулой (15), т. е.

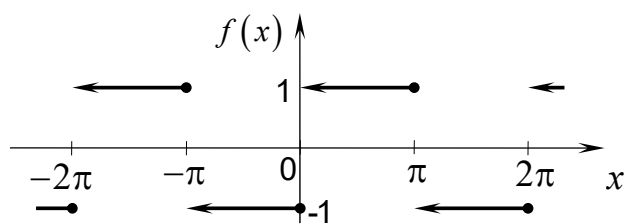


Рисунок 12

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l},$$

где $b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx$ ($n=1,2,\dots$), $a_n = 0$ ($n=0,1,2,\dots$).

Вычислим коэффициенты ряда b_n :

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin nx dx = -\frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{n} \cos nx \Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi n} (1 - (-1)^n) =$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{если } n = 2k, \\ \frac{4}{\pi n}, & \text{если } n = 2k+1, \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

Амплитуды четных гармоник равны нулю. В результате получаем ряд

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)x}{2k+1} = \frac{4}{\pi} \left(\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \dots + \frac{1}{2k+1} \sin(2k+1)x + \dots \right) =$$

$$= \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \dots + \frac{1}{2k+1} \sin(2k+1)x + \dots = \begin{cases} -1, & -\pi < x \leq 0, \\ 1, & 0 < x \leq \pi. \end{cases}$$

Убедимся в сходимости ряда к функции. В частности, проверим положение теоремы Дирихле $S(x) = \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}$ для точек разрыва $x = \pm k\pi$ ($k = 0, 1, 2, \dots$). В этих точках все синусы обращаются в ноль, т. е. $S(\pm k\pi) = 0$, а $\frac{f(\pm k\pi - 0) + f(\pm k\pi + 0)}{2} = \frac{\pi + (-\pi)}{2} = 0$. Для других точек наложим графики частичных сумм ряда на график исходной функции в пределах одного периода.

На рисунке 13 изображены график исходной функции $f(x)$ и графики частичной суммы ряда: частичная сумма $S_5(x)$, состоящая из первых трех нечетных гармоник (а), частичная сумма $S_{21}(x)$, состоящая из первых 10 нечетных гармоник ряда (б).

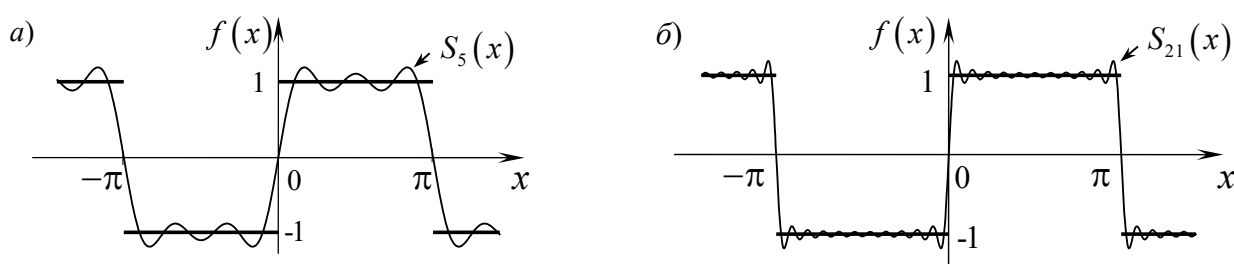


Рисунок 13

Из рисунка 13 видно, что с увеличением n частичные суммы $S_n(x)$ ряда Фурье все точнее представляют функцию $f(x)$.

Замечание 3 – Если функция $f(x)$ имеет точку разрыва 1-го рода, например, в x_0 , то частичные суммы $S_n(x)$ ряда Фурье в окрестности этой точки (слева и справа) имеют выбросы, которые стремятся к вертикальной прямой $x = x_0$. Такое поведение частичных сумм называется **явлением Гиббса**. Скачок превышает на 18 % значение функции в этой точке, и ряд в окрестности этой точки не сходится к функции (см. рисунок 13, б).

Построим амплитудно-частотный спектр. В данном случае $l = \pi$, $a_n = 0$ и для $n = 2k + 1$ имеем

$$\left\{ \omega_n = \frac{n\pi}{l} = n = 2k + 1, A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \sqrt{0 + b_n^2} = |b_n| = \left| \frac{4}{\pi n} \right| = \frac{4}{\pi(2k + 1)} \right\} \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Последовательно придавая значения $k = 0, 1, 2, \dots$, получаем:

– для $k = 0$ $n = 1$, $\omega_1 = 1$ $A_1 = |b_1| = \frac{4}{\pi} \approx 1,28$ – первая гармоника;

– для $k = 1$ $n = 3$, $\omega_3 = 3$ $A_3 = |b_3| = \left| \frac{4}{3\pi} \right| = \frac{4}{3\pi} \approx 0,42$ – третья гармоника;

– для $k = 2$ $n = 5$, $\omega_5 = 5$ $A_5 = |b_5| = \left| \frac{4}{5\pi} \right| = \frac{4}{5\pi} \approx 0,26$ – пятая гармоника

и т. д. для более высоких порядков гармоник.

Изобразим спектр наглядно, графически (рисунок 14). Как указывалось ранее, амплитуды четных гармоник равны нулю. Из графиков частичных сумм и амплитудно-частотного спектра (амплитуды гармоник плавно убывают) видно, что тригонометрический ряд сходится к функции очень медленно.

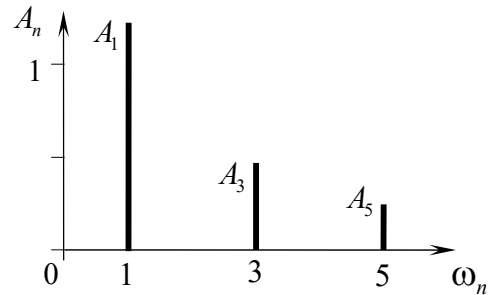


Рисунок 14

Задачи для самостоятельной работы

1 Разложить в ряд Фурье с $T = 2l$ периодическую функцию $f(x)$ и построить амплитудно-частотный спектр периодического сигнала:

а) $f(x) = x$, $-l < x \leq l$, $l = 1$;

б) $f(x) = -|x|$, $-l < x < l$, $l = 1$.

2 Разложить в ряд Фурье по косинусам и по синусам функции, заданные следующим образом на $(0; \pi)$:

а) $f(x) = x \sin x$;

б) $f(x) = x + 1$.

3 Разложить в ряд Фурье по косинусам функции, заданные следующим образом на $[0; l)$:

а) $f(x) = x^2$, $l = 1$;

б) $f(x) = \cos x$, $l = \frac{\pi}{2}$.

4 Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = -x^2 + 8x - 12$, заданную на $[2; 6]$.

Практическое занятие № 7. Почленное интегрирование и дифференцирование тригонометрических рядов Фурье

При решении с помощью рядов Фурье задач математической физики приходится интегрировать или дифференцировать ряд Фурье для функции $f(x)$.

Почленное интегрирование рядов Фурье. Пусть функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на промежутке $[-l, l]$ и разлагается в ряд Фурье, т. е.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right).$$

Тогда имеет место равенство

$$\int_0^x f(x) dx = \frac{a_0 x}{2} + \frac{l}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{n} \sin \frac{n\pi x}{l} + \frac{b_n}{n} \left(1 - \cos \frac{n\pi x}{l} \right) \right).$$

Операция интегрирования рядов Фурье остается справедливой и для рядов содержащих одни лишь косинусы или одни лишь синусы, а также справедлива независимо от того, сходится ли исходный тригонометрический ряд к функции $f(x)$ или нет. Очевидно также, что скорость сходимости проинтегрированного ряда возрастает.

Пример 4 – Проинтегрировать ряд Фурье $\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ ($0 < x < 2\pi$).

Решение

$$\frac{\pi}{2}x - \frac{1}{4}x^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos nx}{n^2}.$$

Таким образом, мы получили разложение функции $\frac{\pi}{2}x - \frac{1}{4}x^2$ в ряд Фурье.

А поскольку известно, что $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, то можем также записать ряд для функции

$$\frac{1}{4}x^2 - \frac{\pi}{2}x + \frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}.$$

Почленное дифференцирование рядов Фурье. Пусть на промежутке $[-l, l]$ задана непрерывная функция $f(x)$ удовлетворяющая условию $f(-l) = f(l)$ и имеет производную $f'(x)$, за исключением, может быть, конечного числа точек. Тогда

$$f'(x) = \frac{\pi}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \left(-na_n \sin \frac{n\pi x}{l} + nb_n \cos \frac{n\pi x}{l} \right).$$

Следует отметить, что появление множителя n в коэффициентах ряда Фурье для производной ухудшит его сходимость, а может привести и к расходимости.

