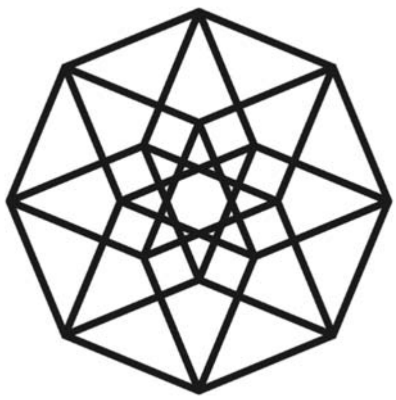
МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Высшая математика»

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

***Методические рекомендации к практическим занятиям
для студентов направления подготовки
01.03.04 «Прикладная математика»
очной формы обучения***

Часть 2



Могилев 2021

УДК 519.6
ББК 22.176
Д48

Рекомендовано к изданию
учебно-методическим отделом
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Высшая математика» «25» февраля 2021 г., протокол № 6

Составители: канд. физ.-мат. наук, доц. И. У. Примак;
канд. физ.-мат. наук, доц. Л. И. Сотская

Рецензент канд. физ.-мат. наук, доц. В. А. Ливинская

Методические рекомендации содержат необходимые для проведения практических занятий теоретическую часть и задачи, а также задания для самостоятельной работы по курсу «Дискретная математика».

Учебно-методическое издание

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

Часть 2

Ответственный за выпуск	В. Г. Замураев
Корректор	Т. А. Рыжикова
Компьютерная верстка	Н. П. Полевничая

Подписано в печать . Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Печать трафаретная. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 56 экз. Заказ №

Издатель и полиграфическое исполнение:
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования
«Белорусско-Российский университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/156 от 07.03.2019.
Пр-т Мира, 43, 212022, г. Могилев.

Содержание

18 Практическое занятие № 18. Операции и их свойства. Гомоморфизмы. Изоморфизмы 4
19 Практическое занятие № 19. Алгебры с одной операцией 7
20 Практическое занятие № 20. Алгебры с двумя операциями 9
21 Практическое занятие № 21. Векторные пространства и модули 12
22 Практическое занятие № 22. Булевы алгебры 15
23 Практическое занятие № 23. Элементарные булевы функции 16
24 Практическое занятие № 24. Формулы 20
25 Практическое занятие № 25. Разложение булевых функций по переменным. Совершенные нормальные формы 24
26 Практическое занятие № 26. Построение сокращенных дизъюнктивных форм 28
27 Практическое занятие № 27. Задача минимизации булевых функций 31
28 Практическое занятие № 28. Замкнутые классы. Полные системы функций 33
29 Практическое занятие № 29. Логика высказываний 36
30 Практическое занятие № 30. Логика предикатов 40
31 Практическое занятие № 31. Теория доказательств 44
Список литературы 47

Часть 2

18 Практическое занятие № 18. Операции и их свойства. Гомоморфизмы. Изоморфизмы

На занятии рассматриваются следующие вопросы: операции и их носитель, замыкания и подалгебры, система образующих, свойства операций, гомоморфизмы, изоморфизмы [1–4].

18.1 Теоретическая часть

Всюду определенная функция $\varphi: A^n \to A$ называется ***n-арной*** (***n-местной***) ***операцией*** на множестве A. При $n=1$ и $n=2$ имеем соответственно унарную и бинарную операцию.

Совокупность множества A вместе с набором операций $\Omega = \{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_m\}$, $\varphi_i: A^{n_i} \to A$, где n_i – арность операции φ_i, называется ***алгебраической структурой*** или просто ***алгеброй*** (обозначается $\langle A;\Omega\rangle$ или $\langle A;\varphi_1,...,\varphi_m\rangle$). Множество A называется ***основным*** (***несущим***) множеством или ***носителем***, множество операций Ω – ***сигнатурой***.

Подмножество носителя $X \subset A$ называется ***замкнутым*** относительно операции φ, если $\forall x_1, x_2, ..., x_n \in X \left(\varphi(x_1, x_2, ..., x_n) \in X\right)$.

Если X замкнуто относительно всех $\varphi \in \Omega$, то $\langle X;\Omega_X\rangle$ называется ***подалгеброй*** $\langle A;\Omega\rangle$, где $\Omega_X = \{\varphi_i^X\}$, $\varphi_i^X = \varphi_i\Big|_{X^k}$, $k = n_i$.

Замыканием множества $X \subset A$ относительно сигнатуры Ω (обозначается $[X]_\Omega$) называется множество всех элементов (включая сами элементы множества X), которые можно получить, применяя операции из Ω. Если сигнатура подразумевается, её можно не указывать.

Свойства замыкания: $X \subset Y \Rightarrow [X] \subset [Y]$; $X \subset [X]$; $\big[[X]\big] = [X]$; $[X] \cup [Y] \subset [X \cup Y]$.

Множество $M' \subset M$ называется ***системой образующих*** алгебры $\langle M;\Omega\rangle$, если $[M']_\Omega = M$.

Некоторые свойства операций.

Пусть задана алгебра $\langle A;\Omega\rangle$ и $a,b,c \in A$; $\circ,* \in \Omega$; $\circ,*: A \times A \to A$. Тогда:

– ассоциативность: $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$;

– коммутативность: $a \circ b = b \circ a$;

– дистрибутивность $*$ относительно $\circ$ слева: $a * (b \circ c) = (a * b) \circ (a * c)$;

– дистрибутивность $*$ относительно $\circ$ справа: $(a \circ b) * c = (a * c) \circ (b * c)$;

– поглощение ($*$ поглощает $\circ$): $(a \circ b) * a = a$;

– идемпотентность: $a \circ a = a$.

Пусть $\mathbb{A} = \langle A; \varphi_1, ..., \varphi_m \rangle$ и $\mathbb{B} = \langle B; \phi_1, ..., \phi_m \rangle$ – алгебры одного типа. Если существует функция $f : A \to B$, такая, что

$$\forall i \in 1...m \, (f(\varphi_i(a_1, ..., a_n)) = \phi_i(f(a_1), ..., f(a_n))),$$

то говорят, что f – ***гомоморфизм*** из $\mathbb{A}$ в $\mathbb{B}$.

Гомоморфизмы, обладающие дополнительными свойствами, имеют специальные названия. Гомоморфизм, который является инъекцией, называется ***мономорфизмом***. Гомоморфизм, который является сюръекцией, называется ***эпиморфизмом***. Гомоморфизм, который является биекцией, называется ***изоморфизмом***. Другими словами, изоморфизм является одновременно мономорфизмом и эпиморфизмом. Если $A = B$, то гомоморфизм называется ***эндоморфизмом***, а изоморфизм – ***автоморфизмом***.

18.2 Задачи к занятию

1 Даны две алгебраические системы: множество $\mathbb{N}$ с операцией умножения и множество $M = \{0, 1\}$ также с операцией умножения. Докажите, что отображение φ, ставящее каждому натуральному числу $n \neq 1$ в соответствие число $0 \in M$, а числу $n = 1$ – число $1 \in M$, является гомоморфизмом.

2 Даны две алгебраические системы: множество M вещественных матриц данного порядка n с операцией матричного умножения $\odot$ и множество $\mathbb{R}$ с операцией обычного умножения. Выясните, являются ли гомоморфизмами следующие отображения системы $< M; \odot >$ на систему $< \mathbb{R}; \cdot >$: а) отображение φ_1, такое, что $\varphi_1(\mathbf{A}) = |\mathbf{A}|$; б) отображение φ_2, такое, что $\varphi_2(\mathbf{A}) = a_{11}$, где $|\mathbf{A}|$ – определитель матрицы $\mathbf{A} \in M$, a_{11} – элемент первой строки и первого столбца матрицы $\mathbf{A}$.

3 Даны три алгебраические системы: множество $\mathbb{N}$ с операцией сложения, множество $M_1 = \{x \mid x = 2k, k \in \mathbb{N}\}$ также с операцией сложения и множество $M_2 = \{x \mid x = 2k + 1, k \in \mathbb{N}\}$ с операцией умножения. Выясните, какие из этих систем изоморфны между собой.

4 Докажите, что множество $\mathbb{R}^+$ с операцией сложения и множество $\mathbb{R}^-$ с операцией сложения являются изоморфными алгебраическими системами.

5 Докажите, что алгебраические системы – множество M матриц вида $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, где $x \in \mathbb{R}$, с матричным умножением и множество $\mathbb{R}$ с обычным сложением – изоморфны между собой.

6 Докажите, что всякое множество с бинарной операцией изоморфно само себе.

7 Пусть на каждом из множеств M_1 и M_2 определена бинарная операция. Докажите, что если M_1 изоморфно M_2, то и M_2 изоморфно M_1.

8 Докажите, что если на каждом из множеств M_1, M_2 и M_3 определена бинарная операция и при этом M_1 изоморфно M_2, а M_2 изоморфно M_3, то M_1 изоморфно M_3.

9 Докажите, что алгебраические системы – множество $\mathbb{N}$ с операцией сложения, множество M отрицательных чётных чисел также с операцией сложения и множество $S=\left\{2, 2^2, ..., 2^n, ...\right\}$ с операцией умножения – изоморфны между собой.

10 Выясните, являются ли коммутативными и ассоциативными на множестве $\mathbb{Z}$ бинарные операции сложения, умножения и вычитания.

11 Выясните, являются ли коммутативными и ассоциативными на множестве $\mathbb{Q}\setminus\{0\}$ бинарные операции умножения и деления.

12 Выясните, какие из приведенных бинарных операций коммутативны и какие ассоциативны на множестве $\mathbb{N}$: а) $a\circ b=a^b$; б) $a\circ b=c$, где c – наибольший общий делитель чисел a и b; в) $a\circ b=m$, где m – наименьшее общее кратное чисел a и b.

13 Докажите, что на множестве $\mathbb{R}^+$ бинарная операция $a\circ b=\sqrt{a\cdot b}$ нахождения среднего геометрического коммутативна, но не ассоциативна.

18.3 Домашнее задание

1 Выяснить ассоциативность операции $\odot$ на множестве M, если: а) $M=\mathbb{N}$, $x\odot y=2xy$; б) $M=\mathbb{Z}$, $x\odot y=x^2+y^2$; в) $M=\mathbb{R}$, $x\odot y=\sin x\cdot\sin y$; г) $M=\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $x\odot y=x\,y^{x/|x|}$; д) $M=R$, $x\odot y=x-y$.

2 Охарактеризовать свойства следующих алгебраических систем (замкнутость множества относительно операций, коммутативность, наличие нейтрального элемента, симметричных элементов, ассоциативность): а) $<\mathbb{N};\ +,\cdot>$; б) $<\mathbb{Z};\ +,\cdot>$; в) $<\mathbb{Q};\ +,\cdot>$; г) $<\mathbb{R};\ +,\cdot>$; д) $<\mathbb{C};\ +,\cdot>$.

3 Символом $2\mathbb{Z}$ обозначается множество чётных целых чисел, символом $2\mathbb{Z}+1$ – множество нечётных целых чисел. Охарактеризовать свойства алгебраических систем $<2\mathbb{Z};\ +,\cdot>$ и $<2\mathbb{Z}+1;\ +,\cdot>$.

4 Символом $Z_n=\left\{0,1,...,n-1\right\}$ обозначается множество вычетов по модулю n (остатков от деления на n). Операции на множестве вычетов: сложение и умножение по модулю n. Их определение: $x+ny$ – остаток от деления $x+y$ на n, $x\cdot ny$ – остаток от деления $x\cdot y$ на n. Построить таблицы сложения и умножения по модулям 2, 3, 4, 5, 6. Найти нейтральные и симметричные элементы относительно этих операций (в случае умножения необходимо исключить из множества вычетов 0).

5 Нестандартное сложение чисел задается формулой $x\oplus y=x+y-1$. Выяснить свойства операции $\oplus$.

6 Доказать замкнутость множества Q\{1} относительно операции $\otimes$ (см. выше задание 4). *Указание*: показать, что если $x\otimes y=1$, то $x=1$ или $y=1$.

19 Практическое занятие № 19. Алгебры с одной операцией

На занятии рассматриваются полугруппы, определяющие соотношения, моноиды, группы, группа перестановок [1–4].

19.1 Теоретическая часть

Полугруппа – это алгебра с одной ассоциативной бинарной операцией:

$$a*(b*c)=(a*b)*c.$$

Всякое множество тотальных функций одного аргумента замкнутое относительно суперпозиции, является полугруппой.

Если в полугруппе существует система образующих, состоящая из одного элемента, то такая полугруппа называется ***циклической***.

Моноид – это полугруппа с ***единицей***, которую называют нейтральным элементом: $\exists e\left(\forall a\left(a*e=e*a=a\right)\right)$.

Группа – это моноид, в котором $\forall a\left(\exists a^{-1}\left(a*a^{-1}=a^{-1}*a=e\right)\right)$.

Элемент a^{-1} называется ***обратным***, а операция * называется умножением.

Теорема. Обратный элемент единственен.

Теорема. В любой группе выполняются соотношения: 1) $\left(a*b\right)^{-1}=b^{-1}*a^{-1}$; 2) $a*b=a*c\Rightarrow b=c$; 3) $b*a=c*a\Rightarrow b=c$; $\left(a^{-1}\right)^{-1}=a$.

Коммутативная группа, т. е. группа, в которой $\forall a,b\left(a*b=b*a\right)$, называется ***абелевой***. В абелевых группах обычно приняты следующие обозначения: групповая операция обозначается +, обратный элемент к a обозначается $-a$, единица группы обозначается 0 и называется ***нулем*** или ***нейтральным элементом***.

19.2 Задачи к занятию

1 Выяснить, какие из приведенных множеств являются группами относительно указанных операций: а) множество $\mathbb{Z}$ относительно вычитания; б) множество четных чисел относительно умножения; в) множество целых чисел, кратных любому заданному натуральному числу n, относительно сложения; г) множество $\mathbb{Q}^{+}$ относительно умножения; д) множество $\mathbb{Q}$ относительно умножения; е) множество $\mathbb{Q}\setminus\{0\}$ относительно умножения; ж) множество $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ относительно умножения; з) множество квадратных матриц n-го порядка относительно сложения матриц; и) множество матриц n-го порядка с определителем, равным 1, относительно умножения матриц, сложения; к) множество решений любой заданной системы линейных однородных уравнений относительно сложения; л) множество трехмерных (n-мерных) арифметических

векторов относительно сложения; м) множество чисел вида $a+b\sqrt{2}$ относительно сложения, если a и b – любые рациональные числа; н) множество параллельных переносов в плоскости относительно операции их последовательного выполнения; о) множество многочленов одной и той же степени n от одного аргумента относительно сложения; п) множество многочленов степени не выше n относительно сложения; р) множество многочленов от одного аргумента относительно сложения; с) множество матриц вида $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, где $a \in \mathbb{R}$, относительно сложения матриц; т) множество матриц вида $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, где $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, относительно умножения матриц.

2 Доказать, что множество четных чисел является подгруппой аддитивной группы $\mathbb{Z}$ целых чисел. Выяснить, является ли множество нечетных чисел подгруппой группы $\mathbb{R}$.

3 Пусть n – заданное натуральное число. Показать, что множество целых чисел, кратных n, является подгруппой аддитивной группы $\mathbb{Z}$.

4 Показать, что любая подгруппа аддитивной группы $\mathbb{Z}$ состоит из всех чисел, кратных некоторому натуральному числу n.

