МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Высшая математика»

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Методические рекомендации к практическим занятиям для студентов направления подготовки 01.03.04 «Прикладная математика» очной формы обучения

Часть 3

Могилев 2021

УДК 519.6
ББК 22.161
М34

Рекомендовано к изданию
учебно-методическим отделом
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Высшая математика» «25» февраля 2021 г., протокол № 6

Составители: Т. Ю. Орлова;
А. А. Романенко

Рецензент канд. физ.-мат. наук, доц. И. И. Маковецкий

Методические рекомендации содержат необходимые теоретические сведения, примеры для самостоятельной работы по теме «Интегрирование функции одной и многих переменных» дисциплины «Математический анализ».

Учебно-методическое издание

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Часть 3

Ответственный за выпуск В. Г. Замураев

Корректор А. А. Подошевко

Компьютерная верстка Н. П. Полевничая

Подписано в печать . Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс. Печать трафаретная. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 56 экз. Заказ № .

Издатель и полиграфическое исполнение:
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования
«Белорусско-Российский университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/156 от 07.03.2019.
Пр-т Мира, 43, 212022, г. Могилев.

Содержание

Часть 3

Практические занятия № 35 и 36. Непосредственное интегрирование, интегрирование заменой переменной и по частям

Неопределенный интеграл (НИ).

Функция $F(x)$ называется ***первообразной*** для функции $f(x)$ на некотором промежутке X, если $\forall x \in X \quad F'(x) = f(x)$.

Множество всех первообразных $\{F(x)+C\}$ для функции $f(x)$ на промежутке X называется ***неопределенным интегралом*** от $f(x)$ и обозначается:

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

где $f(x)$ – подынтегральная функция;

$f(x)dx$ – подынтегральное выражение;

x – переменная интегрирования.

Условие существования НИ. Всякая непрерывная на (a,b) функция $f(x)$ имеет на этом промежутке первообразную, т. е. неопределенный интеграл от нее существует.

Свойства НИ:

1) $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$;

2) $\int dF(x) = F(x) + C$;

3) $\int \left(a \cdot f(x) \pm b \cdot g(x)\right)dx = a\int f(x)dx \pm b\int g(x)dx$, где $a, b = \text{const}$;

4) если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то $\int f(u)du = F(u) + C$, где $u = \varphi(x)$ (формула НИ остается справедливой независимо от того, является ли переменная интегрирования независимой переменной или любой функцией от нее, имеющей непрерывную производную). Это свойство называют свойством ***неизменности (инвариантности)*** формулы интегрирования;

5) $\int f(kx+b)dx = \dfrac{1}{k}F(kx+b) + C$.

Поскольку интегрирование есть действие, обратное дифференцированию, то можем записать таблицу НИ от основных элементарных функций путем обращения соответствующих формул таблицы производных.

Таблица НИ от основных элементарных функций:

1) $\int 0dx = C, \quad C = \text{const}$;

2) $\int x^{\alpha}dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1, \alpha \in \mathbb{R})$.

В частности:

при $\alpha = 0$ имеем $\int 1dx = x + C$,

при $\alpha = -\frac{1}{2}$ имеем $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + C$,

при $\alpha = -2$ имеем $\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$;

3) $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$;

4) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$. При $a = e$, $\int e^x dx = e^x + C$, поскольку $\ln e = 1$;

5) $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$, $\int \operatorname{sh} x\, dx = \operatorname{ch} x + C$;

6) $\int \cos x\, dx = \sin x + C$, $\int \operatorname{ch} x\, dx = \operatorname{sh} x + C$;

7) $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C$, $\int \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} dx = \operatorname{th} x + C$;

8) $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C$, $\int \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} dx = -\operatorname{cth} x + C$;

9) $\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a} \operatorname{arcctg} \frac{x}{a} + C$;

10) $\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x - a}{x + a}\right| + C$;

11) $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C = -\arccos \frac{x}{a} + C$;

12) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$.

Основные методы и приемы интегрирования.

Суть всех методов и приемов интегрирования заключается в том, чтобы свести интеграл к табличному. Результат интегрирования проверяется дифференцированием. Заметим, что интегрирование может быть осуществлено не единственным способом.

***Интегрирование подстановкой* (*заменой переменной*).** Пусть $x = \varphi(t)$ определена и дифференцируема на некотором промежутке T и пусть X – множество значений этой функции, на котором определена $f(x)$. Тогда, если на множестве X функция $f(x)$ имеет первообразную, то на множестве T справедлива формула замены переменной в НИ:

$$\int f(x)dx = \left[x = \varphi(t)\right] = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\,.$$

После нахождения интеграла по переменной t следует вернуться к переменной x по формуле $t=\varphi^{-1}(x)$, т. е. найдя обратную функцию.

Прием интегрирования путем подведения подынтегральной функции или ее части под знак дифференциала. Напомним одно из свойств НИ, а именно свойство неизменности формулы интегрирования.

Если $\int f(x)dx=F(x)+C$ табличный, то $\int f(u)du=F(u)+C$, где $u=\varphi(x)$ – некоторая дифференцируемая функция x.

Пусть требуется найти интеграл $\int \psi(x)dx$, который не является табличным. Суть приема заключается в том, чтобы в подынтегральном выражении $\psi(x)dx$ в качестве множителя выделить дифференциал некоторой функции $u=\varphi(x)$, т. е. $du=\varphi'(x)dx$, и подынтегральное выражение $\psi(x)dx$ представить в виде $\psi(x)dx=f(\varphi(x))\varphi'(x)dx=f(u)du$, где $u=\varphi(x)$. После чего интеграл $\int f(u)du$ должен стать табличным или сводится к нему. Найдя первообразную $F(u)$, следует вернуться к переменной x по формуле $u=\varphi(x)$, т. е. получить $F(\varphi(x))$.

Интегрирование по частям. Пусть $u=u(x)$ и $v=v(x)$ – непрерывные функции, имеющие непрерывные производные. Тогда

$$\int udv=u\cdot v-\int vdu.$$

Эту формулу называют формулой интегрирования по частям.

Примеры для самостоятельной работы

1 Для функции $f(x)$ найти первообразную $F(x)$, график которой проходит через точку $(x_0;y_0)$:

1) $f(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+\sin(x+1), x\in(0;+\infty),(1;1)$;

2) $f(x)=\dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{x^2}, x\in(-\infty;0),(-1;1)$;

3) $f(x)=|x|, x\in\mathbb{R},(-2;4)$.

2 Найти неопределённые интегралы, используя свойства и таблицу НИ:

1) $\int x(x+1)(x-2)dx$;

2) $\int\left(\dfrac{8}{x^3}+\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{2}{x}\right)dx$;

3) $\int\dfrac{x^2-x+1}{\sqrt{x}}dx$;

4) $\int\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\,dx$;

5) $\int\dfrac{dx}{7+x^2}$;

6) $\int\dfrac{dx}{3x^2-5}$;

7) $\int \frac{\sqrt{4+x^2}+2\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{16-x^4}}dx$;

8) $\int 2^{2x}e^x dx$;

9) $\int \frac{2^x+5^x}{10^x}dx$;

10) $\int \sin^2\frac{x}{2}dx$;

11) $\int \mathrm{ctg}^2\, x dx$;

12) $\int \frac{1}{2x-5}dx$;

13) $\int \frac{1}{\sqrt{3x+1}}dx$;

14) $\int \sin(3x+5)\,dx$;

15) $\int \frac{1}{\cos^2(x-3)}dx$;

16) $\int (3x+5)^{99}\,dx$;

17) $\int \frac{1}{(7x+1)^2}dx$;

18) $\int \sqrt[3]{5x+2}\,dx$;

19) $\int e^{2x+3}dx$;

20) $\int \frac{1}{4x^2+1}dx$;

21) $\int \frac{1}{\sqrt{1-9x^2}}dx$.

3 Найти неопределённые интегралы, используя метод замены или подведение под знак дифференциала:

1) $\int \frac{xdx}{1+x^2}$;

2) $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2-1}}$;

3) $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx$;

4) $\int x^2e^{x^3}\,dx$;

5) $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$;

6) $\int \frac{\sin(\ln x)}{x}dx$;

7) $\int \frac{\arcsin^2 x}{\sqrt{1-x^2}}dx$;

8) $\int \frac{dx}{(1+x^2)\,\mathrm{arctg}\, x}$;

9) $\int e^{\sin x}\cos x\,dx$;

10) $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx$;

11) $\int \mathrm{ctg}\, x\,dx$;

12) $\int \frac{\mathrm{tg}\, x}{\cos^2 x}dx$;

13) $\int \left(\frac{x}{x^5+2}\right)^4 dx$;

14) $\int \frac{xdx}{(1-x)^{12}}$;

15) $\int \frac{xdx}{x^4+6x^2+5}$;

16) $\int e^{2x^2+2x-1}(2x+1)dx$;

17) $\int \frac{dx}{e^x+\sqrt{e^x}}$;

18) $\int \frac{e^{2x}dx}{\sqrt{e^{4x}+1}}$;

19) $\int \frac{e^{2x}dx}{\sqrt[4]{1+e^x}}$;

20) $\int \frac{\sin 2x\,dx}{\sqrt{25\sin^2 x+9\cos^2 x}}$;

21) $\int \frac{dx}{\operatorname{ch} x}$;

22) $\int \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\sin 2x} dx$;

23) $\int \frac{\ln \arccos x}{\sqrt{1-x^2} \arccos x} dx$;

24) $\int \frac{\operatorname{arctg} e^x}{\operatorname{ch} x} dx$.

4 Найти неопределённые интегралы, используя метод интегрирования по частям:

1) $\int (x+1)\cos 2x\, dx$;

2) $\int x^2 e^x\, dx$;

3) $\int (x^2+1)\sin x\, dx$;

4) $\int x^2 \ln x\, dx$;

5) $\int \operatorname{arctg} x\, dx$;

6) $\int \arcsin x\, dx$;

7) $\int \frac{x dx}{\cos^2 x}$;

8) $\int x^2 \arcsin 2x dx$;

9) $\int \operatorname{arctg} \sqrt{x} dx$;

10) $\int \frac{x \arccos x}{\sqrt{1-x^2}} dx$;

11) $\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^3 dx$;

12) $\int e^{ax} \sin bx\, dx$, $a^2+b^2 \neq 0$;

13) $\int 3^x \cos x dx$;

14) $\int \sqrt{x^2+a}\, dx$;

15) $\int x e^x \sin^2 x dx$;

16) $\int e^{\arccos x} dx$;

17) $\int e^{-x} \operatorname{arctg} e^x dx$;

18) $\int \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}} dx$;

19) $\int \frac{x \ln x}{\sqrt{1+x^2}} dx$.

Практическое занятие № 37. Интегрирование дробно-рациональных функций и функций, рационально зависящих от тригонометрических

Интегрирование дробно-рациональных функций. Рациональной функцией $R(x)$ называется дробь вида $R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, где $P_n(x), Q_m(x)$ – многочлены степеней n, m соответственно.

Рациональная дробь называется *правильной*, если $n < m$; *неправильной* – если $n \geq m$. Любую неправильную дробь можно представить в виде суммы многочлена степени $n-m$ и правильной рациональной дроби.

Каждая правильная рациональная дробь на каждом промежутке, принадлежащем её области определения, представима в виде суммы простейших (элементарных) рациональных дробей $\frac{A}{(x-a)^k}$, $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}$, где $p^2-4q<0$, $k \in \mathbb{N}$.

Поэтому интегрирование рациональных дробей сводится к разложению рациональной функции на простейшие дроби и к интегрированию простейших дробей и многочленов.

Интегрирование простейших дробей производится следующим образом:

1) $\int \frac{A}{x-a}dx = A\int \frac{1}{x-a}dx = A\int \frac{1}{x-a}d\left(x-a\right) = A\cdot \ln\left|x-a\right| + C$;

2) $\int \frac{A}{\left(x-a\right)^k}dx = A\int \frac{d\left(x-a\right)}{\left(x-a\right)^k} = A\int \left(x-a\right)^{-k} d\left(x-a\right) = A\cdot \frac{\left(x-a\right)^{-k+1}}{-k+1} + C$;

3) $\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx$. Интеграл находится с помощью выделения полного квадрата в знаменателе, т. е. $x^2+px+q = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(q-\frac{p^2}{4}\right)$, с последующей подстановкой $t = x+\frac{p}{2}$, $x = t-\frac{p}{2}$, $dx = dt$. Данный прием справедлив и в случае $D>0$;

4) $\int \frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^k}dx$. Интеграл находится аналогично предыдущему с использованием рекуррентной формулы

$$\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{k+1}} = \frac{t}{2ka^2(t^2+a^2)^k} + \frac{2k-1}{2ka^2}\cdot \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^k}.$$

Интегрирование некоторых функций, рационально зависящих от тригонометрических. Интегралов от тригонометрических функций может быть бесконечно много. Большинство из этих интегралов вообще нельзя вычислить аналитически, поэтому рассмотрим некоторые главнейшие типы функций, которые могут быть проинтегрированы всегда.

