

УДК 533.6

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ДИНАМИЧЕСКОМ
ЛАМИНАРНОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ В АВТОМОДЕЛЬНОМ СЛУЧАЕ

В. Н. ЛАПТИНСКИЙ, А. А. РОМАНЕНКО
Белорусско-Российский университет
Могилев, Беларусь

В данной работе, являющейся продолжением и развитием [1–3], рассматривается задача (см., например, [4, с. 160; 5, с. 177]) о динамическом ламинарном пограничном слое для течения вязкой жидкости вдоль плоской пластины

$$f''' + a f f'' + b(1 - f'^2) = 0, \quad (1)$$

$$f(0) = f'(0) = 0, \quad f'(\infty) = 1, \quad (2)$$

где $f' = df(\eta)/d\eta$, $a = (m+1)/2$, $b = m$; m – параметр, характеризующий скорость $U(x) = U_0 x^m$ внешнего течения.

Задача (1), (2) не имеет точного решения, однако играет важную роль в теории и приложениях пограничного слоя. Ее решают в основном численными методами. Очевидно, аналитические методы предпочтительнее численных, поскольку позволяют изучить влияние физических параметров задачи на формирование пограничного слоя. Эффективное (в смысле простоты и точности) приближенное аналитическое решение этой задачи получено [1] только в случае пластины, обтекаемой в продольном направлении ($m = 0$) – безградиентное обтекание.

Для случая градиентного обтекания и значений $m \in [0, 1/3)$ получено приемлемое для практических расчетов [4] приближенное аналитическое решение $f(\eta)$ задачи (1), (2) в виде

$$f(\eta) \approx \lambda \int_0^\eta (\eta - \tau) \exp \left(- \left(\frac{b}{\lambda} \tau + \left(\frac{b}{\lambda} \right)^2 \frac{\tau^2}{2!} + \left(2 \left(\frac{b}{\lambda} \right)^3 + (a - 2b) \lambda \right) \frac{\tau^3}{3!} \right) \right) d\tau, \quad (3)$$

где $\lambda(m)$ – трехчлен, определяемый соотношением

$$\lambda(m) = 0,33532 + 1,722757m - 1,388347m^2. \quad (4)$$

Отметим, что в [2] приближенное решение задачи (1), (2) получено в виде (3), при этом значения λ вычисляются из трансцендентного уравнения

$$\lambda \int_0^\infty \exp \left(- \left(\frac{b}{\lambda} \tau + \left(\frac{b}{\lambda} \right)^2 \frac{\tau^2}{2!} + \left(2 \left(\frac{b}{\lambda} \right)^3 + (a - 2b) \lambda \right) \frac{\tau^3}{3!} \right) \right) d\tau - 1 = 0. \quad (5)$$

Для иллюстрации полученных приближенных решений на рис. 1 приведены графики точного (численного) решения задачи (1), (2) для функции $f(\eta)$ и ее первых двух производных, а также графики приближенных решений (3), (4) и (3), (5) и соответствующих производных для $m = 0,2$. Расчёты выполнены для практически значимого промежутка $0 \leq \eta \leq 5$.

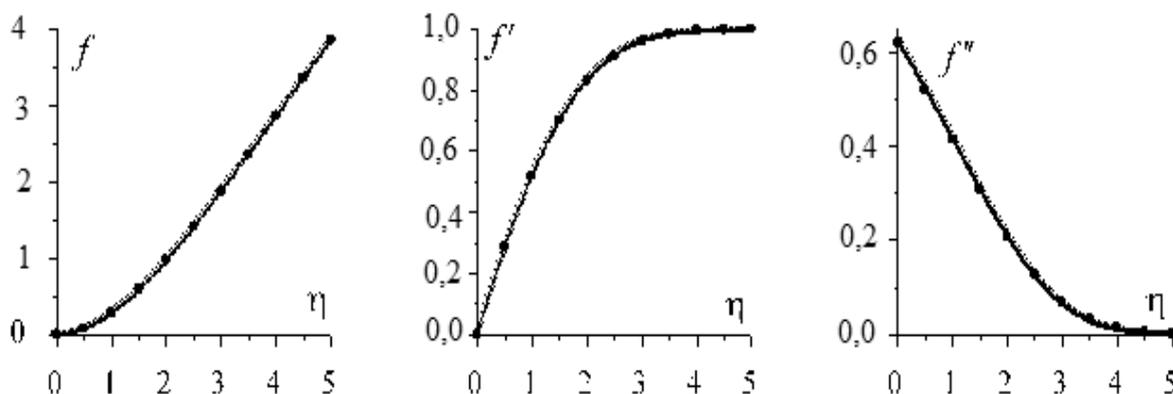


Рис. 1. Графики $f(\eta)$, $f'(\eta)$ и $f''(\eta)$ для $m = 0,2$. Точки соответствуют точному решению; сплошная тонкая линия – приближению (3), (5); линии, помеченные штрихами, – приближению (3), (4)

Из графиков видно, что приближенные решения (3), (4) и (3), (5) и их производные визуально неразличимы и практически не отличаются от точного решения. Очевидно, решение (3), (4) значительно проще решения (3), (5).

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лаптинский, В. Н. К решению задачи о динамическом ламинарном пограничном слое в автомодельном случае / В. Н. Лаптинский, А. А. Романенко // Еругинские чтения – 2014: материалы XVI Междунар. науч. конф. по дифференц. уравнениям, Новополоцк, 20–22 мая 2014 г.: в 2 ч. – Минск: Нац. акад. наук Беларуси; Ин-т математики, 2014. – Ч. 2. – С. 65–66.
2. Лаптинский, В. Н. Конструктивный метод анализа задачи о ламинарном пограничном слое и его применение к расчету охлаждающей способности кристаллизаторов при непрерывном литье / В. Н. Лаптинский. – Могилев: Белорус.-Рос. ун-т, 2010. – 28 с. – (Препринт ИТМ НАН Беларуси; № 18 (Ч. II)).
3. Лаптинский, В. Н. Об одном аналитическом методе решения задачи о динамическом ламинарном пограничном слое в автомодельном случае / В. Н. Лаптинский // Ученые записки ЦАГИ. – 2013. – Т. XLIV, № 5. – С. 72–93.
4. Шлихтинг, Г. Теория пограничного слоя / Г. Шлихтинг. – Москва: Наука, 1974. – 712 с.
5. Теория теплообмена: учебник для вузов / С. И. Исаев [и др.]; под ред. А. И. Леонтьева. – Москва: Высшая школа, 1979. – 495 с.