5 Доказать, что множество целых степеней числа 3 является подгруппой мультипликативной группы $\mathbb{Q}\setminus\{0\}$. Записать эту подгруппу символически. Выяснить, является ли она циклической. Определить порядок элемента, порождающего эту подгруппу.

6 Выявить группы, у которых множество всех подгрупп состоит: а) из одной подгруппы; б) из двух подгрупп; в) из трёх подгрупп.

7 Доказать, что любая циклическая группа порядка n изоморфна группе Z_n вычетов по модулю n.

8 Пусть φ – изоморфизм группы G_1 на группу G_2 и $\varphi(g)=h$. Доказать, что элементы g и h имеют равные порядки.

9 Объяснить, почему группа поворотов квадрата не изоморфна группе самосовмещений ромба.

19.3 Домашнее задание

1 Правой (левой) единицей полугруппы называется такой элемент u, что $au=a$ ($ua=a$) при любом a. Доказать, что если в полугруппе имеются как правые, так и левые единицы, то все они совпадают так, что существует единственная двусторонняя единица. *Указание*: рассмотреть u_1u_2, где u_1 – какая-либо левая единица, u_2 – правая единица.

2 Может ли элемент полугруппы быть одновременно правым нулём и левой единицей?

3 Доказать, что если в полугруппе существует обратный элемент, то он единственный.

4 На множестве M^2, где M – множество, определена операция $\circ$ по правилу $(x, y)\circ(z, t)=(x, t)$. Установить, является ли M^2 полугруппой относительно этой операции. Выяснить, существует ли в M^2 нейтральный элемент.

5 Сколько элементов содержит полугруппа, состоящая из всех степеней матрицы $\circ\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$? Выяснить, является ли эта полугруппа группой.

6 Выяснить, какие из указанных множеств квадратных вещественных матриц фиксированного порядка образуют группу: а) множество симметрических (кососимметрических) матриц относительно сложения; б) множество невырожденных матриц относительно сложения; в) множество матриц с фиксированным определителем d относительно умножения; г) множество диагональных матриц относительно сложения; д) множество верхних треугольных матриц относительно умножения; е) можество верхних треугольных матриц относительно сложения.

7 Пусть X – некоторое непустое множество. Выяснить, образует ли множество 2^X полугруппу/группу относительно указанной операции. Указать нейтральный элемент, если он существует: а) объединение множеств; б) пересечение множеств; в) симметрическая разность множеств?

8 Выяснить, какие из следующих множеств с указанными операциями образуют полугруппы, а какие – группу: а) множество векторов плоскости относительно сложения; б) множество векторов пространства относительно сложения; в) множество векторов пространства относительно скалярного произведения; г) множество векторов пространства относительно векторного произведения.

20 Практическое занятие № 20. Алгебры с двумя операциями

На занятии рассматриваются кольца, области целостности, поля [1–4].

20.1 Теоретическая часть

Кольцо – это множество A с двумя бинарными операциями + и * (они называются сложением и умножением соответственно), в котором:

1) $(a+b)+c=a+(b+c)$ сложение ассоциативно;

2) $\exists 0\in A \quad (\forall a\,(a+0=0+a=a))$ существует нуль;

3) $\forall a\,(\exists -a(a+(-a)=0))$ существует обратный элемент;

4) $a+b=b+a$ сложение коммутативно, т. е. кольцо – абелева группа по сложению;

5) $a*(b*c)=(a*b)*c$ умножение ассоциативно, т. е. кольцо – полугруппа по умножению;

6) $a*(b+c)=(a*b)+(a*c)$ умножение дистрибутивно относительно

сложения слева и справа.

Кольцо называется ***коммутативным***, если

7) $a*b=b*a$ умножение коммутативно.

Кольцо называется кольцом ***с единицей***, если

8) $\exists 1\in A\left(a*1=1*a=a\right)$ существует единица, т. е. кольцо с единицей – моноид по умножению.

В кольце выполняются следующие соотношения:

1) $0*a=a*0=0$; 2) $a*(-b)=(-a)*b=-(a*b)$; 3) $(-a)*(-b)=a*b$; 4) $(-a)=a*(-1)$; 5) $-(a+b)=(-a)+(-b)$; 6) $a\neq 0\Rightarrow\left(a^{-1}\right)^{-1}=a$.

Если в кольце для некоторых ненулевых элементов x, y выполняется равенство $x*y=0$, то x называется ***левым***, а y – ***правым делителем нуля***.

Коммутативное кольцо с единицей, не имеющее делителей нуля, называется ***областью целостности***.

Поле – это коммутативное кольцо с единицей, в котором каждый элемент, кроме нейтрального элемента по сложению, имеет обратный элемент по умножению.

Поле является областью целостности.

20.2 Задачи к занятию

1 Выяснить, образуют ли кольцо относительно обычных сложения и умножения: а) множество $\mathbb{N}$; б) множество $\mathbb{Z}$; в) множество всех нечётных чисел; г) множество всех чётных чисел; д) множество чисел вида $a+b\sqrt[3]{5}$, где a, b – любые целые числа. В каких из указанных случаев существует единичный элемент (т. е. нейтральный элемент для операции умножения)?

2 Выяснить, является ли кольцом множество L чисел вида $a+b\sqrt{3}+c\sqrt{5}$, $a,b,c\in\mathbb{Z}$, относительно обычных операций сложения и умножения.

3 Показать, что множество чисел вида $a+b\sqrt{3}+c\sqrt{5}+d\sqrt{15}$, где $a,b,c,d\in\mathbb{Z}$, является числовым кольцом, т. е. кольцом относительно обычных операций сложения и умножения над числами.

4 Доказать, что в любом кольце для любых его элементов a, b, c имеют место свойства: а) если $a+b=a+c$, то $b=c$; б) $a-b=a+(-b)$; в) $-(a+b)=-a-b$; г) $-(a-b)=b-a$.

5 Записать левый и правый дистрибутивный законы, если операция $*$ дистрибутивна относительно операции $\circ$. Дистрибутивно ли обычное сложение относительно обычного умножения?

6 Выяснить, дистрибутивна ли каждая из операций $\bigcup$ и $\bigcap$ относительно другой на множестве подмножеств какого-либо множества.

7 Выяснить, дистрибутивна ли операция $*$ относительно операции $\circ$, если $*$ является операцией возведения в степень на множестве $\mathbb{N}$, а $\circ$ – операцией умножения на том же множестве, т. е. $a*b=a^b$, $a\circ b=a\cdot b$, где a, b – любые элементы из $\mathbb{N}$.

8 Составить таблицы сложения и умножения элементов поля Z_7, а затем найти характеристику этого поля. Какую характеристику имеет поле Z_p вычетов по простому модулю p?

9 Убедиться в том, что поле $A = \{0, 1\}$ с обычной операцией умножения и операцией сложения $\oplus$, задаваемой равенствами $1 \oplus 1 = 0 \oplus 0 = 0$, $1 \oplus 0 = 0 \oplus 1 = 1$, имеет характеристику, равную двум.

10 Привести примеры полей, характеристика которых равна нулю.

11 Показать, что для составного числа $n = n_1 n_2$, $1 < n_1 < n$, $1 < n_2 < n$ и единицы e любого поля справедливо равенство $(n_1 n_2)e = (n_1 e)(n_2 e)$.

12 Доказать, что не существует полей, характеристикой которых была бы единица или какое-либо составное натуральное число.

20.3 Домашнее задание

1 Выяснить, какие из следующих множеств образуют кольцо, а какие поле: а) множество $\{0\}$; б) множество $\mathbb{N}$ натуральных чисел; в) множество целых неотрицательных чисел; г) множество целых неположительных чисел; д) множество $\mathbb{Z}$ целых чисел; е) множество $2\mathbb{Z}$ четных чисел; ж) множество $n\mathbb{Z}$ целых чисел, кратных заданному числу $n \neq 0$; з) множество $\mathbb{Q}$ рациональных чисел; и) множество иррациональных чисел; к) множество $\mathbb{R}$ вещественных чисел; л) множество $\mathbb{C}$ комплексных чисел; м) множество $\mathbb{Z}[i]$ целых гауссовых чисел, т. е. комплексных чисел с целыми действительной и мнимой частями; н) множество комплексных чисел с рациональными действительной и мнимой частями.

2 Выяснить, какие из колец предыдущего задания 1 не содержат 1.

3 Доказать, что любое числовое поле содержит $\mathbb{Q}$.

4 Доказать, что кольца $\mathbb{Z}$ и $n\mathbb{Z}$ при $n \geq 2$ не изоморфны.

5 Доказать, что поля $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R}$ не изоморфны; поля $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ не изоморфны.

6 Выяснить, какие из следующих множеств образуют кольцо, а какие – поле: а) множество чисел вида $a + b\sqrt{2}$, где a, b – целые; б) множество чисел $a + b\sqrt{2}$, где a, b – рациональные; в) множество чисел $a + b\sqrt[3]{2}$, где a, b – целые; г) множество чисел $a + b\sqrt[3]{2}$, где a, b – рациональные; д) множество чисел $a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}$, где a, b, c – целые; е) множество чисел $a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}$, где a, b, c – рациональные.

7 Выяснить, изоморфны ли поля $\left\{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\right\}$ и $\left\{a + b\sqrt{3} : a, b \in \mathbb{Q}\right\}$.

8 Найти элемент, обратный к заданному: а) $2 + \sqrt{3}$ в поле $\left\{a + b\sqrt{3} : a, b \in \mathbb{Q}\right\}$; б) $1 - \sqrt{5}$ в поле $\left\{a + b\sqrt{5} : a, b \in \mathbb{Q}\right\}$; в) $3 + \sqrt[3]{2} - 3\sqrt[3]{4}$ в поле $\left\{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} : a, b, c \in \mathbb{Q}\right\}$; г) $1 - 2\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9}$ в поле $\left\{a + b\sqrt[3]{3} + c\sqrt[3]{9} : a, b, c \in \mathbb{Q}\right\}$.

21 Практическое занятие № 21. Векторные пространства и модули

На занятии рассматриваются понятия векторного пространства, линейные комбинации, базис и размерность, модули [1–4].

21.1 Теоретическая часть

Пусть $\mathscr{F} = \langle F;+,\cdot\rangle$ – поле с операцией сложения +, операцией умножения $\cdot$, аддитивным нейтральным элементом (нулем) 0 и мультипликативным (единицей) 1. Пусть $\mathscr{V} = \langle V;+\rangle$ – абелева группа с операцией + и нейтральным элементом $\mathbf{0}$. Если существует операция $F \times V \to V$, такая, что для любых $\alpha, \beta \in F$ и для любых $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$ выполняются соотношения:

1) $(\alpha+\beta)\mathbf{a} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{a}$; 2) $\alpha(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \alpha\mathbf{a} + \alpha\mathbf{b}$; 3) $(\alpha\cdot\beta)\mathbf{a} = \alpha(\beta\mathbf{a})$; 4) $1\mathbf{a} = \mathbf{a}$,

то $\mathscr{V}$ называется ***векторным пространством*** над полем $\mathscr{F}$, элементы F – ***скалярами***, элементы V – ***векторами***, нейтральный элемент группы V – ***нуль-вектором*** и обозначается $\mathbf{0}$, а операция $F \times V \to V$ называется ***умножением вектора на скаляр***.

Линейной комбинацией векторов $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_s\}$ векторного пространства $\mathscr{V}$ над полем $\mathscr{F}$ с коэффициентами $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ из поля $\mathscr{F}$ называется выражение вида $\alpha_1\mathbf{a}_1 + \alpha_2\mathbf{a}_2 + ... + \alpha_s\mathbf{a}_s$, а также вектор, получающийся в результате выполнения операций в этом выражении.

Если $\alpha_1\mathbf{a}_1 + \alpha_2\mathbf{a}_2 + ... + \alpha_s\mathbf{a}_s = \mathbf{0} \Rightarrow \forall i \in 1..s(\alpha_i = 0)$, то множество векторов $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_s\}$ называют ***линейно независимым***. В противном случае, если $\exists \alpha_1, ..., \alpha_s \in F\left(\bigvee_{i=1}^{s} \alpha_i \neq 0\right) \& \sum_{i=1}^{s} \alpha_i\mathbf{a}_i = \mathbf{0}$, множество $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_s\}$ называется ***линейно зависимым***.

Вектор $\mathbf{a}$ линейно выражается через множество векторов $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_s\}$, если существует линейная комбинация векторов этого множества, равная вектору $\mathbf{a}$.

Теорема. Линейно независимое множество векторов не содержит нуль-вектора.

Критерий линейной зависимости. Множество векторов $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_s\}$ линейно зависимо тогда, и только тогда, когда один из векторов этого множества линейно выражается через предыдущие, т. е. найдётся $i \in \{1, ..., s\}$, такое, что $\mathbf{a}_i = \beta_1\mathbf{a}_1 + \beta_2\mathbf{a}_2 + ... + \beta_{i-1}\mathbf{a}_{i-1}$.

Подмножество векторов $S \in V$, такое, что любой элемент V может быть представлен в виде линейной комбинации элементов S, называется ***порождающим*** множеством пространства $\mathscr{V}$ или ***множеством образующих***.

Линейно независимое порождающее множество называется ***базисом*** векторного пространства.

Теорема. Пусть векторное пространство $\mathcal{V}$ имеет базис $A=\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,...,\mathbf{e}_s\}$. Тогда каждый элемент векторного пространства имеет единственное представление в данном базисе.

Коэффициенты разложения вектора в данном базисе называются его координатами.

Если векторное пространство $\mathcal{V}$ имеет базис A, то количество элементов в базисе называется ***размерностью*** векторного пространства и обозначается $\dim\mathcal{V}$. Векторное пространство, имеющее конечный базис, называется ***конечномерным.*** Векторное пространство, не имеющее базиса (в смысле приведенного определения), называется ***бесконечномерным***.

Понятие модуля во многом аналогично понятию векторного пространства с той лишь разницей, что векторы умножаются не на элементы из поля, а на элементы из произвольного кольца.

Пусть $\mathcal{R}=\langle R;+,*\rangle$ – некоторое кольцо с операцией сложения +, операцией умножения *, нулевым элементом 0 и единичным элементом 1. Абелева группа $\mathcal{M}=\langle M;+\rangle$ называется ***модулем*** над кольцом $\mathcal{R}$, если задана операция умножения на скаляр $R\times M\to M$, такая что:

1) $(\alpha+\beta)\mathbf{a}=\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{a}$; 2) $\alpha(\mathbf{a}+\mathbf{b})=\alpha\mathbf{a}+\alpha\mathbf{b}$; 3) $(\alpha*\beta)\mathbf{a}=\alpha(\beta\mathbf{a})$; 4) $1\mathbf{a}=\mathbf{a}$, где $\alpha,\beta\in R$, а $\mathbf{a},\mathbf{b}\in M$. Элементы кольца $\mathcal{R}$ называются ***скалярами***, а элементы группы $\mathcal{M}$ – ***векторами***.

21.2 Задачи к занятию

1 Показать, что множество V_2 векторов плоскости, исходящих из начала координат, является вещественным линейным пространством (т. е. пространством над полем R).

2 Выяснить, является ли линейным пространством над полем R:

а) множество векторов плоскости, исходящих из начала координат, концы которых лежат на прямой $y=2x+3$ (или вообще на прямой $y=kx+l$, где $l\neq 0$);

б) множество векторов плоскости, исходящих из начала координат, концы которых лежат в первой четверти системы координат;

в) множество тех n-мерных арифметических векторов $\mathbf{a}=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$, у которых $\alpha_1+\alpha_2+...\alpha_1=0$;

г) множество тех n-мерных арифметических векторов, компоненты которых есть целые числа.

