

УДК 533.6

СТРУКТУРА ПО ПРАНДТЛЮ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ
О ДИНАМИЧЕСКОМ ТУРБУЛЕНТНОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

В. Н. ЛАПТИНСКИЙ

Белорусско-Российский университет

Могилев, Беларусь

Исследуется система соотношений

$$u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dx} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial y}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0, \quad (2)$$

$$u_x|_{y=0} = 0, u_y|_{y=0} = 0; u_x|_{y=\delta(x)} = U(x), \quad (3)$$

представляющая собой задачу Прандтля о динамическом турбулентном пограничном слое конечной толщины $\delta(x)$ в случае стационарного плоского течения несжимаемой жидкости (см., например, [1, с. 521], [2, с. 368]), при этом в турбулентном напряжении трения $\tau = \tau_l + \tau_t$ турбулентная составляющая τ_t , согласно Прандтлю, принята в виде

$$\tau_t = \rho \kappa^2 y^2 \left| \frac{\partial u_x}{\partial y} \right| \frac{\partial u_x}{\partial y}, \quad (4)$$

где τ_l – ламинарная составляющая напряжения трения. Искомыми величинами являются функции $\delta(x)$ и $\tau_0(x)$ – касательное напряжение.

В случае ламинарного течения в [3] по методике [4] получены точные формулы для $\delta(x)$, $\tau_0(x)$. В [5] тем же методом выведены соотношения для $\delta(x)$, $\tau_0(x)$, содержащие нелинейный интегральный функционал (функционал Прандтля), определяемый на основе соответствующего профиля скоростей [6]. В [7] этот функционал исключен из этих соотношений, но с использованием эмпирически определяемого сопротивления трения пластины конечной длины.

В данной работе, являющейся развитием и продолжением [3–5, 7, 8], на основе (1)–(4) с использованием величины ударной вязкости пограничного слоя установлена структура функций $\delta(x)$, $\tau_0(x)$ в следующем виде:

$$\delta(x) = \frac{\nu}{U(x)} h_{\delta}, \quad (5)$$

$$\tau_0(x) = \rho U^2(x) h_{\tau}, \quad (6)$$

где

$$h_{\delta} = \frac{(c_{\tau} - c_l) c_l}{\kappa^2 c_l}; \quad (7)$$

$$h_{\tau} = \frac{\kappa^2 c_l}{(c_{\tau} - c_l) c_l^2}, \quad (8)$$

здесь $c_{\tau} = c_{\tau}(x)$, $c_l = c_l(x)$, $c_l = c_l(x)$ – структурные функции, определяемые на основе безразмерных интегральных средних на промежутке $[0, \delta(x)]$ соответственно напряжений трения τ, τ_l, τ_l . Заметим, что величины $\delta, \tau_0, h_{\delta}, h_{\tau}$ связаны соотношениями $\delta^2 \tau_0 = \nu \mu h_{\delta}^2 h_{\tau}$, $h_{\delta} h_{\tau} = 1/c_l$, определяющими структурные свойства решения задачи (1)–(3).

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шлихтинг, Г. Теория пограничного слоя / Г. Шлихтинг. – Москва: Наука, 1974.
2. Емцев, Б. Т. Техническая гидромеханика / Б. Т. Емцев. – Москва: Машиностроение, 1987.
3. Лаптинский, В. Н. Точное решение задачи Прандтля о динамическом ламинарном пограничном слое / В. Н. Лаптинский // Дифференциальные уравнения. – 2020. – Т. 56, № 4. – С. 549–552.
4. Лаптинский, В. Н. Об одном аналитическом методе решения задачи о динамическом ламинарном пограничном слое в автомодельном случае / В. Н. Лаптинский // Ученые записки ЦАГИ. – 2013. – Т. XLIV, № 5. – С. 72–93.
5. Лаптинский, В. Н. К решению задачи о динамическом турбулентном пограничном слое / В. Н. Лаптинский // Еругинские чтения – 2019: материалы XIX Междунар. науч. конф. по дифференц. уравнениям, Могилев, 14–17 мая 2019 г.: в 2 ч. – Могилев: Беларус.-Рос. ун-т, 2019. – Ч. 2. – С. 82–84.
6. Основы теплопередачи в авиационной и ракетно-космической технике / В. С. Авдеевский [и др.]. – Москва: Машиностроение, 1975. – 624 с.
7. Лаптинский, В. Н. Замкнутое решение задачи Прандтля о динамическом турбулентном пограничном слое / В. Н. Лаптинский // Материалы, оборудование и ресурсосберегающие технологии: материалы Междунар. науч.-техн. конф., Могилев, 23–24 апр. 2020 г. – Могилев: Беларус.-Рос. ун-т, 2020. – С. 487.
8. Лаптинский, В. Н. Конструктивный метод анализа задачи о ламинарном пограничном слое и его применение к расчету охлаждающей способности кристаллизаторов при непрерывном литье / В. Н. Лаптинский. – Могилев: Беларус.-Рос. ун-т, 2010. – 28 с. – (Препринт ИТМ НАН Беларуси; № 18 (Ч. II)).