Задачи для самостоятельной работы

1 Найти ряд Фурье для производной функций:

а) $f(x) = x, -l < x \leq l, l = 1;$

б) $f(x) = x^2, l = 1;$

в) $f(x) = \cos x, l = \frac{\pi}{2};$

г) а) $f(x) = x \sin x.$

2 Проинтегрировать ряд Фурье следующих функций:

а) $f(x) = |x|, x \in (-1; 1], l = 1;$

б) $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } -\pi \leq x < 0, \\ x, & \text{при } 0 \leq x \leq \pi, \end{cases} \quad T = 2\pi;$

в) $f(x) = x, x \in (-1; 1], T = 2;$

г) $f(x) = x^2, l = 1.$

Практическое занятие № 8. Разложения функций в ряды Фурье в комплексной форме. Построение комплексного амплитудно-частотного спектра периодического сигнала

Комплексная форма ряда Фурье. Ряд Фурье на промежутке $(-l, l]$ периода $T = 2l$ в действительной форме имеет вид:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right), \quad (17)$$

а коэффициенты ряда находят по формулам

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx; \quad a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx; \quad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx; \quad n = 1, 2, \dots \quad (18)$$

Используя формулы Эйлера

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi; \quad e^{-i\varphi} = \cos \varphi - i \sin \varphi,$$

можем записать

$$\cos \varphi = \frac{1}{2}(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}); \quad \sin \varphi = \frac{1}{2i}(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}). \quad (19)$$

Подставляя (19) в (17) после тождественных преобразований, получаем

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_n e^{i \frac{n\pi x}{l}} + c_{-n} e^{-i \frac{n\pi x}{l}} \right), \quad (20)$$

где

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n); \quad c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n). \quad (21)$$

Найдём теперь явные выражения для c_n и c_{-n} на основании (18) с использованием формул (19). После соответствующих подстановок и тождественных преобразований получаем

$$c_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) dx; \quad c_n = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) e^{-i \frac{n\pi x}{l}} dx; \quad c_{-n} = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) e^{i \frac{n\pi x}{l}} dx \quad n=1,2,\dots \quad (22)$$

В результате ряд (20) можем записать в компактной форме:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_n e^{i \frac{n\pi x}{l}} + c_{-n} e^{-i \frac{n\pi x}{l}} \right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i \frac{n\pi x}{l}}, \quad (23)$$

где

$$c_n = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) e^{-i \frac{n\pi x}{l}} dx, \quad n=0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (24)$$

Правую часть равенства (23) называют комплексной формой ряда Фурье, слагаемые ряда $c_n e^{i \frac{n\pi x}{l}}$ – комплексными гармониками, c_n – комплексными коэффициентами ряда Фурье, т. е. комплексными амплитудами гармоник, а соответствие $\left\{ \omega_n = \frac{n\pi}{l}, |c_n| \right\} \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ – амплитудно-частотным спектром.

В физике частоты $\omega_n = \frac{n\pi}{l}$ часто называют также волновыми числами. График амплитудно-частотного спектра схематически представлен на рисунке 15.

Замечание 4 – Отрицательные частоты $\omega_{-n} = -\frac{n\pi}{l}$

($n=1,2,3,\dots$) не имеют физического смысла. Их появление в комплексной форме ряда Фурье обеспечивает компактную форму записи ряда и существенно уменьшает объем вычислительной работы. При необходимости можно вернуться к действительной форме, при этом $a_n = 2\operatorname{Re} C_n$, $b_n = -2\operatorname{Im} C_n$, $a_0 = 2C_0$, а спектральный состав функции $f(x)$ оказывается в диапазоне $\omega \in [0, \infty)$.

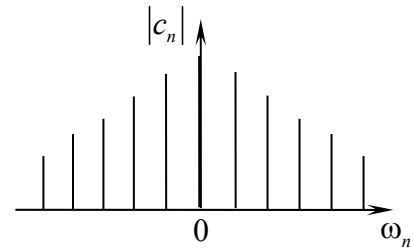


Рисунок 15

Пример 5 – Представить рядом Фурье в комплексной форме периодическую функцию $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-1, 0], \\ 1, & x \in (0, 1], \end{cases}$ где $l=1$, $T=2l=2$ (рисунок 16).

Решение

Найдём комплексные коэффициенты ряда.

Для $n=0$ имеем

$$c_0 = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 1 dx = \frac{1}{2} x \Big|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Для $n \neq 0$ имеем

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) e^{-i \frac{n\pi x}{l}} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 f(x) e^{-in\pi x} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-in\pi x} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{-in\pi} e^{-in\pi x} \Big|_0^1 = \\ &= -\frac{1}{2in\pi} (e^{-in\pi} - e^{-in\pi 0}) = -\frac{1}{2in\pi} (\cos(n\pi) - i \sin(n\pi) - 1) = \frac{i}{2n\pi} ((-1)^n - 1). \end{aligned}$$

В результате ряд Фурье принимает вид:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i \frac{n\pi x}{l}} = \frac{1}{2} + \frac{i}{2\pi} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n} e^{in\pi x} = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{i}{2\pi} \left(\frac{-2}{-1} e^{-i\pi x} + \frac{-2}{1} e^{i\pi x} \right) + \frac{i}{2\pi} (0 + 0) + \frac{i}{2\pi} \left(\frac{-2}{-3} e^{-i3\pi x} + \frac{-2}{3} e^{i3\pi x} \right) + \dots = \\ &= \frac{1}{2} - \frac{2i}{2\pi} \left((e^{i\pi x} - e^{-i\pi x}) + \frac{1}{3} (e^{i3\pi x} - e^{-i3\pi x}) + \dots \right) = \frac{1}{2} - \frac{i}{\pi} \left((e^{i\pi x} - e^{-i\pi x}) + \frac{1}{3} (e^{i3\pi x} - e^{-i3\pi x}) + \dots \right). \end{aligned}$$

Вернемся к действительной форме ряда Фурье. На основании приведенных выше формул или, что равносильно использованию формул Эйлера, после тождественных преобразований получаем действительную форму ряда Фурье

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left(\sin \pi x + \frac{1}{3} \sin 3\pi x + \dots \right) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)} \sin (2k+1)\pi x \quad (k=0, 1, 2, \dots).$$

Получить самостоятельно.

Задача для самостоятельной работы

Записать ряд Фурье в комплексной форме для $T=2l$ периодической функции $f(x)$ и построить амплитудно-частотный спектр:

- 1) $f(x) = x, \quad x \in [-l, l), \quad l = \pi;$
- 2) $f(x) = -x + 1, \quad x \in [-l, l), \quad l = \pi;$

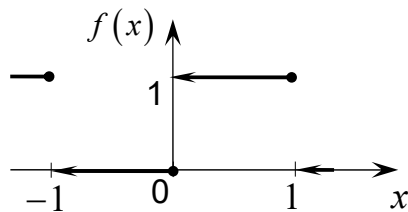


Рисунок 16

- | | |
|--|---|
| 3) $f(x) = -x, \quad x \in [-l, l), \quad l = \pi;$ | 6) $f(x) = -x - 1, \quad x \in [-l, l), \quad l = \pi;$ |
| 4) $f(x) = 2x, \quad x \in [-l, l), \quad l = \pi;$ | 7) $f(x) = -2x, \quad x \in [-l, l), \quad l = \pi;$ |
| 5) $f(x) = x + 1, \quad x \in [-l, l), \quad l = \pi;$ | 8) $f(x) = - x , \quad x \in [-l, l), \quad l = \pi.$ |

Практическое занятие № 9. Разложение непериодической функции на всей действительной оси в интеграл Фурье в комплексной форме

Интеграл Фурье в комплексной форме. Преобразование Фурье. В разделах 1–8 рассмотрена задача представления рядом Фурье $2l$ периодической функции $f(x)$, заданной на отрезке конечной длины $[-l, l]$. В научно-технической деятельности часто возникает необходимость подобных представлений непериодических функций, заданных на всей числовой оси $(-\infty, \infty)$. Подобные представления также возможны. Непериодическую функцию $f(x)$ можно рассмотреть как периодическую с периодом $T = 2l \rightarrow \infty$, т. е. в формулах ряда Фурье необходимо выполнить предельный переход при $l \rightarrow \infty$. Сделаем это. При этом воспользуемся компактной комплексной формой ряда Фурье.

