

УДК 517.927.4

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЯ ЛЯПУНОВА
ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПАРАМЕТРОМ

В. А. ЛИВИНСКАЯ

Белорусско-Российский университет

Могилев, Беларусь

Исследуется задача о периодических решениях с периодом ω уравнения типа [1–5]

$$\ddot{X} = \lambda A(t)X + \lambda^3(P(t)X + XB(t)) + F_0(t) + \lambda F_1(t) + \lambda^2 F_2(t), \quad X \in \mathbb{R}^{n \times m}, \quad (1)$$

где $A(t)$, $B(t)$, $P(t)$, $F_i(t)$ ($i = 0, 1, 2$) – непрерывные ω -периодические матрицы соответствующих размерностей; $\lambda \in \mathbb{R}$; $\dot{X} = dX/dt$.

С помощью метода [6, гл. II] получены коэффициентные достаточные условия однозначной разрешимости задачи, оценка области локализации и алгоритм построения решения.

Уравнение (1) сводится к эквивалентной системе матричных дифференциальных уравнений

$$dX/dt = Y, \quad (2)$$

$$dY/dt = \lambda A(t)X + \lambda^3(P(t)X + XB(t)) + F_0(t) + \lambda F_1(t) + \lambda^2 F_2(t). \quad (3)$$

Таким образом, вместо исходной задачи исследуется периодическая краевая задача для (2), (3) с условиями

$$X(0, \lambda) = X(\omega, \lambda), \quad Y(0, \lambda) = Y(\omega, \lambda). \quad (4)$$

Задача (2)–(4) сведена к эквивалентной системе матричных интегральных уравнений, в которой применена модификация обобщенного принципа сжимающих отображений [7].

Приняты следующие обозначения:

$$\tilde{A}(\omega) = \int_0^{\omega} A(\tau) d\tau, \quad \gamma = \|\tilde{A}^{-1}(\omega)\|, \quad \varepsilon = |\lambda|, \quad \alpha = \max_t \|A(t)\|, \quad \beta = \max_t \|B(t)\|,$$

$$\mu = \max_t \|P(t)\|, \quad h_i = \max_t \|F_i(t)\|, \quad q_1 = \frac{1}{4} \gamma \alpha^2 \omega^3 + \gamma(\beta + \mu)\omega, \quad q_2 = \frac{1}{4} \gamma \alpha(\beta + \mu)\omega^3,$$

$$q(\varepsilon) = \varepsilon q_1 + \varepsilon^3 q_2, \quad K(\varepsilon) = \frac{1}{2} \varepsilon \omega [\alpha + \varepsilon^2(\beta + \mu)], \quad H(\varepsilon) = \gamma \omega \left(\frac{1}{4} \alpha \omega^2 + \frac{1}{\varepsilon} \right) (h_0 + \varepsilon h_1 + \varepsilon^2 h_2),$$

где $t \in [0, \omega]$, $\|\cdot\|$ – согласованная норма матриц.

Теорема. Пусть выполнены условия $\det \tilde{A}(\omega) \neq 0$, $0 < \varepsilon q_1 + \varepsilon^3 q_2 < 1$. Тогда решение $X(t, \lambda), Y(t, \lambda)$ задачи (2)–(4) существует и единственно; оно представимо в виде

$$X(t, \lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{k-1} X_{k-1}(t), \quad (5)$$

$$Y(t, \lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k Y_k(t), \quad (6)$$

где матрицы $X_{k-1}(t), Y_k(t)$ строятся по алгоритму типа [1, 2].

На основе методики, используемой в [1–5], изучены вопросы сходимости, скорости сходимости рядов (5), (6), при этом получены оценки

$$\|X(t, \lambda)\| \leq \frac{H(\varepsilon)}{1 - q(\varepsilon)}, \quad \|Y(t, \lambda)\| \leq \frac{K(\varepsilon)H(\varepsilon)}{1 - q(\varepsilon)} + \frac{1}{2} \omega (h_0 + \varepsilon h_1 + \varepsilon^2 h_2).$$

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лаптинский, В. Н. Об аналитической структуре периодических решений матричного дифференциального уравнения типа Ляпунова / В. Н. Лаптинский, В. А. Ливинская // Дифференциальные уравнения. – 2000. – Т. 36, № 9. – С. 1290–1291.
2. Лаптинский, В. Н. К теории периодических решений матричного дифференциального уравнения второго порядка типа Ляпунова / В. Н. Лаптинский, В. А. Ливинская // Дифференциальные уравнения. – 2002. – Т. 38, № 8. – С. 1133–1134.
3. Ливинская, В. А. К построению периодических решений матричного уравнения Ляпунова второго порядка с параметром / В. А. Ливинская // Еругинские чтения – 2014: материалы XVI Междунар. науч. конф. по дифференц. уравнениям, Новополюцк, 20–22 мая 2014 г. – Новополюцк: Полоц. гос. ун-т, 2014. – С. 66–67.
4. Ливинская, В. А. К теории периодических решений матричного уравнения Ляпунова второго порядка с параметром / В. А. Ливинская // Материалы, оборудование и ресурсосберегающие технологии: материалы Междунар. науч.-техн. конф. – Могилев: Беларус.-Рос. ун-т, 2019. – С. 521–522.
5. Ливинская, В. А. О периодических решениях матричного уравнения Ляпунова второго порядка с параметром / В. А. Ливинская // Материалы, оборудование и ресурсосберегающие технологии: материалы Междунар. науч.-техн. конф. – Могилев: Беларус.-Рос. ун-т, 2020. – С. 493–494.
6. Лаптинский, В. Н. Конструктивный анализ управляемых колебательных систем / В. Н. Лаптинский. – Минск: ИМ НАН Беларуси, 1998.
7. Приближенное решение операторных уравнений / М. А. Красносельский [и др.]. – Москва: Наука, 1969. – 456 с.