3 Объяснить, почему множество невырожденных матриц 2-го порядка с элементами из $\mathbb{R}$ не является вещественным линейным пространством относительно операций сложения матриц и умножения матрицы на число.

4 Выяснить, является ли линейным пространством над полем R множество $\mathbb{R}^+$, если операция сложения элементов из $\mathbb{R}^+$ есть обычное умножение, $a\oplus b=a\cdot b$, а умножение $\odot$ числа k из поля R на элемент $a\in\mathbb{R}^+$ есть

возведение элемента a в степень k: $k \odot a = a^k$.

5 Найти линейную комбинацию $3\mathbf{a}_1 - 2\mathbf{a}_2 + 8\mathbf{a}_3$ векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ если: а) $\mathbf{a}_1 = (1, 2, 1, 2)$, $\mathbf{a}_2 = (-1, -3, 4, 5)$, $\mathbf{a}_3 = (-5, 0, 2, 3)$; б) $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$; в) $\mathbf{a}_1 = 1 + 2x + x^2 + 2x^3$, $\mathbf{a}_2 = -1 - 3x + 4x^2 + 5x^3$, $\mathbf{a}_3 = -5 + 2x^2 + 3x^3$.

6 Убедиться в том, что следующие системы векторов (в соответствующих пространствах над R) линейно зависимы, выразить один из векторов каждой системы через остальные: а) $\mathbf{a}_1 = \frac{1}{2}$, $\mathbf{a}_2 = 3i$, $\mathbf{a}_3 = -4 - 6i$; б) $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; в) $\mathbf{f}_1(x) = 1$, $\mathbf{f}_2(x) = 3x$, $\mathbf{f}_3(x) = \frac{1}{2}x^2$, $\mathbf{f}_4(x) = 2 + x + x^2$.

7 Найти все базисы следующих систем векторов: а) $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$; б) $\mathbf{b}_1 = \frac{1}{2}$, $\mathbf{b}_2 = 3i$, $\mathbf{b}_3 = -4 - 6i$; в) $\mathbf{c}_1 = -1 + 2i$, $\mathbf{c}_2 = 1 - 2i$, $\mathbf{c}_3 = \frac{1}{2} - i$; г) $\mathbf{f}_1(x) = 2$, $\mathbf{f}_2(x) = x - 2x^2$, $\mathbf{f}_3(x) = -2x + 4x^2$.

8 Показать, что в пространстве многочленов степени ≤ 2 (над R) система векторов $\mathbf{f}_1 = 2 + 3x - x^2$, $\mathbf{f}_2 = -1 + 2x + x^2$, $\mathbf{f}_3 = 1$ является базисом.

21.3 Домашнее задание

1 Выяснить, является ли множество всех векторов $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющих данному условию, векторным пространством над полем R: а) $x_1 = 0$; б) $x_1 = x_n = 0$; в) $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0$; г) $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$; д) $x_1 = 1$; е) $x_1 \cdot x_n = 0$.

2 Выяснить, является ли векторным пространством над полем действительных чисел данное множество функций относительно обычных операций над функциями: а) множество линейных функций (т. е. функций вида $ax + b$, где $a, b \in \mathbb{R}$); б) множество непрерывных на всей числовой прямой функций; в) множество неотрицательных функций; г) множество ограниченных функций; д) множество непрерывных функций на отрезке $[0, 1]$, удовлетворяющих условию $f(0) + f(1) = 0$; е) множество таких дифференцируемых функций $f(x)$ на отрезке $[0, 5]$, что $f'(2) = 1$; ж) множество монотонных на числовой оси функций.

3 Пусть $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ – три вектора на плоскости, из которых можно сложить треугольник. Выяснить, будут ли эти векторы линейно зависимы.

4 Что означает линейная зависимость (линейная независимость) системы, составленной из трех геометрических векторов?

5 Выяснить, является ли система чисел 1, $\sqrt{2}$ линейно зависимой системой векторов в пространстве R над Q.

6 Построить систему из четырех линейно независимых пятимерных векторов.

7 Даны два вектора $\mathbf{a}_1 = (1, 2, 3, 4)$, $\mathbf{a}_2 = (0, 0, 0, 1)$. Подобрать ещё два четырехмерных вектора $\mathbf{a}_3$ и $\mathbf{a}_4$ так, чтобы система $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_4$ была линейно независимой.

8 Доказать линейную независимость системы функций: а) $e^x, e^{2x}, e^{3x}, ..., e^{nx}$, где $n \in \mathbb{N}$; б) $x, x^{\sqrt{2}}, x^{\sqrt{3}}, ..., x^{\sqrt{n}}$, где $n \in \mathbb{N}$; в) $(1-x)^{-1}, (1-2x)^{-1}, (1-3x)^{-1}, ...,$ $(1-nx)^{-1}$, где $n \in \mathbb{N}$.

9 Выяснить, какие из следующих систем векторов составляют базис пространства $\mathbb{R}^3$: а) $(1,1,1)$, $(1,1,1)$, $(0,1,1)$, $(0,0,1)$; б) $(1,1,1)$, $(0,1,1)$, $(1,0,1)$; в) $(1,2,3)$, $(3,2,1)$, $(1,1,1)$; г) $(1,-2,-2)$, $(1,5,-3)$, $(-1,-5,5)$; д) $(1,2,7)$, $(-2,-4,-8)$, $(0,0,0)$.

22 Практическое занятие № 22. Булевы алгебры

На занятии рассматривается булева алгебра и ее свойства [1–4].

22.1 Теоретическая часть

Пусть на множестве B определены две бинарные операции, обозначаемые $\cup$ и $\cap$, так, что при этом выполняются следующие свойства (аксиомы булевой алгебры):

1) множество S замкнуто относительно операций $\cup$ и $\cap$. Для $\forall a, b, c \in B$;

2) $a \cup b = b \cup a, a \cap b = b \cap a$ (коммутативность операций);

3) $a \cup (b \cup c) = (a \cup b) \cup c, a \cap (b \cap c) = (a \cap b) \cap c$ (ассоциативность);

4) $a \cup a = a, a \cap a = a$ (идемпотентность);

5) $a \cap (b \cup c) = (a \cap b) \cup (a \cap c), a \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap (a \cup c)$ (дистрибутивность);

6) существует элемент $0 \in B$, называемый нулем, такой, что $\forall a \in B$ $a + 0 = a$;

7) существует элемент $1 \in B$, называемый единицей, такой, что $\forall a \in B$ $a \cap 1 = a$;

8) $\forall a \in B$ $\exists \overline{a} \in B$ $a \cup \overline{a} = 1$ $a \cap \overline{a} = 0$ (существование обратного элемента или дополнения элемента a).

Тогда алгебраическую структуру $\langle B;\cup,\cap\rangle$ называют ***булевой алгеброй***.

22.2 Задачи к занятию

1 Вывести аксиому 4 из аксиом 5–8.

2 Используя только аксиомы 5, 7, 8, доказать, что $\forall A \quad A+1=1$.

3 Вывести аксиому 6 из аксиом 5, 7, 8.

4 Доказать закон двойственности: если в любом тождестве булевой алгебры заменить $+$ на $\bullet$, $\bullet$ на $+$, 1 на 0, 0 на 1, то вновь получится тождество.

5 Вывести аксиому 3 из аксиом 4–8.

6 Пусть $\mathrm{B}=(B,\vee,\wedge,\overline{},\ \mathbf{0},\mathbf{1})$ – булева алгебра. Определить на носителе B операции $\oplus$ и $\bullet$ так: $x\oplus y=\left(x\wedge\overline{y}\right)\vee\left(\overline{x}\wedge y\right)$, $x\bullet y=x\wedge y$. Доказать, что $\mathfrak{R}_{\mathbf{B}}=(B,\oplus,\bullet,\mathbf{0},\mathbf{1})$ – булево кольцо. Доказать, что $\mathfrak{R}_{\mathbf{B}}=\mathbf{Z_2}$.

22.3 Домашнее задание

1 Описать одноэлементную булеву алгебру. Доказать, что булева алгебра одноэлементна тогда, и только тогда, когда в ней $\mathbf{0}=\mathbf{1}$.

2 Доказать, что полукольцо $\mathcal{D}_m$ является булевой алгеброй тогда, и только тогда, когда m есть произведение попарно различных простых чисел.

3 Пусть $\mathfrak{R}=(\mathfrak{R},\oplus,\bullet,\mathbf{0},\mathbf{1})$ – булево кольцо. Определить на его носителе $\mathbb{R}$ операции $\vee$, $\wedge$ и $\overline{}$ так: $x\vee y=x\oplus y\oplus xy$, $x\wedge y=x\bullet y$, $\overline{x}=x\oplus\mathbf{1}$. Доказать, что $\mathbf{B_R}=(B,\vee,\wedge,\overline{},\ \mathbf{0},\mathbf{1})$ – булева алгебра. Показать, что $\mathbf{B}_{\mathbb{Z}_2}=\mathrm{B}$.

4 Построить булеву алгебру подмножеств трех элементного (четырех-элементного) множества.

23 Практическое занятие № 23. Элементарные булевы функции

На занятии рассматриваются функции алгебры логики, булевы функции одной переменной, булевы функции двух переменных, существенные и несущественные переменные [1, 2, 6–10].

23.1 Теоретическая часть

Функции $f:E_2^n\to E_2$, где $E_2=\{0,1\}$, называются ***функциями алгебры логики*** или ***булевыми функциями*** от n переменных. Множество булевых функций от n переменных обозначим $P_n=\left\{f\mid f:E_2^n\to E_2\right\}$.

Каждая комбинация значений переменных называется ***набором*** (***набором переменных***). Множество наборов переменных образует ***область определения***

булевой функции. Число всех возможных различающихся наборов значений n переменных булевой функции $f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ равно 2^n.

Наборы и соответствующие им значения функции составляют ***таблицу истинности функции***, в левой части которой выписаны в лексикографическом порядке (по возрастанию двоичных чисел) все возможные наборы значений аргументов функции, а в правой части – соответствующие этим наборам значения функций. Упорядочивание наборов позволяет записывать функцию в виде ***набора значений функции*** (транспонированный правый столбец таблицы истинности). Например, запись $f = f(x_1, x_2) = (0011)$ означает, что функция f принимает значения 0 и 1 соответственно на следующих наборах переменных $(0,0)$, $(0,1)$ и $(1,0),(1,1)$. Кроме того, булеву функцию можно задать, указав номера наборов, на которых функция равна единице. При этом нумерация наборов начинается с нуля. В рассмотренном примере функция будет иметь вид $f = f(x_1, x_2) = (2,3)$.

Функцию также можно задать как суперпозицию других, более простых функций. Для функции существует бесконечное множество таких суперпозиций, но таблица истинности у всех у них одна и та же.

Расмотрим наиболее часто встречающиеся булевые функции.

Множество булевых функций одной переменной $P_2(1)$ $\left(\left|P_2\right| = 4\right)$ – унарных операций: $f_0(x) = 0$ – тождественный нуль; $f_1(x) = x$ – тождественная функция; $f_2(x) = \overline{x}$ – функция, называемая отрицанием; $f_3(x)$ – тождественная единица, которые представлены таблицей 23.1.

Таблица 23.1 – Таблица истинности булевых функций одной переменной

x	$f_0(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Множество булевых функций двух переменных $P_2(2)$ $\left(\left|P_2\right| = 16\right)$ – бинарных операций:

$f_0(x_1, x_2) = 0$ – тождественный нуль;

$f_1(x_1, x_2) = x_1 \downarrow x_2$ – стрелка Пирса;

$f_2(x_1, x_2) = \overline{x_2 \to x_1}$ – отрицание импликации x_2 в x_1;

$f_3(x_1, x_2) = \overline{x_1}$ – отрицание аргумента x_1;

$f_4(x_1, x_2) = \overline{x_1 \to x_2}$ – отрицание импликации из x_1 в x_2;

$f_5(x_1, x_2) = \overline{x_2}$ – отрицание аргумента x_2;

$f_6(x_1, x_2) = x_1 \oplus x_2$ – сумма по модулю два;

$f_7(x_1, x_2) = x_1 \mid x_2$ – штрих Шеффера;

$f_8(x_1, x_2) = x_1 \wedge x_2$ – конъюнкция x_1 и x_2 ($x_1 \& x_2$ или $x_1 \cdot x_2$);

$f_9(x_1,x_2)=x_1\sim x_2-$ эквивалентность, равнозначность;

$f_{10}(x_1,x_2)=x_2-$ функция повторения аргумента x_2;

$f_{11}(x_1,x_2)=x_1\to x_2-$ импликация из x_1 в x_2;

$f_{12}(x_1,x_2)=x_1-$ функция повторения аргумента x_1;

$f_{13}(x_1,x_2)=x_2\to x_1-$ импликация из x_2 в x_1;

$f_{14}(x_1,x_2)=x_1\vee x_2-$ дизъюнкция x_1 и x_2;

$f_{15}(x_1,x_2)=1-$ тождественная единица,

которые представлены таблицей 23.2.

Таблица 23.2 – Таблица истинности булевых функций двух переменных

x_1	x_2	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1

Булева функция $f\in P_n$ ***существенно зависит*** от переменной x_i если существует такой набор значений $a_1,...,a_{i-1},a_{i+1},...,a_n$, что

$$f\left(a_1,...,a_{i-1},0,a_{i+1},...,a_n\right)=f\left(a_1,...,a_{i-1},1,a_{i+1},...,a_n\right).$$

В этом случае x_i называют ***существенной переменной***, в противном случае x_i – ***несущественной*** (***фиктивной***) ***переменной***.

Пусть заданы две булевы функции $f_1\left(x_1,...,x_{n-1}\right)$ и $f_2\left(x_1,...,x_{n-1},x_n\right)$ и пусть переменная x_n – несущественная для функции f_2, а при одинаковых значениях остальных переменных значения функций совпадают:

$$\forall a_1,...,a_{n-1},a_n\left(f_1\left(a_1,...,a_{n-1}\right)=f_2\left(a_1,...,a_{n-1},a_n\right)\right).$$

В таком случае говорят, что f_2 получается из f_1 ***введением*** несущественной переменной x_n.

23.2 Задачи к занятию

1 Вычислить значения функций $f(x_1,x_2,x_3)$ на наборах: а) $(0,1,0)$; б) $(1,1,0)$; в) $\left(x_1\sim x_2\right)\to\left(\left(x_1\wedge x_3\right)\vee x_2\right)$; г) $\left(\left(x_3\oplus\overline{x}_1\right)\wedge x_2\right)\to\left(x_1\vee x_3\right)$; д) $\left(\left(x_2\to x_3\right)\wedge x_1\right)\to$ $\to\left(\left(x_1\vee x_3\right)\oplus x_2\right)$.

2 Построить таблицу истинности для булевых функций $f(x,y,z)$, представленных в таблице 23.3.

