УДК 517.927.6

К МНОГОТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ ЛЯПУНОВА С ПАРАМЕТРОМ

А. Н. БОНДАРЕВ
Белорусско-Российский университет
Могилев, Беларусь

Изучается краевая задача

$$\frac{dX}{dt} = \lambda A(t)X + X\left(B_1(t) + \lambda B_2(t)\right) + F(t) + \lambda^2 XB_3(t), \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{k} M_i X(t_i, \lambda) = 0, \tag{2}$$

где $X \in \mathbb{R}^{n\times m}$, A, B_j $(j = 1,2,3)$; F – матрицы-функции класса $\mathbb{C}[0,\omega]$ соответствующих размерностей; M_i – заданные постоянные $(n\times n)$-матрицы; $\lambda \in \mathbb{R}$, $\omega > 0$.

В работе получены коэффициентные достаточные условия однозначной разрешимости типа [1] задачи (1), (2), итерационный алгоритм построения решения и дана оценка его области локализации.

Введем следующие обозначения:

$$\gamma = \left\|\Phi^{-1}\right\|, \quad m_i = \left\|M_i\right\|, \quad \alpha = \max_t \left\|A(t)\right\|, \quad \beta_j = \max_t \left\|B_j(t)\right\|, \quad h = \max_t \left\|F(t)\right\|,$$

$$\mu_1 = \max_t \left\|V(t)\right\|, \quad \mu_2 = \max_t \left\|V^{-1}(t)\right\|, \quad v_i = \left\|V_i\right\|, \quad \left\|X\right\|_C = \max_t \left\|X(t)\right\|,$$

$$\varepsilon = |\lambda|, \quad q = \varepsilon q_1 + \varepsilon^2 q_2, \quad N = \gamma\mu_1\mu_2\omega h \sum_{i=1}^{k} m_i v_i,$$

где $\|\cdot\|$ – согласованная в смысле [2, с. 410] норма матриц; Φ – линейный матричный оператор типа [3], $\Phi Y \equiv \sum_{i=1}^{k} M_i Y V_i$; $V_i = V(t_i)$, $V(t)$ – фундаментальная матрица уравнения $dV/dt = VB_1(t)$, $q_1 = \gamma\mu_1\mu_2(\alpha + \beta_2)\omega \sum_{i=1}^{k} m_i v_i$, $q_2 = \gamma\mu_1\mu_2\beta_3\omega \sum_{i=1}^{k} m_i v_i$.

Теорема. *Пусть выполнены следующие условия: оператор Φ однозначно обратим, $\varepsilon q_1 + \varepsilon^2 q_2 < 1$. Тогда задача (1), (2) однозначно разрешима; ее решение $X(t)$ представимо как предел равномерно сходящейся последовательности матричных функций, определяемых рекуррентным интегральным соотношением и удовлетворяющих условию (2), при этом справедлива оценка $\|X\|_C \le N/(1-q)$.*

На основе применения метода [4, гл. 1] задача (1), (2) сведена к эквивалентному интегральному уравнению

$$X(t,\lambda) = \left(\Phi^{-1} \left\{ \sum_{i=1}^{k} M_i \int_{t_i}^{t} [\lambda(A(\tau)X(\tau,\lambda) + X(\tau,\lambda)B_2(\tau)) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \lambda^2 XB_3(\tau) + F(\tau)\big] V^{-1}(\tau)\, d\tau\, V_i \right\} \right) V(t),$$

для исследования разрешимости которого используется принцип сжимающих отображений (см., например, [5, с. 605]).

Решение строится по алгоритму

$$X_p(t,\lambda) = \left(\Phi^{-1} \left\{ \sum_{i=1}^{k} M_i \int_{t_i}^{t} \big[\lambda\big(A(\tau)X_{p-1}(\tau,\lambda) + X_{p-1}(\tau,\lambda)B_2(\tau)\big) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \lambda^2 XB_3(\tau) + F(\tau)\big] V^{-1}(\tau)\, d\tau\, V_i \right\} \right) V(t), \quad p = 1, 2, \ldots,$$

где в качестве начального приближения принята произвольная матрица $X_0(t) \in \mathbb{C}\left(I, \mathbb{R}^{n \times m}\right)$.

Доказано, что последовательность $\{X_r\}_0^\infty$ сходится равномерно по $t \in I$ к решению полученного интегрального уравнения, при этом справедливы оценки

$$\|X - X_r\|_C \le \frac{q^r}{1-q}\|X_1 - X_0\|_C, \quad r = 0, 1, 2, \ldots, \quad \|X\|_C \le \|X_0\|_C + \frac{\|X_1 - X_0\|_C}{1-q}.$$

Установлено, что из этих оценок при $X_0(t) \equiv 0$ следует оценка из теоремы.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Bondarev, A. N.** Multipoint Boundary Value Problem for the Lyapunov Equation in the Case of Weak Degeneration of the Boundary Conditions / A. N. Bondarev, V. N. Laptinskii // Differential Equations. – 2019. – Vol. 55, № 3. – P. 423–427.
2. **Гантмахер, Ф. Р.** Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. – Москва: Наука, 1967. – 576 с.
3. **Murty, K. N.** Two (multi) point nonlinear Lyapunov systems – existence and uniqueness / K. N. Murty, G. W. Howell, S. Sivasundaram // Journ. Mathem. Anal. and Appl. – 1992. – Vol. 167. – P. 505–515.
4. **Лаптинский, В. Н.** Конструктивный анализ управляемых колебательных систем / В. Н. Лаптинский. – Минск : Институт математики НАН Беларуси, 1998. – 300 с.
5. **Канторович, Л. В.** Функциональный анализ / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. – Москва: Наука, 1977. – 744 с.