Интеграл вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$, где R – некоторая рациональная функция от переменных $\sin x$ и $\cos x$, вычисляется с помощью *универсальной тригонометрической подстановки*:

$$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2},\ -\pi < x < \pi .$$

Эта подстановка позволяет преобразовать тригонометрическую функцию в рациональную:

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2};\ \cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2};\quad x = 2\operatorname{arctg} t;\qquad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Таким образом, $\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}dt = \int R_1(t)dt$, где $R_1\left(t\right)$ – рациональная функция от t.

Иногда при использовании универсальной подстановки приходится проводить громоздкие вычисления, поэтому целесообразно рассмотреть наиболее удобные подстановки (частные случаи):

1) $\int R(\sin x, \cos x)dx$, если функция R является нечётной относительно $\cos x$, т. е. $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$.

Несмотря на возможность вычисления такого интеграла с помощью универсальной тригонометрической подстановки, рациональнее применить подстановку $t = \sin x$;

2) $\int R(\sin x, \cos x)dx$, если функция R является нечётной относительно $\sin x$, т. е. $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то $t = \cos x$;

3) $\int R(\sin x, \cos x)dx$, если функция R является чётной относительно $\sin x$ и $\cos x$, т. е. $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, то $t = \mathrm{tg}\, x$ или $t = \mathrm{ctg}\, x$.

Интегралы вида $\int \mathrm{tg}^n x\, dx$, $\int \mathrm{ctg}^n x\, dx$ $(n \in \mathbb{N}, n > 1)$ рационализируются с помощью подстановок $\mathrm{tg}\, x = t$, $\mathrm{ctg}\, x = t$ соответственно.

Для интегрирования произведения синусов и косинусов различных аргументов применяются тригонометрические формулы:

$$\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)\right);$$

$$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)\right);$$

$$\sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)\right).$$

Если $\int \cos^{2n} x \cdot \sin^{2m} x dx$, где $m, n \in \mathbb{N}$, удобно использовать формулы понижения степени:

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}; \qquad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}.$$

Примеры для самостоятельной работы

1 Проинтегрировать рациональные функции:

1) $\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 13}$;

2) $\int \frac{dx}{x^2 + 2x - 3}$;

3) $\int \frac{dx}{2x^2 - 4x + 5}$;

4) $\int \frac{(2x - 5)dx}{x^2 + 6x + 13}$;

5) $\int \frac{(x + 3)dx}{x^2 + 6x - 7}$;

6) $\int \frac{3x^2 + 2x - 1}{(x - 1)^2 (x + 2)} dx$;

7) $\int \frac{x^4 + 3x^3 + 3x^2 - 5}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1} dx$;

8) $\int \frac{1}{x(x^2 + 2)} dx$;

9) $\int \frac{dx}{x^3+8}$;

10) $\int \frac{\left(2x^2-1\right)dx}{x^3-5x^2+6x}$;

11) $\int \frac{xdx}{x^4+6x^2+13}$;

12) $\int \frac{dx}{x^4+2x^2+1}$;

13) $\int \frac{x-1}{\left(x^2+1\right)^2}dx$;

14) $\int \frac{x-1}{\left(x^2+1\right)^3}dx$;

15) $\int \frac{(5x-13)dx}{\left(x^2-5x+6\right)^2}$;

16) $\int \frac{x^4+1}{x^4-1}dx$.

2 Проинтегрировать следующие функции:

1) $\int \sin^5 xdx$;

2) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^8 x}dx$;

3) $\int \cos^3 x\ \sin^4 x\, dx$;

4) $\int \frac{dx}{\sin^3 x\cdot\cos^5 x}$;

5) $\int \frac{dx}{\sin^6 x}$;

6) $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}}dx$;

7) $\int \cos^2 x\cdot\sin^2 xdx$;

8) $\int \cos^4 \frac{x}{2}dx$;

9) $\int \frac{dx}{3\cos x+2}$;

10) $\int \frac{dx}{4\sin^2 x-7\cos^2 x}$;

11) $\int \frac{dx}{3+\cos x-2\sin x}$;

12) $\int \frac{1}{5+4\sin x}dx$;

13) $\int \frac{1}{\sin^4 x}dx$;

14) $\int \frac{\sin xdx}{\cos^2 x-2\cos x+5}$;

15) $\int \frac{dx}{\cos^3 x}$;

16) $\int \cos 5x\cdot\sin 3xdx$;

17) $\int \sin 10x\cdot\sin 15xdx$;

18) $\int \mathrm{ctg}^3\, x\, dx$.

Практическое занятие № 38. Методы рационализации дробно-линейных, квадратичных и биномиальных иррациональностей. Подстановки Эйлера

Рассмотрим некоторые приемы для интегрирования различных типов иррациональных функций:

1) $\int R\left(x, \sqrt[n_1]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_1}}, \sqrt[n_2]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_2}}, \ldots, \sqrt[n_k]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_k}}\right)dx$, где $R-$рациональная функция своих аргументов, $a,b,c,d\in\mathbb{R}$, $n_1,n_2,\ldots,n_k\in\mathbb{N}\setminus\{1\}, m_1,m_2,\ldots,m_k\in\mathbb{Z}$,

$\frac{a}{c} \neq \frac{b}{d}$. Функция рационализируется с помощью подстановки $\frac{ax+b}{cx+d} = t^s$, где $s = \text{НОК}\left(n_1, n_2, \ldots, n_k\right)$;

2) интеграл вида $\int \frac{(mx+n)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$ называют НИ от квадратичных иррациональностей. Он находится с помощью выделения полного квадрата под знаком радикала, т. е. $ax^2+bx+c = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a^2}\right)$ и подстановки $t = x + \frac{b}{2a}$;

3) $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$, где R – рациональная функция двух аргументов.

Выделим полный квадрат: $ax^2+bx+c = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a^2}\right)$. Обозначим: $u = x + \frac{b}{2a}$; $m^2 = \pm\frac{4ac-b^2}{4a^2}$.

Таким образом, интеграл приводится к одному из трех типов:

$$\int R(u, \sqrt{m^2-u^2})du \quad \Rightarrow \quad u = m\cdot\sin t\ \left(u = m\cdot\cos t\right);$$

$$\int R(u, \sqrt{m^2+u^2})du \quad \Rightarrow \quad u = m\cdot\operatorname{tg} t\ \left(u = m\cdot\operatorname{ctg} t\right);$$

$$\int R(u, \sqrt{u^2-m^2})du \quad \Rightarrow \quad u = \frac{m}{\sin t}\left(u = \frac{m}{\cos t}\right).$$

Также такого типа интегралы можно взять по частям;

4) интеграл вида $\int \frac{dx}{(mx+n)^k\sqrt{ax^2+bx+c}}$ рационализируется при помощи подстановки $t = \frac{1}{mx+n}$;

5) П. Л. Чебышев в 1853 г. доказал, что интеграл от биноминального дифференциала $x^m\cdot\left(a+bx^n\right)^p dx$, где $m,n\in\mathbb{Q}$; $a,b\in\mathbb{R}$, может быть выражен через элементарные функции только в следующих трёх случаях:

- если $p\in\mathbb{Z}$, то $x = t^s$, где s – НОК знаменателей m и n;
- если $\frac{m+1}{n}\in\mathbb{Z}$, то $a+bx^n = t^s$, где s – знаменатель числа p;
- если $\frac{m+1}{n}+p\in\mathbb{Z}$, то $a+bx^n = x^n\cdot t^s$, где s – знаменатель числа p.

Примеры для самостоятельной работы

Проинтегрировать следующие иррациональности:

1) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+6}}$;

2) $\int \frac{dx}{\sqrt{8x-x^2}}$;

3) $\int \frac{(x-3)dx}{\sqrt{x^2-6x+1}}$;

4) $\int \frac{(x+4)dx}{\sqrt{2-x-x^2}}$;

5) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x}-\sqrt[4]{1-2x}}$;

6) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}(x+5)}$;

7) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}$;

8) $\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} \cdot \frac{dx}{(x-1)^3}$;

9) $\int \frac{(x^2+4x)dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$;

10) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x+1}+\sqrt[3]{(2x+1)^2}}$;

11) $\int \frac{\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[4]{x-1}}{(x-1)\left(1+\sqrt[6]{x-1}\right)}dx$;

12) $\int \sqrt{1-2x-x^2}\,dx$;

13) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$;

14) $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}}dx$;

15) $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x+2}}$;

16) $\int x^2\sqrt{4-x^2}\,dx$;

17) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{(2-x^2)^3}}$;

18) $\int \sqrt{3+2x-x^2}\,dx$;

19) $\int \frac{dx}{\sqrt{(4+x^2)^3}}$;

20) $\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{\sqrt{x}+1}}$;

21) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}\left(1+\sqrt[3]{x^2}\right)}$;

22) $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx$;

23) $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}$.

Практическое занятие № 39. Оценки интегралов

***Определенный интеграл* (*ОИ*)**. Если функция $y=f(x)$ определена на $[a,b]$ и $a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_{n-1}<x_n=b$, то интегралом функции $f(x)$ на сегменте $[a,b]$ называется число $\int\limits_a^b f(x)dx=\lim\limits_{\max\{\Delta x_i\}\to 0}\sum\limits_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)\cdot\Delta x_i$, где $x_i\le\xi_i\le x_{i+1}$ и $\Delta x_i=x_{i+1}-x_i$.

Для существования предела необходимо и достаточно, чтобы нижняя интегральная сумма $\underline{S}=\sum\limits_{i=0}^{n-1}m_i\Delta x_i$ и верхняя интегральная сумма $\overline{S}=\sum\limits_{i=0}^{n-1}M_i\Delta x_i$, где

$m_i = \inf\limits_{x_i \le x \le x_{i+1}} f(x)$ и $M_i = \sup\limits_{x_i \le x \le x_{i+1}} f(x)$, имели общий предел при $\max\{\Delta x_i\} \to 0$.

Функции $f(x)$, для которых предел $\lim\limits_{\max\{\Delta x_i\}\to 0} \sum\limits_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\cdot \Delta x_i$ существует, называются интегрируемыми (собственно) на соответствующем промежутке. В частности, непрерывная функция, ограниченная функция, имеющая конечное число точек разрыва, ограниченная монотонная функция, – интегрируемы на любом конечном сегменте. Если функция $f(x)$ не ограничена на сегменте $[a,b]$, то она собственно не интегрируема на $[a,b]$.

Условие интегрируемости. Необходимым и достаточным условием интегрируемости на данном сегменте $[a,b]$ функции $f(x)$ является выполнение равенства $\lim\limits_{\max\{\Delta x_i\}\to 0} \sum\limits_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i = 0$, где $\omega_i = M_i - m_i$ – колебание функции $f(x)$ на сегменте $[x_i; x_{i+1}]$.

Основные свойства определенного интеграла:

1) $\int\limits_a^a f(x)dx = 0$;

2) $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} < 0$;

3) *свойство линейности* (распространяется на конечное число слагаемых): $\int\limits_a^b (Af_1(x) \pm Bf_2(x))dx = A\int\limits_a^b f_1(x)dx \pm B\int\limits_a^b f_2(x)dx$;

4) *свойство аддитивности*: если $f(x)$ интегрируема на $[a;b]$ и $a < c < b$, $f(x)$ интегрируема на $[a;c]$ и $[c;b]$, причём $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$;

5) *свойство монотонности*: если $f(x) \le \varphi(x)$ интегрируемы на $[a;b]$ $(a < b)$, то $\int\limits_a^b f(x)dx \le \int\limits_a^b \varphi(x)dx$;

6) если $f(x)$ интегрируема на $[a;b]$, то $\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| \le \int\limits_a^b |f(x)|dx$, $(a < b)$;

7) *среднее значение функции*: если $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, то $\exists c \in (a;b)$ такая, что $\int\limits_a^b f(x)dx = (b-a)f(c)$, т. е. $f(c) = \dfrac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx$;

8) *теоремы о среднем*:

– если $m = \inf\limits_{a \le x \le b} f(x)$ и $M = \sup\limits_{a \le x \le b} f(x)$, то $m(b-a) \le \int\limits_a^b f(x)dx \le M(b-a)$;

– если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ ограничены на $[a;b]$, $\varphi(x)$ не меняет знака при $a<x<b$, то $\int\limits_a^b f(x)\varphi(x)dx=\mu\int\limits_a^b \varphi(x)dx$, где $m\le\mu\le M$, $m=\inf\limits_{a\le x\le b} f(x)$, $M=\sup\limits_{a\le x\le b} f(x)$;

– если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ ограничены на $[a;b]$, $\varphi(x)$ не меняет знака при $a<x<b$, $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, то $\int\limits_a^b f(x)\varphi(x)dx=f(c)\int\limits_a^b \varphi(x)dx$, где $a\le c\le b$;

– если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ ограничены на $[a;b]$, $\varphi(x)$ монотонна при $a<x<b$, то $\int\limits_a^b f(x)\varphi(x)dx=\varphi(a+0)\int\limits_a^\xi f(x)dx+\varphi(b-0)\int\limits_a^\xi f(x)dx$, где $a\le\xi\le b$;

– если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ ограничены на $[a;b]$, $\varphi(x)$ монотонно убывающая и неотрицательна при $a<x<b$, то $\int\limits_a^b f(x)\varphi(x)dx=\varphi(a+0)\int\limits_a^\xi f(x)dx$, где $a\le\xi\le b$;

– если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ ограничены на $[a;b]$, $\varphi(x)$ монотонно возрастающая и неотрицательна при $a<x<b$, то $\int\limits_a^b f(x)\varphi(x)dx=\varphi(b-0)\int\limits_a^\xi f(x)dx$, где $a\le\xi\le b$.