Таблица 23.3 – Таблица булевых функций $f(x, y, z)$

Номер варианта	$f(x, y, z)$	Номер варианта	$f(x, y, z)$
1	$x + y \wedge z \to \overline{x} \vee \overline{z}$	5	$x \vee \overline{y \to z} + y$
2	$(x \mid y) \to \overline{z} \wedge y + x$	6	$\overline{x} \vee y \to z \wedge y$
3	$(x \to \overline{y}) + z \vee x$	7	$(x \downarrow y) \vee \overline{x \to z}$
4	$x \vee y + \overline{z} \leftrightarrow y$	8	$(x \wedge y \to z) \vee x + y$

3 Написать таблицу истинности функции $h(x, y)$, являющейся суперпозицией функций f_n и f_k (таблица 23.4), если $f_1 = (10010111)$, $f_2 = (01101011)$, $f_3 = (11100110)$, $f_4 = (01110011)$, $f_5 = (11000111)$, $f_6 = (10010100)$, $f_7 = (10110101)$, $f_8 = (10000110)$, $f_9 = (10100110)$, $f_{10} = (01011000)$.

Таблица 23.4 – Таблица для задания 3

Номер варианта	n	k	$h(x, y)$	Номер варианта	n	k	$h(x, y)$
1	1	2	$f_n(x, f_k(x, x, y), y)$	9	5	4	$f_n(f_k(x, y, y), x, y)$
2	2	1	$f_n(x, f_k(y, x, y), x)$	10	3	2	$f_n(x, x, f_k(x, y, y))$
3	1	2	$f_n(y, f_k(x, y, x), x)$	11	4	3	$f_n(x, y, f_k(y, x, y))$
4	3	5	$f_n(x, f_k(y, x, y), y)$	12	2	4	$f_n(x, f_k(x, y, y), y)$
5	3	2	$f_n(y, f_k(x, y, x), x)$	13	5	7	$f_n(x, y, f_k(y, x, x))$
6	4	3	$f_n(x, f_k(y, y, x), y)$	14	9	8	$f_n(y, y, f_k(x, y, x))$
7	2	3	$f_n(x, f_k(x, y, y), y)$	15	7	5	$f_n(x, y, f_k(x, y, y))$
8	5	2	$f_n(y, x, f_k(x, x, y))$	16	8	7	$f_n(x, x, f_k(y, x, y))$

4 Выявить фиктивные и существенные переменные функций: а) $f(x_1, x_2, x_3) = (11110000)$; б) $f(x_1, x_2, x_3) = (00111100)$; в) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1011100111001010)$; г) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0011110011000011)$; д) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0111011101110111)$; е) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0101111100001010)$; ж) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1111000000110101)$; з) $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \to (x_1 \vee x_2)) \to x_3$; и) $f(x_1, x_2) = (x_1 \vee x_2) \to x_2$; к) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_2 \wedge x_3 \vee \overline{x}_1 \wedge \overline{x}_2 \wedge \overline{x}_3) \wedge x_4$; л) $f(x_1, x_2) = (x_1 \oplus x_2) \wedge (x_1 \downarrow x_2)$; м) $f(x_1, x_2, x_3) = ((x_1 \vee (x_3 \to x_2)) \wedge (x_2 \to x_1) \wedge \overline{x}_1 \wedge x_3) \oplus x_3$; н) $f(x_1, x_2, x_3) = (\overline{x}_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3) \wedge (\overline{x}_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_3) \wedge (\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3)$; о) $f(x_1, x_2, x_3) = ((x_1 \vee \overline{x}_3) \wedge (x_1 \vee x_2) \to (\overline{x}_1 \to (x_2 \wedge \overline{x}_3))) \wedge x_2$.

23.3 Домашнее задание

1 Построить таблицы для функций f: а) $f=(x\to y)\vee\big(x\to(x\wedge y)\big)$; б) $f=\left(\overline{x}\to\overline{(x\wedge y)}\right)\to(x\vee z)$; в) $f=\big(x\to(y\to z)\big)\to\big((x\to y)\to(x\to z)\big)$; г) $f=\big(x\wedge(y\to x)\big)\to\overline{x}$; д) $f=\left(x\wedge\left(y\vee\overline{x}\right)\right)\cdot\left(\left(\overline{y}\to x\right)\vee y\right)$.

2 Найти фиктивные переменные функции f, заданной набором значений: а) $f=(00110011)$; б) $f=(00111100)$.

3 Показать, что x является фиктивной переменной функции f: а) $f=$ $=\big((z-y)\vee x\big)\wedge(y\to x)\wedge z\wedge\overline{x}$; б) $f=\big((x\vee y)\wedge(x\vee\overline{z})\to(\overline{x}\to y\wedge\overline{z})\big)\wedge y$.

4 Перечислить все существенные и фиктивные переменные у следующих функций: а) $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=(10101010)$; б) $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=(10011001)$; в) $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=$ $=(00111100)$; г) $f\left(x_1,x_2,x_3,x_4\right)=(0101111101011111)$; д) $f\left(x_1,x_2,x_3,x_4\right)=(1100110000110011)$; е) $f\left(x_1,x_2,x_3,x_4\right)=(1011010110110101)$; ж) $f\left(x_1,x_2\right)=\big((x_1\vee x_2)\to x_1\wedge x_2\big)\oplus$ $\oplus(x_1\to x_2)\wedge(x_2\to x_1)$; з) $f\left(x_1,x_2\right)=\big(x_1\wedge x_2\oplus(x_1\to x_2)\big)\to(x_1\leftrightarrow x_1\wedge x_2)$; и) $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=$ $=\left(\left(x_1\to\overline{x_2}\right)\oplus\left(x_2\to\overline{x_3}\right)\right)\oplus(x_2\to x_3)$; к) $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=\left(\left(x_1\vee x_2\wedge\overline{x_3}\right)\to(x_2\to x_1\wedge x_3)\right)\to$ $\to(x_1\vee x_3)$; л) $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=\big((x_1\vee(x_2\mid x_3)\big)\vee\big((x_2\vee(x_1\mid x_3)\big)\vee\left(x_2\mid x_3\right)$.

24 Практическое занятие № 24. Формулы

На занятии рассматриваются реализация функций формулами, равносильные формулы, подстановка и замена, реализация двойственной функции, принцип двойственности [1, 2, 6–10].

24.1 Теоретическая часть

Функции трех и более переменных обычно задаются формулами, состоящими из символов переменных и знаков унарных или бинарных операций. В общем случае формула описывает булеву функцию как ***суперпозицию*** других более простых функций.

Пусть $B=\{f_1,...,f_m\}$ – множество булевых функций, называемое *базисом*. ***Формулой F над базисом B*** называется выражение вида $F(B)=\{t_1,t_2...,t_n\}$, где $f\in B$, а t_i – либо переменная, либо формула над базисом B. Функция f называется при этом ***главной*** (***внешней функцией***), а t_i – ***подформулами***.

Две формулы называются ***эквивалентными*** или ***равносильными***, если они представляют одну и ту же функцию.

Стандартный метод установления эквивалентности заключается в следующем: 1) по каждой формуле строится таблица истинности; 2) полученные таблицы сравнивают по каждому набору значений переменных.

Пример – Доказать эквивалентность формул $x_1 \mid x_2 = \overline{x_1} \vee \overline{x_2}$.

Решение

Для доказательства построим таблицу истинности (таблица 24.1), из которой следует справедливость эквивалентности формул.

Таблица 24.1 – Таблица истинности

x_1	x_2	$x_1 \mid x_2$	$\overline{x_1}$	$\overline{x_2}$	$\overline{x_1} \vee \overline{x_2}$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	0	1
1	0	1	0	1	1
1	1	0	0	0	0

Имеют место следующие основные эквивалентности (равносильности): 1) $x\vee x=x, x\wedge x=x$; 2) $x\vee y=y\vee x, x\wedge y=y\wedge x$; 3) $x\vee(y\vee z)=(x\vee y)\vee z, x\wedge(y\wedge z)= =(x\wedge y)\wedge z$; 4) $x\wedge(y\vee z)=(x\wedge y)\vee(x\wedge z), x\vee(y\wedge z)=(x\vee y)\wedge(x\vee z)$; 5) $x\vee 0=x$, $x\wedge 0=0$; 6) $x\vee\overline{x}=1$, $x\wedge\overline{x}=$; 7) $x\wedge 1=x$, $x\vee 1=1$; 8) $\overline{\overline{x}}=x$; 9) $\overline{x\wedge y}=\overline{x}\vee\overline{y}$, $\overline{x\vee y}=\overline{x}\wedge\overline{y}$. Также при доказательстве эквивалентности формул используются основные эквивалентности и следующие формулы: 10) $x\to y=\overline{x}\vee y$; 11) $x\sim y=(x\wedge y)\vee(\overline{x}\wedge\overline{y})$; 12) $x\oplus y=(x\wedge\overline{y})\vee(\overline{x}\wedge y)$; 13) $x\downarrow y=\overline{x\vee y}=\overline{x}\wedge\overline{y}$; 14) $x\mid y=\overline{x\wedge y}=\overline{x}\vee\overline{y}$. При упрощении формул используются эквивалентности: 15) ***поглощение***: $x\vee(x\wedge y)=x; x\wedge(x\vee y)=x$; 16) ***склеивание/расщепление***: $(x\wedge y)\vee(\overline{x}\wedge y)=y; (x\vee y)\wedge(\overline{x}\vee y)=y$; 17) ***обобщенное склеивание***: $(x\wedge y)\vee(\overline{x}\wedge z)=(x\wedge y)\vee\ \vee(\overline{x}\wedge z)\vee(y\wedge z)$.

Правило подстановки формулы G вместо переменной x. При подстановке формулы G вместо переменной x все вхождения переменной x в сходное соотношение должны быть одновременно заменены формулой G. Правило применяется к эквивалентным соотношениям для получения новых эквивалентных соотношений.

Правило замены подформул. Если какая-либо формула F, описывающая функцию f, содержит G_1 в качестве подформулы, то замена G_1 на эквивалентную G_2 ($G_1\equiv G_2$) не изменит функции f, т. е. получится новая формула F', эквивалентная исходной F.

Функция $f^*(x_1,x_2,...,x_n)$ называется ***двойственной*** к функции $f(x_1,x_2,...,x_n)\in P_n$, если $f^*(x_1,x_2,...,x_n)=\overline{f}(\overline{x_1},\overline{x_2},...,\overline{x_n})$. Из закона двойного отрицания следует, что $f^{**}=f$. Функция называется ***самодвойственной***, если $f^*=f$.

Теорема (***общий принцип двойственности***). Если формула $\Phi\left(x_1, x_2, \dots, x_n\right) = F\left(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)\right)$ реализует функцию $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$, то формула $\Phi^*\left(x_1, x_2, \dots, x_n\right) = F^*\left(f_1^*(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m^{\ *}(x_1, \dots, x_n)\right)$ реализует функцию $\varphi^*(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

24.2 Задачи к занятию

1 Построив таблицу для соответствующих функций, убедиться в справедливости следующих эквивалентностей: а) $x \vee y = (x \to y) \to y$; б) $x \sim y = (x \to y) \wedge (y \to x)$; в) $x \downarrow y = \left((x \,|\, x) \,|\, (y \,|\, y)\right) \,|\, \left((x \,|\, x) \,|\, (y \,|\, y)\right)$; г) $x \vee (y \sim z) = \left((x \wedge y) \sim (x \wedge z)\right) \sim x$; д) $x \wedge (y \sim z) = \left((x \wedge y) \sim (x \wedge z)\right) \sim x$; е) $x \to (y \sim z) = (x \to y) \sim (x \to z)$; ж) $x \vee (y \to z) = (x \vee y) \to (x \vee z)$; з) $x \wedge (y \to z) = (x \to y) \to (x \wedge z)$; и) $x \to (y \vee z) = (x \to y) \vee (x \to z)$; к) $x \to (y \wedge z) = (x \to y) \wedge (x \to z)$; л) $x \to (y \to z) = (x \to y) \to (x \to z)$.

2 Используя приведенные выше основные эквивалентности и соотношения, доказать эквивалентность формул f и g: а) $f = (\overline{x} \to y) \to \left(\overline{x} \wedge y \sim (x \oplus y)\right)$, $g = \left(\overline{x \wedge y} \to x\right) \to y$; б) $f = \left(x \wedge y \vee (\overline{x} \to y \wedge z)\right) \sim \left((\overline{x} \to \overline{y}) \to z\right)$, $g = (x \to y) \oplus (y \oplus z)$; в) $f = (x \oplus y \wedge z) \to \left(\overline{x} \to (y \to z)\right)$, $g = x \to \left((y \to z) \to x\right)$; г) $f = \left(\overline{x} \to \left(\overline{y} \to (x \sim z)\right)\right) \wedge \left(x \sim \left(y \to \left(z \vee (x \to y)\right)\right)\right)$, $g = \left(x \to (y \to z)\right) \to x$; д) $f = (\overline{x} \vee \overline{y} \wedge z) \to \left((x \to y) \to \left((y \vee z) \to \overline{x}\right)\right)$, $g = (x \to y) \to (\overline{y} \to \overline{x})$; е) $f = (x \wedge \overline{y} \vee \overline{x} \cdot z) \oplus \left((y \to z) \to \overline{x} \wedge y\right)$, $g = \left(x \wedge (\overline{y} \wedge \overline{z}) \oplus y\right) \oplus z$; ж) $f = x \to \left(\left(\overline{x} \wedge \overline{y} \to (\overline{x} \wedge \overline{z} \to y)\right) \to y\right) \wedge z$, $g = \overline{x \wedge (y \to \overline{z})}$; з) $f = \overline{(x \sim y) \to (x \to \overline{z})} \vee \vee (x \oplus \overline{y} \wedge z)$, $g = x \sim (z \to y)$; и) $f = \overline{(x \vee \overline{y} \wedge \overline{z}) \wedge (\overline{x} \to \overline{y} \wedge z)} \wedge \left(x \to (y \sim z)\right)$, $g = \left((x \to y) \sim \left(y \to (x \to z)\right)\right) \oplus x \wedge (y \wedge z)$; к) $f = \overline{\left((x \vee y) \to y \wedge z\right) \vee (y \to x \wedge z)} \vee \ \vee \left(x \to (\overline{y} \to z)\right)$, $g = (x \to y) \vee z$.

3 Выполнить эквивалентные преобразования формул в базис алгебры Буля: а) $(x_1 \to x_2) \leftrightarrow (x_1 \to x_3)$; б) $x_1 \oplus (x_2 \to x_3)$; в) $(x_1 \oplus x_2) \to (x_1 \oplus x_3)$.

4 Используя непосредственно определение двойственности булевых функций, а также основные тождества, выяснить, является ли функция g двойственной к функции f: а) $f = x \oplus y$, $g = x \leftrightarrow y$; б) $f = x \,|\, y$, $g = x \downarrow y$; в) $f = x \to y$, $g = \overline{x} \wedge y$; г) $f = x \wedge y \to z$, $g = \overline{x} \wedge \overline{y} \wedge z$; д) $f = (\overline{x} \to \overline{y}) \to (y \to x)$, $g = (x \to y) \wedge (\overline{y} \to \overline{x})$; е) $f = x \wedge y \vee z$, $g = x \wedge (y \vee z)$; ж) $f = (x \vee y \vee \overline{z}) \to \left(x \wedge \overline{y} \sim (x \oplus y \wedge \overline{z})\right)$, $g = (x \sim z) \wedge \overline{y}$; з) $f = x \wedge y \vee y \wedge z \vee z \wedge t$, $g = x \wedge \vee z \wedge \wedge y \vee y \wedge t$; и) $f = (x \vee y \vee \overline{z}) \wedge \overline{t} \vee \overline{x} \wedge y \wedge z$, $g = (\overline{x} \vee y \vee z) \wedge \overline{t} \vee x \cdot \wedge y \wedge \overline{z}$.

