УДК 517.925

О ЗАДАЧЕ ВАЛЛЕ-ПУССЕНА ДЛЯ МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ ЛЯПУНОВА ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПАРАМЕТРОМ

А. И. КАШПАР
Белорусско-Российский университет
Могилев, Беларусь

Исследуется краевая задача типа [1–5]

$$\ddot{X} = A(t)\dot{X} + \dot{X}B(t) + \left(\lambda A_1(t) + \lambda^2 P(t)\right)X + X\left(\lambda B_1(t) + \lambda^2 Q(t)\right) + \\ +\lambda\left(A_2(t)\dot{X} + \dot{X}B_2(t)\right) + \lambda F(t), \quad (1)$$

$$X(0,\lambda) = M,\ X(\omega,\lambda) = N,\ X \in \mathbb{R}^{n\times m}, \quad (2)$$

где $F(t), P(t), A(t), B(t), A_i(t), B_i(t)\ (i = 1, 2), P(t), Q(t)$ – матрицы класса $\mathbb{C}[0,\omega]$ соответствующих размерностей; M, N – заданные вещественные матрицы; $\omega > 0, \lambda \in \mathbb{R}$, $\dot{X} = dX/dt$.

С помощью метода [6, гл. 1] получены коэффициентные достаточные условия однозначной разрешимости задачи (1), (2) и алгоритм построения решения.

Обозначения: Φ – линейный оператор, $\Phi Z(t) = \int_0^\omega U(\tau)Z(t)V(\tau)d\tau$, $\gamma = \left\|\Phi^{-1}\right\|$, $\alpha_i = \max_{0\le t\le\omega}\left\|A_i(t)\right\|$, $\beta_i = \max_{0\le t\le\omega}\left\|B_i(t)\right\|$, $\delta_1 = \max_{0\le t\le\omega}\left\|P(t)\right\|$, $\delta_2 = \max_{0\le t\le\omega}\left\|Q(t)\right\|$, $\lambda_U = \max_{0\le\tau\le t\le\omega}\left\|U(t)U^{-1}(\tau)\right\|$, $\lambda_V = \max_{0\le\tau\le t\le\omega}\left\|V^{-1}(\tau)V(t)\right\|$, $\varepsilon = |\lambda|$; $a = \varepsilon a_0 + \varepsilon^2 a_1$, $b = \varepsilon b_0$, $K_U(\tau,s) = U(\tau)U^{-1}(s)$, $K_V(s,\tau) = V^{-1}(s)V(\tau)$, $U(t), V(t)$ – интегральные матрицы уравнений $\dot{U} = A(t)U$, $U(0) = E_n$, $\dot{V} = VB(t)$, $V(0) = E_m$, $E_k = diag(1, 1, ..., 1)$, $\|\cdot\|$ – норма матриц, определяемая в рамках конечномерной банаховой алгебры $\mathcal{B}(n)$ непрерывных матричнозначных функций, где $a_0 = \frac{1}{3}\gamma\omega^3\lambda_U^2\lambda_V^2\left(\alpha_1 + \beta_1\right)$, $a_1 = \frac{1}{3}\gamma\omega^3\lambda_U^2\lambda_V^2(\delta_1 + \delta_2)$, $b_0 = \frac{1}{2}\gamma\omega^2\lambda_U^2\lambda_V^2(\alpha_2 + \beta_2)$.

Задача (1), (2) по методике [6] сведена к эквивалентной системе интегральных уравнений

$$X(t,\lambda) = M + \int_0^t Y(\tau,\lambda)d\tau,$$

$$Y(t,\lambda) = U(t)\left(\Phi^{-1}(N - M)\right)V(t) + \\ +U(t)\Phi^{-1}\left(\int_0^\omega U(\tau)\left(\int_\tau^t U^{-1}(s)H(s,\lambda)V^{-1}(s)ds\right)V(\tau)d\tau\right)V(t),$$

где $H(t,\ \lambda) = \left(\lambda A_1(t) + \lambda^2 P(t)\right)X + X\left(\lambda B_1(t) + \lambda^2 Q(t)\right) + \lambda(A_2(t)Y + YB_2(t)) + \lambda F(t)$.