Примеры для самостоятельной работы

1 Найти интегральную сумму для функции $f(x)=1+x$ на сегменте $[-1;4]$, разбивая его на n равных промежутков и выбирая значения аргументов ξ_i $\left(i=\overline{0,n-1}\right)$ в серединах этих промежутков.

2 Для функции $f(x)$ найти нижнюю $\underline{S_n}$ и верхнюю $\overline{S_n}$ интегральные суммы на сегментах, деля их на n равных частей:

1) $f(x)=x^3, -2\le x\le 3$;

2) $f(x)=\sqrt{x}, 0\le x\le 1$.

3 Определить знаки ОИ:

1) $\int\limits_0^{2\pi} x\sin x dx$;

2) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\sin x}{x}dx$;

3) $\int\limits_{-2}^{2} x^3 2^x dx$;

4) $\int\limits_{0,5}^{1} x^3\ln x dx$.

4 Сравнить ОИ:

1) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{10} x dx$ и $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$; 2) $\int\limits_0^1 e^{-x} dx$ и $\int\limits_0^1 e^{-x^2} dx$.

5 Определить средние значения функций на отрезках:

1) $f(x) = x^2, [0;1]$;

2) $f(x) = \sqrt{x}, [0;100]$;

3) $f(x) = 10 + 2\sin x + 3\cos x, [0;2\pi]$.

6 Пользуясь теоремами о среднем, оценить ОИ:

1) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{1 + 0,5\cos x}$;

2) $\int\limits_0^1 \frac{x^9 dx}{\sqrt{1+x}}$;

3) $\int\limits_0^{100} \frac{e^{-x} dx}{x + 100}$;

4) $\int\limits_{100\pi}^{200\pi} \frac{\sin x dx}{x}$;

5) $\int\limits_a^b \sin x^3 dx, 0 < a < b$.

Практическое занятие № 40. Вычисления определённых интегралов с использованием различных подстановок

Формула Ньютона–Лейбница. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и $F(x)$ – одна из первообразных для $f(x)$, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Замена переменной в ОИ (интегрирование подстановкой). Пусть при нахождении первообразной $F(x)$ сделана подстановка $x = \varphi(t)$, $dx = \varphi'(t)dt$, где $\varphi(t)$ – монотонная и дифференцируемая функция на $[\alpha,\beta]$. Тогда справедлива формула

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt,$$

где значения α и β находятся из решения системы $\begin{cases} a = \varphi(\alpha), \\ b = \varphi(\beta). \end{cases}$

Интегрирование по частям в ОИ. Пусть $u = u(x)$ и $v = v(x)$ – функции, имеющие на отрезке $[a,b]$ непрерывные производные. Тогда справедлива формула

$$\int\limits_a^b udv = u \cdot v\Big|_a^b - \int\limits_a^b vdu.$$

ОИ по отрезку $[-a;a]$: $\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = \begin{cases} 2\int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx, & \text{если } f(x) \text{ чётная,} \\ 0, & \text{если } f(x) \text{ нечётная.} \end{cases}$

Примеры для самостоятельной работы

Вычислить ОИ:

1) $\int\limits_{-1}^{8} \sqrt[3]{x}\,dx$;

2) $\int\limits_{1}^{8} \frac{2+5\sqrt[3]{x}}{x^3}\,dx$;

3) $\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{2x-1}$;

4) $\int\limits_{3}^{4} \frac{x^2+3}{x-2}\,dx$;

5) $\int\limits_{-2}^{-1} \frac{x+1}{x^3-x^2}\,dx$;

6) $\int\limits_{1}^{e} \frac{\cos(\ln x)}{x}\,dx$;

7) $\int\limits_{1}^{e} \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)}$;

8) $\int\limits_{2}^{3} \frac{dy}{y^2-2y-8}$;

9) $\int\limits_{\frac{3}{4}}^{2} \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}$;

10) $\int\limits_{0}^{1} \frac{x^2+3x}{(x+1)(x^2+1)}\,dx$;

11) $\int\limits_{0}^{\pi} \sqrt{1+\cos 2x}\,dx$;

12) $\int\limits_{0}^{1} \frac{x^2}{1+x^6}\,dx$;

13) $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$;

14) $\int\limits_{2}^{9} \sqrt[3]{x-1}\,dx$;

15) $\int\limits_{1}^{2} \frac{e^{x^{-2}}}{x^3}\,dx$;

16) $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{4x^2+4x+5}$;

17) $\int\limits_{0}^{2} \frac{2x-1}{2x+1}\,dx$;

18) $\int\limits_{0}^{100\pi} \sqrt{1-\cos 2x}\,dx$;

19) $\int\limits_{1}^{6} \frac{dx}{1+\sqrt{3x-2}}$;

20) $\int\limits_{\ln 3}^{\ln 8} \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}$;

21) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1+2\sin^2 x}$;

22) $\int\limits_{-1}^{1} \sqrt{3-2x-x^2}\,dx$;

23) $\int\limits_{0}^{1} x^2 e^{2x}\,dx$;

24) $\int\limits_{1}^{e} \ln^2 x\,dx$;

25) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} x^2 \cos 2x\,dx$;

26) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x\,dx$;

27) $\int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (x^2 \sin 5x + \cos\frac{x}{3} + \operatorname{tg}^3 x)\,dx$;

28) $\int\limits_{\ln 2}^{\ln 6} \frac{e^x\sqrt{e^x-2}}{e^x+2}dx;$

29) $\int\limits_{1}^{5} \frac{dx}{x+\sqrt{2x-1}};$

30) $\int\limits_{0}^{3} x^2\sqrt{9-x^2}\,dx;$

31) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3+2\cos x};$

32) $\int\limits_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{2} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}};$

33) $\int\limits_{-2}^{0} \frac{dx}{\sqrt{x+3}+\sqrt{(x+3)^3}};$

34) $\int\limits_{0}^{1} \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}}dx;$

35) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{xdx}{\cos^2 x}.$

Ответы: 1) $\frac{45}{4}$; 2) $3\frac{57}{64}$; 3) $\frac{1}{2}\ln 3$; 4) $\frac{11}{2}+7\ln 2$; 5) $2\ln\frac{4}{3}-\frac{1}{2}$; 6) $\sin 1$; 7) $\frac{\pi}{4}$; 8) $\frac{1}{6}\ln\frac{2}{5}$; 9) $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$; 10) $\frac{\pi}{4}$; 11) $2\sqrt{2}$; 12) $\frac{\pi}{12}$; 13) $\ln\left|\frac{2+\sqrt{5}}{1+\sqrt{2}}\right|$; 14) $\frac{45}{4}$; 15) $\frac{e-\sqrt[4]{e}}{2}$; 16) $\frac{1}{4}\left(\operatorname{arctg}\frac{3}{2}-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)$; 17) $2-\ln 5$; 18) $200\sqrt{2}$; 19) $2-\frac{2}{3}\ln\frac{5}{2}$; 20) $\ln\frac{3}{2}$; 21) $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$; 22) π; 23) $\frac{e^2-1}{4}$; 24) $e-2$; 25) $\frac{\pi^2}{32}-\frac{1}{4}$; 26) $\frac{1}{2}\left(1+e^{-\frac{\pi}{2}}\right)$; 27) $6\sin\frac{\pi}{9}$; 28) $4-\pi$; 29) $\ln 4-\frac{1}{2}$; 30) $\frac{81\pi}{16}$; 31) $\frac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{5}}$; 32) $\frac{\pi}{6}$; 33) $\frac{\pi}{6}$; 34) $\frac{\pi}{\sqrt{6}}-\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$; 35) $\frac{5\pi}{6\sqrt{3}}-\ln\sqrt{3}$.

Практическое занятие № 41. Вычисление несобственных интегралов первого рода и исследования на сходимость

Несобственный интеграл первого рода. Пусть $f(x)$ определена на $[a;+\infty)$ и интегрируема на любой его части $[a;A], A>a$. Если существует конечный предел $\lim\limits_{A\to+\infty}\int\limits_a^A f(x)dx$, то он называется *несобственным интегралом первого рода* (с бесконечным верхним пределом):

$$\int\limits_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{A\to+\infty}\int\limits_a^A f(x)dx = F(+\infty)-F(a).$$

Если предел конечен, говорят, что несобственный интеграл *сходится*. В противном случае – *расходится*.

Аналогичные рассуждения можно привести для несобственных интегралов вида:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{B\to-\infty}\int_{B}^{b} f(x)dx;$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx.$$

Конечно, эти утверждения справедливы, если входящие в них интегралы существуют.

Так как несобственные интегралы определяются как пределы ОИ, то все свойства ОИ, которые сохраняются при предельном переходе (линейность, монотонность, аддитивность) имеют место и для несобственных интегралов.

Признаки сходимости несобственных интегралов:

1) если $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны на $[a;\infty)$ и $0 \le f(x) \le \varphi(x)$, то из сходимости интеграла $\int_{a}^{+\infty} \varphi(x)dx$ следует сходимость интеграла $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$, а из расходимости интеграла $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$ следует расходимость интеграла $\int_{a}^{+\infty} \varphi(x)dx$;

2) если сходится $\int_{a}^{+\infty} |f(x)|dx$, то $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$ сходится абсолютно.

Для сравнения часто используют интеграл $\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \begin{cases} -\frac{1}{1-\alpha}, \alpha > 1 - \text{сходится}, \\ +\infty, \alpha \le 1 - \text{расходится}. \end{cases}$

Примеры для самостоятельной работы

1 Вычислить несобственные интегралы первого рода или доказать их расходимость:

1) $\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx$;

2) $\int_{0}^{+\infty} \frac{2x}{1+x^2}dx$;

3) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x}{1+x^2}dx$;

4) $\int_{e}^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^3 x}$;

5) $\int_{e}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$;

6) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}dx$;

7) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$;

8) $\int_{0}^{+\infty} x\cos x dx$;

9) $\int_{0}^{+\infty} e^{-2x}\cos x dx$;

10) $\int_{1}^{+\infty} \frac{xdx}{\left(1+x^2\right)^3}$;

11) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2+3x-1}}$;

12) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1+2x}{x^2(1+x)}dx$;

13) $\int\limits_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}dx$;

14) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\left(x^2+x+1\right)^2}$;

15) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}dx$.

2 Исследовать сходимость несобственных интегралов первого рода:

1) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^5}dx$;

2) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x^3dx}{x^4-x^2+1}$;

3) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2+1}}$;

4) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\cos xdx}{x+100}$.

Ответы: **1**: 1) $\frac{\pi}{2}$; 2) расходится; 3) 0; 4) $\frac{1}{2}$; 5) расходится; 6) 0; 7) π; 8) расходится; 9) $\frac{2}{5}$; 10) $\frac{1}{4}$; 11) расходится; 12) $1+\ln 2$; 13) 1; 14) $\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$; 15) $\frac{\pi}{2}-1$.
2: 1) сходится; 2) сходится; 3) сходится; 4) сходится.

Практическое занятие № 42. Вычисление несобственных интегралов второго рода и исследования на сходимость

Несобственный интеграл второго рода. Пусть $f(x)$ определена на $[a;b)$. Точка $x=b$ называется *особой*, если $f(x)$ не ограничена в любой окрестности этой точки, но ограничена на $[a;b-\varepsilon], \varepsilon>0$. Если существует конечный предел $\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{a}^{b-\varepsilon} f(x)dx$, то он называется *несобственным интегралом второго рода* (от неограниченной функции):

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{a}^{b-\varepsilon} f(x)dx=\int\limits_{a}^{b} f(x)dx.$$

Если предел конечен говорят, что несобственный интеграл *сходится*. В противном случае – *расходится*.

Если $x = a$ – особая точка, то $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx=\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$.

Если $x=c\in(a;b)$ – особая точка или $x=a$ и $x=b$ – особые точки, то

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx=\int\limits_{a}^{c} f(x)dx+\int\limits_{c}^{b} f(x)dx.$$

Если сходятся все интегралы, входящие в сумму, то сходится и суммарный интеграл.