Пусть функция $f(x)$ кусочно-непрерывная на всей числовой оси и абсолютно интегрируемая, т. е. сходится несобственный интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx = M < \infty.$$

На любом отрезке $(-l, l]$ функция $f(x)$ представима рядом Фурье:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i \frac{n\pi}{l} x}, \quad (25)$$

где $c_n = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) e^{-i \frac{n\pi}{l} t} dt$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). При этом формально изменим переменную интегрирования в c_n с x на t . Подставим c_n в (25) и преобразуем:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2l} \left(\int_{-l}^l f(t) e^{-i \frac{n\pi}{l} t} dt \right) e^{i \frac{n\pi}{l} x} = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) e^{i \frac{n\pi}{l} (x-t)} dt = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Delta \omega_n \int_{-l}^l f(t) e^{i \omega_n (x-t)} dt,$$

где $\omega_n = \frac{n\pi}{l}$, $\Delta \omega_n = \omega_{n+1} - \omega_n = \frac{\pi}{l} = \Delta \omega$. При $l \rightarrow \infty$ $\Delta \omega = \frac{\pi}{l} \rightarrow 0$, а сумма в правой части полученной формулы для $f(x)$ является интегральной для функции

$\int_{-l}^l f(t) e^{i \omega_n (x-t)} dt$ по переменной ω . Следовательно, можем записать

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \lim_{\substack{l \rightarrow \infty \\ \Delta\omega \rightarrow 0}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Delta\omega_n \int_{-l}^l f(t) e^{i\omega_n(x-t)} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega(x-t)} dt. \quad (26)$$

Правую часть формулы (26) называют двойным **интегралом Фурье** в комплексной форме функции $f(x)$. Преобразовав правую часть (26) к виду

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \right) e^{i\omega x} d\omega,$$

можем записать соотношения

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt; \quad (27)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega x} d\omega, \quad (28)$$

которые называют преобразованиями Фурье. При этом формулу (27), т. е. функцию $F(\omega)$ называют прямым преобразованием Фурье функции $f(x)$ и обозначают $F[f(x)]$, а формулу (28) – обратным преобразованием Фурье для функции $f(x)$ и обозначают $F^{-1}[f(x)]$.

Функцию $F(\omega)$ также называют Фурье-образом функции $f(x)$ или частотным спектром функции $f(x)$, который является непрерывным.

Функции $e^{i\omega x}$ в (28) являются комплексными гармониками функции $f(x)$, а значения $F(\omega)$ – комплексными амплитудами этих гармоник. Функцию $|F(\omega)|$ называют амплитудно-частотным спектром для $f(x)$, а $\varphi(\omega) = -\arg F(\omega)$ – фазово-частотным спектром функции $f(x)$.

Формулы (27), (28) представляют собой разложение непериодических функций $f(x)$ в непрерывную сумму гармонических составляющих $e^{i\omega x}$ с частотами ω , непрерывно изменяющимися от $-\infty$ до ∞ и комплексными амплитудами $F(\omega)$.

Замечание 5 – В точках x_i разрыва первого рода значение выражения (28)

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega x} d\omega = \frac{f(x_i - 0) + f(x_i + 0)}{2},$$

где $f(x_i \mp 0)$ предельные значения $f(x)$ слева и справа в точках разрыва x_i .

Пример 6 – Представить интегралом Фурье в комплексной форме функцию $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ e^{-\alpha x}, & x \geq 0, \end{cases}$ где $\alpha \in R, \alpha > 0$, и построить график спектральной характеристики функции.

Решение

На рисунке 17 представлен график исходной функции $f(x)$ для двух значений параметра α . Проверим условие представимости функции интегралом Фурье:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx = \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} dx = \frac{e^{-\alpha x}}{-\alpha} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\alpha} < \infty.$$

Интеграл сходится, Фурье-представление имеет место. Найдём его

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} e^{-i\omega x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-(\alpha+i\omega)x} dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{e^{-(\alpha+i\omega)x}}{-(\alpha+i\omega)} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\alpha+i\omega}. \end{aligned}$$

Следовательно, искомое представление имеет вид:

$$e^{-\alpha x} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{i\omega x}}{\alpha+i\omega} d\omega,$$

а амплитудно-частотный спектр, т. е. спектральная характеристика функции или Фурье-образ имеет вид:

$$|F(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \left| \frac{1}{\alpha+i\omega} \right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}}.$$

На рисунке 18 представлен график этой функции для двух значений параметра α .

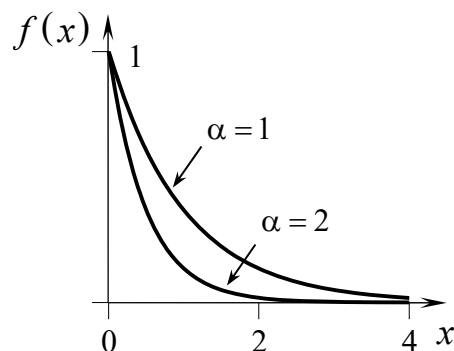


Рисунок 17

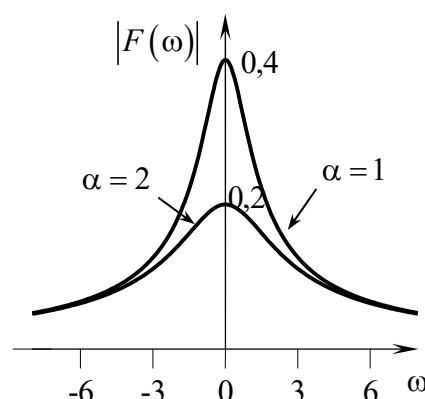


Рисунок 18

Пример 7 – Представить интегралом Фурье в комплексной форме функцию $f(x) = e^{-\alpha x^2}$, где $\alpha > 0, \alpha \in R$, и построить график спектральной характеристики функции.

Решение

На рисунке 19 представлен график исходной функции $f(x)$ для двух значений параметра α . Проверим условие представимости функции интегралом Фурье:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} < \infty \quad (\alpha > 0, \alpha \in \mathbb{R}).$$

Это справочный интеграл [1]. Интеграл сходится, Фурье-представление имеет место. Найдём его:

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2 - i\omega x} dx = \otimes.$$

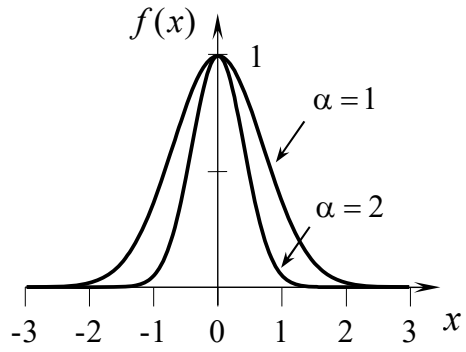


Рисунок 19

Для вычисления интеграла выделим в показателе экспоненты полный квадрат $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$, сделаем замену переменной и воспользуемся справочным интегралом, приведенным выше.

$$\begin{aligned} -\alpha x^2 - i\omega x &= -\alpha \left(x^2 + 2 \frac{i\omega}{2\alpha} x \right) = -\alpha \left(x^2 + 2 \frac{i\omega}{2\alpha} x + \left(\frac{i\omega}{2\alpha} \right)^2 - \left(\frac{i\omega}{2\alpha} \right)^2 \right) = \\ &= -\alpha \left(x^2 + 2 \frac{i\omega}{2\alpha} x + \left(\frac{i\omega}{2\alpha} \right)^2 - \frac{\omega^2}{4\alpha^2} \right) = -\alpha \left(\left(x + \frac{i\omega}{2\alpha} \right)^2 - \frac{\omega^2}{4\alpha^2} \right) = -\alpha \left(x + \frac{i\omega}{2\alpha} \right)^2 + \frac{\omega^2}{4\alpha}. \end{aligned}$$

Продолжаем вычисление интеграла:

$$\begin{aligned} \otimes &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\left(\frac{\omega}{2\alpha}\right)^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha \left(x + \frac{i\omega}{2\alpha}\right)^2} dx = \left| \begin{array}{l} x + \frac{i\omega}{2\alpha} = z \\ dx = dz \end{array} \right| = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\left(\frac{\omega}{2\alpha}\right)^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha z^2} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}}. \end{aligned}$$

Получили $F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}}$. Фурье-образ является действительной четной функцией, её график для двух значений параметра α представлен на рисунке 20, а искомое Фурье-представление для исходной функции $f(x) = e^{-\alpha x^2}$ имеет вид:

$$e^{-\alpha x^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}} e^{i\omega x} d\omega = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\alpha\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha} + i\omega x} d\omega = \frac{1}{\sqrt{\alpha\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}} \cos \omega x d\omega.$$

Из полученного выражения для $F(\omega)$ следует, что исходная функция и ее Фурье-образ описываются одним классом функций. Исходная функция является гауссовой и ее Фурье-образ – гауссова функция. В частности, при $\alpha = \frac{1}{2}$

исходная функция $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ и ее Фурье-образ

$F(\omega) = e^{-\frac{\omega^2}{2}}$ совпадают с точностью до обозначения независимой переменной. Для гауссовой функции (колоколообразный вид) введено понятие ширины. За ширину гауссовой функции принимают промежуток значений аргумента, при котором ее высота понижается в $e \approx 2,72$ раз от максимальной. Так, для $f(x) = e^{-\alpha x^2}$ она равна

$$\Delta x = \frac{2}{\sqrt{\alpha}}, \text{ а для функции } F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}} \text{ равна}$$

$\Delta \omega = 4\sqrt{\alpha}$. Как видно из приведенных формул и рисунков 19, 20, при изменении значения α одна функция становится уже, а другая шире, при этом их ширины связаны соотношением $\Delta \omega \cdot \Delta x = 8 = \text{const}$, которое называют соотношением неопределенностей. Данный вывод справедлив для любых преобразуемых функций (см., например, рисунки 17, 18).

