УДК 517.927.4

К РАЗРЕШИМОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ МАТРИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА РИККАТИ

Д. В. РОГОЛЕВ
Белорусско-Российский университет
Могилев, Беларусь

Рассматривается краевая задача типа [1, 2]

$$\frac{d\mathrm{X}}{dt}=\mathrm{A}_1(t)\mathrm{X}+\mathrm{C}_1(t)\mathrm{X}\mathrm{B}_1(t)+\mathrm{X}\big(\mathrm{S}_1(t)\mathrm{X}+\mathrm{S}_2(t)\mathrm{Y}\big)+\lambda\mathrm{F}_1(t), \tag{1}$$

$$\frac{d\mathrm{Y}}{dt}=\mathrm{A}_2(t)\mathrm{Y}+\mathrm{C}_2(t)\mathrm{Y}\mathrm{B}_2(t)+\mathrm{Y}\big(\mathrm{P}_1(t)\mathrm{X}+\mathrm{P}_2(t)\mathrm{Y}\big)+\lambda\mathrm{F}_2(t), \tag{2}$$

$$\mathrm{X}(0)=\mathrm{X}(\omega), \tag{3}$$

$$\mathrm{Y}(0)=\mathrm{Y}(\omega), \tag{4}$$

где $t\in[0,\omega]$, $\mathrm{X}(t),\mathrm{Y}(t)\in\mathbb{R}^{n\times n}$, матрицы $\mathrm{A}_i(t)$, $\mathrm{B}_i(t)$, $\mathrm{C}_i(t)$, $\mathrm{S}_i(t)$, $\mathrm{P}_i(t)$, $\mathrm{F}_i(t)$ $(i=1,2)$ определены и непрерывны на промежутке $[0,\omega]$; $\omega>0$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

Примем следующие обозначения:

$$D=\{(t,\mathrm{X},\mathrm{Y}):0\le t\le\omega,\|\mathrm{X}\|\le\rho_1,\|\mathrm{Y}\|\le\rho_2\},\ \tilde{\mathrm{A}}_i(\omega)=\int_0^\omega \mathrm{A}_i(\tau)d\tau,\ \gamma_i=\left\|\tilde{\mathrm{A}}_i^{-1}(\omega)\right\|,$$
$$\alpha_i=\max_t\|\mathrm{A}_i(t)\|,\ \beta_i=\max_t\|\mathrm{B}_i(t)\|,\ \sigma_i=\max_t\|\mathrm{C}_i(t)\|,\ \delta_i=\max_t\|\mathrm{S}_i(t)\|,\ \mu_i=\max_t\|\mathrm{P}_i(t)\|,$$
$$h_i=\max_t\|\mathrm{F}_i(t)\|,\ \|\mathrm{T}\|_C=\max_t\|\mathrm{T}(t)\|,\ \varepsilon=|\lambda|,\ \varepsilon_0=\min\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\},$$
$$q_{11}=\gamma_1\left[\frac{1}{2}\alpha_1(\alpha_1+\beta_1\sigma_1+2\delta_1\rho_1+\delta_2\rho_2)\omega^2+(\beta_1\sigma_1+2\delta_1\rho_1+\delta_2\rho_2)\omega\right],$$
$$q_{12}=\gamma_1\delta_2\rho_1\omega\left(\frac{1}{2}\alpha_1\omega+1\right),\ q_{21}=\gamma_2\mu_1\rho_2\omega\left(\frac{1}{2}\alpha_2\omega+1\right),$$
$$q_{22}=\gamma_2\left[\frac{1}{2}\alpha_2(\alpha_2+\beta_2\sigma_2+\mu_1\rho_1+2\mu_2\rho_2)\omega^2+(\beta_2\sigma_2+\mu_1\rho_1+2\mu_2\rho_2)\omega\right],$$
$$\varepsilon_1=\frac{\rho_1-\tilde{\gamma}_1\left\{\frac{1}{2}\alpha_1\left[(\alpha_1+\beta_1\sigma_1)\rho_1+\delta_1\rho_1^2+\delta_2\rho_1\rho_2\right]\omega^2+\left[\beta_1\sigma_1\rho_1+\delta_1\rho_1^2+\delta_2\rho_1\rho_2\right]\omega\right\}}{\tilde{\gamma}_1\left(\frac{1}{2}\alpha_1\omega+1\right)h_1\omega},$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\rho_2 - \tilde{\gamma}_2 \left\{ \frac{1}{2}\alpha_2 \left[(\alpha_2 + \beta_2\sigma_2)\rho_2 + \mu_2\rho_2^2 + \mu_1\rho_1\rho_2 \right]\omega^2 + \left[\beta_2\sigma_2\rho_2 + \mu_2\rho_2^2 + \mu_1\rho_1\rho_2 \right]\omega \right\}}{\tilde{\gamma}_2 \left(\frac{1}{2}\alpha_2\omega + 1 \right) h_2\omega},$$