Признаки сходимости несобственных интегралов:

1) если $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны на $[a;b)$ и $\forall x \in [a;b-\varepsilon]$ $0 \le f(x) \le \varphi(x)$, то из сходимости интеграла $\int\limits_a^b \varphi(x)dx$ следует сходимость интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$, а из расходимости интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$ следует расходимость интеграла $\int\limits_a^b \varphi(x)dx$;

2) если $f(x)$ знакопеременная на $[a;b)$ функция, $x = b -$особая точка, $\int\limits_a^b |f(x)|dx$ сходится, то сходится и несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$.

Для сравнения часто используют интеграл

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} -\dfrac{1}{1-\alpha}, 0 < \alpha < 1 - \text{сходится,} \\ +\infty, \alpha \ge 1 - \text{расходится.} \end{cases}$$

Примеры для самостоятельной работы

1 Вычислить несобственные интегралы второго рода или доказать их расходимость:

1) $\int\limits_1^e \frac{dx}{x\ln^3 x}$;

2) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$;

3) $\int\limits_1^{e^2} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$;

4) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2+x^4}$;

5) $\int\limits_2^4 \frac{dx}{\sqrt{6x-8-x^2}}$;

6) $\int\limits_0^{\frac{\sqrt{2}}{\pi}} \cos\frac{1}{x^2}\cdot\frac{dx}{x^3}$;

7) $\int\limits_{-1}^2 \frac{dx}{x^2}$;

8) $\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$;

9) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$;

10) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x\ln x dx}{\left(1+x^2\right)^2}$.

2 Исследовать сходимость несобственных интегралов второго рода:

1) $\int\limits_0^2 \frac{dx}{\ln x}$;

2) $\int\limits_0^1 x^p \ln^q \frac{1}{x} dx$;

3) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p \ln^q x}$;

4) $\int\limits_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2} dx$;

5) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln\sin x}{\sqrt{x}} dx$.

Ответы: **1**: 1) расходится; 2) $\frac{\pi}{2}$; 3) $2\sqrt{2}$; 4) расходится; 5) π; 6) расходится; 7) расходится; 8) π; 9) $\frac{\pi}{2}$; 10) 0. **2**: 1) расходится; 2) сходится, если $p > -1, q > -1$; 3) сходится, если $p > 1, q < 1$; 4) сходится; 5) сходится.

Практическое занятие № 43. Геометрические приложения определённых интегралов: вычисление площадей плоских фигур, длин дуг, объёмов тел по известным поперечным сечениям, объёмов и площадей поверхностей тел вращения

Геометрический смысл ОИ. *Криволинейной трапецией* называется плоская фигура, ограниченная сверху графиком неотрицательной функции $y = f(x)$, снизу осью Ox, справа и слева прямыми $x = a, x = b$ соответственно. Площадь такой криволинейной трапеции и есть $\int_a^b f(x)dx$.

Площадь плоской фигуры:

1) пусть $y = f(x), y = g(x)$ непрерывны, $f(x) \geq g(x)$, $a \leq x \leq b$, тогда

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x))dx;$$

если $x = \varphi(y), x = \psi(y), c \leq y \leq d$, то $S = \int_c^d (\varphi(y) - \psi(y))dy$;

2) пусть $x = x(t), y = y(t), a = x(t_1), b = x(t_2), y(t) \geq 0$ на $[t_1; t_2]$, тогда

$$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt;$$

3) пусть $\rho = \rho(\varphi), \alpha \leq \varphi \leq \beta$, тогда $S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\varphi)d\varphi$.

Длина дуги кривой:

1) пусть $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, тогда $l = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2}dx$;

2) пусть $x = x(t), y = y(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$, тогда $l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}dt$;

3) пусть $\rho = \rho(\varphi), \alpha \leq \varphi \leq \beta$, тогда $l = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}d\varphi$.

Площадь поверхности вращения:

1) пусть $y = f(x) \geq 0$, $a \leq x \leq b$, тогда $Q_x = 2\pi\int_a^b y\sqrt{1 + (y')^2}dx$;

2) пусть $x=x(t), y=y(t), y(t)\ge 0$, $t_1\le t\le t_2$, тогда $Q_x=2\pi\int\limits_{t_1}^{t_2} y\sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2}\,dt$;

3) пусть $\rho=\rho(\varphi), \alpha\le\varphi\le\beta$, тогда $Q_x=2\pi\int\limits_{\alpha}^{\beta}\rho\sin\varphi\sqrt{\rho^2+(\rho')^2}\,d\varphi$.

Объем тела вращения:

1) пусть $y=f(x)\ge 0$, $a\le x\le b$, тогда $V_x=\pi\int\limits_a^b y^2dx$ или $V_y=2\pi\int\limits_a^b x\cdot|y|dx$;

2) пусть $x=g(y)\ge 0$, $c\le y\le d$, тогда $V_y=\pi\int\limits_c^d x^2dy$.

В приложениях ОИ бывают полезны формулы:

$$\int\sqrt{x^2+a}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a}+\frac{a}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|+c;$$

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+c.$$

Примеры для самостоятельной работы

1 Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

1) $y^2=4x, x^2=4y$;

2) $y=\arcsin x, x=0, y=\frac{\pi}{2}$;

3) $(y-2)^2=x-1$, касательной к параболе в точке с ординатой $y_0=3$ и осью Ox;

4) одной аркой циклоиды $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)$ и осью Ox;

5) астроидой $x=a\cos^3 t, y=a\sin^3 t$;

6) кардиоидой $\rho=a(1+\sin\varphi)$;

7) трёхлепестковой розой $\rho=\sin 3\varphi$;

8) окружностями $\rho=2\sin\varphi, \rho=4\sin\varphi$.

2 Найти длины дуг кривых, заданных уравнениями:

1) $y=\frac{1}{3}(3-x)\sqrt{x}$ между точками ее пересечения с осью Ox;

2) $y=x^2$ от $x=0$ до $x=1$;

3) $x=a(3\cos t-\cos 3t)$, $y=a(3\sin t-\sin 3t)$ от $t=0$ до $t=\frac{\pi}{2}$, $a>0$;

4) $x=10\cos^3 t, y=10\sin^3 t,\ \ 0\le t\le\frac{\pi}{2}$;

5) $\rho=a\sin\varphi$;

6) $\rho=2(1-\cos\varphi)$ внутри окружности $\rho=1$.

3 Найти площади поверхностей, образованных вращением кривой:

1) $y=\dfrac{1}{3}x^3$ от $x=-1$ до $x=1$ вокруг оси Ox;

2) одной арки циклоиды $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ вокруг оси Ox;

3) окружности $\rho=2a\sin\varphi$ вокруг полярной оси.

4 Вычислить объемы тел, образованных вращением фигур, ограниченных линиями:

1) $2y=x^2, 2x+2y-3=0$ вокруг оси Ox;

2) $y=e^{-2x}-1, y=e^{-x}+1, x=0$ вокруг оси Ox;

3) $y^2=4x, y=x$ вокруг оси Oy;

4) $xy=k^2, y=0, x=a, x=b,\ 0< a < b$, вокруг оси Oy.

Ответы: **1**: 1) $\dfrac{16}{3}$; 2) 1; 3) 9; 4) $3\pi a^2$; 5) $\dfrac{3\pi a^2}{8}$; 6) $\dfrac{3\pi a^2}{2}$; 7) $\dfrac{\pi}{4}$; 8) 3π. **2**: 1) $2\sqrt{3}$; 2) $\dfrac{\sqrt{5}}{2}+\dfrac{1}{4}\ln\left(2+\sqrt{5}\right)$; 3) $6a$; 4) 15; 5) πa; 6) $8\left(2-\sqrt{3}\right)$. **3**: 1) $\dfrac{2\pi}{9}\left(2\sqrt{2}-1\right)$; 2) $\dfrac{64\pi a^2}{3}$; 3) $4\pi^2a^2$. **4**: 1) $\dfrac{272\pi}{15}$; 2) $\dfrac{11\pi}{4}$; 3) $\dfrac{128\pi}{15}$; 4) $2\pi k^2(b-a)$.

Практическое занятие № 44. Физические приложения определённых интегралов: вычисление работы переменной силы, пути материальной точки, силы давления жидкости, статических моментов и координат центров тяжести плоских материальных фигур, моментов инерции плоских материальных фигур

Физический смысл ОИ. Пусть тело массой m движется вдоль оси Ox под действием переменной силы $F(x)$ из точки $x=a$ в точку $x=b$. Пусть функция $F(x)$ непрерывна на $[a;b]$. Тогда $\int\limits_a^b F(x)dx$ есть работа переменной силы $F(x)$ по перемещению тела из точки $x=a$ в точку $x=b$.

Работа переменной силы:

$$A=\int\limits_a^b F(x)dx.$$

Путь, пройденный материальной точкой. Пусть материальная точка перемещается по прямой с переменной скоростью $v=v(t)$. Тогда пройденный за время $t=t_1-t_0$ путь S находится по формуле

$$S=\int_{t_0}^{t_1} v(t)\,dt.$$

Сила давления жидкости. Если пластинка имеет вид криволинейной трапеции и погружена в жидкость вертикально, а ее боковые стороны (нижняя и верхняя) параллельны поверхности жидкости и находятся на глубинах $x=a$ и $x=b$, то сила давления на боковую поверхность пластинки вычисляется по формуле

$$P=\rho g\int_a^b x\big(f_2(x)-f_1(x)\big)dx.$$

Статические моменты.

Статическим моментом материальной точки массы m относительно оси называется произведение md, где d – расстояние от точки до оси l:

$$M_l=md.$$

Следовательно, $x_i m_i$, $y_i m_i$ – статические моменты массы m_i относительно осей Ox, Oy.

Статический момент плоской кривой. Если дуга кривой задана непрерывной функцией $y=f(x), x\in[a;b]$, имеет плотность $\gamma(x)$, то

$M_x=\int\limits_a^b \gamma(x)f(x)\sqrt{1+\big(f'(x)\big)^2}\,dx$ – статический момент кривой l относительно оси Ox;

$M_y=\int\limits_a^b \gamma(x)x\sqrt{1+\big(f'(x)\big)^2}\,dx$ – статический момент кривой l относительно оси Oy.

Статический момент плоской фигуры. Если плоская фигура ограничена графиком непрерывной функцией $y=f(x)\geq 0, x=a, x=b, y=0$, имеет плотность $\gamma(x)$, то

$M_x=\frac{1}{2}\int\limits_a^b \gamma(x)f^2(x)\,dx$ – статический момент плоской фигуры S относительно оси Ox;

$M_y=\int\limits_a^b \gamma(x)xf(x)\,dx$ – статический момент плоской фигуры S относительно оси Oy.

Координаты центра масс (центра тяжести):

$$\bar{x}=\frac{M_y}{m},\quad \bar{y}=\frac{M_x}{m},$$

где $(\bar{x};\bar{y})$ – координаты центра тяжести объекта;

M_x, M_y – статические моменты объекта относительно осей координат;

$m-$ масса объекта ($m=l$ в случае плоской кривой, $m=S$ в случае плоской фигуры).

Моменты инерции. Моментом инерции материальной точки массы m относительно оси l, отстоящей от этой оси на расстоянии d, называется число

$$I_l = md^2 .$$

Момент инерции плоской кривой:

$I_x = \int_a^b f^2(x)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}dx -$ момент инерции кривой l относительно Ox;

$I_y = \int_a^b x^2\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}dx -$ момент инерции кривой l относительно Oy.

Момент инерции плоской фигуры:

$I_x = \frac{1}{3}\int_a^b f^3(x)dx -$ момент инерции фигуры S относительно Ox;

$I_y = \int_a^b x^2 f(x)dx -$ момент инерции фигуры S относительно Oy.

Примеры для самостоятельной работы

1 Определить силу давления жидкости на плотину в форме полуэллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, погруженную вертикально в жидкость так, что одна из его полуосей $2a$ лежит на поверхности.

2 Найти статические моменты относительно осей *Ox*, *Oy* и координаты центра масс геометрических объектов:

1) отрезка прямой $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, заключенного между осями координат;

2) дуги полуокружности $x^2+y^2=a^2, (y \ge 0)$;

3) треугольника, ограниченного прямыми $x+y=6,\ x=0,\ y=0$;

4) фигуры, ограниченной эллипсом $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ и осями координат $(x \ge 0, y \ge 0)$;

5) фигуры, ограниченной линиями $y=x^2,\ y=\sqrt{x}$.

3 Найти статические моменты и моменты инерции прямоугольника со сторонами a, b относительно его сторон и его центр тяжести.

4 Найти момент инерции окружности радиуса a относительно ее диаметра.

5 Найти момент инерции треугольника с основанием b и высотой h относительно его основания.

6 Найти статический момент и момент инерции относительно оси *Ox* дуги кривой $y=e^x (0 \le x \le 1)$.