Самостоятельно рассмотреть предельные случаи $\alpha \rightarrow 0$, $\alpha \rightarrow \infty$ и сделать выводы.

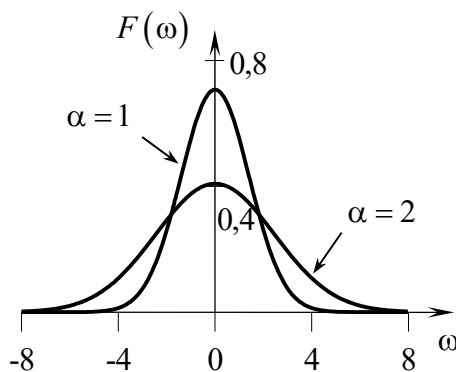


Рисунок 20

Задача для самостоятельной работы

Представить интегралом Фурье в комплексной форме функции:

$$\begin{aligned} \text{а) } f(x) &= \begin{cases} 0, & x > 1, \\ 1, & x \leq 1; \end{cases} & \text{в) } f(x) &= \begin{cases} e^x, & x < 0, \\ 0, & x \geq 0; \end{cases} \\ \text{б) } f(x) &= \begin{cases} e^{ix}, & x \in [0; \pi], \\ 0, & x \notin [0; \pi]; \end{cases} & \text{г) } f(x) &= \begin{cases} \cos \tilde{\sigma}, & |x| \leq \pi, \\ 0, & |x| > \pi. \end{cases} \end{aligned}$$

Практическое занятие № 10. Построение спектральных характеристик функций

Спектральной функцией $S(v_k)$ ряда Фурье или спектральной плотностью называется отношение коэффициента Фурье

$$c_k = c(v_k) = \frac{1}{l} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} f(u) e^{-2\pi i v_k u} du,$$

функции $f(x)$ периода l к приращению частоты $\Delta v_k = \frac{k+1}{l} - \frac{k}{l} = \frac{1}{l}$,

где $v_k = \frac{k}{l}$, $k \in \mathbb{Z}$ т. е.

$$S(v_k) = \frac{c(v_k)}{\Delta v_k} = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} f(u) e^{-2\pi i v_k u} du.$$

Амплитудным спектром $\rho(v_k)$ называется модуль спектральной функции, а **фазовым спектром** $\Phi(v_k)$ – взятый с обратным знаком аргумент спектральной функции, т. е.

$$\rho(v_k) = |S(v_k)| = l |c(v_k)|;$$

$$\Phi(v_k) = -\arg S(v_k).$$

На графиках $\rho(v_k)$ и $\Phi(v_k)$ обычно строят только ординаты ρ и Φ в точках v_k и спектр называют **линейчатым**.

Задача для самостоятельной работы

Найти спектральные характеристики $S(v_k)$, $\rho(v_k)$ и $\Phi(v_k)$ и построить их графики для следующих функций:

$$\begin{aligned} \text{а) } f(t) &= \begin{cases} 0, t \in (-2\alpha; -\alpha), \\ -1, t \in (-\alpha; 0), \\ 1, t \in (0; \alpha), \\ 0, t \in (\alpha; 2\alpha), \end{cases} & f(t+4\alpha) = f(t), \text{ где } \alpha \in R, \alpha > 0; \\ \text{б) } f(t) &= \begin{cases} 2, t \in (0; 1), \\ 0, t \in (1; 3), \end{cases} & f(t+3) = f(t); \quad \text{г) } f(t) = \begin{cases} 1, |t| < a, \\ 0, |t| > a, \end{cases} & a > 0; \\ \text{в) } f(t) &= \begin{cases} 1+t, t \in (-1; 0), \\ 1-t, t \in (0; 1), \\ 0, |t| > 1; \end{cases} & \text{д) } f(t) = \begin{cases} 2, t \in (0; 2), \\ 0, t \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty). \end{cases} \end{aligned}$$

Практическое занятие № 11. Разложение в интеграл Фурье четных и нечетных функций в вещественной форме. Косинус- и синус-преобразования Фурье

Интеграл Фурье в вещественной форме. Используя формулу Эйлера для функции $e^{i\omega(x-t)} = \cos \omega(x-t) + i \sin \omega(x-t)$, (26) можно представить в виде

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega(x-t)} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) (\cos \omega(x-t) + i \sin \omega(x-t)) dt.$$

Если учесть, что внешний интеграл по переменной ω от нечетной части подынтегральной функции $(\sin \omega(x-t))$ в симметричных пределах равен нулю, а от четной $(\cos \omega(x-t))$ – удвоенному значению интеграла по половине этого промежутка, то последнюю формулу можно записать в виде

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega(x-t) dt, \quad (29)$$

её называют двойным интегралом Фурье в действительной форме.

Используя формулу тригонометрии $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$, формулу (29) можно представить в виде

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} [A(\omega) \cos \omega x + B(\omega) \sin \omega x] d\omega, \quad (30)$$

где

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t dt, \quad (31)$$

$$B(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t dt. \quad (32)$$

Эти формулы также называют преобразованиями Фурье или представлением функции $f(x)$ интегралом Фурье в действительной форме. Из них видна аналогия между рядом и интегралом Фурье. В обоих случаях $f(x)$ раскладывается на сумму гармонических составляющих. При этом в ряде Фурье суммирование идет по дискретным значениям n , частоты дискретные $\omega_n = \frac{\pi n}{l}$, а в интеграле Фурье интегрирование идет по непрерывной переменной ω , т. е. частоты непрерывно заполняют всю полуось $\omega \in [0, \infty)$.

Косинус- и синус-преобразования Фурье. Если $f(x)$ – четная, то $B(\omega) = 0$, а Фурье-представление функции принимает вид:

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} A(\omega) \cos \omega x d\omega; \quad (33)$$

$$A(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \cos \omega t dt. \quad (34)$$

А если $f(x)$ – нечетная, то $A(\omega) = 0$, а Фурье-представление функции принимает вид:

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} B(\omega) \sin \omega x d\omega; \quad (35)$$

$$B(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \sin \omega t dt. \quad (36)$$

Формулы (34), (36) называют соответственно прямыми косинус- и синус-преобразованиями Фурье функции $f(x)$, а формулы (33), (35) – обратными косинус- и синус-преобразованиями Фурье.

Замечание 6 – Косинус- и синус-преобразования Фурье можно подвергать и функции, заданные на полуоси $[0, \infty)$, которые не обладают свойством четности и нечетности. Это будет означать, что мы мысленно продолжаем функцию на всю числовую ось четным или нечетным образом (аналогия с тригонометрическими рядами Фурье для функций, заданных на $[0, l]$). При этом Фурье-образы четных функций являются чисто действительными функциями, а нечетных – чисто мнимыми. В связи с этим следует понимать, что в формуле (36) $B(\omega)$ есть $iB(\omega)$. Отметим также, что при нахождении косинус- и синус-преобразований Фурье часто удобно использовать комплексную форму интегралов Фурье (27), (28) (проще находить интегралы), а затем вернуться к действительной. Это продемонстрировано в примере 6.

Пример 8 – Найти прямые и обратные косинус- и синус-преобразования Фурье функции $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < a, \\ 0, & x \geq a, \end{cases} \quad (a > 0, a \in R).$

Решение

Функция задана на полуоси $[0 \leq x < \infty)$. Для разложения в ряд Фурье ее следует доопределить на всю числовую ось $(-\infty < x < \infty)$. При четном продолжении (рисунок 21, а) будем иметь косинус-, а при нечетном (рисунок 21, б) – синус-преобразование Фурье (пунктирные линии).

