УДК 517.927.4

К РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ДВУХТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ ЛЯПУНОВА С ПАРАМЕТРОМ

И. И. МАКОВЕЦКИЙ
Белорусско-Российский университет
Могилев, Беларусь

В данной работе исследуется задача

$$\frac{dX}{dt}=A(t)X+Q(t)XB(t)+F_0(t,X)+\lambda F_1(t,X),\ X\in\mathbb{R}^{n\times n}, \tag{1}$$

$$MX(0)+NX(\omega)=0, \tag{2}$$

где $A,B,Q\in\mathbb{C}\left(I,\mathbb{R}^{n\times n}\right)$, $F_i\in\mathbb{C}\left(D_{\tilde\rho},\mathbb{R}^{n\times n}\right)$, $I=[0,\omega]$, $D_{\tilde\rho}=\left\{(t,X):t\in I,\|X\|<\tilde\rho\right\}$, $\omega>0$, $0<\tilde\rho\le\infty$, M,N – постоянные $n\times n$-матрицы; функции $F_i(t,X)$ удовлетворяют в $D_{\tilde\rho}$ относительно X условию Липшица (локально); $F_0(t,0)\not\equiv 0,\ \lambda\in\mathbb{R}$.

С помощью качественных методов аналогичная задача исследовалась в [1]. В настоящей работе развиты подходы, отраженные в [2; 3, гл. 1]. На основе конструктивного метода [4, гл. 1] по исходным данным задачи сформулированы достаточные условия однозначной разрешимости, а также алгоритм построения решения и оценка, дающая область локализации этого решения.

Примем следующие обозначения:

$$D_\rho=\left\{(t,X):t\in I,\|X\|\le\rho\right\},\ \lambda_1=\max_t\|U(t)\|,\ \lambda_2=\max_t\left\|U^{-1}(t)\right\|,\ \Phi=P+E,$$

$$P=U^{-1}(\omega)N^{-1}M,\ \beta=\max_t\|B(t)\|,\ r=\max_t\|Q(t)\|,\ \gamma=\left\|\Phi^{-1}\right\|,\ m=\max\left\{\|P\|,1\right\},$$

$$h_i=\max_t\|F_i(t,0)\|,\ a_0=\gamma\lambda_0 m\omega(\beta r+L_0),\ a_1=\gamma\lambda_0 m\omega L_1,\ b_0=\gamma\lambda_0 m\omega h_0,\ b_1=\gamma\lambda_0 m\omega h_1,$$

$$q=a_0+\varepsilon a_1,\ p=b_0+\varepsilon b_1,\ F(t,X,\lambda)=F_0(t,X)+\lambda F_1(t,X),$$

$$L=L_0+\varepsilon L_1,\ h=h_0+\varepsilon h_1,\ \varepsilon=|\lambda|,\ \varepsilon_0=\frac{\rho(1-a_0)-b_0}{\rho a_1+b_1},$$

где $t\in I$, $0<\rho<\tilde\rho$, $\lambda_0=\lambda_1\lambda_2$, $L_i=L_i(\rho>0)$ – постоянные Липшица для $F_i(t,X)$ в D_ρ.

Лемма. Потребуем выполнения условий: 1) $\det N\ne0$, 2) $\det\Phi\ne0$, 3) $q<1$, 4) $p/(1-q)\le\rho$. Тогда решение задачи (1), (2) в области D_ρ существует и единственно и его можно представить в виде предела равномерно сходящейся последовательности матричных функций, удовлетворяющих условию (2) теоремы, при этом решение удовлетворяет оценке

$$\|X\|_{\mathbb{C}} \le \frac{p}{1-q}.$$

Теорема. Пусть выполнены условия 1) и 2) леммы, а также неравенства $a_0 < 1$, $b_0 / (1-q) < \rho$. Тогда, если $|\lambda| \le \varepsilon_0$, решение задачи (1), (2) в области D_ρ существует и единственно. Решение $X(t,\lambda)$ может быть представлено как предел равномерно сходящейся последовательности матричных функций, определяемых рекуррентным интегральным соотношением и удовлетворяющих условию (2), при этом справедливы оценки

$$\|X(t,\lambda)\| \le \frac{p}{1-q},\ \|X(t,\lambda) - X(t,0)\| \le \frac{\varepsilon\left(a_1\|X_0\|_{\mathbb{C}} + b_1\right)}{1-q}.$$

Рекуррентное интегральное соотношение имеет вид:

$$X_{k+1}(t,\lambda) = U(t)\Phi^{-1}\left[P\int_0^t U^{-1}(\tau)\Big(Q(\tau)X_k(\tau,\lambda)B(\tau) + F\big(\tau, X_k(\tau,\lambda),\lambda\big)\Big)d\tau - \right.$$
$$\left. -\int_t^\omega U^{-1}(\tau)\Big(Q(\tau)X_k(\tau,\lambda)B(\tau) + F\big(\tau, X_k(\tau,\lambda),\lambda\big)\Big)d\tau\right],\ k = 0,1,2,\ldots, \qquad (3)$$

где $X_0(t,\lambda)$ – произвольная матрица из $\mathbb{C}$, принадлежащая шару $\|X\|_{\mathbb{C}} \le \rho$.

Скорость сходимости алгоритма (3) характеризуется оценкой

$$\|X_k - X\|_{\mathbb{C}} \le q^k \frac{\|X_1 - X_0\|_{\mathbb{C}}}{1-q},\ k = 0,1,2,\ldots,$$

которую можно уточнить, приняв $X_0 \equiv 0$:

$$\|X_k - X\|_{\mathbb{C}} \le q^k \frac{p}{1-q}.$$

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Murty, K. N.** Two (multi) point nonlinear Lyapunov systems – existence and uniqueness / K. N. Murty, G. W. Howell, S. Sivasundaram // Journal of mathematical analysis and applications. – 1992. – P. 505–515.

2. **Маковецкий, И. И.** Левосторонняя регуляризация двухточечной краевой задачи для матричного уравнения Ляпунова с параметром / И. И. Маковецкий // Еругинские чтения – 2019: материалы Междунар. научн. конф. по дифференц. уравнениям, Могилев, 12–14 мая 2019 г.: в 2 ч. – Могилев, 2019. – С. 85–86.

3. **Лаптинский, В. Н.** Матричные дифференциальные уравнения Ляпунова и Риккати / В. Н. Лаптинский, И. И. Маковецкий, В. В. Пугин. – Могилев: Белорус.-Рос. ун-т, 2012. – 167 с.

4. **Лаптинский, В. Н.** Конструктивный анализ управляемых колебательных систем / В. Н. Лаптинский. – Минск: ИМ НАН Беларуси, 1998. – 300 с.