Практическое занятие № 45. Исследование функций, определяемых как собственные и несобственные интегралы, зависящие от параметра. Дифференцирование и интегрирование. Исследование функций ограниченной вариации. Вычисление интегралов Римана–Стилтьеса

Непрерывность интеграла. Если функция $f(x,y)$ определена и непрерывна в ограниченной области $D(a \le x \le A, b \le y \le B)$, то $F(y)=\int\limits_a^A f(x,y)dx$ представляет собой функцию, непрерывную на сегменте $b \le y \le B$.

Дифференцирование под знаком интеграла. Если функция $f(x,y)$ определена и непрерывна в ограниченной области $D(a \le x \le A, b \le y \le B)$, частная производная $f'_y(x,y)$ непрерывна в области D, то при $b < y < B$ $\frac{d}{dy}\int\limits_a^A f(x,y)dx = \int\limits_a^A f'_y(x,y)dx$. Это формула Лейбница.

Интегрирование под знаком интеграла. Если функция $f(x,y)$ определена и непрерывна в ограниченной области $D(a \le x \le A, b \le y \le B)$, то $\int\limits_b^B dy\int\limits_a^A f(x,y)dx = \int\limits_a^A dx\int\limits_b^B f(x,y)dy$.

Аналогичные формулы можно записать для несобственных интегралов.

Примеры для самостоятельной работы

1 Показать, что интеграл $F(y)=\int\limits_0^1 f(x,y)dx$ от разрывной функции $f(x,y)=\operatorname{sgn}(x-y)$ является функцией непрерывной. Построить график функции $u=F(y)$.

2 Исследовать на непрерывность функцию $F(y)=\int\limits_0^1 \frac{yf(x)}{x^2+y^2}dx$, где функция $f(x)$ непрерывна и положительна на сегменте $[0;1]$.

3 Вычислить $F'(\alpha)$, если

1) $F(\alpha)=\int\limits_\alpha^{\alpha^4} e^{-\alpha x^2}dx$;

2) $F(\alpha)=\int\limits_{\sin\alpha}^{\cos\alpha} e^{\alpha\sqrt{1-x^2}}dx$;

3) $F(\alpha)=\int\limits_0^\alpha \frac{\ln(1+\alpha x)}{x}dx$;

4) $F(\alpha)=\int\limits_0^\alpha f(x+\alpha, x-\alpha)dx$.

4 Применяя дифференцирование по параметру, вычислить интегралы:

1) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x\right)dx$; 3) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^4} - e^{-\beta x^4}}{x}dx$, $\alpha > 0, \beta > 0$;

2) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{arctg}\left(a \operatorname{tg} x\right)}{\operatorname{tg} x}dx$; 4) $\int\limits_0^{1} \frac{\ln\left(1-\alpha^2x^2\right)}{x^2\sqrt{1-x^2}}dx$, $|\alpha| \le 1$.

5 Применяя интегрирование под знаком интеграла, вычислить интегралы:

1) $\int\limits_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}dx$, $a > 0, b > 0$; 2) $\int\limits_0^1 \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b - x^a}{\ln x}dx$.

Практическое занятие № 46. Вычисление двойных интегралов в декартовых и полярных координатах

Область D на плоскости xOy называется *правильной областью* относительно оси Oy, если она ограничена снизу графиком непрерывной функции $y = \varphi_1(x)$, сверху – $y = \varphi_2(x)$, и с боков отрезками прямых $x = a$ и $x = b$. В этом случае всякая прямая, параллельная оси Oy и проходящая внутри отрезка $[a;b]$, пересекает границу области в двух точках. Двойной интеграл по такой области вычисляется по формуле

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy.$$

Область D на плоскости xOy называется *правильной областью* относительно оси Ox, если она ограничена слева графиком непрерывной функции $x = \psi_1(y)$, справа – $x = \psi_2(y)$, снизу прямой $y = c$ и сверху прямой $y = d$. В этом случае всякая прямая, параллельная оси Ox и проходящая внутри отрезка $[c;d]$, пересекает границу области в двух точках. Двойной интеграл по такой области вычисляется по формуле

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx.$$

Пусть переменные x, y связаны с переменными u, v соответственно

$$\begin{cases} x = \varphi(u,v), \\ y = \psi(u,v), \end{cases}$$

где $\varphi(u,v)$ и $\psi(u,v)$ – непрерывные и дифференцируемые функции, взаимно отображающие область D плоскости xOy на область D' плоскости $uO'v$.

Формула замены переменных в двойном интеграле имеет вид:

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{D'} f\big(\varphi(u,v),\psi(u,v)\big)\cdot|J|\,dudv,$$

где J – якобиан перехода, $J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}.$

Прямоугольные декартовы и полярные координаты связаны соотношением

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \end{cases}$$

где $\rho \ge 0,\quad 0 \le \varphi < 2\pi.$

Якобиан перехода от прямоугольных декартовых координат к полярным координатам имеет вид: $J = \rho.$

Формула замены переменных имеет вид:

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{D'} f\big(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi\big)\cdot\rho\cdot d\rho d\varphi.$$

Примеры для самостоятельной работы

1 Вычислить повторные интегралы:

1) $\int\limits_0^2 dx\int\limits_0^1\left(x^2+2y\right)dy$; 2) $\int\limits_{-3}^3 dy\int\limits_{y^2-4}^5\left(x+2y\right)dx$; 3) $\int\limits_1^2 dx\int\limits_{\frac{1}{x}}^x \frac{x^2}{y^2}dy$.

Ответ: 1) $\frac{14}{3}$; 2) $50{,}4$; 3) $2{,}25$.

2 Расставить пределы интегрирования для двойного интеграла $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy,$ если известно, что область интегрирования D:

1) ограничена прямыми $x=1,\ x=4,\ 3x-2y+4=0,\ 3x-2y-1=0;$

2) является треугольником с вершинами в точках $O(0;0)$, $A(1;3)$, $B(1;5)$;

3) ограничена линиями $y=2x,\ x=0,\ x+y=3.$

3 Изменить порядок интегрирования в повторных интегралах:

1) $\int\limits_{-2}^2 dx\int\limits_0^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,dy$;

2) $\int\limits_0^1 dx\int\limits_{2x}^{5x} f(x,y)\,dy$;

3) $\int\limits_0^1 dy\int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)\,dx$;

4) $\int\limits_0^4 dx\int\limits_{\frac{x^2}{2}-3}^{2x-3} f(x,y)\,dy$.

4 Вычислить $\iint\limits_D\left(x^2+y\right)dxdy,$ если область D ограничена линиями $y=x^2$

и $y^2 = x$. Ответ: $\frac{33}{140}$.

5 Вычислить $\iint\limits_D x dxdy,$ где область D ограничена линиями $xy = 6$, $x + y - 7 = 0$. Ответ: $20\frac{5}{6}$.

6 Вычислить $\iint\limits_D x^2 dxdy,$ если область D ограничена линиями $y = x,\ y = \frac{1}{x},\ x = 2.$ Ответ: 2,25.

7 Вычислить $\iint\limits_D \sin(x + y) dxdy,\ D: y = x,\ y = \frac{\pi}{2},\ x = 0.$ Ответ: 1.

8 Вычислить $\iint\limits_D y \ln x dxdy,\quad D: xy = 1,\ y = \sqrt{x},\ x = 2.$ Ответ: $\frac{5}{4}\ln 2 - \frac{5}{8}.$

9 Вычислить $\iint\limits_D x dxdy,$ где $D: y = x^3,\ x + y = 2,\ x = 0$. Ответ: $\frac{7}{15}$.

10 Вычислить $\iint\limits_D xy^2 dxdy,$ где $D: x^2 + y^2 = 4, x + y - 2 = 0, x \geq 0, y \geq 0$. Ответ: $\frac{8}{5}$.

11 Вычислить $\iint\limits_D (x + y) dxdy$, если область D ограничена прямыми $2x + y = 1$, $2x + y = 3$, $x - y = 2$, $x - y = -1$. Ответ: $7/3$.

12 Вычислить $\iint\limits_D (12 - x - y) dxdy$, если область D ограничена окружностью $x^2 + y^2 = 9.$ Ответ: 108π.

13 Вычислить $\iint\limits_D e^{x^2+y^2} dxdy$, где $D: x^2 + y^2 = R^2, x = 0, x \geq 0, y \geq 0$. Ответ: $\frac{\pi}{4}\left(e^{R^2} - 1\right)$.

14 Вычислить $\iint\limits_D \left(x^2 + y^2\right) dxdy$, если область D ограничена окружностью $x^2 + y^2 = 4x$. Ответ: 24π.

15 Вычислить $\iint\limits_D (4 - x - y) dxdy$, если область D ограничена окружностью $x^2 + y^2 = 2y.$ Ответ: 3π.

16 Вычислить $\iint\limits_D \frac{\ln\left(x^2 + y^2\right)}{x^2 + y^2} dxdy$, если область D – кольцо между окружностями с центром в начале координат и радиусами e и 1. Ответ: 2π.

17 Вычислить $\iint\limits_D \sqrt{x^2 + y^2 - 9} dxdy,\ D: x^2 + y^2 = 9, x^2 + y^2 = 25.$ Ответ: $\frac{128\pi}{3}.$

18 Вычислить $\iint\limits_D \frac{y}{x^2+y^2}dxdy, \quad D: x^2-2x+y^2=0, x^2-6x+y^2=0, \quad y\ge 0.$

Ответ: 2.

19 Вычислить $\iint\limits_D ydxdy,\ D: y^2-2y+x^2=0, y^2-4y+x^2=0, y=\frac{x}{\sqrt{3}},\ y=\sqrt{3}x.$

Ответ: $\frac{7\left(2\pi-\sqrt{3}\right)}{12}$.

20 Вычислить $\iint\limits_D (y-x)dxdy$, где D – область, ограниченная прямыми $y=x+1$, $y=x+3$, $y=-\frac{1}{3}x+\frac{7}{3}$, $y=-\frac{1}{3}x+5$. Ответ: –8.

21 Вычислить $\iint\limits_D e^{x^2+y^2}dxdy$, где D – круг $x^2+y^2=R^2$. Ответ: $\pi\left(e^{R^2}-1\right)$.

22 Вычислить $\iint\limits_D \operatorname{arctg}\frac{y}{x}dxdy$, где D – часть кольца, ограниченная линиями $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=9$, $y=\frac{1}{\sqrt{3}}x$, $y=\sqrt{3}x$, $x\ge 0,\ y\ge 0$. Ответ: $\frac{\pi^2}{6}$.

23 Вычислить $\iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)dxdy$, где D – круг, ограниченный окружностью $x^2+y^2=2x$. Ответ: $\frac{3\pi}{2}$.

Практическое занятие № 47. Вычисление тройных интегралов в декартовых координатах

Пусть область V ограничена сверху поверхностью $\psi_2(x,y)$, снизу – $\psi_1(x,y)$, с боков – цилиндрической поверхностью и проектируется в область D плоскости xOy. Тройной интеграл в этом случае вычисляется по формуле

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz=\int\limits_a^b dx\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}dy\int\limits_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)}f(x,y,z)dz.$$

Примеры для самостоятельной работы

1 Расставить пределы интегрирования в интеграле $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$, если область V ограничена поверхностями:

1) $y=x^2,\ z=0,\ y+z=4;$

2) $y=x,\ y=2x,\ z=0,\ x+z=2.$

2 Вычислить тройные интегралы:

1) $\iiint\limits_V \left(2x^2+3y+z\right)dxdydz$, если V: $2\le x\le 3$, $-1\le y\le 2$, $0\le z\le 4$.

Ответ: 194;

2) $\iiint\limits_V x^2yzdxdydz$, если V: $-1\le x\le 2$, $0\le y\le 3$, $2\le z\le 3$. Ответ: $\dfrac{135}{4}$;

3) $\iiint\limits_V ydxdydz$, где V: $x=0$, $y=0$, $z=0$, $2x+y+z=4$. Ответ: $\dfrac{16}{3}$;

4) $\iiint\limits_V \dfrac{dxdydz}{\left(x+y+z+1\right)^3}$, где V: $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=1$.

Ответ: $\dfrac{1}{2}\left(\ln 2-\dfrac{5}{8}\right)$;

5) $\iiint\limits_V xyzdxdydz$, $V: y=x^2$, $x=y^2$, $z=xy$, $z=0$. Ответ: $\dfrac{1}{96}$;

6) $\iiint\limits_V ydxdydz$, где $V: x=0$, $y=0$, $z=0$, $x=1$, $y=2$, $z=x^2+y^2$.

Ответ: $\dfrac{14}{3}$;

7) $\iiint\limits_V dxdydz$, где $V: y=0$, $z=0$, $x+y=2$, $z=1-x^2$, $z\ge 0$. Ответ: $\dfrac{8}{3}$;

8) $\iiint\limits_V xdxdydz$, если V: $x=0$, $y=0$, $z=0$, $y=1$, $x+z=1$. Ответ: $\dfrac{1}{6}$;

9) $\iiint\limits_V \left(1-2y\right)dxdydz$, если V: $z=y^2$, $2x+z=6$, $x=0$, $z=4$.