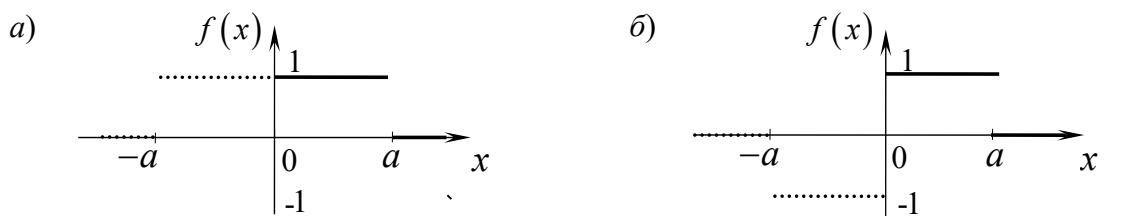


Рисунок 21

Соответствующие интегралы легко находятся в действительной форме. Прямые косинус- и синус-преобразования Фурье имеют вид:

$$A(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \cos \omega t dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a 1 \cdot \cos \omega t dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\sin a\omega}{\omega};$$

$$B(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \sin \omega t dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a 1 \cdot \sin \omega t dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1 - \cos a\omega}{\omega}.$$

Аналогично примерам 5 и 6 строятся графики этих спектральных функций. Обратные косинус- и синус-преобразования Фурье принимают вид:

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} A(\omega) \cos \omega x d\omega = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin a\omega}{\omega} \cos \omega x d\omega = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < a, \\ 0, & x \geq a \end{cases};$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} B(\omega) \sin \omega x d\omega = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1 - \cos a\omega}{\omega} \sin \omega x d\omega = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < a, \\ 0, & x \geq a \end{cases}.$$

Замечание 7 – Преобразования Фурье позволяют находить некоторые неберущиеся интегралы. Так, например, из предпоследней формулы при $x=0$ имеем $\int_0^{\infty} \frac{\sin a\omega}{\omega} d\omega = \frac{\pi}{2}$. Преобразования Фурье применяют при решении дифференциальных и интегральных уравнений, а также при решении ряда прикладных задач, например, распознавании образов, моделировании оптических фильтров, при корректировке изображений и т. д.

Задачи для самостоятельной работы

1 Представить интегралом Фурье функцию $f(x)$ и построить график спектральной характеристики функции:

а) $f(x) = e^{-\alpha|x|}$, $\alpha > 0$.

Ответ: $f(x) = \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos \omega x}{\alpha^2 + \omega^2} d\omega$;

б) $f(x) = x e^{-x^2}$.

Ответ: $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \omega e^{-\frac{\omega^2}{4}} \sin \omega x d\omega$;

в) $f(x) = \begin{cases} e^{ix}, & |x| \leq \pi, \\ 0, & |x| > \pi. \end{cases}$

Ответ: $f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega \pi}{1 - \omega} e^{i\omega x} d\omega$.

2 Найти косинус- и синус-преобразования Фурье функции $f(x)$, соответственно продолжив ее на всю числовую ось четным или нечетным образом:

а) $f(x) = e^{-\alpha x}$, $x \geq 0$ ($\alpha > 0$). Ответ: $A(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$, $B(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\omega}{\alpha^2 + \omega^2}$;

$$\text{б) } f(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 \leq x \leq \pi, \\ 0, & x > \pi. \end{cases} \quad \text{ОТВЕТ: } A(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1 + \cos \omega \pi}{1 - \omega^2}, \quad B(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\sin \omega \pi}{1 - \omega^2};$$

$$\text{в) } f(x) = \begin{cases} \cos x, & 0 \leq x \leq \pi/2, \\ 0, & x > \pi/2. \end{cases} \quad \text{ОТВЕТ: } \begin{cases} A(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\cos \omega \pi/2}{1 - \omega^2}, \\ B(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\omega(1 + \sin \omega \pi/2)}{1 - \omega^2}. \end{cases}$$

3 Найти функцию $g(z)$, если $\int_0^\infty g(z) \sin zx dz = f(x)$, где

$$\text{а) } f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \sin x, & 0 \leq x \leq \pi, \\ 0, & x > \pi; \end{cases} \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \cos x, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0, & x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

4 Доказать равенства:

$$\text{а) } \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{a}{a^2 + x^2} \cos \omega x d\omega = e^{-a|x|}, \quad -\infty \leq x \leq \infty;$$

$$\text{б) } \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin^2 \omega}{\omega^2} \cos 2\omega x d\omega = \begin{cases} 1-x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

Практическое занятие № 12. Преобразование Фурье для производной от функции. Связь гладкости функции со скоростью убывания ее Фурье образа и наоборот

Пусть задана функция $f(x)$, которая представима интегралом Фурье, а $F(\omega) = F[f(x)]$ – ее Фурье-образ, т. е.

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega x} dx = F[f(x)], \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega x} d\omega = F^{-1}[f(x)].$$

Тогда Фурье-образ производной $F[f'(x)]$ равен произведению множителя $i\omega$ на Фурье-образ самой функции, т. е.

$$F[f'(x)] = i\omega F(\omega).$$

Соответственно, если $f(x)$ имеет k -ю производную, то ее Фурье-образ равен

$$F[f^{(k)}(x)] = (i\omega)^k F(\omega),$$

Последнее равенство можно записать в виде

$$F(\omega) = \frac{1}{(i\omega)^k} F[f^{(k)}(x)],$$

которое указывает на связь гладкости функции (существование k -й производной от функции) со скоростью убывания ее Фурье-образа при $\omega \rightarrow \infty$ (соотношение неопределенностей).

Если существует k -я производная от прямого преобразования Фурье $F(\omega)$, т. е. k -я производная от Фурье-образа $F_{\omega}^{(k)}(\omega)$, то

$$F_{\omega}^{(k)}(\omega) = F_{\omega}^{(k)}[f(x)] = (-i)^k F[x^k f(x)],$$

если функции $f(x)$, $xf(x)$, $x^2 f(x)$, ..., $x^k f(x)$ абсолютно интегрируемы на R . Эту формулу называют производной прямого преобразования Фурье.

Доказательства приведенных утверждений тривиальны (ознакомиться самостоятельно).

Задача для самостоятельной работы

Найти Фурье-образы производных следующих функций:

$$\text{а) } f(x) = e^{-\alpha x^2}, \text{ где } \alpha > 0, \alpha \in R; \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ e^{-\alpha x}, & x \geq 0, \end{cases} \text{ где } \alpha \in R, \alpha > 0.$$

Практическое занятие № 13. Преобразование Фурье для интеграла функции, смещенной функции и смещение спектральной характеристики функции

Пусть функция $f(x)$ преобразуема по Фурье и $F(\omega)$ – ее Фурье-образ. Тогда:

– Фурье-образ от интеграла функции $f(x)$ равен

$$F\left[\int_{-\infty}^x f(t)dt\right] = \frac{F(\omega)}{i\omega}, \quad \text{если } \int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 0;$$

– Фурье-образ смещенной функции $f(x-a)$, где $a > 0$, равен

$$F[f(x-a)] = e^{-i\omega a} F(\omega);$$

– для любого $a > 0$ формула смещения спектральной характеристики функции имеет вид:

$$F[e^{-iax} f(x)] = F((\omega - a));$$

– для любого $a > 0$ справедливо равенство

$$F\left[f\left(\frac{x}{a}\right)\right] = aF(ia\omega);$$

– линейность преобразования Фурье

$$F[\alpha f(x) \pm \beta g(x)] = \alpha F[f(x)] \pm \beta F[g(x)].$$

Доказательства приведенных утверждений тривиальны (ознакомиться самостоятельно).

Перечисленные формулы называют свойствами преобразования Фурье, которые, как видно, существенно сократят объем вычислительной работы по нахождению соответствующих Фурье преобразований.

Задача для самостоятельной работы

Найти Фурье-образы функций $F\left[\int_{-\infty}^x f(t)dt\right]$, $F[f(x-a)]$, $F[e^{-iax}f(x)]$, $F\left[f\left(\frac{x}{a}\right)\right]$, если функции $f(x)$ имеют следующий вид:

а) $f(x) = e^{-\beta x^2}$, где $\beta > 0, \beta \in R$;

б) $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ e^{-\beta x}, & x \geq 0, \end{cases}$, где $\beta \in R, \beta > 0$.

Практическое занятие № 14. Решение задач по нахождению Фурье-преобразований свертки функций

Сверткой функций $f(x)$ и $g(x)$ называют функцию, обозначаемую $f(x) * g(x)$ и определяемую равенством

$$f(x) * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot g(x-t) dt.$$

Свертка обладает свойством переместительности:

$$f(x) * g(x) = g(x) * f(x).$$

Задачи для самостоятельной работы

1 Найти следующие свёртки, если $\eta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$ – функция Хевисайда:

а) $\eta(x) * \eta(x)$; в) $\eta(x) * \eta(1+x)$;

б) $x * (x^2 \eta(x))$; г) $(x^2 \eta(x)) * (\eta(x) \sin x)$.

2 Пусть функции f и g непрерывны, ограничены и абсолютно интегрируемы на $\mathbb{R}$. Доказать, что:

а) свёртка функций f и g непрерывна, ограничена и абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}$;

б) $F(f * g) = F(f) \cdot F(g)$.