5 Выяснить, являются ли самодвойственными следующие функции: а) $\overline{xy}\big(\overline{z}(y \to x)\big) \to (\overline{x} \sim y)$; б) $\Big(\big((\overline{x} \vee y) \sim z\big) \sim (y \sim z)\Big) \to (\overline{x} \vee z)$; в) $f = (01101001)$; г) $d = (10101011)$; д) $f = (1100100101101100)$. Для несамодвойственных функций найти двойственные функции.

24.3 Домашнее задание

1 Построить таблицы функций, заданных формулами: а) $F = (x_1 \to x_2) \oplus$ $\oplus (x_2 \to x_3) \oplus (x_3 \to x_1)$; б) $F = x_1 \to \left(\overline{x_3} \leftrightarrow (x_2 \oplus x_1 \wedge x_3\right)$; в) $F = \Big(\big((x_1 \mid x_2) \downarrow x_3\big) \mid x_2\Big) \downarrow x_3$.

2 Выяснить, эквивалентны ли формулы A и B: а) $A = \overline{x \oplus y \wedge z} \cdot \overline{\overline{y} \to x \wedge z} \wedge$ $\wedge \left(\overline{x} \downarrow y\right)$, $B = \overline{\big(x \wedge y \to (y \downarrow z)\big)} \vee x \wedge z \wedge z$; б) $A = (x \oplus y \wedge z) \to \big(\overline{x} \to (y \to z)\big)$, $B = x \to \big((y \to z) \to x\big)$; в) $A = (x \wedge y \to z) \vee \big((x \downarrow y) \mid z\big)$, $B = \big((x \to y \wedge z) \oplus (x \leftrightarrow y)\big) \vee$ $\vee (y \to x \wedge z)$; г) $A = \big(\overline{x} \to (\overline{y} \to (x \leftrightarrow z))\big) \wedge \Big(x \leftrightarrow \big(y \to (z \vee (x \to y))\big)\Big)$, $B = \big(x \to (y \to z)\big) \to x$; д) $A = x \to \big((y \to z) \to y \wedge z\big)$, $B = \big(x \vee (x \wedge y \to z)\big) \wedge$ $\wedge (x \oplus y \wedge z)$; е) $A = \Big(\big((x \mid y) \downarrow \overline{z}\big) \mid y\Big) \downarrow (\overline{y} \to z)$, $B = \big((x \mid y) \downarrow (y \mid \overline{z})\big) \wedge \big(x \to (y \to z)\big)$; ж) $A = (x \mid \overline{y}) \to \Big(\big(y \downarrow \overline{z}\big) \to (x \oplus z)\Big)$, $B = x \wedge y \wedge z \oplus (\overline{x} \to z)$; з) $A = (x \wedge \overline{y} \vee \overline{x} \wedge z) \oplus$ $\oplus \big((y \to z) \to \overline{x} \wedge y\big)$, $B = (x \wedge \overline{y} \wedge \overline{z} \oplus y) \oplus z$; и) $A = (\overline{x} \vee y) \to \big((y \mid \overline{z}) \to (x \leftrightarrow x \wedge z)\big)$; к) $A = x \to \Big(\big(\overline{x} \wedge \overline{y} \to (\overline{x} \wedge \overline{z} \to y)\big) \to y\Big) \wedge z$, $B = \overline{x \wedge (y \to \overline{z})}$; л) $A = \big((x \vee y) \wedge \overline{z} \to ((x \leftrightarrow \overline{z}) \oplus \overline{y})\big) \wedge \big((x \oplus y) \wedge \overline{z}\big)$, $B = (x \to y \wedge z) \wedge \overline{x \to y}$; м) $A = \overline{\big((x \leftrightarrow y) \to (x \to \overline{z})\big)} \vee (x \oplus \overline{y} \wedge z)$, $B = x \leftrightarrow (z \to y)$; н) $A = \overline{\big(x \downarrow y\big) \vee (x \leftrightarrow z)} \mid (x \oplus y \wedge z)$, $B = \overline{x} \wedge y \wedge z \vee \overline{x \to z}$; о) $A = \overline{\big((x \vee y) \to y \wedge z\big) \vee (y \to x \wedge z)} \vee \big(x \to (\overline{y} \to z)\big)$, $B = (x \to y) \vee z$.

3 Используя принцип двойственности, построить формулу, реализующую функцию, двойственную к функции *f*, и убедиться в том, что полученная формула эквивалентна формуле *g*: а) $f = x \wedge 1 \vee y \wedge \big(z \vee 0\big) \vee \overline{x} \wedge \overline{y} \wedge \overline{z}$, $g = x \wedge \big(y \oplus z\big)$; б) $f = \big(x \downarrow y\big) \oplus \Big(\big(x \mid y\big) \downarrow \big(\overline{x} \sim y \wedge z\big)\Big)$, $g = x \wedge \overline{y} \vee \overline{x} \wedge y \vee \overline{y} \wedge z$; в) $f = \Big(\overline{x} \vee \overline{y} \vee \big(y \wedge \overline{z} \oplus 1\big)\Big) \downarrow z$, $g = x \vee y \vee \overline{z}$; г) $f = x \wedge y \vee y \wedge \overline{z} \vee \overline{y} \wedge z$, $g = x \wedge \overline{y} \wedge \overline{z} \vee y \wedge z$; д) $f = \big((x \to y) \vee z\big) \wedge \big(y \wedge \overline{z} \to (x \oplus y \wedge z)\big)$, $g = \big(x \oplus y\big) \wedge z$; е) $f = \Big(\Big(\big(x \vee \overline{y} \vee (y \wedge z \sim 1)\big) \oplus 1\Big) \to 0\Big) \mid y$, $g = \overline{x \wedge z \vee y}$.

4 Найти все самодвойственные логические функции от двух и трех переменных.

25 Практическое занятие № 25. Разложение булевых функций по переменным. Совершенные нормальные формы

На занятии рассматриваются разложение булевых функций по переменным, совершенные нормальные формы, эквивалентные преобразования [1, 2, 6–10].

25.1 Теоретическая часть

Рассмотрим $X=\{x_1,x_2,...,x_n\}$ – множество переменных, обозначим $x_i^0=\overline{x_i}$ и $x_i^1=x_i$.

Теорема 1 (разложение функции по переменным). Пусть $f=(x_1,x_2,...,x_n)\in P_2$ и $1\le m\le n$. Тогда

$$f=(x_1,...,x_m,x_{m+1},...,x_n)=\bigvee_{\substack{(\sigma_1,..,\sigma_m):\\ \sigma_i\in E_2,\, i=\overline{1,m}}} x_1^{\sigma_1}\wedge x_2^{\sigma_2}\wedge...\wedge x_m^{\sigma_m} f(\sigma_1,...,\sigma_m,x_{m+1},...,x_n).$$

Следствие 1. $f(x_1,...,x_{n-1},x_n)=\left(x_n\wedge f(x_1,...,x_{n-1},1)\vee\left(\overline{x_n}\wedge f(x_1,...,x_{n-1},0)\right)\right).$

Следствие 2. $f=(x_1,...,x_n)=\bigvee_{\substack{(\sigma_1,..,\sigma_n)\in E_2^n\\ f(\sigma_1,..,\sigma_n)=1}}\left(x_1^{\sigma_1}\wedge...\wedge x_n^{\sigma_n}\right)$.

Элементарная конъюнкция (***элементарная дизъюнкция***) – это формула вида $x_1^{\sigma_1}\wedge x_2^{\sigma_2}\wedge...\wedge x_k^{\sigma_k}$ $\left(x_1^{\sigma_1}\vee x_2^{\sigma_2}\vee...\vee x_k^{\sigma_k}\right)$, где $k\ge 1$.

Дизъюнктивная нормальная форма (ДНФ). D – это дизъюнкция элементарных конъюнкций: $D=K_1\vee K_2\vee...\vee K_r$, где K_j $(j=1,2,..,r)$ – это элементарная конъюнкция.

D называется ***совершенной дизъюнктивной нормальной формой*** (СДНФ), если в каждую K_j входят все n переменных из X.

Конъюнктивная нормальная форма (КНФ). C – это конъюнкция элементарных дизъюнкций: $C=D_1\wedge D_2\wedge...\wedge D_r$, где D_j $(j=1,2,..,r)$ – это элементарная дизъюнкция.

C называется ***совершенной конъюнктивной нормальной формой*** (СКНФ), если в каждую D_j входят все n переменных из X.

Теорема 2. Пусть $f=(x_1,x_2,...,x_n)\in P_2$. Если $f\ne 0$, то она представима в виде СДНФ, причем единственным образом:

$$f=(x_1,...,x_n)=\bigvee_{\substack{(\sigma_1,..,\sigma_n)\\ f(\sigma_1,..,\sigma_n)=1}}\left(x_1^{\sigma_1}\wedge...\wedge x_n^{\sigma_n}\right).$$

Теорема 3. Пусть $f=\left(x_1,x_2,...,x_n\right)\in P_2$. Если $f\neq 1$, то она представима в виде СКНФ, причем единственным образом:

$$f=\left(x_1,...,x_n\right)=\bigwedge_{\substack{(\sigma_1,..,\sigma_n)\\ f(\sigma_1,..,\sigma_n)=0}}\left(x_1^{\overline{\sigma_1}}\vee...\vee x_n^{\overline{\sigma_n}}\right).$$

Пример 1 – Записать СДНФ и СКНФ для функции $f\left(x_1,x_2\right)$, представленной таблицей 25.1.

Таблица 25.1 – Таблица истинности

x_1	x_2	f	x_1	x_2	f
0	0	1	1	0	0
0	1	1	1	1	0

Решение

Определим СДНФ как дизъюнкцию элементарных конъюнкций, на которых f принимает значение, равное 1:

$$f\left(x_1,x_2\right)=x_1^0\wedge x_2^0\vee x_1^0\wedge x_2^1=\overline{x_1}\wedge\overline{x_2}\wedge\overline{x_1}\wedge x_2.$$

Определим СКНФ как конъюнкцию элементарных дизъюнкций, на которых f принимает значение, равное 0:

$$f\left(x_1,x_2\right)=\left(x_1^{\bar{1}}\vee x_2^{\bar{0}}\right)\wedge\left(x_1^{\bar{1}}\vee x_2^{\bar{1}}\right)=\left(x_1^0\vee x_2^1\right)\wedge\left(x_1^0\vee x_2^0\right)=\left(\overline{x_1}\vee x_2\right)\wedge\left(\overline{x_1}\vee\overline{x_2}\right).$$

Преобразование формулы в равносильную называется ***эквивалентным преобразованием***. Эквивалентные преобразования осуществляются с помощью равносильностей, представленных в подразд. 24.2.

Пример 2 – Используя равносильности, доказать $\left(x_1\wedge x_2\right)\vee\left(x_1\wedge\overline{x_2}\right)=x$.

Доказательство. Используя равносильности 4 и 6 (см. подразд. 24.2) имеем $\left(x_1\wedge x_2\right)\vee\left(x_1\wedge\overline{x_2}\right)=x_1\wedge\left(x_2\vee\overline{x_2}\right)=x_1\wedge 1=x_1$.

25.2 Задачи к занятию

1 Привести формулы к ДНФ:

а) $f(x_1,x_2,x_3)=\overline{(\overline{x_1\vee\bar{x}_2})\vee\bar{x}_1x_3\vee x_2}$;

б) $f(x_1,x_2,x_3)=\overline{\overline{x_1\wedge x_2}\vee\overline{(x_1\wedge\bar{x}_3\vee x_2)}}\vee\bar{x}_1\wedge x_2\wedge x_3$;

в) $f(x_1,x_2,x_3)=\overline{\overline{x_1\vee\bar{x}_3}\vee\overline{(\bar{x}_1\wedge x_2\vee x_3)}}\vee x_1\wedge x_2\wedge x_3$;

г) $f(x_1,x_2,x_3)=\overline{\overline{x_1 \wedge x_2 \wedge \overline{x}_3} \vee \overline{(x_2 \vee \overline{x}_1)}} \vee \overline{x_1 \wedge \overline{x}_3 \vee \overline{x}_2}$;

д) $f(x_1,x_2,x_3)=\overline{\overline{x_1 \wedge x_2} \vee \overline{(x_1 \wedge \overline{x}_3 \vee x_2)} \vee \overline{x}_1} \vee x_1 \wedge \overline{x}_2 \wedge x_3 \vee \overline{x}_2 \wedge x_3$;

е) $f(x_1,x_2,x_3)=\overline{\overline{x_1 \vee x_3} \vee \overline{(x_1 \wedge \overline{x}_2 \vee x_2 \wedge \overline{x}_3)}} \vee x_1 \wedge x_3$;

ж) $f(x_1,x_2,x_3)=\overline{\overline{x_1 \vee \overline{x}_3} \vee \overline{(x_1 \wedge x_2 \vee x_2 \wedge \overline{x}_3)}} \vee x_1$.

2 Привести формулы к КНФ:

а) $f(x_1,x_2)=((x_1 \to x_2) \oplus (\overline{x_1} \mid x_2)) \wedge (x_1 \sim x_2 \wedge (x_1 \to x_2))$;

б) $f(x_1,x_2)=\overline{x_1 \wedge x_2} \vee (x_1 \downarrow (x_2 \vee (\overline{x_1} \to x_2)))$;

в) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1 \wedge \overline{x_2} \vee \overline{x_2} \wedge x_3 \vee (x_1 \to x_2 \wedge x_3)$;

г) $f(x_1,x_2,x_3)=(\overline{x_1} \to (x_2 \to x_3)) \oplus x_1 \wedge \overline{x_2} \wedge x_3$;

д) $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1 \sim (x_2 \to x_3)) \vee (x_2 \to x_1 \wedge x_3)$;

е) $f(x_1,x_2,x_3)=\overline{x_1} \wedge x_2 \vee \overline{x_2} \wedge x_3 \vee \overline{x_3} \wedge x_4 \vee x_1 \wedge \overline{x_4}$;

ж) $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1 \sim x_2) \vee (x_1 x_3 \sim x_4) \vee x_2 \overline{x_3}$.

3 Применяя преобразования вида $A = A \wedge \overline{x} \vee A \wedge x$ и $A \vee A = A$, построить из заданной ДНФ функции f ее совершенную ДНФ:

а) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1 \wedge x_2 \vee \overline{x}_3$;

б) $f(x_1,x_2,x_3)=\overline{x}_1 \wedge \overline{x}_2 \vee x_2 \wedge \overline{x}_3 \vee x_1 \wedge \overline{x}_3$;

в) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1 \vee x_2 \wedge x_3 \vee \overline{x}_2 \wedge \overline{x}_3$;

г) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1 \wedge \overline{x}_2 \vee x_2 \wedge x_3 \vee \overline{x}_3$;

д) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_1 \wedge x_3$;

е) $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1 \wedge x_2 \wedge \overline{x}_3 \vee x_1 \wedge x_3 \wedge \overline{x}_4$;

ж) $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1 \wedge x_2 \vee \overline{x}_2 \wedge x_4 \vee x_3 \wedge \overline{x}_4$;

з) $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1 \vee x_2 \wedge x_3 \vee \overline{x}_1 \wedge x_4$.