Ответ: $19{,}2$.

Практическое занятие № 48. Вычисление тройных интегралов в цилиндрических и сферических координатах

В случае цилиндрических координат положение точки $M\left(x;y;z\right)$ в пространстве определяется тремя числами $\left(\rho,\varphi,z\right)$ (рисунок 1), где ρ – полярный радиус проекции точки $M\left(x;y;z\right)$ на плоскость xOy $\left(M_{xy}\left(x;y;0\right)\right)$; φ – полярный угол точки $M_{xy}\left(x;y;0\right)$; z – аппликата точки $M\left(x;y;z\right)$.

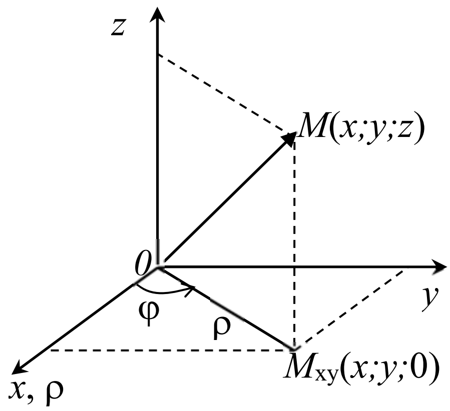

Рисунок 1

Связь декартовых и цилиндрических координат произвольной точки $M\left(x;y;z\right)$ пространства осуществляется по формулам:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, & 0 \le \varphi \le 2\pi \quad (-\pi \le \varphi \le \pi), \\ y = \rho\sin\varphi, & 0 \le \rho < +\infty, \\ z = z, & -\infty < z < +\infty. \end{cases}$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad \varphi = \mathrm{arctg}\frac{y}{x}.$$

Тогда имеет место формула

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{V^*} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\cdot\rho\cdot d\varphi d\rho dz,$$

где якобиан перехода от ПДСК к цилиндрическим координатам равен $|J| = \rho$.

Переход к цилиндрическим координатам целесообразен, если проекция области V на плоскость xOy есть круг, кольцо или их части.

Рассмотрим случай сферических координат.

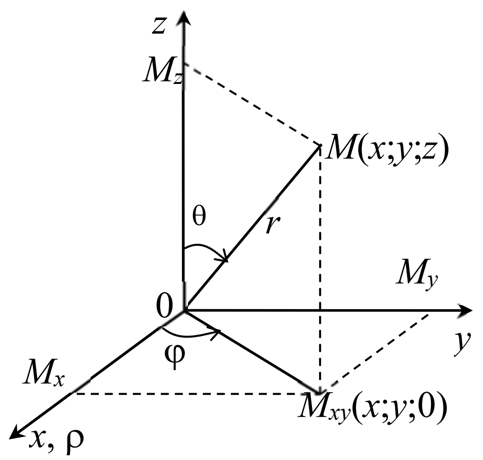

Рисунок 2

Введём сферические координаты (r, θ, φ) (рисунок 2), где r – радиус-вектор точки $M(x;y;z)$; θ – угол между радиус-вектором точки $M(x;y;z)$ и осью Oz; φ – угол между проекцией радиус-вектора точки $M(x;y;z)$ на плоскость xOy и осью Ox.

Связь декартовых и сферических координат произвольной точки $M(x;y;z)$ пространства осуществляется по формулам:

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi, & 0 \le r < +\infty, \\ y = r\sin\theta\sin\varphi, & 0 \le \theta \le \pi, \\ z = r\cos\theta; & 0 \le \varphi \le 2\pi. \end{cases}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}; \quad \varphi = \mathrm{arctg}\frac{y}{x}; \qquad \theta = \mathrm{arctg}\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}.$$

Якобиан перехода от ПДСК к сферическим координатам равен $|J| = r^2\sin\theta$.

Окончательно получаем

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{V^*} f^*(r,\theta,\varphi)\cdot r^2\sin\theta\cdot drd\theta d\varphi.$$

Переход к сферическим координатам целесообразен, если область V есть шар или его часть.

Примеры для самостоятельной работы

Вычислить тройные интегралы.

1 $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz,\quad V: z=x^2+y^2,\ z=1$. Ответ: $\dfrac{4\pi}{15}$.

2 $\iiint\limits_V x^2y^2dxdydz,\quad V: z=x^2+y^2,\ z=0,\ x^2+y^2=1$. Ответ: $\dfrac{\pi}{32}$.

3 $\iiint\limits_V \left(x^2+z^2\right)dxdydz,\quad V: 2y=x^2+z^2,\ y=2$. Ответ: $\dfrac{16\pi}{3}$.

4 $\iiint\limits_V z^3dxdydz, V: x^2+y^2=z^2,\ z=1,\ y=0,\ x=0,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0$. Ответ: $\dfrac{\pi}{24}$.

5 $\iiint\limits_V \dfrac{xyz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dxdydz$, $V: x^2+y^2+z^2=R^2,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0$. Ответ: $\dfrac{R^5}{40}$.

6 $\iiint\limits_V xyzdxdydz,\quad V: x^2+y^2+z^2=1,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0$. Ответ: $\dfrac{1}{48}$.

7 $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz, V: x^2+y^2+z^2=36,\ y\ge 0,\ z\ge 0,\ y\le -x$. Ответ: 81π.

8 $\iiint\limits_V xdxdydz,\quad V: x^2=2\left(y^2+z^2\right),\ x=4,\ x\ge 0$. Ответ: 32π.

9 $\iiint\limits_V \left(x^2+y^2+z^2\right)dxdydz$, $V: x^2+y^2+z^2=4,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0$. Ответ: $\dfrac{16\pi}{5}$.

10 $\iiint\limits_V x^2dxdydz,\quad V: x^2+y^2=1,\ z=2x,\ z=3x,\ x>0$. Ответ: $\dfrac{4}{15}$.

11 $\iiint\limits_V ydxdydz$, $V: x^2+y^2+z^2=32$, $y^2=x^2+z^2$, $y\ge 0$. Ответ: 128π.

Практическое занятие № 49. Вычисление криволинейных интегралов первого и второго родов

Криволинейный интеграл является обобщением определенного интеграла.

Вычисление криволинейных интегралов первого рода (КРИ-1) производится сведением их к определённым интегралам.

Если кривая задана уравнением $y=\varphi(x)$, где $a\le x\le b$, то $dl=\sqrt{1+\left(\varphi'(x)\right)^2}dx$ и

$$\int\limits_L f\left(P\right)dl=\int\limits_a^b f\left(x,\varphi\left(x\right)\right)\cdot\sqrt{1+\varphi'\left(x\right)^2}dx.$$

Если кривая задана уравнением $x=g\left(y\right)$, где $c\le y\le d$, то $dl=\sqrt{1+\left(g'\left(y\right)\right)^2}dy$ и

$$\int_L f(P)\,dl = \int_c^d f\left(g(y), y\right) \cdot \sqrt{1+g'(y)^2}\,dy.$$

Если кривая задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$ и $y = y(t)$, где $\alpha \le t \le \beta$, то $dl = \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}\,dt$ и

$$\int_L f(P)\,dl = \int_\alpha^\beta f\left(x(t), y(t)\right) \cdot \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}\,dt.$$

Если кривая задана в полярной системе координат (ПСК) уравнением $\rho = \rho(\varphi)$, где $\varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2$, то $dl = \sqrt{\left(\rho(\varphi)\right)^2 + \left(\rho'(\varphi)\right)^2}\,d\varphi$ и

$$\int_L f(P)\,dl = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f\left(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi\right) \cdot \sqrt{\left(\rho(\varphi)\right)^2 + \left(\rho'(\varphi)\right)^2}\,d\varphi.$$

Если кривая задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, где $\alpha \le t \le \beta$, то $dl = \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2 + \left(z'(t)\right)^2}\,dt$ и

$$\int_L f(P)\,dl = \int_\alpha^\beta f\left(x(t), y(t), z(t)\right) \cdot \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2 + \left(z'(t)\right)^2}\,dt.$$

Сведение криволинейных интегралов второго рода (КРИ-2) к определённым осуществляется по формулам.

Если кривая задана уравнением $y = \varphi(x)$ и $a \le x \le b$, то

$$\int_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int_a^b \Big(P\big(x, \varphi(x)\big) + Q\big(x, \varphi(x)\big) \cdot \varphi'(x)\Big)\,dx.$$

Если кривая задана уравнением $x = g(y)$ и $c \le y \le d$, то

$$\int_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int_c^d \Big(P\big(g(y), y\big)g'(y) + Q\big(g(y), y\big) \cdot\Big)\,dy.$$

Если кривая задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$ и $y = y(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, то

$$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_\alpha^\beta \Big(P\big(x(t), y(t)\big) \cdot x'(t) + Q\big(x(t), y(t)\big) \cdot y'(t)\Big)\,dt.$$

Аналогично определяются криволинейные интегралы по координатам, если кривая L лежит в плоскостях xOz и yOz.

Если кривая L задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $\alpha \le t \le \beta$, то

$$\int_L P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz = \int_\alpha^\beta \Big(P\big(x(t), y(t), z(t)\big) \cdot x'(t) +$$

$$+ Q\big(x(t), y(t), z(t)\big) \cdot y'(t) + R\big(x(t), y(t), z(t)\big) \cdot z'(t)\Big)\,dt.$$

КРИ-2 обладают теми же свойствами, что и КРИ-1 (линейность, аддитивность), кроме

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = -\int_{BA} P(x,y)dx + Q(x,y)dy .$$

Пусть L – кусочно-гладкий контур на плоскости xOy и D – ограниченная этим контуром замкнутая область. В области D заданы непрерывные функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$, имеющие в этой области непрерывные частные производные. Тогда справедлива формула Грина

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \oint_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy ,$$

где направление на контуре L выбрано так, чтобы при движении по контуру область D все время оставалась слева.

Условием независимости КРИ-2 $\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ от пути интегрирования является равенство $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

Если для интеграла $\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ выполняется условие $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ и контур L замкнутый, то $\oint P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$.

Примеры для самостоятельной работы

1 Вычислить КРИ-1:

1) $\int_L \frac{dl}{\sqrt{5}(x-y)}$, где L – отрезок прямой, заключённой между точками $A(0;4)$ и $B(4;0)$. Ответ: 0;

2) $\int_L y dl$, где L – дуга параболы $y^2 = 2x/3$ между точками $O(0;0)$ и $B(35/6;\sqrt{35}/3)$. Ответ: $215/27$;

3) $\int_L y dl$, где L – дуга астроиды $x = \cos^3 t,\ y = \sin^3 t$, заключённая между точками $A(1;0)$ и $B(0;1)$. Ответ: 0,6;

4) $\int_L \operatorname{arctg} \frac{y}{x} dl$, где L – дуга кардиоиды $\rho = 1 + \cos\varphi,\ 0 \le \varphi \le \pi/2$. Ответ: $(\pi + 4)\sqrt{2} - 8$;

5) $\int_L \frac{(y^2 - x^2)xy}{(x^2 + y^2)^2} dl$, где L – дуга кривой $\rho = 9\sin\varphi,\ 0 \le \varphi \le \pi/4$. Ответ: $-9/8$;

6) $\int\limits_L (x+y)dl$, где L – контур треугольника ABO с вершинами $A(1;0)$, $B(0;1)$, $O(0;0)$. Ответ: $1+\sqrt{2}$;

7) $\int\limits_L ydl$, где L – дуга параболы $y^2 = 2x$, отсечённая параболой $x^2 = 2y$. Ответ: $(5\sqrt{5}-1)/3$;

8) $\int\limits_L ydl$, где L – контур прямоугольника с вершинами $O(0;0)$, $A(4;0)$, $B(4;2)$, $C(0;2)$. Ответ: 12;

9) $\oint\limits_L \sqrt{x^2+y^2}dl$, где L – окружность $x^2+y^2=2y$. Ответ: 8;

10) $\int\limits_L \frac{dl}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, где L – отрезок прямой, соединяющий точки $A(1;1;1)$ и $B(2;2;2)$. Ответ: $\ln 2$.