3 Исходя из свойств преобразования Фурье и того, что $F\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right) = e^{-\frac{\xi^2}{2}}$,

найти преобразование Фурье функции $\varphi_{a,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$. Найти свёртку функций φ_{a_1,σ_1} и φ_{a_2,σ_2} применив к ней прямое и обратное преобразования Фурье.

Практическое занятие № 15. Решение волнового уравнения, описывающего колебания струны с помощью ряда Фурье

Если натянутую струну немного отклонить от состояния равновесия и отпустить или слегка ударить по ней молоточком, то полученная энергия заставит струну совершать колебательные движения. В идеальном случае при отсутствии сопротивления струна будет колебаться бесконечно долго. При наличии сопротивления энергия будет затрачена на преодоление этого сопротивления, колебания будут затухать и через некоторое время прекратятся. Но даже при наличии сопротивления колебания будут совершаться сколь угодно долго, если извне постоянно поступает энергия. В этом случае говорят о вынужденных колебаниях. Под струной мы будем понимать тонкую упругую нить, которая натянута вдоль оси Ox и при воздействии на нее совершает малые поперечные колебания в плоскости Oxy .

Пусть функция $u = u(x, t)$ представляет собой отклонение струны от оси Ox в точке x в момент времени t . Принимая некоторые упрощающие предположения, на основе принципа Д'Аламбера, согласно которому все силы, действующие на определенный участок струны должны уравниваться, можно вывести **уравнение колебаний струны**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + p(x, t),$$

где $a^2 = \frac{N}{\rho}$;

N – натяжение струны;

ρ – линейная плотность массы;

$p(x, t)$ – внешняя сила.

Будем предполагать, что N и ρ являются постоянными, хотя в более общем случае они могут быть и переменными.

Если $p(x, t) \equiv 0$, то уравнение называется однородным и описывает свободные колебания струны. В противном случае уравнение называется неоднородным и описывает вынужденные колебания струны.

Однородное уравнение всегда имеет решение $u(x, t) \equiv 0$, что соответствует состоянию покоя струны.

Струна обычно связывается в нашем представлении с музыкальными инструментами, где она служит источником звука. Но струна может быть также конструктивным элементом технических устройств. Такими струнами, например, являются провода линий электропередач, контактные провода электро-транспорта, тросы подвесных канатных дорог и т. д. В этих устройствах колебания струны являются чаще всего нежелательным явлением, т. к. могут привести к разрушению конструкции.

Пример 9 – Решить методом разделения переменных (методом Фурье) однородное уравнение колебания струны $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ в предположении, что струна закреплена в точках $x = 0, x = l$, $t \geq 0$ – время, при заданных краевых условиях $u(x = 0, t) = u(x = l, t) = 0$ и начальных условиях $u(x, t = 0) = f(x)$ и $u'_t(x, t = 0) = g(x)$, где $f(x)$ и $g(x)$ – заданные функции, описывающие отклонение и скорость точек струны в начальный момент времени.

Решение

Предположим, что в некоторой точке $x \in [0, l]$ и начальный момент времени $t = 0$ струна отклонена на величину $u(x, t = 0) = f(x)$ (рисунок 22).

Решение исходного уравнения будем искать в виде произведения двух функций (метод Фурье), каждая из которых зависит только от x и только от t , т. е.

$$U(x, t) = T(t)\Phi(x).$$

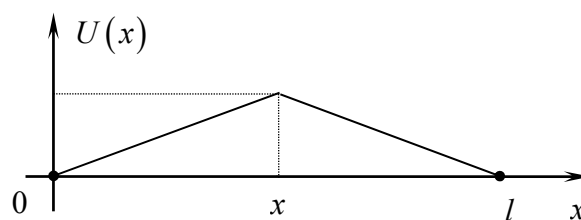


Рисунок 22

Подставляем в исходное уравнение и получаем

$$T''_{tt}(t)\Phi(x) = a^2 T(t)\Phi''_{xx}(x).$$

В предположении, что функции $T(t)$ и $\Phi(x)$ не равны нулю, можем записать

$$\frac{T''_{tt}(t)}{a^2 T(t)} = \frac{\Phi''_{xx}(x)}{\Phi(x)} = \alpha = \text{const}.$$

Поскольку отношения есть величина постоянная, то можем записать два уравнения

$$\Phi_{xx}''(x) = \alpha \Phi(x) \quad \text{и} \quad T_{tt}''(t) = \alpha a^2 T(t).$$

Это линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Рассмотрим их решения поочередно. Заметим, что их решения зависят от знака α .

Пусть $\alpha = \lambda^2 > 0$. Тогда первое уравнение

$$\Phi_{xx}''(x) = \lambda^2 \Phi(x)$$

имеет общее решение $\Phi(x) = C_1 e^{\lambda x} + C_2 e^{-\lambda x}$. Определим, при каких C_1 и C_2 выполняются краевые условия. Из первого краевого условия $\Phi(0) = C_1 + C_2 = 0$ следует, что $C_2 = -C_1$, а из второго $\Phi(l) = C_1 e^{\lambda l} + C_2 e^{-\lambda l} = C_1 (e^{\lambda l} - e^{-\lambda l}) = 0$ следует, что $e^{\lambda l} = e^{-\lambda l}$, поскольку $C_1 = C \neq 0$. А так как $l \neq 0$, то получается, что $\lambda = 0$. Следовательно, это решение не удовлетворяет исходному уравнению, поскольку $\alpha = \lambda^2 > 0$.

Пусть $\alpha = -\lambda^2 < 0$. Уравнение

$$\Phi_{xx}''(x) = -\lambda^2 \Phi(x)$$

имеет общее решение $\Phi(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x$. Определим, при каких C_1 , C_2 и λ выполняются краевые условия. Из первого краевого условия $\Phi(0) = C_1 = 0$, а из второго $\Phi(l) = C_1 \cos \lambda l + C_2 \sin \lambda l = C_2 \sin \lambda l = 0$. А поскольку $C_2 \neq 0$, то $\sin \lambda l = 0$. Это уравнение и его решение есть $\lambda l = n\pi$, т. е. $\lambda = \frac{n\pi}{l}$, $n \in \mathbb{Z}$. Поскольку λ зависит от дискретного n , то обозначим его λ_n и решение для $\Phi(x) = \Phi_n(x)$ принимает вид:

$$\Phi_n(x) = C \sin \frac{n\pi}{l} x \quad (C_2 = C).$$

В силу произвола выбора C ограничимся $n \in \mathbb{N}$. При $n = 0$, $\Phi_0(x) = 0$.

Рассмотрим теперь второе уравнение $T_{tt}''(t) = \alpha a^2 T(t)$. При найденном $\alpha = -\lambda^2 = -\frac{n^2 \pi^2}{l^2}$ оно принимает вид:

$$T_{tt}''(t) = -\frac{n^2 \pi^2}{l^2} a^2 T(t).$$

Его решение

$$T_n(t) = A_n \cos \frac{\pi n a}{l} t + B_n \sin \frac{\pi n a}{l} t,$$

где A_n, B_n – неопределенные (постоянные) коэффициенты, а функция $T(t) = T_n(t)$ зависит от номера $n \in N$. Определим A_n, B_n из начальных условий (задача Коши). Для этого составим функцию

$$\begin{aligned} U_n(x, t) &= T_n(t) \Phi_n(t) = \left(A_n \cos \frac{\pi n a}{l} t + B_n \sin \frac{\pi n a}{l} t \right) C \sin \frac{n \pi}{l} x = \\ &= \left(A_n \cos \frac{\pi n a}{l} t + B_n \sin \frac{\pi n a}{l} t \right) \sin \frac{n \pi}{l} x. \end{aligned}$$

Поскольку C также не определено, то включим его в A_n, B_n . Имеем множество частных решений, а надо найти общее и затем из него получить частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям. Поскольку исходное уравнение линейное, то его решением будет также сумма полученных частных решений, причем бесконечная $n \in N$. Выпишем их:

$$U(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{\pi n a}{l} t + B_n \sin \frac{\pi n a}{l} t \right) \sin \frac{n \pi}{l} x. \quad (37)$$

Теперь определим, при каких A_n, B_n это решение удовлетворяет заданным начальным условиям. Первое начальное условие дает

$$U_n(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n \pi}{l} x = f(x), \quad x \in [0, l].$$

Видно, что последняя запись представляет собой разложение функции $f(x)$ в ряд Фурье по синусам $\sin \frac{n \pi}{l} x$ на $[0, l]$. Следовательно, для A_n можем записать

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n \pi x}{l} dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

Теперь применяем второе начальное условие. Для этого дифференцируем $U(x, t)$ по t и получаем

$$U'_t(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{\pi n a}{l} \sin \frac{n \pi}{l} x = g(x).$$

Видно, что опять имеем разложение теперь функции $g(x)$ в ряд Фурье по синусам на $[0, l]$. Следовательно, коэффициент $B_n \frac{\pi n a}{l}$ при $\sin \frac{n \pi}{l} x$ равен

$$B_n \frac{\pi n a}{l} = \frac{2}{l} \int_0^l g(x) \sin \frac{n \pi x}{l} dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

Отсюда

$$B_n = \frac{2}{\pi n a} \int_0^l g(x) \sin \frac{n \pi x}{l} dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

Итак, мы построили решение уравнения в виде ряда (37), где A_n, B_n определяются из начальных условий, а краевые условия нам определили ортого-

нальную систему, по которой раскладываются функции $f(x)$ и $g(x)$ в ряд Фурье. Используя формулы тригонометрии $a\cos x + b\sin x = A\sin(x + \varphi)$, решение (38) можем записать в более компактной форме:

$$U(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} H_n \sin \frac{n\pi}{l} x \sin \left(\frac{n\pi a}{l} t + \varphi_n \right),$$

где $H_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}$, а $\varphi_n = \arctg \frac{A_n}{B_n}$.

