УДК 517.927.4

К АНАЛИЗУ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ МАТРИЧНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ЛЯПУНОВА – РИККАТИ

О. А. МАКОВЕЦКАЯ
Белорусско-Российский университет
Могилев, Беларусь

Будем рассматривать задачу

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X + XB(t) + Q_1(t)XQ_2(t)XQ_3(t) + \lambda F(t,X),\ X(t,\lambda) \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad (1)$$

$$X(0,\lambda) = X(\omega,\lambda), \quad (2)$$

где $t \in I$, $A,B,Q_i \in \mathbb{C}(I,\mathbb{R}^{n\times n})$ $i=\overline{1,3}$, $F \in \mathbb{C}(D_{\tilde\rho},\mathbb{R}^{n\times n})$. Будем считать, что матрица-функция $F(t,X)$ в $D_{\tilde\rho}\{(t,X): t\in I, \|X\| \le \tilde\rho\}$ удовлетворяет относительно X локальному условию Липшица; $F(t,0)\not\equiv 0$; $I=[0,\omega]$, $\omega>0$, $0<\tilde\rho\le\infty$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

В данной работе развиты полученные в [1–3] результаты. Методологическую основу исследования представляют конструктивные методы, изложенные в [4].

Воспользуемся обозначениями:

$$D_\rho = \{(t,X): 0\le t\le\omega, \|X\|\le\rho\},\ M=\int_0^\omega A(\tau)d\tau,\ N=-\int_0^\omega B(\tau)d\tau,\ \gamma = \left\|\Phi^{-1}(\omega)\right\|,$$

$$\alpha = \max_t\|A(t)\|,\ \beta=\max_t\|B(t)\|,\ \delta_i = \max_t\|Q_i(t)\|\ (i=\overline{1,3}),\ h=\max_t\|F(t,0)\|,$$

$$\varepsilon=|\lambda|,\ q(\rho,\varepsilon)=q_1(\rho)+q_2(\rho)\varepsilon,\ \varphi(\rho,\varepsilon)=\varphi_1(\rho)+\varphi_2(\rho)\varepsilon,$$

$$q_1(\rho)=\gamma\delta\omega\left[(\alpha+\beta)\omega+2\right]\rho+\frac{1}{2}\gamma\omega^2(\alpha+\beta)^2,\ q_2(\rho)=\gamma\omega L\left[1+\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\omega\right],$$

$$\varphi_1(\rho)=\gamma\delta\omega\left[1+\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\omega\right]\rho^2+\frac{1}{2}\gamma\omega^2(\alpha+\beta)^2\rho,$$

$$\varphi_2(\rho)=\left[1+\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\omega\right](L+h)\gamma\omega,\ \varepsilon_1=\frac{\rho-\varphi_1(\rho)}{\varphi_2(\rho)},\ \varepsilon_2=\frac{\rho-q_1(\rho)}{q_2(\rho)},\ \varepsilon_0=\min\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\},$$

где $\delta=\delta_1\delta_2\delta_3$, $0<\rho<\tilde\rho$, $t\in I$, $L=L(\rho)>0$ – постоянная Липшица для $F(t,X)$ в области D_ρ, Φ – линейный оператор, $\Phi Z = MZ - ZN$, $\|\bullet\|$ – матричная норма.

Теорема. Если матрицы M, N не имеют общих характеристических чисел, $\varphi_1(\rho)<\rho$, $q_2(\rho)<1$, то в случае $|\lambda|\le\varepsilon_0$ решение задачи (1), (2) в области D_ρ существует и единственно и удовлетворяет неравенству $\|X\|_{\mathbb{C}}\le\varphi(\rho,\varepsilon)$.

Предлагается строить решение задачи (1), (2) с помощью следующего алгоритма с неявной вычислительной схемой:

$$X_k(t,\lambda)=\Phi^{-1}\left\{\int_0^\omega A(\tau)d\tau\left(\int_\tau^t\Big[A(\sigma)X_{k-1}(\sigma,\lambda)+X_{k-1}(\sigma,\lambda)B(\sigma)+\right.\right.$$

$$\left.+Q_1(\sigma)X_{k-1}(\sigma,\lambda)Q_2(\sigma)X_{k-1}(\sigma,\lambda)Q_3(\sigma)+\lambda F\big(\sigma,X_{k-1}(\sigma,\lambda)\big)\Big]d\sigma\right)d\tau+$$

$$+\int_0^\omega\left(\int_\tau^t\Big[A(\sigma)X_{k-1}(\sigma,\lambda)+X_{k-1}(\sigma,\lambda)B(\sigma)+Q_1(\sigma)X_{k-1}(\sigma,\lambda)Q_2(\sigma)X_{k-1}(\sigma,\lambda)Q_2(\sigma)+\right.$$

$$\left.+\lambda F\big(\sigma,X_{k-1}(\sigma,\lambda)\big)\Big]d\sigma\right)B(\tau)d\tau-$$

$$\left.-\int_0^\omega\Big[Q_1(\tau)X_k(\tau,\lambda)Q_2(\tau)X_k(\tau,\lambda)Q_3(\tau)+\lambda F\big(\tau,X_k(\tau,\lambda)\big)\Big]d\tau\right\},\ k=1,2,...,\quad(3)$$

в котором начальное приближение X_0 является постоянной $C=C(\lambda)$. Отыскать константу C можно как решение матричного уравнения

$$C=-\Phi^{-1}\int_0^\omega\Big[Q_1(\tau)CQ_2(\tau)CQ_3(\tau)+\lambda F(\tau,C)\Big]d\tau,$$

которое имеет единственное решение, подчиненное неравенству $\|C\|\le\rho$.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Маковецкая, О. А.** Построение и структурные свойства решений периодической краевой задачи для обобщения матричных уравнений Ляпунова и Риккати / О. А. Маковецкая, В. Н. Лаптинский // Дифференциальные уравнения. – 2018. – Т. 54, № 7. – С. 937–928.
2. **Маковецкая, О. А.** К конструктивному анализу периодической краевой задачи для матричного уравнения Ляпунова – Риккати с параметром / О. А. Маковецкая // Еругинские чтения – 2019: материалы Междунар. науч. конф. по дифференц. уравнениям, Могилев, 12–14 мая 2019 г.: в 2 ч. – Могилев, 2019. Ч. 1 – С. 83–84.
3. **Маковецкая, О. А.** К периодической краевой задаче для матричного уравнения Ляпунова – Риккати / О. А. Маковецкая // Материалы, оборудование и ресурсосберегающие технологии: материалы Междунар. науч.-практ. конф. – Могилев, 2020. – С. 495–496.
4. **Лаптинский, В. Н.** Конструктивный анализ управляемых колебательных систем / В. Н. Лаптинский. – Минск: ИМ НАН Беларуси, 1998. – 300 с.