Теорема. *Пусть оператор* Φ *однозначно обратим. Тогда при*

$$|\lambda| < \varepsilon_0 = \frac{2}{a_0 + b_0 + \sqrt{(a_0 + b_0)^2 + 4a_1}} \tag{3}$$

задача (1), (2) *однозначно разрешима.*

Решение задачи строится в виде

$$\mathrm{X}(t,\lambda) = \mathrm{X}_0(t) + \lambda \mathrm{X}_1(t) + \ldots + \lambda^k \mathrm{X}_k(t) + \ldots, \tag{4}$$

$$\mathrm{Y}(t,\lambda) = \mathrm{Y}_0(t) + \lambda \mathrm{Y}_1(t) + \ldots + \lambda^k \mathrm{Y}_k(t) + \ldots\ ; \tag{5}$$

тогда $\mathrm{H}(t,\lambda) = \lambda \mathrm{H}_1(t) + \lambda^2 \mathrm{H}_2(t) + \ldots$

На основе (4), (5) из системы интегральных уравнений имеем

$$\mathrm{X}_0(t) = \mathrm{M} + \int_0^t \mathrm{U}(\tau)\Phi^{-1}(\mathrm{N} - \mathrm{M})\mathrm{V}(\tau)d\tau, \qquad \mathrm{Y}_0(t) = \mathrm{U}(t)\left(\Phi^{-1}(\mathrm{N} - \mathrm{M})\right)\mathrm{V}(t),$$

$$\mathrm{X}_m(t) = \int_0^t \mathrm{U}(\varphi)\Phi^{-1}\left(\int_0^\omega \left(\int_\tau^\varphi \mathrm{K}_{\mathrm{U}}(\tau,s)\mathrm{H}_m(s)\mathrm{K}_{\mathrm{V}}(s,\tau)ds\right)d\tau\right)\mathrm{V}(\varphi)d\varphi,$$

$$\mathrm{Y}_m(t) = \mathrm{U}(t)\Phi^{-1}\left(\int_0^\omega \left(\int_\tau^t \mathrm{K}_{\mathrm{U}}(\tau,s)\mathrm{H}_m(s)\mathrm{K}_{\mathrm{V}}(s,\tau)ds\right)d\tau\right)\mathrm{V}(t),\ m = 1, 2, \ldots$$

Доказано, что соотношение (3) представляет собой условие равномерной сходимости по $t \in [0,\omega]$ рядов (4), (5) в области значений параметра $|\lambda| < \varepsilon_0$.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Лаптинский, В. Н.** Конструктивный анализ краевой задачи Валле-Пуссена для линейного матричного уравнения Ляпунова второго порядка / В. Н. Лаптинский, А. И. Кашпар. – Могилев: Белорус.-Рос. ун-т, 2015. – Ч. 1. – 48 с. – (Препринт / Ин-т технол. металлов НАН Беларуси; № 35).

2. **Кашпар, А. И.** О построении решения краевой задачи Валле-Пуссена для линейного матричного уравнения Ляпунова второго порядка / А. И. Кашпар // Весн. МДУ імя А. А. Куляшова. Сер. B. Прыродазнаўчыя навукі (матэматыка, фізіка, біялогія). – 2018. – № 2. – С. 45–54.

3. **Кашпар, А. И.** О разрешимости и построении решения задачи Валле-Пуссена для матричного уравнения Ляпунова второго порядка с параметром / А. И. Кашпар, В. Н. Лаптинский // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2019. – Т. 55, № 1. – С. 50–61.

4. **Кашпар, А. И.** Разрешимость и построение решения краевой задачи Валле-Пуссена для нелинейного матричного уравнения Ляпунова второго порядка / А. И. Кашпар, В. Н. Лаптинский // Дифференциальные уравнения. – 2020. – Т. 56, № 5. – С. 570–583.

5. **Кашпар, А. И.** К задаче Валле-Пуссена для матричного уравнения Ляпунова второго порядка с параметром / А. И. Кашпар // Материалы, оборудование и ресурсосберегающие технологии: материалы Междунар. науч.-техн. конф., Могилев, 25–26 апр. 2019 г. – Могилев: Белорус.-Рос. ун-т, 2019. – С. 517–518.

6. **Лаптинский, В. Н.** Конструктивный анализ управляемых колебательных систем / В. Н. Лаптинский. – Минск: ИМ НАН Беларуси, 1998.