Видно, что решение уравнения представляет собой сумму гармоник с амплитудами $H_n \left| \sin \frac{n\pi}{l} x \right|$ для произвольных точек струны $x \in [0, l]$ и частотами $\omega_n = \frac{n\pi}{l}$. При $n = 1$ имеем основную гармонику (главный тон)

$$U_1(x, t) = H_1 \sin \frac{\pi}{l} x \sin \left(\frac{\pi a}{l} t + \varphi_1 \right)$$

с частотой $\omega_1 = \frac{\pi}{l}$, а при $n = 2, 3, \dots$ – высокие гармоники (обертона).

Проанализируем решение в случае, когда $U_n(x, t) = 0$ при любых t . Это решение называют явлением стоячих волн. Решение $U_n(x, t) = 0$ означает, что на промежутке $[0, l]$ есть точки, в которых струна неподвижна. Найдем их. Из $U_n(x, t) = 0$ следует уравнение $\sin \frac{n\pi}{l} x = 0$ для нахождения таких точек. Его решение $\frac{n\pi}{l} x = k\pi$, $k \in N$. Значения x зависят от n и k , т. е. $x_n(k) = \frac{l}{n} k$.

Для $n = 1$ основная гармоника $x_1(k) = l \cdot k$. Условие $U_1(x, t) = 0$ на промежутке $[0, l]$ будет выполнено только при двух значениях k , равных 0 и 1. При $k = 0$ $x_1(0) = 0$, а при $k = 1$ $x_1(1) = l$. Это точки закрепления струны. Других неподвижных точек на промежутке $[0, l]$ нет.

Для $n = 2$ вторая гармоника $x_2(k) = \frac{l}{2} k$. Условие $U_2(x, t) = 0$ на $[0, l]$ будет выполнено при трех значениях k , равных 0, 1 и 2. При $k = 0$ $x_2(0) = 0$. При $k = 1$ $x_2(1) = \frac{l}{2}$. При $k = 2$ $x_2(2) = l$. Это точки закрепления струны и середина струны. И так далее.

Графики первых трех стоячих волн изображены на рисунке 23.

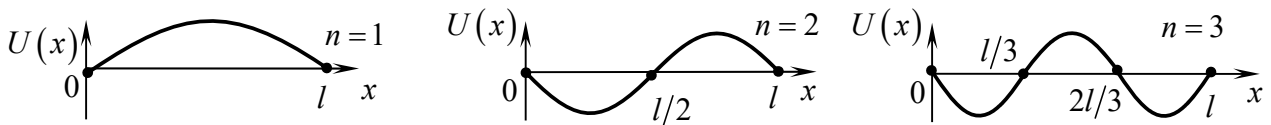


Рисунок 23

Задача для самостоятельной работы

Выполнить проверку решения непосредственной подстановкой в исходное уравнение.

Практическое занятие № 16. Решение линейных неоднородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Теория рядов Фурье первоначально была создана для решения дифференциальных уравнений. Поэтому неудивительно, что ряды Фурье широко используются для поиска решений как обыкновенных дифференциальных уравнений, так и уравнений в частных производных.

Пример 10 – Найти решение в виде ряда Фурье дифференциального уравнения $y'' + 2y = 3x$ на промежутке $[-1; 1]$ при $y(0) = y'(1) = 0$.

Решение

Будем использовать разложение по нечётным гармоникам для построения неоднородного решения уравнения с заданными граничными условиями. Правую часть уравнения можно записать в виде ряда

$$3x = \frac{6}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin n\pi x.$$

Предположим, что решение уравнения имеет вид $y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x$.

Подставляя это предполагаемое решение в исходное уравнение, получаем соотношение

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-n^2 \pi^2) b_n \sin n\pi x + 2 \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x = \frac{6}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin n\pi x.$$

Поскольку коэффициенты при каждой гармонике в левой и правой части должны быть равны друг другу, получаем алгебраическое уравнение

$$(2 - n^2 \pi^2) b_n = \frac{6(-1)^{n+1}}{\pi n},$$

из которого получаем коэффициенты ряда $b_n = \frac{6(-1)^{n+1}}{\pi n(2 - n^2 \pi^2)}$.

Следовательно, решение исходного дифференциального уравнения описывается рядом

$$y(x) = \frac{6}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(2 - n^2 \pi^2)} \sin n\pi x.$$

Пример 11 – В виде ряда Фурье найти решение $y = y(x)$ краевой задачи

$$y'' - \frac{\pi^2}{9} y = q(x), \quad x \in [0; 3], \quad y(0) = y'(3) = 0, \quad \text{где } q(x) = \begin{cases} \frac{4x}{3}, & 0 \leq x < \frac{3}{2}, \\ 4 - \frac{4x}{3}, & \frac{3}{2} \leq x \leq 3, \end{cases} \quad \text{ограниченная, кусочно-непрерывная на отрезке } [0; 3] \text{ функция.}$$

Решение

Представим $y(x)$ в виде разложения в ряд

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n \sin \frac{\pi(1+2n)x}{6}.$$

Функции удовлетворяют граничным условиям и ортогональны на отрезке $[0; 3]$. Действительно,

$$y(0) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n \sin 0 = 0, \quad y'(3) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n \frac{\pi(1+2n)}{6} \cos \frac{\pi(1+2n)}{2} = 0.$$

При $n \neq m$ имеем $\int_0^3 \sin \frac{\pi(1+2n)x}{6} \cdot \sin \frac{\pi(1+2m)x}{6} dx = \dots = 0.$

При $n = m$ имеем $\int_0^3 \sin^2 \frac{\pi(1+2n)x}{6} dx = \frac{1}{2} \int_0^3 \left(1 - \cos \frac{\pi(2n+1)x}{3} \right) dx = \frac{3}{2}.$

Подставляя $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n \sin \frac{\pi(1+2n)x}{6}$ в уравнение $y'' - \frac{\pi^2}{9} y = q(x)$, полу-

чим $-\pi^2 \sum_{n=0}^{\infty} Y_n \left(\frac{(1+2n)^2}{36} + \frac{1}{9} \right) \sin \frac{\pi(1+2n)x}{6} = q(x).$

Далее раскладываем в обобщённый ряд Фурье по той же ортогональной системе функций правую часть последнего уравнения:

$$q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n \sin \frac{\pi(1+2n)x}{6}.$$

Найдём коэффициенты ряда

$$Q_n = \frac{\int_0^3 q(x) \sin \frac{\pi(1+2n)x}{6} dx}{\int_0^3 \sin^2 \frac{\pi(1+2n)x}{6} dx} = \frac{32}{\pi^2 (1+2n)^2} \left(2 \sin \frac{\pi(1+2n)}{4} - (-1)^n \right).$$

Подставив полученные выражения в уравнение, получим

$$\begin{aligned}
-\pi^2 \sum_{n=0}^{\infty} Y_n \left(\frac{(1+2n)^2}{36} + \frac{1}{9} \right) \sin \frac{\pi(1+2n)x}{6} &= \sum_{n=0}^{\infty} Q_n \sin \frac{\pi(1+2n)x}{6}, \\
-\pi^2 \left(\frac{(1+2n)^2}{36} + \frac{1}{9} \right) Y_n &= \frac{32}{\pi^2 (1+2n)^2} \left(2 \sin \frac{\pi(1+2n)}{4} - (-1)^n \right).
\end{aligned}$$

Выражаем Y_n и подставляем его в решение. Получаем

$$y(x) = \frac{1152}{\pi^4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1+2n)^2 ((1+2n)^2 + 4)} \left(2 \sin \frac{\pi(1+2n)}{4} - (-1)^n \right) \sin \frac{\pi(1+2n)x}{6}.$$

Примеры приложения рядов и интегралов Фурье к суммированию числовых рядов и вычислению несобственных интегралов приведены в практических занятиях № 6, 11.