4 С помощью преобразований вида $A=(A \vee x) \wedge (A \vee \overline{x})$ и $A \wedge A = A$ построить из данной КНФ функции f ее совершенную КНФ:

а) $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1 \vee \overline{x}_2) \cdot x_3$;

б) $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1 \vee x_2) \cdot (\overline{x}_2 \vee x_3) \cdot \overline{x}_3$;

в) $f(x_1,x_2,x_3)=(\overline{x}_1 \vee x_2) \cdot (x_1 \vee \overline{x}_3) \cdot (x_2 \vee x_3)$;

г) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1 \cdot \overline{x}_2 \cdot (\overline{x}_1 \vee x_3) \cdot (x_1 \vee \overline{x}_3)$;

д) $f(x_1,x_2,x_3)=(\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2) \cdot x_2 \cdot (x_1 \vee \overline{x}_3) \cdot (\overline{x}_2 \vee x_3)$;

е) $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1 \vee x_2 \vee x_3) \cdot (x_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_4)$;

ж) $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1 \vee x_2) \cdot (\overline{x}_2 \vee x_3) \cdot (\overline{x}_3 \vee x_4)$;

з) $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1 \cdot \overline{x}_2 \cdot x_3 \cdot (x_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3 \vee \overline{x}_4)$.

5 Используя дистрибутивный закон $x \wedge (y \vee z) = x \wedge y \vee x \wedge z$ и эквивалентности $x \wedge x = x$, $x \wedge \overline{x} = 0$, $A \wedge 0 = 0$, $A \vee 0 = A$ и $A \vee A \wedge B = A$, перейти от заданной КНФ функции f к ДНФ:

а) $f(x_1,x_2,x_3)=(\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2) \wedge (x_1 \vee x_3) \wedge (\overline{x}_2 \vee \overline{x}_3)$;

б) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1\wedge(x_1\vee\overline{x}_2\vee\overline{x}_3)\wedge(x_2\vee\overline{x}_3)$;

в) $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1\vee\overline{x}_2)\wedge(x_1\vee\overline{x}_3)\wedge(\overline{x}_1\vee\overline{x}_2\vee x_3)$;

г) $f(x_1,x_2,x_3)=(\overline{x}_1\vee x_2)\wedge(\overline{x}_1\vee\overline{x}_3)\wedge(\overline{x}_1\vee x_3)\wedge(x_2\vee x_3)$;

д) $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1\vee\overline{x}_2\vee x_3)\wedge(\overline{x}_1\vee x_2\vee\overline{x}_3)\wedge(x_1\vee x_2\vee x_3)$;

е) $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1\vee\overline{x}_2)\wedge(x_2\vee\overline{x}_3)\wedge(x_2\vee x_4)\wedge(x_3\vee\overline{x}_4)$;

ж) $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=(\overline{x}_1\vee x_2\vee\overline{x}_3\vee x_4)\wedge(x_1\vee\overline{x}_2\vee x_3)\wedge(x_1\vee x_4)$.

6 Используя дистрибутивный закон $x\vee y\wedge z=(x\vee y)\wedge(x\vee z)$ и эквивалентности $x\vee x=x$, $x\vee\overline{x}=1$, $A\vee 1=1$, $A\wedge 1=A$ и $A\wedge(A\vee B)=A$, перейти от заданной ДНФ функции f к ее КНФ:

а) $f(x_1,x_2,x_3)=\overline{x}_1\overline{x}_2\vee x_3$;

б) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1\overline{x}_2\vee x_2\overline{x}_3\vee\overline{x}_2x_3$;

в) $f(x_1,x_2,x_3)=\overline{x}_1\vee x_2x_3\vee\overline{x}_2\overline{x}_3$;

г) $f(x_1,x_2,x_3)=\overline{x}_1\vee x_2\vee x_1\overline{x}_2x_3$;

д) $f(x_1,x_2,x_3)=\overline{x}_1\overline{x}_2\vee\overline{x}_2\vee x_2\overline{x}_3$;

е) $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1x_2\vee x_2\overline{x}_3\vee\overline{x}_2x_4\vee x_3x_4$;

ж) $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1x_2\overline{x}_3\overline{x}_4\vee\overline{x}_1x_2\overline{x}_3\vee\overline{x}_2x_4$;

з) $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1\vee x_2\overline{x}_3\vee\overline{x}_1x_3x_4\vee\overline{x}_2x_3\overline{x}_4$.

25.3 Домашнее задание

1 С помощью эквивалентных преобразований построить ДНФ функции f:

а) $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=(x_1\vee x_2\,\overline{x}_3)\wedge(x_1\vee x_3)$;

б) $f(x_1,x_2,x_3)=(\overline{x}_1\vee\overline{x}_2\vee\overline{x}_3)\wedge(x_1\wedge x_2\vee x_3)$;

в) $f(x_1,x_2,x_3)=(\overline{x}_1\wedge x_2\oplus x_3)\wedge(x_1\wedge x_3\to x_2)$;

г) $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1\sim x_2)\vee(x_1\wedge x_3\oplus(x_2\to x_3))$;

д) $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1\downarrow x_2\wedge x_3)\,|\,((\overline{x}_1\,|\,x_2)\downarrow x_3)$;

е) $f(x_1,x_2,x_3)=\overline{x_1\to(x_2\to x_3)}\oplus(x_1\,|\,(x_2\oplus x_3))$;

ж) $f(x_1,x_2,x_3)=\overline{x_1\wedge\overline{x}_2\vee x_3}\sim(x_1\to x_2\wedge\overline{x}_3)$;

з) $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1\vee x_2\wedge\overline{x}_3)\wedge(x_1\wedge\overline{x}_2\vee\overline{x}_3)\wedge\overline{x_1\wedge x_2}\vee x_3)$;

и) $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1\vee x_2\wedge\overline{x}_3\wedge\overline{x}_4)\wedge((\overline{x}_1\vee x_4)\oplus x_2\wedge x_3)\vee\overline{x}_2\wedge(x_3\vee\overline{x_1\wedge\overline{x}_4})$;

к) $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1\to x_2)\wedge(x_2\to\overline{x}_3)\wedge(x_3\to x_1\wedge\overline{x}_4)$;

л) $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1\downarrow x_2)\wedge((x_2\,|\,x_3)\vee x_1\wedge\overline{x}_4)\wedge x_1\downarrow(x_3\,|\,x_4))$.

м) $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\big((x_1\vee x_2\wedge\overline{x}_3\wedge x_4)\big((\overline{x}_2\vee x_4)\to x_1\wedge\overline{x}_3\wedge\overline{x}_4\big)\vee x_2\wedge x_3\big)\vee$ $\vee(\overline{x}_1\vee x_4)$;

н) $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\big((x_1\to x_2\,x_3)(x_2\,x_4\oplus x_3)\to x_1\,\overline{x}_4\big)\vee\overline{x}_1$.

2 Привести к совершенной ДНФ форме следующие формулы: а) $\overline{x}\vee\overline{y}$; б) $(\overline{x}\to y)\to x$; в) $x\to(y\to x)$; г) $x\to(y\to z)$; д) $(x\to y)\wedge(y\to z)\to(x\to z)$;

е) $(x \to y) \wedge (y \to z) \to (z \to x)$; ж) $(x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \sim x)$.

3 Представить в виде совершенной ДНФ следующие функции: а) $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \oplus x_2) \to x_2 \wedge x_3$; б) $f(x_1, x_2, x_3) = (01101100)$; в) $f(x_1, x_2, x_3) = (10001110)$.

4 С помощью преобразований вида $A = Ax \vee A\overline{x}$, $A \vee A = A$ перейти от заданной ДНФ D к совершенной, если: а) $D = x_1 \vee \overline{x}_2 \wedge x_3$; б) $D = x_1 \wedge \overline{x}_2 \vee \overline{x}_1 \wedge x_3$; в) $D = x_1 \vee \overline{x}_1 \wedge x_2 \vee \overline{x}_2 \wedge x_3$.

5 С помощью соотношений вида $x \vee yz = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$ преобразовать ДНФ из предыдущей задачи в КНФ.

6 Построить совершенную КНФ для каждой из функций задания 4.

26 Практическое занятие № 26. Построение сокращенных дизъюнктивных форм

На занятии рассматриваются сокращённые дизъюнктивные формы, тупиковые дизъюнктивные формы, методы построения сокращенных дизъюнктивных форм (геометрический, Квайна – Мак-Класки, Блейка) [1, 2, 6–10].

26.1 Теоретическая часть

Булева функция $f_1(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется ***импликантой*** функции $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, если функция f_1 равна нулю при тех же значениях переменных $x_1, x_2, ..., x_n$, на которых равна нулю функция f.

Собственной частью конъюнкции K называют конъюнкцию, полученную из K удалением из K некоторых переменных.

Элементарная конъюкция $K = x_1^{\sigma_1} \wedge x_2^{\sigma_2} \wedge ... \wedge x_r^{\sigma_r}$ называется ***простой импликантой*** булевой функции $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, если K является импликантой функции f и никакая собственная часть K не является импликантой f.

Теорема. Всякая булева функция $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ может быть представлена как дизъюнкция всех ее простых импликант.

Дизъюнкция всех простых импликант функции f называется ***сокращенной*** ДНФ этой функции.

Дизъюнкцию совокупности простых импликант функции $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, такую, что удаление из нее любой импликанты приводит к отсутствию покрытия дизъюнкцией оставшихся всех импликант всех единиц функции, называют ***тупиковой*** ДНФ функции $f(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Методы построения сокращенной ДНФ (геометрический, Квайна – Мак-Класки, Блейка) основаны на выполнении двух операций: склеивания и поглощения [8]. Различие методов состоит в способе исходного представления булевой фунции и организации нахождения простых импликант булевой функции $f_1(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Пример – Используя метод Блейка, построить для функции $f(x_1, x_2, x_3) = \left(x_1 \wedge \overline{x_2} \wedge x_3\right) \vee (x_2 \wedge \overline{x_3}) \vee \left(x_2 \wedge x_3\right)$ сокращенную ДНФ.

Решение

В соответствии с методом Блейка выполним операцию обобщенного склеивания (равносильность 17 в подразд. 24.1):

$$(x_2 \wedge \overline{x_3}) \vee \left(x_2 \wedge x_3\right) = (x_2 \wedge \overline{x_3}) \vee \left(x_2 \wedge x_3\right) \vee x_2,$$

$$\left(x_1 \wedge \overline{x_2} \wedge x_3\right) \vee \left(x_2 \wedge x_3\right) = \left(x_1 \wedge \overline{x_2} \wedge x_3\right) \vee \left(x_2 \wedge x_3\right) \vee x_1 \wedge x_3.$$

Следовательно, $f(x_1, x_2, x_3) = \left(x_1 \wedge \overline{x_2} \wedge x_3\right) \vee (x_2 \wedge \overline{x_3}) \vee \left(x_2 \wedge x_3\right) \vee x_2 \vee \left(x_1 \wedge x_3\right)$. После выполнения всех склеиваний (в соответствии с равносильностью 16 в подразд. 24.1) имеем $f(x_1, x_2, x_3) = x_2 \vee \left(x_1 \wedge x_3\right)$.

26.2 Задачи к занятию

1 Из заданного множества A элементарных конъюнкций выделить простые импликанты функции f:

а) $A = \{x_1, \overline{x}_3, x_1, x_2, \overline{x}_3\}$, $f(x_1, x_2, x_3) = (00101111)$;

б) $A = \{x_1\overline{x}_2, x_2x_3, x_1x_2\,x_3\}$, $f(x_1, x_2, x_3) = (01111110)$;

в) $A = \{x_1, \overline{x}_4, x_2\overline{x}_3, x_1x_2x_4\}$, $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1010111001011110)$;

г) $A = \{x_1, x_2, x_1\overline{x}_2\}$, $f(x_1, x_2) = (1011)$;

д) $A = \{x_1x_3, x_1\overline{x}_3, x_2\}$, $f(x_1, x_2, x_3) = (00111011)$;

е) $A = \{x_1\overline{x}_2, x_2\overline{x}_3, \overline{x}_2\}$, $f(x_1, x_2, x_3) = (00101111)$.

2 С помощью метода Блейка построить сокращенную ДНФ по заданной ДНФ: а) $\overline{x}_1 \wedge \overline{x}_2 \vee x_1 \wedge \overline{x}_3 \wedge x_4 \vee x_2 \wedge \overline{x}_3 \wedge x_4$; б) $\overline{x}_1 \wedge \overline{x}_2 \wedge x_3 \vee x_1 \wedge \overline{x}_2 \wedge x_4 \vee x_3 \wedge x_4$; в) $x_1 \wedge x_2 \vee \overline{x}_1 \wedge x_3 \vee x_1 \wedge \overline{x}_2 \wedge x_3 \wedge x_4 \vee \overline{x}_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge x_4$.

3 Построить сокращённую ДНФ по заданной КНФ: а) $(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_3) \wedge \wedge(\overline{x}_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_2 \vee \overline{x}_3)$; б) $(x_1 \vee x_4) \wedge (x_2 \vee \overline{x}_3 \vee \overline{x}_4) \wedge (\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3)$; в) $(x_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3) \wedge \wedge(\overline{x}_1 \vee x_4) \wedge (x_2 \vee x_3 \vee \overline{x}_4)$.

4 Используя метод Квайна – Мак-Класки найти сокращённую ДНФ: а) $f = (0,1,1,0,1,0,0,1)$; б) $f = (1,0,0,1,0,0,1,1)$; в) $f = \{1,3,4,7,8,11,14,15\}$; г) $f = \{2,4,6,9,10,11,13\}$.

5 Для булевой функции $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{x}_1 \wedge \overline{x}_2 \wedge x_3 \vee x_1 \wedge \overline{x}_2 \wedge x_4 \vee x_3 \wedge x_4$ найти СДНФ, сокращенную ДНФ, тупиковые ДНФ.

6 Для булевой функции $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 \vee x_4) \wedge (x_2 \vee \overline{x}_3 \vee \overline{x}_4) \wedge \wedge(\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3)$ найти СКНФ, сокращенную КНФ, тупиковые КНФ.

7 Найти сокращённую ДНФ функции f с помощью минимизирующей карты: а) $f = (01010111)$; б) $f = (11011011)$; в) $f = (10110000)$; г) $f = (11101111)$; д) $f = (0001101111011111)$.

26.3 Домашнее задание

1 По заданной ДНФ с помощью метода Блейка построить сокращенную ДНФ:

а) $D = \overline{x}_1 \wedge \overline{x}_2 \vee x_1 \wedge \overline{x}_2 \wedge x_4 \vee x_2 \wedge \overline{x}_3 \wedge x_4$;

б) $D = x_1 \wedge \overline{x}_2 \wedge x_3 \vee \overline{x}_1 \wedge x_2 \wedge \overline{x}_4 \vee \overline{x}_2 \wedge \overline{x}_3 \wedge x_4$;

в) $D = x_1 \vee \overline{x}_1 \wedge x_2 \vee \overline{x}_1 \wedge \overline{x}_2 \wedge x_3 \vee \overline{x}_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge x_4$;

г) $D = x_1 \wedge \overline{x}_2 \wedge x_4 \vee \overline{x}_1 \wedge \overline{x}_2 \wedge x_3 \vee \overline{x}_3 \wedge \overline{x}_4$;

д) $D = \overline{x}_3 \wedge x_4 \vee \overline{x}_2 \wedge x_4 \vee x_1 \wedge x_4 \vee x_2 \wedge x_3 \wedge \overline{x}_4$;

е) $D = x_1 \wedge x_2 \wedge \overline{x}_3 \vee x_3 \wedge \overline{x}_4 \vee \overline{x}_1 \wedge x_4 \vee \overline{x}_2 \wedge x_4$;

ж) $D = \overline{x}_3 \wedge x_4 \vee x_1 \wedge x_2 \vee x_3 \wedge \overline{x}_4 \vee \overline{x}_1 \wedge x_3$;

з) $D = x_1 \wedge x_2 \wedge \overline{x}_3 \vee \overline{x}_1 \wedge x_2 \wedge x_4 \vee x_2 \wedge x_3 \wedge \overline{x}_4 \vee x_2 \wedge \overline{x}_3 \wedge \overline{x}_4 \vee x_2 \wedge x_3 \wedge x_1$.