2 Вычислить КРИ-2:

1) $\int\limits_{AB} (x^2+y)dx + (2x-y)dy$, где AB – дуга параболы $y = 2x - x^2$, пробегаемая от $A(1;1)$ до $B(3;-3)$. Ответ: $-44/3$;

2) $\oint\limits_L (x+2y)dx + (x-y)dy$, где L – окружность $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$ при положительном направлении обхода. Ответ: -4π;

3) $\int\limits_{AB} (x^2-y^2)dx + xydy$, где AB – отрезок прямой между точками $A(1;1)$ и $B(3;4)$. Ответ: $67/6$;

4) $\int\limits_L (x^2+y^2)dx + (x+y^2)dy$, где L – ломаная ABC: $A(1;2)$, $B(3;2)$, $C(3;5)$. Ответ: $194/3$;

5) $\int\limits_L xdx + ydy + (x-y+1)dz$, где L – отрезок прямой, заключённый между точками $A(1;1;1)$ и $B(2;3;4)$. Ответ: 7;

6) $\int\limits_{AB} xdx - ydy$, где AB – дуга астроиды $x = 2\cos^3 t$, $y = 2\sin^3 t$ от точки $A(2;0)$ до точки $B(0;2)$. Ответ: -4;

7) $\oint\limits_L (x^2-y)dx$, где L – контур прямоугольника: $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 2$. Ответ: 2;

8) $\int\limits_L 2xzdx - x^2dz$, где L – дуга параболы $z = x^2/4$, пробегаемая от точки $O(0;0)$ до $A(2;1)$. Ответ: 0;

9) $\int\limits_L (x+y)dx - xdy$, где

а) L – прямая, соединяющая точки $O(0;0)$ и $B(4;2)$;

б) L – ломаная, проходящая через точки $O(0;0)$, $A(2;0)$ $B(4;2)$.

Ответ: а) 8; б) 4;

10) $\oint\limits_L xdy$, где L – контур треугольника, образованного прямыми $y=x$, $x=2$, $y=0$ (интегрирование вести в положительном направлении). Ответ: 2;

11) $\int\limits_L y^2dx+x^2dy,$ где L – верхняя половина эллипса $x=a\cos t,$ $y=b\sin t,$ пробегаемая по ходу часовой стрелки. Ответ: $4ab^2/3$;

12) $\int\limits_L 2yzdy-y^2dz$, где L – ломаная OBA: $O(0;0;0)$, $B(0;2;0)$, $A(0;2;1)$. Ответ: -4;

13) $\int\limits_L xy^2dx+yz^2dy-x^2zdz$, где L – отрезок прямой от точки $O(0;0;0)$ до точки $A(-2;4;5)$. Ответ: 91;

14) $\int\limits_{AB} 2xydx+y^2dy+z^2dz$, где AB – дуга одного витка винтовой линии $x=\cos t,$ $y=\sin t,$ $z=2t,$ $A(1;0;0),$ $B(1;0;4\pi)$. Ответ: $64\pi^3/3$;

15) $\oint\limits_L xdy-ydx$, где L – контур треугольника ABC с вершинами $A(-1;0)$, $B(1;0)$, $C(0;1)$ при положительном направлении обхода. Ответ: 2.

3 Доказать, что интеграл $\int\limits_L (2x+3y)dx+(3x-4y)dy$ не зависит от пути интегрирования, и найти его значение, интегрируя сначала по дуге параболы $y=x^2$ от точки $O(0;0)$ до точки $A(2;4)$, а затем по прямой, соединяющей эти точки. Ответ: -4.

4 Доказать, что значение криволинейного интеграла $\int\limits_L (xy^2-x^3)dx+(yx^2-y^2)dy$ не зависит от вида линии, соединяющей точки $A(-1;1)$ и $B(2;-2)$, и найти значение интеграла. Ответ: 12.

Практическое занятие № 50. Вычисление поверхностных интегралов первого и второго родов

Поверхностный интеграл (ПИ) является таким же обобщением двойного интеграла, каким криволинейный интеграл является по отношению к определенному интегралу.

Вычисление ПИ производится сведением его к двойному интегралу.

Пусть поверхность S задана уравнением $z=z(x,y)$, где $z(x,y),\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$

непрерывны в замкнутой области D_{xy}, которая является проекцией поверхности S на плоскость xOy, тогда

$$\iint\limits_{S} f(x,y,z)ds = \iint\limits_{D_{xy}} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}dxdy.$$

Если поверхность S задана уравнением $x = x(y,z)$, где $x\left(y,z\right), \frac{\partial x}{\partial y}, \frac{\partial x}{\partial z}$ непрерывны в замкнутой области D_{yz}, которая является проекцией поверхности S на плоскость yOz, то

$$\iint\limits_{S} f(x,y,z)ds = \iint\limits_{D_{yz}} f(x\left(y,z\right),y,z)\sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}dydz.$$

Если поверхность S задана уравнением $y = y(x,z)$, где $y\left(x,z\right), \frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial y}{\partial z}$ непрерывны в замкнутой области D_{xz}, которая является проекцией поверхности S на плоскость xOz, то

$$\iint\limits_{S} f(x,y,z)ds = \iint\limits_{D_{xz}} f(x,y\left(x,z\right),z)\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}dxdz.$$

Поверхность, у которой фиксирована одна из её сторон, называется *ориентированной*.

Если поверхность S незамкнутая, однозначно проецируется на плоскость Oxy, т. е. $z = z(x,y)$ – уравнение поверхности, то ту сторону, которая видна со стороны положительного направления оси Oz, если смотреть на плоскость Oxy, будем называть *положительной относительно оси Oz* S_z^+ (аналогично S_x^+, S_y^+). Или $\angle(\vec{n},\vec{k}) < 90°$.

Если поверхность S замкнутая, то за S^+ примем её внешнюю сторону, за S^- – внутреннюю.

Следует помнить, что при изменении стороны поверхности интегрирования, т. е. переориентации поверхности, ПИ-2 изменяет знак.

Вычисление поверхностного интеграла второго рода сводится к вычислению соответствующих двойных интегралов:

$$\iint\limits_{S} R(x,y,z)dxdy = \pm\iint\limits_{D_{xy}} R\left(x,y,z\left(x,y\right)\right)dxdy, \quad \left[\begin{array}{l}\angle(\vec{n},\vec{k}) < 90° \Rightarrow +,\\ \angle(\vec{n},\vec{k}) > 90° \Rightarrow -;\end{array}\right.$$

$$\iint\limits_{S} P(x,y,z)dydz = \pm\iint\limits_{D_{yz}} P\left(x\left(y,z\right),y,z\right)dydz, \quad \left[\begin{array}{l}\angle(\vec{n},\vec{i}) < 90° \Rightarrow +,\\ \angle(\vec{n},\vec{i}) > 90° \Rightarrow -;\end{array}\right.$$

$$\iint\limits_{S} Q(x,y,z)dzdx = \pm\iint\limits_{D_{xz}} Q\left(x,y\left(x,z\right),z\right)dxdz, \quad \left[\begin{array}{l}\angle(\vec{n},\vec{j}) < 90° \Rightarrow +,\\ \angle(\vec{n},\vec{j}) > 90° \Rightarrow -.\end{array}\right.$$

Поверхностные интегралы первого и второго рода связаны друг с другом соотношением

$$\iint\limits_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iint\limits_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)ds .$$

В этой формуле $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – направляющие косинусы нормали к поверхности S в выбранную сторону поверхности.

Если поверхность S задана уравнением $F(x,y,z)=0$, то $\vec{n}=(F'_x;F'_y;F'_z)$ – нормаль к поверхности в каждой точке M.

Пусть $\vec{a}=(P;Q;R)$ – векторная функция, тогда

$$\iint\limits_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iint\limits_S (\vec{a},\vec{n}_0)ds .$$

Если ориентированная поверхность S задана явной непрерывно дифференцируемой функцией $z=z(x,y)$, то

$$\iint\limits_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \pm\iint\limits_{D_{xy}} (\vec{a},\vec{n})\Big|_{z=z(x,y)} dxdy ,\ \vec{a}=(P;Q;R),\ \vec{n}=(-z'_x;-z'_y;1) .$$

Если S: $y=y(x,z)$, то

$$\iint\limits_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \pm\iint\limits_{D_{zx}} (\vec{a},\vec{n})\Big|_{y=y(x,z)} dxdz ,\ \vec{a}=(P;Q;R),\ \vec{n}=(-y'_x;1;-y'_z) .$$

Если S: $x=x(y,z)$, то

$$\iint\limits_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \pm\iint\limits_{D_{yz}} (\vec{a},\vec{n})\Big|_{x=x(y,z)} dydz ,\ \vec{a}=(P;Q;R),\ \vec{n}=(1;-x'_y;-x'_z) .$$

«+» берется, если интегрирование ведётся по стороне $S^+_{z,y,x}$, «–» – если по $S^-_{z,y,x}$.

Если функции $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ непрерывны вместе со своими частными производными первого порядка в пространственной области V, то имеет место *формула Остроградского-Гаусса*

$$\iint\limits_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \oiiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz ,$$

где S – граница области V, и интегрирование по S производится по её внешней стороне.

Если функции $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ непрерывны вместе со своими частными производными первого порядка в точках ориентированной поверхности, то имеет место *формула Стокса*

$$\iint\limits_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy + \left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dxdz = \oint\limits_L Pdx + Qdy + Rdz ,$$

где L – граница поверхности S, и интегрирование вдоль кривой L производится в положительном направлении.

Символическая запись формулы Стокса:

$$\iint\limits_S \begin{vmatrix} dydz & dxdz & dxdy \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \oint\limits_L Pdx + Qdy + Rdz\,.$$

Примеры для самостоятельной работы

1 Вычислить поверхностные интегралы первого рода:

1) $\iint\limits_S \left(z + 2x + \dfrac{4}{3}y \right) ds$, где S – часть плоскости $6x + 4y + 3z = 12$, лежащая в первом октанте. Ответ: $4\sqrt{61}$;

2) $\iint\limits_S \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\, ds$, где S – часть параболоида вращения $z = 1 - x^2 - y^2$, отсечённая плоскостью $z = 0$. Ответ: 3π;

3) $\iint\limits_S \sqrt{x^2 + y^2}\, ds$, где S – часть поверхности конуса $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{16} = \dfrac{z^2}{9}$, расположенная между плоскостями $z = 0$ и $z = 3$. Ответ: $160\pi/3$;

4) $\iint\limits_S \left(x^2 + y^2 + z - \dfrac{1}{2} \right) ds$, где S – часть поверхности $2z = 2 - x^2 - y^2$, отсечённая плоскостью xOy. Ответ: $(9\sqrt{3} - 1)\pi/5$;

5) $\iint\limits_S z(x + y)\, ds$, где S – часть поверхности $z = \sqrt{9 - x^2}$, отсечённая плоскостями $y = 0$, $y = 2$. Ответ: 36;

6) $\iint\limits_S xyzds$, где S – часть поверхности параболоида $z = x^2 + y^2$, отсекаемая плоскостью $z = 1$. Ответ: 0;

7)) $\iint\limits_S x(y + z)\, ds$, где S – часть цилиндрической поверхности $x = \sqrt{1 - y^2}$, отсечённая плоскостями $z = 0$ и $z = 1$. Ответ: 1;

8) $\iint\limits_S \left(3x^2 + 5y^2 + 3z^2 - 2 \right) ds$, где S – часть поверхности $y = \sqrt{x^2 + z^2}$, отсечённая плоскостями $y = 0$ и $y = 1$. Ответ: $2\sqrt{2}\pi$;

9) $\iint\limits_S \sqrt{1 + 4x^2 + 4z^2}\, ds$, где S – часть поверхности $y = 2 - x^2 - z^2$, отсечённая плоскостью $y = 0$. Ответ: 10π.

2 Вычислить поверхностные интегралы второго рода:

1) $\iint\limits_S \left(x^2 + y + z^2\right)dxdz$, где S – внутренняя сторона поверхности $x^2 = 2y$, отсечённая плоскостями $y = 2, \quad z = 0, \quad z = 1$. Ответ: $28/3$;

2) $\iint\limits_S \left(x^2 + y^2 + z^2\right)dydz$, где S – внутренняя сторона части полусферы $x = \sqrt{R^2 - y^2 - z^2}$, вырезанная конусом $x = \sqrt{y^2 + z^2}$. Ответ: $-\pi R^4/2$;

3) $\iint\limits_S \left(x^2 + y^2 + 3z^2\right)dxdy$, где S – внешняя сторона поверхности $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, отсечённая плоскостями $z = 0, z = 2$. Ответ: -32π;

4) $\iint\limits_S yzdydz + xzdxdz + xydxdy$, где S – внешняя сторона треугольника, образованного пересечением плоскости $x + y + z = a$ и координатных плоскостей. Ответ: $a^4/4$;

5) $\iint\limits_S x^2dydz + y^2dxdz + z^2dxdy$, где S – внешняя сторона части сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, лежащей в первом октанте. Ответ: $3\pi a^4/8$;

6) $\iint\limits_S \left(x + z^2\right)dydz + \left(2x^2 + y\right)dxdz$, где S – верхняя сторона части параболоида $y = x^2 + z^2$, отсечённого плоскостью $y = 2$ и расположенного над плоскостью xOy. Ответ: $-\pi$;

7) $\iint\limits_S \left(y^2 - x^2\right)dydz + z^2 \sin x \cdot dxdz - 2y^2z \cdot dxdy$, где S – верхняя сторона части поверхности $z = 1 - x^2$, ограниченной плоскостями $z = 0$, $y = -1$, $y = 2$. Ответ: -8;

8) $\iint\limits_S (x + y)dydz + (y - x)dxdz + (z - 2)dxdy$, где S – часть поверхности конуса $x^2 + y^2 - z^2 = 0,$ отсекаемая плоскостями $z = 0, z = 1,$ нормаль к которой образует тупой угол с осью Oz. Ответ: $8\pi/3$;

9) $\iint\limits_S zdydz + (3y - x)dxdz - zdxdy$, где S – внешняя часть поверхности тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 = 1$, $z = x^2 + y^2 + 2$, $z = 0$. Ответ: 5π.

