УДК 517.956.4

О ПРЕОБРАЗОВАНИИ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

В. Г. ЗАМУРАЕВ
Белорусско-Российский университет
Могилев, Беларусь

Одним из методов исследования и решения задач построения оптимальной области [1] для дифференциальных уравнений в частных производных является метод сведения задачи управления областью к задаче управления коэффициентами и правой частью уравнения в фиксированной области. При этом рассматриваемая краевая задача записывается в эквивалентной вариационной формулировке, которая играет существенную роль при изучении задачи управления.

В работе рассматривается краевая задача для уравнения теплопроводности в плоской области, имеющей форму криволинейной трапеции. Для этой задачи может быть поставлена эквивалентная вариационная задача [2]. Предложен метод сведения данной задачи к краевой задаче аналогичного вида в квадратной области.

Рассмотрим ограниченную область

$$\Omega = \left\{ (x,t) \in \mathbb{R}^2 \middle| 0 < x < \gamma(t), 0 < t < 1 \right\},$$

где $\gamma(t)$ – заданная на отрезке $[0,1]$ функция из класса $C^3[0,1]$, такая, что $0 < \alpha \le \gamma(t) \le \beta$ для $t \in [0,1]$, α, β – некоторые постоянные.

Пусть в области Ω процесс теплопроводности задан следующей системой уравнений:

$$c(x,t)\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} \right) = g(x,t),\ (x,t) \in \Omega, \tag{1}$$

$$u(x,0) = \varphi(x),\ \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \psi(t),\ u(\gamma(t),t) = 0, \tag{2}$$

где $c(x,t)$ – заданная в $\bar{\Omega}$ функция из класса $C^1(\bar{\Omega})$, такая, что $0 \le c(x,t) \le C$, $(x,t) \in \bar{\Omega}$, C – некоторая постоянная: $k(x,t)$ – заданная в $\bar{\Omega}$ функция из класса $C^2(\bar{\Omega})$, такая, что $0 < \kappa \le k(x,t) \le K$, $(x,t) \in \bar{\Omega}$, κ, K – некоторые постоянные; $g(x,t)$, $\varphi(x)$, $\psi(t)$ – заданные непрерывные функции.

Умножив обе части уравнения (1) на положительный множитель

$$\mu(x,t)=\gamma^2(t)\exp\left\{\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}\int_0^x\frac{c(\overline{x},t)}{k(\overline{x},t)}\overline{x}d\overline{x}\right\},$$

заменим переменные в полученной системе по формулам $x=\gamma(\tau)\xi$, $t=\tau$.

В результате получим систему уравнений вида, аналогичного (1)–(2), задающую процесс теплопроводности в квадратной области $\hat{\Omega}$, $\hat{\Omega}=(0,1)\times(0,1)$:

$$\hat{c}(\xi,\tau)\frac{\partial\hat{u}}{\partial\tau}-\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\hat{k}(\xi,\tau)\frac{\partial\hat{u}}{\partial\xi}\right)=\hat{g}(\xi,\tau),\ (\xi,\tau)\in\hat{\Omega}, \tag{3}$$

$$\hat{u}(\xi,0)=\hat{\varphi}(\xi),\ \frac{\partial\hat{u}}{\partial\xi}(0,\tau)=\hat{\psi}(\tau),\ \hat{u}(1,\tau)=0, \tag{4}$$

где $\hat{c}(\xi,\tau)=\mu(\gamma(\tau)\xi,\tau)c(\gamma(\tau)\xi,\tau)$; $\hat{k}(\xi,\tau)=\dfrac{\mu(\gamma(\tau)\xi,\tau)k(\gamma(\tau)\xi,\tau)}{\gamma^2(\tau)}$;

$\hat{g}(\xi,\tau)=\mu(\gamma(\tau)\xi,\tau)g(\gamma(\tau)\xi,\tau)$; $\hat{\varphi}(\xi)=\varphi(\gamma(0)\xi)$; $\hat{\psi}(\tau)=\gamma(\tau)\psi(\tau)$.

Для возможности корректной вариационной постановки полученной задачи функцию $\hat{c}(\xi,\tau)$ следует считать такой, что выполняется свойство неотрицательности нормы

$$|\hat{u}|=\left(\iint_{\hat{\Omega}}\left\{\hat{c}(\xi,\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}(\hat{u}^2)+\hat{k}(\xi,\tau)\left(\frac{\partial\hat{u}}{\partial\xi}\right)^2+\frac{1}{\hat{k}(\xi,\tau)}\left(\int_0^\xi\hat{c}(\overline{\xi},\tau)\frac{\partial\hat{u}}{\partial\tau}d\overline{\xi}\right)^2\right\}d\xi d\tau+\right.$$
$$\left.+\int_0^1\hat{c}(\xi,1)\hat{u}^2(\xi,1)d\xi\right)^{1/2}.$$

Это выполнено, например, если в замкнутой области $\bar{\hat{\Omega}}$ частная производная $\dfrac{\partial\hat{c}}{\partial\tau}(\xi,\tau)\le 0$ [2].

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Neittaanmaki, P.** Optimization of Elliptic Systems: Theory and Applications / P. Neittaanmaki, J. Sprekels, D. Tiba. – New York: Springer, 2006. – 523 p.

2. **Филиппов, В. М.** О квадратичном функционале для уравнения теплопроводности / В. М. Филиппов, А. М. Скороходов // Дифференциальные уравнения. – 1977. – Т. 13, № 6. – С. 1113–1123.