2 Построить сокращенную ДНФ по заданной КНФ: а) $\left(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_3\right) \wedge \wedge \left(\overline{x}_1 \vee x_2 \vee x_3\right) \wedge \left(\overline{x}_2 \vee \overline{x}_3\right)$; б) $\left(x_1 \vee \overline{x}_2\right) \wedge \left(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_3\right)$; в) $\left(x_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3\right) \wedge \left(\overline{x}_1 \vee x_2\right) \wedge \wedge \left(x_1 \vee x_2 \vee x_3\right)$; г) $\left(x_1 \vee x_2 \vee x_3\right) \wedge \left(\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3\right)$; д) $\left(x_1 \vee \overline{x}_2\right) \wedge \left(\overline{x}_2 \vee x_3\right) \wedge \left(\overline{x}_3 \vee x_1\right)$; е) $\left(x_1 \vee \overline{x}_2\right) \wedge \left(x_2 \vee \overline{x}_3\right) \wedge \left(x_3 \vee \overline{x}_4\right) \Big| \left(x_4 \vee x_1\right)$; ж) $\left(x_1 \vee x_2 \vee x_3\right) \wedge \left(x_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_4\right) \wedge \left(\overline{x}_2 \vee x_2 \vee \overline{x}_4\right)$; з) $\left(x_1 \vee x_2\right) \wedge \left(x_1 \vee x_3 \vee x_4\right) \wedge \left(\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3\right) \wedge \left(\overline{x}_3 \vee \overline{x}_4\right)$.

3 Используя метод Квайна – Мак-Класки найти сокращённую ДНФ: а) $f = (01110110)$; б) $f = (10111101)$; в) $f = (00101111)$; г) $f = (11100100)$; д) $f = (0001101111011011)$; е) $f = (0000111111110110)$; ж) $f = (1111111101111110)$; з) $f = (0000111101111111)$.

4 Найти сокращенную ДНФ функции f с помощью минимизирующей карты: а) $f = (0011110111111101)$; б) $f = (0011110111011110)$; в) $f = (0010101111011111)$.

5 По заданной ДНФ с помощью метода Блейка построить сокращенную ДНФ:

а) $D = \overline{x}_1 \wedge \overline{x}_2 \vee x_1 \wedge \overline{x}_2 \wedge x_4 \vee x_2 \wedge \overline{x}_3 \wedge x_4$;

б) $D = x_1 \wedge \overline{x}_2 \wedge x_3 \vee \overline{x}_1 \wedge x_2 \wedge \overline{x}_4 \vee \overline{x}_2 \wedge \overline{x}_3 \wedge x_4$;

в) $D = x_1 \vee \overline{x}_1 \wedge x_2 \vee \overline{x}_1 \wedge \overline{x}_2 \wedge x_3 \vee \overline{x}_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge x_4$;

г) $D = x_1 \wedge \overline{x}_2 \wedge x_4 \vee \overline{x}_1 \wedge \overline{x}_2 \wedge x_3 \vee \overline{x}_3 \wedge \overline{x}_4$;

д) $D = \overline{x}_3 \wedge x_4 \vee \overline{x}_2 \wedge x_4 \vee x_1 \wedge x_4 \vee x_2 \wedge x_3 \wedge \overline{x}_4$;

е) $D = x_1 \wedge x_2 \wedge \overline{x}_3 \vee x_3 \wedge \overline{x}_4 \vee \overline{x}_1 \wedge x_4 \vee \overline{x}_2 \wedge x_4$;

ж) $D = \overline{x}_3 \wedge x_4 \vee x_1 \wedge x_2 \vee x_3 \wedge \overline{x}_4 \vee \overline{x}_1 \wedge x_3$;

з) $D = x_1 \wedge x_2 \wedge \overline{x}_3 \vee \overline{x}_1 \wedge x_2 \wedge x_4 \vee x_2 \wedge x_3 \wedge \overline{x}_4 \vee x_2 \wedge \overline{x}_3 \wedge \overline{x}_4 \vee x_2 \wedge x_3 \wedge x_1$.

6 Используя метод Квайна – Мак-Класки найти сокращенную ДНФ: а) $f = (01110110)$; б) $f = (10111101)$; в) $f = (00101111)$; г) $f =$

= (0001101111011011); д) f = (11100100); е) f = (0000111111110110); ж) f = = (1111111101111110); з) f = (0000111101111111).

7 Найти сокращенную ДНФ функции f с помощью минимизирующей карты: а) f = (0011110111111101); б) f = (0011110111011110); в) f = = (0010101111011111).

27 Практическое занятие № 27. Задача минимизации булевых функций

На занятии рассматриваются задача минимизации булевых функций, минимальные дизъюнктивные формы, общая схема минимизации [1, 2, 6–10].

27.1 Теоретическая часть

Задача поиска наиболее простой записи булевой функции называется ***задачей минимизации***.

Минимальной ДНФ (МДНФ) функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется ДНФ, реализующая функцию f и содержащая минимальное число символов переменных по сравнению со всеми другими видами ДНФ, реализующими функцию f.

Теорема. Всякая минимальная ДНФ некоторой функции является ее тупиковой ДНФ.

Для получения МДНФ функции f необходимо построить все тупиковые ДНФ функции f и выбрать из них те, которые содержат минимальное количество букв.

Общая схема минимизации включает следующие этапы: 1) построение сокращенной ДНФ; 2) построение тупиковой ДНФ; 3) нахождение минимальной ДНФ.

Чтобы построить все минимальные КНФ (МКНФ) функции f, следует построить все МДНФ функции $\overline{f}$ и взять от каждой из них отрицание, для чего заменить знаки $\wedge$ на $\vee$, а $\vee$ на $\wedge$ (сохранив первоначальное распределение скобок) и над каждой буквой поставить знак отрицания. Полученные КНФ для функции f будут минимальными.

27.2 Задачи к занятию

1 Используя алгоритм Квайна – Мак-Класки, найти минимальные ДНФ для функций: а) $f = (0,1,1,0,1,0,0,1)$; б) $f = (1,0,0,1,0,0,1,1)$; в) $f = \{1,3,4,7,8,11,14,15\}$; г) $f = \{2,4,6,9,10,11,13\}$.

2 Каждый из четырех членов комитета голосует «за», нажимая на кнопку. Решение считается принятым, когда не менее трех членов комитета голосуют

«за». Найти минимальную ДНФ для функции голосования.

3 Построить СДНФ, СКНФ и минимальную ДНФ для функции $f(x_1, x_2, x_3)$, представленной таблицей 27.1.

Таблица 27.1 – Таблица истиности функции $f(x_1, x_2, x_3)$

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$	x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	1	1	0	0	0
0	0	1	1	1	0	1	1
0	1	0	1	1	1	0	0
0	1	1	0	1	1	1	1

4 Для булевой функции $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\overline{x}_1 \wedge \overline{x}_2) \wedge (x_3 \vee x_1) \wedge (\overline{x}_2 \wedge x_4) \vee$ $\vee (x_3 \wedge x_4)$ найти простые импликанты и минимальную ДНФ методами Квайна и Карно.

5 Для булевой функции $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 \vee x_4) \wedge (x_2 \vee \overline{x}_3 \vee \overline{x}_4) \wedge$ $\wedge (\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3)$ найти простые импликанты и минимальную КНФ методами Квайна и Карно.

6 Минимизировать заданную функцию с помощью карт Карно: а) f = (0101 0010); б) f = (1100010100000001); в) f = (11111000); г) f = = (0000001111111101); д) f = (01111110); е) f = (0001101111011011).

7 Найти МДНФ следующих функций $f(x_1, x_2, x_3)$ методом неопределенных коэффициентов: а) $f = (0,2,5,6)$; б) $f = (0,1,4,7)$; в) $f = (0,1)$; г) $f = (0,1,4,5,6)$.

27.3 Домашнее задание

1 Выяснить, является ли ДНФ D тупиковой, минимальной: а) $D = x_1 \wedge x_2 \vee \overline{x}_2$; б) $D = x_1 \wedge x_2 \vee x_2$; в) $D = x_1 \vee \overline{x}_2$; г) $D = x_1 \wedge \overline{x}_2 \vee \overline{x}_1 \wedge x_2$; д) $D = x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \vee \overline{x}_2 \wedge$ $\wedge x_3 \vee x_2 \wedge \overline{x}_3$; е) $D = x_1 \wedge x_2 \vee \overline{x}_1 \wedge x_3 \wedge \overline{x}_4 \vee \overline{x}_2 \wedge x_3 \wedge x_4$; ж) $D = x_1 \wedge \overline{x}_2 \wedge x_4 \vee \overline{x}_1 \wedge$ $\wedge \overline{x}_3 \wedge \overline{x}_4 \vee \overline{x}_2 \wedge \overline{x}_3 \wedge \overline{x}_4$; з) $D = x_1 \wedge \overline{x}_2 \wedge \overline{x}_3 \vee \overline{x}_1 \wedge \overline{x}_2 \wedge \overline{x}_4 \vee \overline{x}_1 \wedge \overline{x}_3 \wedge x_4 \vee \overline{x}_2 \wedge \overline{x}_3 \wedge \overline{x}_4$.

2 По заданной сокращенной ДНФ D построить минимальные ДНФ:

а) $D = x \wedge y \vee \overline{x} \wedge \overline{z} \vee y \wedge z$;

б) $D = x \wedge \overline{y} \wedge \overline{z} \vee \overline{x} \wedge y \wedge \overline{z} \vee \overline{x} \wedge \overline{y} \wedge \overline{w} \vee \overline{x} \wedge \overline{z} \wedge \overline{w} \vee \overline{y} \wedge \overline{z} \wedge w$;

в) $D = \overline{x} \wedge w \vee \overline{y} \wedge w \vee z \wedge w \vee x \wedge z \vee y \wedge z$;

г) $D = \overline{x} \wedge z \vee y \wedge z \vee \overline{x} \wedge \overline{y} \wedge w \vee x \wedge y \vee \overline{y} \wedge z \wedge w \vee x \wedge z \wedge w$;

д) $D = y \wedge z \vee \overline{x} \wedge \overline{z} \wedge w \vee \overline{x} \wedge y \wedge z \vee x \wedge z \wedge w \vee x \wedge y \wedge \overline{z}$;

е) $D = \overline{x} \wedge \overline{y} \wedge \overline{w} \vee \overline{x} \wedge \overline{z} \wedge \overline{w} \wedge \wedge \overline{z} \wedge \overline{w} \vee \overline{y} \wedge z \wedge \overline{w} \vee \overline{x} \wedge \overline{y} \wedge \overline{z}$;

ж) $D = \overline{x} \wedge z \vee x \wedge \overline{z} \vee x \wedge y \wedge z \vee x \wedge z \wedge w$;

з) $D = y \wedge z \wedge t \vee y \wedge w \wedge t \vee \overline{x} \wedge \overline{y} \wedge z \wedge t \vee x \wedge y \wedge \overline{z} \wedge w$.

3 С помощью таблицы Квайна построить все тупиковые ДНФ функции f: а) f = (01111100); б) f = (01111110); в) f = (00011111); г) f = = (1111100001001100); д) f = (1110100001101000); е) f = (1110011000010101); ж) f = (0001011110101110); з) f = (0001101111100111).

4 Минимизировать заданную функцию с помощью карт Карно: а) f = (0101 0110); б) f = (1001 1001 1101 1001); в) f = (1101 0111 1110 1011).

28 Практическое занятие № 28. Замкнутые классы. Полные системы функций

На занятии рассматриваются замкнутые классы, полные системы функций, полнота двойственной системы, теорема Поста [1, 2, 6–10].

28.1 Теоретическая часть

Система функций $\{f_1, f_2, ..., f_n\} \in P_2$ называется *полной* в P_2, если любая функция $f(x_1, ..., x_n) \in P_2$ может быть записана в виде формулы через функции этой системы.

Лемма (достаточное условие полноты). Пусть система $U = \{f_1, f_2, ..., f_s, ...\}$ полна в P_2. Пусть $B = \{g_1, g_2, ..., g_k, ...\}$ – некоторая система из P_2, причем любая функция $f_i \in U$ может быть выражена формулой над B, тогда система B полна в P_2.

Пусть $M' \subseteq P_2$. ***Замыканием*** M' называется множество всех функций из P_2, которые можно выразить формулами над M'. Замыкание M' обозначается $[M']$.

Множество функций M' называется ***замкнутым классом***, если $[M'] = M'$.

Важнейшие замкнутые классы в P_2 (классы Поста):

1) T_0 – класс функций, сохраняющих константу 0. $T_0 = \{f(x_1, ..., x_n) \mid f(0, ..., 0) = 0, n = 1, 2, ...\}$;

2) T_1 – класс функций, сохраняющих константу 1. $T_1 = \{f(x_1, ..., x_n) \mid f(1, ..., 1) = 1, n = 1, 2, ...\}$;

3) S – класс самодвойственных функций. $S = \{f(x_1, ...) \mid f^* = f\}$;

4) L – класс линейных функций. Функция называется ***линейной***, если она представима ***линейным полиномом Жегалкина*** $L = \{f(x_1, ...) \mid f = c_0 \oplus c_1 x_1 \oplus ... \oplus c_n x_n\}$;

5) M – класс монотонных функций. Функция называется ***монотонной***, если $f(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \leq f(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$ на всех сравнимых наборах, т. е. таких,

что $\left(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n\right)\le\left(\beta_1,\beta_2,...,\beta_n\right)$. Причем $\left(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n\right)\le\left(\beta_1,\beta_2,...,\beta_n\right)$, если при любом i $\alpha_i\le\beta_i$.

Теорема. Если функция принимает значение 1 на нечетном количестве наборов, то она нелинейна.

Лемма. Каждый класс Поста замкнут относительно операций подстановки и суперпозиции, т. е. с помощью этих операций можно получить только функции того же класса Поста.

Теорема Поста (***сильная***)***.*** Система функций тогда, и только тогда является функционально полной, когда для каждого класса T_0, T_1, S, M, L в ней найдется функция, не принадлежащая этому классу.

Теорема Поста (***слабая***)***.*** Система функций, содержащая const 0 и const 1, является функционально полной тогда, и только тогда, когда она содержит хотя бы одну нелинейную и хотя бы одну немонотонную функцию.

Система функций $\left\{f_1,...,f_s,...\right\}$ называется ***базисом*** в P_2, если она полна в P_2, но любая ее подсистема не будет полной.

Теорема. Из любой полной в P_2 системы функций можно выделить полную подсистему, состоящую не более чем из четырех функций.

Следствие. Базис в P_2 может состоять максимум из четырех функций.

28.2 Задачи к занятию

1 Определить число булевых функций от n переменных: а) сохраняющих константу (0 или 1); б) самодвойственных; в) несамодвойственных; г) линейных.

2 Доказать, что замыкание множества функций, состоящих из дизъюнкции и суммы по модулю 2, совпадает с классом T_0.