3 С помощью формулы Остроградского-Гаусса вычислить поверхностные интегралы второго рода:

1) $\iint\limits_S x^2dydz + y^2dxdz + z^2dxdy$, где S – внешняя сторона границы куба $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$, $0 \le z \le 1$. Ответ: 3;

2) $\iint\limits_S xdydz + ydxdz + zdxdy$, где S – внешняя сторона пирамиды, ограниченной плоскостями $x + y + z = 1, x = 0, y = 0, z = 0.$ Ответ: $1/2$;

3) $\iint\limits_S xdydz + ydxdz + zdxdy$, где S – поверхность цилиндра $x^2 + y^2 = a^2$, $-1 \le z \le 1$. Ответ: $6\pi a^2$;

4) С помощью формулы Остроградского-Гаусса вычислить ПИ-2 $\iint\limits_S x^3dydz + y^3dxdz + z^3dxdy$, где S – внешняя сторона сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. Ответ: $12\pi R^5/5$.

4 С помощью формулы Стокса вычислить криволинейные интегралы второго рода:

1) $\oint\limits_L (y+z)dx + (x+z)dy + (x+y)dz$, где L – окружность $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x + y + z = 0$. Ответ: 0;

2) $\oint\limits_L ydx + zdy + xdz$, где L – окружность $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x + y + z = 0$; $S -$ часть плоскости $x + y + z = 0,$ ограниченная данной окружностью. Ответ: $-\pi a^2\sqrt{3}$;

3) $\oint\limits_L yzdx + xzdy + xydz$, где L – контур треугольника с вершинами $O(0;0;0)$, $A(1;1;0)$, $B(1;1;1)$. Ответ: 0;

4) $\oint\limits_L (x-2z)dx + (x+3y+z)dy + (5x+y)dz$, где L – контур треугольника с вершинами $A(1;0;0)$, $B(0;1;0)$, $C(0;0;1)$. Ответ: -3.

Практическое занятие № 51. Геометрические и физические приложения кратных, криволинейных и поверхностных интегралов

Приложения двойного интеграла

1 Площадь плоской фигуры

$$S = \iint\limits_D dxdy.$$

2 Объём криволинейного цилиндра, ограниченного сверху поверхностью $z = f(x,y)$, снизу – плоскостью $z = 0$, сбоку – цилиндрической поверхностью, образующие которой параллельны оси *Oz*, а направляющей служит контур области *D*:

$$V = \iint\limits_D f(x,y)dxdy.$$

3 Площадь поверхности, заданной уравнением $z = f(x,y)$:

$$Q = \iint\limits_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dxdy.$$

Пусть $\mu(x,y)$ – поверхностная плотность пластины.

4 Масса плоской фигуры

$$m = \iint_D \mu(x, y)dxdy.$$

5 Статические моменты относительно координатных осей:

$$M_x = \iint_D y\mu(x, y)dxdy; \qquad M_y = \iint_D x\mu(x, y)dxdy.$$

6 Координаты центра масс:

$$x_C = \frac{M_y}{m}; \; y_C = \frac{M_x}{m}.$$

7 Моменты инерции относительно координатных осей и начала координат:

$$I_x = \iint_D y^2\mu(x, y)dxdy; \qquad I_y = \iint_D x^2\mu(x, y)dxdy;$$

$$I_0 = \iint_D \left(x^2 + y^2\right)\mu(x, y)dxdy.$$

В случае однородной пластины $\mu\left(x, y\right) = \text{const}$.

Приложения тройных интегралов

1 Вычисление объёма замкнутой области V:

$$V = \iiint_V dxdydz.$$

2 Вычисление массы тела, занимающего область V:

$$m = \iiint_V \mu\left(x, y, z\right)dxdydz,$$

где $\mu\left(x, y, z\right)$ – объёмная плотность тела V.

Если тело V однородное, то $\mu\left(x, y, z\right) = \text{const}$.

3 Вычисление статических моментов тела, занимающего область V:

− статический момент тела V относительно плоскости yOz:

$$M_{yz} = \iiint_V \mu\left(x, y, z\right) \cdot x \cdot dxdydz;$$

− статический момент тела V относительно плоскости xOz:

$$M_{xz} = \iiint_V \mu\left(x, y, z\right) \cdot y \cdot dxdydz;$$

− статический момент тела V относительно плоскости xOy:

$$M_{xy} = \iiint_V \mu\left(x, y, z\right) \cdot z \cdot dxdydz.$$

4 Вычисление координат центра масс тела, занимающего область V (центра тяжести):

$$x_c = \frac{M_{yz}}{m}; \quad y_c = \frac{M_{xz}}{m}; \quad z_c = \frac{M_{xy}}{m},$$

где M_{yz}, M_{xz}, M_{xy} – статические моменты тела относительно координатных плоскостей;

m – масса тела V.

5 Вычисление моментов инерции тела, занимающего область V:

− момент инерции тела V относительно оси Ox:

$$I_x = \iiint_V \mu(x,y,z) \cdot (y^2 + z^2) \cdot dxdydz;$$

− момент инерции тела V относительно оси Oy:

$$I_y = \iiint_V \mu(x,y,z) \cdot (x^2 + z^2) \cdot dxdydz;$$

− момент инерции тела V относительно оси Oz:

$$I_z = \iiint_V \mu(x,y,z) \cdot (x^2 + y^2) \cdot dxdydz;$$

− момент инерции тела V относительно плоскости xOy:

$$I_{xy} = \iiint_V \mu(x,y,z) \cdot z^2 \cdot dxdydz;$$

− момент инерции тела V относительно плоскости yOz:

$$I_{yz} = \iiint_V \mu(x,y,z) \cdot x^2 \cdot dxdydz;$$

− момент инерции тела V относительно плоскости xOz:

$$I_{xz} = \iiint_V \mu(x,y,z) \cdot y^2 \cdot dxdydz;$$

− момент инерции тела V относительно начала координат:

$$I_O = \iiint_V \mu(x,y,z) \cdot (x^2 + y^2 + z^2) \cdot dxdydz.$$

Приложения криволинейных интегралов

1 Площадь области D, ограниченная замкнутым контуром L:

$$S = \frac{1}{2}\oint_L xdy - ydx,$$

где направление обхода контура L выбрано так, что область D остаётся все время слева.

2 Площадь цилиндрической поверхности, которая составлена из перпендикуляров к плоскости xOy, построенных в точках $M(x,y)$ кривой L и имеющих переменную длину $f(M) = f(x,y)$,

$$S = \int_L f(x,y)dl.$$

3 Длина плоской или пространственной линии AB

$$l = \int\limits_{AB} dl\,.$$

4 Если L – плоская кривая, то её масса вычисляется по формуле

$$m = \int\limits_{L} \mu(x, y)\,dl\,,$$

где $\mu(x; y)$ – линейная плотность дуги.

5 Координаты центра тяжести кривой L вычисляются по формулам:

$$x_c = \frac{\int\limits_{L} x \cdot \mu(x, y)\,dl}{m}; \quad y_c = \frac{\int\limits_{L} y \cdot \mu(x, y)\,dl}{m}.$$

6 Моменты инерции I_x, I_y, I_O соответственно относительно осей Ox, Oy и начала координат:

$$I_x = \int\limits_{L} y^2 \mu(x, y)\,dl\,;\; I_y = \int\limits_{L} x^2 \mu(x, y)\,dl\,;\; I_o = \int\limits_{L} \left(x^2 + y^2\right)\mu(x, y)\,dl\,.$$

7 Пусть $\vec{F} = P(x, y) \cdot \vec{i} + Q(x, y) \cdot \vec{j}$ есть переменная сила, совершающая работу A вдоль пути L, функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны на кривой L, тогда работа силы

$$A = \int\limits_{L} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy\,.$$

Примеры для самостоятельной работы

1 Вычислить площади фигур, ограниченных линиями:

1) $y = 2 - x,\;\; y^2 = 4x + 4;$

2) $y = \sqrt{x},\; y = 2\sqrt{x},\; x = 4;$

3) $y^2 = 10x + 25,\; y^2 = -6x + 9;$

4) $\rho = a \sin 2\varphi,\; a > 0.$

Ответ: 1) $\frac{64}{3}$; 2) $\frac{16}{3}$; 3) $\frac{16\sqrt{15}}{3}$; 4) $\frac{\pi a^2}{4}$.

2 Вычислить объёмы тел, ограниченных указанными поверхностями:

1) плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x = 4$, $y = 4$ и параболоидом $z = 1 + x^2 + y^2$;

2) цилиндром $x^2 + y^2 = 4$ и плоскостями $z = 0$, $z = x + y + 10$.

Ответ: 1) $186\frac{2}{3}$; 2) 40π.

3 Вычислить площадь части поверхности параболоида $2z = x^2 + y^2$, лежащей внутри цилиндра $x^2 + y^2 = 1$. Ответ: $\dfrac{2\pi\left(2\sqrt{2}-1\right)}{3}$.

4 Вычислить момент инерции относительно начала координат фигуры плотностью $\mu(x, y) = 1$, которая ограничена линиями $x + y = 2$, $x = 2$, $y = 2$. Ответ: 8.

5 Вычислить координаты центра масс фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, $y^2 = x$, если $\mu(x, y) = xy$. Ответ: $x_C = y_C = \dfrac{9}{14}$.

6 Вычислить статический момент однородного полукруга, лежащего в плоскости xOy, радиуса R относительно диаметра. Ответ: $\dfrac{2R^3}{3}$.

7 Найти объём тела, ограниченного поверхностями: $z = x^2 + y^2$, $x + y = 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$. Ответ: $\dfrac{1}{6}$.

8 Найти объём тела, ограниченного поверхностями: $z = 2x^2 + y^2$, $y = x$, $y = 3x$, $x = 2$, $z \geq 0$. Ответ: $\dfrac{152}{3}$.

9 Найти объём тела, ограниченного поверхностями: $x^2 + y^2 = 4$, $z = x^2 + y^2$, $z \geq 0$. Ответ: 8π.

10 Найти объём тела, ограниченного поверхностями: $x^2 + y^2 = 4z$, $x^2 + y^2 = 2x$, $z = 0$. Ответ: $\dfrac{3\pi}{8}$.

11 Найти объём тела, ограниченного поверхностями: $x = 6 - z^2 - y^2$, $x^2 = y^2 + z^2$, $x \geq 0$. Ответ: $\dfrac{32\pi}{3}$.

12 Найти координаты центра масс однородного тела, ограниченного поверхностями: $z = 4 - x^2 - y^2$, $z = 1$, $x = 0$, $y = 0$, ($x \geq 0$, $y \geq 0$).
Ответ: $x_c = y_c = \dfrac{16\sqrt{3}}{15\pi}$, $z_c = 2$.

13 Найти массу тела, ограниченного поверхностями: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz$, если $\mu(x, y, z) = kz^2$. Ответ: $\dfrac{59k\pi R^5}{480}$.

14 Найти момент инерции однородного цилиндра радиуса R, высоты H относительно его оси. Ответ: $\dfrac{\pi R^4 H}{2}$.

15 Найти площадь области, ограниченной параболой $x = z^2$ и прямой $x = 1$ (область лежит в плоскости xOz). Ответ: $4/3$.

16 Найти массу окружности $x^2 + y^2 = ax$, если линейная плотность $\mu(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Ответ: $2a^2$.

17 Вычислить работу силы $\vec{F} = x^2 y\vec{i} - y\vec{j}$ при перемещении вдоль отрезка MN от точки $M(-1;0)$ к точке $N(0;1)$. Ответ: $-5/12$.

Список литературы

1 **Демидович, Б. П.** Сборник задач и упражнений по математическому анализу: учебное пособие / Б. П. Демидович. – 13-е изд., испр. – Москва : Моск. ун-т, 1997. – 624 с.

2 **Жевняк, Р. М.** Высшая математика. Функции многих переменных. Интегральное исчисление функций одной и многих переменных. Векторный анализ : учебник / Р. М. Жевняк, А. А. Карпук. – Минск : Вышэйшая школа, 1993. – 411 с.

3 Сборник задач по математике для втузов. Специальные разделы математического анализа / В. А. Болтов [и др.] ; под ред. А. В. Ефимова и Б. П. Демидовича. – 2-е изд. – Москва : Наука, 1986. – Т. 2. – 368 с.