Задачи для самостоятельной работы

1 Найти решение в виде ряда Фурье дифференциальных уравнений с заданными условиями:

а) $y'' - 3y = 5x$, $x \in [0;1]$, $y(0) = y'(1) = 0$;

б) $y'' + y = x$, $x \in [-1;1]$, $y(0) = y'(1) = 0$.

2 В виде ряда Фурье найти решение $y = y(x)$ краевой задачи $y'' - \frac{\pi^2}{c} y = q(x)$, $x \in [a;b]$, $y(a) = y'(b) = 0$, где $q(x)$ – ограниченная, кусочно-непрерывная на отрезке $[a;b]$ функция:

а) $q(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & 0 \leq x < 2, \\ 1, & 2 \leq x \leq 4; \end{cases} \quad a = 0, b = 4, c = 25;$

б) $q(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 4, \\ \frac{x}{4} - 1, & 4 \leq x \leq 8; \end{cases} \quad a = 0, b = 8, c = 64.$

3 В виде ряда Фурье найти решение $y = y(x)$ краевой задачи $y'' = q(x)$, $x \in [a;b]$, $y(a) = y'(b) = 0$, где $q(x)$ – ограниченная, кусочно-непрерывная на отрезке $[a;b]$ функция

а) $q(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 2, \\ 3 - \frac{x}{3}, & 2 \leq x \leq 4; \end{cases} \quad a = 0, b = 4;$

$$б) q(x) = \begin{cases} 2x-1, & 0 \leq x < 1, \\ 2-x, & 1 \leq x \leq 2; \end{cases} \quad a=0, b=2.$$

Практическое занятие № 17. Дельта-функция $\delta(x)$ и ее свойства. Спектральная плотность дельта-функции, функции знака, единичной функции Хевисайда. Прямоугольный импульс. Примеры преобразований сигналов линейными системами

Дельта-функция $\delta(x)$ определяется следующим образом:

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0, \\ \infty, & x = 0, \end{cases} \quad \text{и} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1.$$

При $x \neq 0$, т. е. при $x < 0$ и при $x > 0$, $\delta(x) \equiv 0$, а при $x = 0$ $\delta(0) = \infty$ и несобственный интеграл от нее равен 1.

Наглядно можно представить себе график функции, похожий на $\delta(x)$ как показано на рисунке 24. Чем более узкой мы сделаем полосу между левой и правой ветвью, тем выше должна быть эта полоска для того, чтобы площадь этой полоски (т. е. интеграл) сохраняла свое заданное значение, равное 1. При сужении полоски мы приближаемся к выполнению условия $\delta(x) = 0$ при $x \neq 0$, функция приближается к дельта-функции.

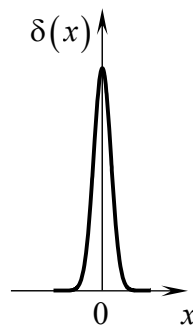


Рисунок 24

Приведем без доказательства некоторые общие свойства дельта-функции:

$$1) \delta(-x) = \delta(x); \quad 2) \delta(cx) = \frac{1}{|c|} \delta(x); \quad 3) \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x) dx = f(0);$$

$$4) \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(cx) dx = \frac{1}{|c|} f(0); \quad 5) \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x-a) dx = f(a).$$

Дельта-функция $\delta(x)$ используется для описания производных от разрывных функций в точках разрыва. Рассмотрим интеграл от функции с переменным верхним пределом $\theta(x) = \int_{-\infty}^x \delta(t) dt$.

Легко убедиться, что график этой функции имеет вид ступеньки (рисунок 25). При $x < 0$ $\theta(x) = 0$. Если же x становится больше нуля, то в область интегрирования включается окрестность начала координат $x > 0$, где $\delta(0) = \infty$ и далее опять $\delta(x) = 0$. Следовательно,

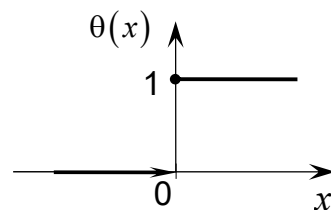


Рисунок 25

$$\theta(x) = \int_{-\infty}^{x>0} \delta(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1.$$

Таким образом, с помощью функции $\delta(x)$ сконструирована простейшая разрывная функция $\theta(x)$, такая, что при $x < 0$, $\theta(x) = 0$, а в области $x > 0$, $\theta(x) = 1$. В точке $x = 0$ функция $\theta(x)$ терпит разрыв от 0 до 1.

Не зная дельта-функции, приходится говорить, что производные нельзя находить в точках разрыва. Рассмотрим общее правило о связи между интегралом и производной. Если $F(x) = \int_{x_0}^x g(t) dt$, то $\frac{dF(x)}{dx} = g(x)$. Применяя его к формуле $\theta(x) = \int_{-\infty}^x \delta(t) dt$, получаем $\frac{d\theta(x)}{dx} = \delta(x)$. Значит, для производной от разрывной функции не надо делать исключения. В точках разрыва производная равна особенной функции – дельта-функции. Найдем Фурье-образ дельта-функции:

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) e^{-i\omega x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

Получили, что Фурье-образ дельта-функции представляет собой постоянную величину во всем диапазоне изменения частот $\omega \in (-\infty, \infty)$. Это укладывается в общепринятые представления. Для бесконечно узких функций Фурье-образ бесконечно широкая функция (соотношение неопределенностей).

Рассмотрим прямоугольный импульс $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-l, l], \\ 0, & x \notin [-l, l], \end{cases}$ единичной вы-

соты на отрезке $[-l, l]$ и найдем его Фурье-образ.

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-l}^l e^{-i\omega x} dx = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{i\omega} e^{-i\omega x} \Big|_{-l}^l = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{i\omega} (e^{-i\omega l} - e^{i\omega l}) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{i\omega} (e^{i\omega l} - e^{-i\omega l}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{i\omega} \frac{e^{i\omega l} - e^{-i\omega l}}{2i} 2i = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \omega l}{\omega}. \end{aligned}$$

Рассмотрим преобразование сигналов линейными системами, например, усиление. Если на вход линейной системы поступает сигнал $f_1(t)$ с функцией спектральной плотности $F_1(\omega)$, то функция спектральной плотности выходного сигнала определяется выражением

$$F_2(\omega) = F_1(\omega) \cdot K(\omega),$$

где $K(\omega)$ – частотная передаточная функция системы.

Теперь, зная функцию $F_2(\omega)$ и используя обратное преобразование Фурье, для выходного сигнала можем записать

$$f_2(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F_2(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\omega) K(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

Отсюда легко установить, при каком условии сигнал пройдет через линейную систему без искажений. Очевидно, частотные спектры входного и выходного сигналов должны совпадать, а это значит, что передаточная функция $K(\omega)$ должна быть постоянной, т. е. $|K(\omega)| = K = \text{const}$. Как правило, преобразуемые системы осуществляют временную задержку, т. е. ее передаточная функция имеет вид $K(\omega) = K \cdot e^{-i\omega\tau}$. В результате выходной сигнал имеет усиление и временной сдвиг

$$f_2(t) = \frac{K}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\omega) e^{i\omega(t-\tau)} d\omega = K \cdot f_1(t - \tau).$$

Задача для самостоятельной работы

Найти Фурье-образы следующих функций:

$$\text{а) } f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases} \text{ — функция знака;}$$

$$\text{б) } f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0. \end{cases} \text{ — единичная функция Хевисайда;}$$

$$\text{в) } f(x) = e^{-\alpha|x|}, \text{ где } \alpha \in R, \alpha > 0;$$

$$\text{г) } f(x) = 1, \forall x \in R.$$

$$\text{Ответы: а) } F(\omega) = \frac{2}{i\omega}; \text{ б) } F(\omega) = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{i\omega}; \text{ в) } F(\omega) = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2};$$

$$\text{г) } F(\omega) = \sqrt{2\pi}\delta(\omega).$$

Список литературы

1 **Кудрявцев, Л. Д.** Краткий курс математического анализа. Т. 1. Дифференциальное и интегральное исчисления функций одной переменной. Ряды: учебник / Л. Д. Кудрявцев. – 4-е изд. – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2015. – 444 с.

2 **Антипова, И. А.** Интегральные преобразования: учебное пособие / И. А. Антипова, Е. Н. Михалкин, А. К. Цих. – Красноярск: Сиб. федер. ун-т, 2018. – 58 с.

3 **Литвин, Д. Б.** Ряды: учебное пособие / Д. Б. Литвин. – Ставрополь: Сервисшкола, 2017. – 88 с.

4 **Фихтенгольц, Г. М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления: в 3 т. / Г. М. Фихтенгольц. – 8-е изд. – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – Т. 3. – 728 с.