где $t \in [0,\omega]$, $\rho_1, \rho_2 > 0$, $\|\cdot\|$ – согласованная норма матриц, например, любая из норм, приведенных в [3, с. 21].

В случае, когда коэффициенты в (1), (2) постоянные, получим систему типа [4], играющую важную роль в теории управления.

Теорема. *Пусть выполнены следующие условия*:

1) $\det \tilde{\mathrm{A}}_i \neq 0 \ (i = 1,2)$;

2)
$$\gamma_1 \left\{ \frac{1}{2}\alpha_1 \left[(\alpha_1 + \beta_1\sigma_1)\rho_1 + \delta_1\rho_1^2 + \delta_2\rho_1\rho_2 \right]\omega^2 + \right.$$
$$\left. + \left[\beta_1\sigma_1\rho_1 + \delta_1\rho_1^2 + \delta_2\rho_1\rho_2 \right]\omega \right\} < \rho_1,$$
$$\gamma_2 \left\{ \frac{1}{2}\alpha_2 \left[(\alpha_2 + \beta_2\sigma_2)\rho_2 + \mu_2\rho_2^2 + \mu_1\rho_1\rho_2 \right]\omega^2 + \right.$$
$$\left. + \left[\beta_2\sigma_2\rho_2 + \mu_2\rho_2^2 + \mu_1\rho_1\rho_2 \right]\omega \right\} < \rho_2;$$

3) $q_{11} < 1$, $\det(\mathrm{E} - \mathrm{Q}) > 0$,

где $\mathrm{E} = diag(1,1)$, $\mathrm{Q} = (q_{ij})$.

Тогда при $|\lambda| < \varepsilon_0$ *задача* (1)–(4) *однозначно разрешима в области* D. *Решение представимо как предел равномерно сходящейся последовательности матричных функций, определяемых рекуррентными интегральными соотношениями и удовлетворяющих условиям* (3), (4).

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Лаптинский, В. Н.** Конструктивные методы построения решения периодической краевой задачи для системы матричных дифференциальных уравнений типа Риккати условий / В. Н. Лаптинский, Д. В. Роголев // Дифференциальные уравнения. – 2011. – Т. 47, № 10. – С. 1412–1420.

2. **Роголев, Д. В.** К анализу периодической краевой задачи для системы матричных уравнений типа Риккати с параметром / Д. В. Роголев // Материалы, оборудование и ресурсосберегающие технологии: материалы Междунар. науч.-техн. конф. – Могилев: Белорус.-Рос. ун-т, 2019. – С. 533–534.

3. **Демидович, Б. П.** Лекции по математической теории устойчивости / Б. П. Демидович. – Москва: Наука, 1967. – 472 с.

4. **Jodar, L.** Explicit solutions of Riccati equations appearing in differential games / L. Jodar // Appl. Mathematics Letters. – 1990. – Vol. 3, №. 4. – P. 9–12.