3 Доказать, что множество $T_0\cap T_1$ является замыканием одноэлементного множества $\left\{f = x\wedge y\oplus z\oplus t\right\}$.

4 Доказать, что число всех монотонных функций от n переменных равно числу всех антицепей булева куба размерности n. Одноэлементное множество считать антицепью.

5 Доказать, что сокращённая ДНФ, представляющая монотонную функцию, является минимальной.

6 Доказать, что любая монотонная функция, отличная от константы, может быть представлена ДНФ без отрицаний.

7 Выяснить, полно ли множество булевых функций F:

а) $F=\left\{f_1=\overline{x}, f_2=x(y\sim z)\sim yz, f_3=x\oplus y\oplus z\right\}$;

б) $F=\left\{f_1=xy\oplus yz\oplus zt, f_2=0, f_3=1, f_4=x\vee y\right\}$;

в) $F=\left\{f_1=0110, f_2=(11000011), f_3=(10010110)\right\}$;

г) $F=\left\{f_1=x\vee y, f_2=(1001101111110110)\right\}$.

8 Полное множество булевых функций называют базисом, если оно не содержит полных собственных подмножеств (т. е. является минимальным по

включению полным множеством). Найти любой базис, содержащий импликацию ($\rightarrow$).

9 Проверить полноту множества F, состоящего из функций $f_1 = x \wedge y \vee \overline{x} \wedge z$, $f_2 = x \rightarrow y$, 0 и $x \oplus z \wedge y$. Выделить в нём всевозможные базисы.

10 Проверить полноту заданной системы функций. Для функционально полной системы выделить базис: а) $F = \{f_1, f_2\}; f_1 = x_1 \rightarrow x_2, f_2 = x_1 \rightarrow \overline{x}_2 \wedge x_3$; б) $F = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}; f_1 = \overline{x}_1 \wedge x_2, f_2 = x_1 \sim x_2 \wedge x_3, f_3 = 0, f_4 = 1$; в) $F = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$; $f_1 = (x_1 \rightarrow x_2) \downarrow (x_2 \sim x_3)$, $f_2 = (x_1 | (x_1 \wedge x_2)) \rightarrow x_3$, $f_3 = x_1 \oplus x_2$, $f_4 = 0$.

11 Определить, к каким классам Поста принадлежат следующие функции: а) $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \rightarrow x_2) \wedge (x_2 \downarrow x_3)$; б) $f(x_1, x_2, x_3) = ((x_1 \rightarrow x_2) \vee x_3) | x_1$; в) $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \rightarrow x_2) \wedge (x_2 \rightarrow x_1) \sim x_3$.

28.3 Домашнее задание

1 Методом неопределенных коэффициентов найти полиномы Жегалкина для следующих функций: а) $f(x_1, x_2) = x_1 | x_2$; б) $f(x_1, x_2) = (0100)$; в) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \wedge (x_2 \vee \overline{x}_3)$; г) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \rightarrow (x_2 \rightarrow x_3)$; д) $f(x_1, x_2, x_3) = (01101001)$; е) $f(x_1, x_2, x_3) = (10001110)$; ж) $f(x_1, x_2, x_3) = (00000111)$; з) $f(x_1, x_2, x_3) = (01100110)$; и) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1000000000000001)$; к) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0000100010010000)$.

2 Из полной для класса $[A]$ системы выделить базис: а) $A = \{0, 1, \overline{x}\}$; б) $A = \{x \oplus y, x \sim y, 1\}$; в) $A = \{x, x \oplus y, x \oplus y \oplus z\}$; г) $A = \{x \wedge y, x \vee y, x \wedge y \vee z\}$; д) $A = \{x \vee y, x \rightarrow y\}$; е) $A = \{x \wedge \overline{y}, x \wedge y\}$; ж) $A = \{x \oplus y \oplus z, x \wedge \overline{y} \vee \overline{y} \wedge \overline{z} \vee \overline{z} \wedge x, \overline{x}\}$; з) $A = \{1, x \sim y, x \oplus y \oplus z \oplus 1\}$; и) $A = \{x \wedge y, x \wedge y \vee \overline{x} \wedge z\}$; к) $A = \{x, x \vee y, x \vee y \vee z, x \wedge y \vee z\}$.

3 Сведением к заведомо полным системам в P_2 показать, что множество A является полной системой в P_2: а) $A = \{x \downarrow y\}$; б) $A = \{x \wedge y \oplus z, (x \sim y) \oplus z\}$; в) $A = \{x \rightarrow y, \overline{x \oplus y \oplus z}\}$; г) $A = \{x \rightarrow y, f = (01011110)\}$; д) $A = \{x \sim y, x \oplus y, x \wedge y \oplus z\}$; е) $A = \{0, m = x_1 \wedge x_2 \vee x_2 \wedge x_3 \vee x_3 \wedge x_1, x \oplus y \oplus 1\}$; ж) $A = \{x \wedge y \vee \overline{x} \wedge \overline{z}, f = (01111110)\}$; з) $A = \{x \wedge y \oplus z \wedge t \oplus 1, f = (10110110)\}$; и) $A = \{0, 1, x \oplus y \oplus z, x \wedge y \oplus z \wedge x \oplus z \wedge y\}$; к) $A = \{\overline{x} \wedge \overline{y} \vee z, x \oplus y\}$.

4 Выяснить, является ли функция f самодвойственной: а) $f = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus 1$; б) $f = x_1 \wedge x_2 \vee x_2 \wedge x_3 \vee x_3 \wedge x_1$; в) $f = (x \vee \overline{y} \vee z) \wedge t \vee x \wedge y \wedge z$; г) $f = x_1 \oplus x_2$; д) $f = x_1 \vee x_2$; е) $f = (x \vee \overline{y} \vee z) \wedge t \vee x \wedge \overline{y} \wedge z$; ж) $f = (x_1 \rightarrow x_2)$; з) $f = x_1 \wedge x_2 \vee x_3$; и) $f = x_1 \wedge x_2 \oplus x_2 \wedge x_3 \oplus x_3 \wedge x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$; к) $f = x_1 \wedge x_2 \oplus x_3 \wedge (x_1 \vee x_2)$; л) $f = x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \oplus x_1 \wedge x_2 \wedge \overline{x}_3 \oplus x_2 \wedge x_3 \oplus x_3 \wedge x_1$; м) $f = (x_1 \rightarrow x_2) \oplus (x_2 \rightarrow x_3) \oplus (x_3 \rightarrow x_1)$; н) $f = x_1 \oplus x_2 \oplus (x_1 \wedge x_2 \vee x_2 \wedge x_3 \vee x_3 \wedge x_1)$; о) $f = x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \oplus x_1 \wedge x_2 \oplus x_2 \wedge x_3 \oplus x_3 \wedge x_1$; п) $f = (x_1 \rightarrow x_2) \oplus (x_2 \rightarrow x_3) \oplus (x_3 \rightarrow x_1) \oplus x_3$.

5 Проверить, является ли функция f монотонной: а) $f=(x_1 \oplus x_2) \wedge (x_1 \sim x_2)$; б) $f=x_1 \to (x_2 \to x_1)$; в) $f=x_1 \to (x_1 \to x_2)$; г) $f=x_1 \wedge \overline{x}_2 \wedge \overline{x}_3 \vee x_1 \wedge \overline{x}_2 \wedge$ $\wedge x_3 \vee x_1 \wedge x_2 \wedge \overline{x}_3 \vee x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \vee \overline{x}_1 \wedge x_2 \wedge x_3$; д) $f=x_1 \wedge \overline{x}_2 \wedge \overline{x}_3 \vee \overline{x}_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \vee$ $\vee x_1 \wedge x_2 \wedge \overline{x}_3 \vee x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \vee \overline{x}_1 \wedge \overline{x}_2 \wedge x_3$; е) $f=(x_1 \oplus x_2) \wedge x_1 \wedge x_2$; ж) $f=x_1 \wedge x_2 \oplus$ $\oplus x_1 \wedge x_3 \oplus x_3 \wedge x_1$; з) $f=x_1 \wedge x_2 \oplus x_2 \wedge x_3 \oplus x_3 \wedge x_1 \oplus x_1$.

29 Практическое занятие № 29. Логика высказываний

На занятии рассматриваются высказывания, связки, формулы, тавтологии, эквивалентности [1, 2, 6–12].

29.1 Теоретическая часть

Элементами логических рассуждений являются утверждения, которые либо ***истинны***, либо ***ложны***, но не то и другое вместе. Такие утверждения называются ***высказываниями*** (***простыми***). Простые высказывания обозначаются ***пропозициональными переменными***, принимающими ***истинностные значения*** «И» и «Л» или «1» и «0» согласно [10]. Будем использовать обозначения «1» и «0». Из простых высказываний с помощью *логических связок* могут быть построены ***составные высказывания***.

Обычно рассматривают следующие логические связки:

– ***отрицание*** (читается «НЕ», обозначается «$\neg$» перед высказыванием или чертой над соответствующим высказыванием);

– ***конъюнкция*** (читается «И», обозначается «$\wedge$» или «&»);

– ***дизъюнкция*** (читается «ИЛИ», обозначается «$\vee$»);

– ***импликация*** (читается «ЕСЛИ… ТО», обозначается «$\to$»);

– ***эквиваленция*** (читается «РАВНОЗНАЧНО», обозначается «$\sim$»);

– ***неравнозначность*** (читается «ЛИБО… ЛИБО», обозначается «$\oplus$»).

Пропозициональные переменные, логические связки и скобки составляют ***алфавит*** языка алгебры высказываний. С помощью элементов алфавита можно построить разнообразные формулы.

Правильно построенные составные высказывания называются ***формулами*** (пропозициональными).

1 Всякая пропозициональная переменная есть формула.

2 Если A и B – формулы, то формулами также являются $\neg A$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \to B$, $A \sim B$, $A \oplus B$.

3 Никаких других формул, кроме тех, которые получаются по правилам (1)-(2), нет.

Для упрощения записи формул используется старшинство связок ($\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\oplus$, $\to$, $\sim$) и лишние скобки часто опускаются.

Пусть $A(x_1,...,x_n)$ – пропозициональная формула, где $x_1,...,x_n$ – входящие в неё пропозициональные переменные.

Конкретный набор истинностных значений, приписанных переменным x_1, ..., x_n, называется ***интерпретацией формулы*** A.

Формула может быть ***истинной*** (иметь значение 1) при одной интерпретации и ***ложной*** (иметь значение 0) при другой. Значение формулы A в заданной интерпретации будем обозначать $I(A)$.

Формула, истинная при некоторой интерпретации, называется ***выполнимой***.

Формула, истинная при всех возможных интерпретациях, называется ***общезначимой*** (или ***тавтологией***).

Формула, ложная при всех возможных интерпретациях, называется ***невыполнимой*** (или ***противоречием***).

Примеры. $A \vee \neg A$ – тавтология, $A \wedge \neg A$ – противоречие, $A \rightarrow \neg A$ – выполнимая формула, она истинна при $I(A)=1$.

Говорят, что формула B ***логически следует*** из формулы A (обозначение $A \Rightarrow B$), если формула B имеет значение 1 при всех интерпретациях, при которых формула A имеет значение 1. Говорят, что формулы A и B ***логически эквивалентны*** (обозначается $A \Leftrightarrow B$ или $A = B$), если они являются логическими следствиями друг друга. Логически эквивалентные формулы имеют одинаковые значения при любой интерпретации.

Выделяют следующие основные ***эквивалентные соотношения*** (***законы***):

1) $A \wedge 0 = 0$;

2) $A \vee 0 = A$;

3) $A \wedge 1 = A$;

4) $A \vee 1 = 1$;

5) $\neg\neg A = A$ (***закон двойного отрицания***);

6) $A \wedge \neg A = 0$ (***закон логического противоречия***);

7) $A \vee \neg A = 1$ (***закон исключенного третьего***);

8) $A \wedge A = A$ (***идемпотентность конъюнкции***);

9) $A \vee A = A$ (***идемпотентность дизъюнкции***);

10) $A \wedge B = B \wedge A$ (***коммутативность конъюнкции***);

11) $A \vee B = B \vee A$ (***коммутативность дизъюнкции***);

12) $A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C$ (***ассоциативность конъюнкции***);

13) $A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C$ (***ассоциативность дизъюнкции***);

14) $A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ (***дистрибутивность конъюнкции относительно дизъюнкции***);

15) $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ (***дистрибутивность дизъюнкции относительно конъюнкции***);

16) $A \wedge (A \vee B) = A$ (***первый закон поглощения***);

17) $A \vee (A \wedge B) = A$ (***второй закон поглощения***);

18) $\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$ (***первый закон де Моргана***);

19) $\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$; (***второй закон де Моргана);***

20) $A = (A \wedge B) \vee (A \wedge \neg)$ (***первый закон расщепления***);

21) $A = (A \vee B) \wedge (A \vee \neg B)$ (***второй закон расщепления***);

22) $A \to B = \neg A \to \neg B$ (***закон контрапозиции***);

23) $A \to B = \neg A \vee B = \vee(A \wedge \neg B)$;

24) $A \sim B = (\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A) = (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$;

25) $A \oplus B = (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$;

26) $A \vee B = \neg A \to B = \neg(\neg A \wedge \neg B)$;

27) $A \wedge B = \neg(A \to \neg B) = \neg(\neg A \vee \neg B)$.

29.2 Задачи к занятию

1 Среди следующих предложений выделить те, которые являются высказываниями, и установить, если это возможно, истинны они или ложны:

а) для произвольных множеств A и B верно включение $A \subset A \cup B$;

б) сумма углов в треугольнике равна 180°;

в) $\sqrt{2} \in N$;

г) Солнечная система насчитывает девять больших планет;

д) на улице светит солнце;

е) летайте самолетами Белавиа;

ж) всякое подмножество конечного множества конечно.

2 Даны два высказывания:

а) $p = \{$число 3 является делителем числа 174$\}$, $q = \{$идет дождь$\}$. Выяснить в чем заключаются высказывания $\neg p$, $p \vee q$, $p \to q$, $\neg p \to q$;

б) $p = \{$конъюнкция коммутативна$\}$, $q = \{$если целое число простое, то оно нечетное$\}$. Выяснить, в чем заключаются высказывания $\neg q$, $\neg(p \to q)$, $(p \wedge \neg q) \to p$.

3 Установить, какие из следующих утверждений являются высказываниями и какие из высказываний истинны и какие ложны:

а) сумма корней приведенного квадратного уравнения равна свободному члену;

б) сумма корней любого приведенного квадратного уравнения равна свободному члену;

в) существует приведенное квадратное уравнение, сумма корней которого равна свободному члену.

4 Выяснить в каких случаях приведенные данные противоречивы: а) $a = 1, a \wedge b = 1$; б) $a = 0, a \wedge b = 1$; в) $a = 1, a \vee b = 0$; г) $a = 1, a \vee b = 1$

5 Определить, является ли данная последовательность формулой: а) $(A_0 \wedge A_1) A_2 \wedge \neg A_3$; б) $((A_3 \to A_0) \wedge \neg A_0)$; в) $(\neg A_0 \to A_1) \to \neg(A_1 \vee A_3)$.

6 Проверить, не составляя таблиц истинности, являются ли следующие формулы тождественно истинными: а) $\neg(p \to \neg p)$; б) $p \to p \wedge (\neg p \to p \wedge p)$; в) $(p \vee p) \to p$.

7 Составить таблицу истинности для формул: а) $(A_1 \to \neg A_2) \wedge (\neg A_1 \vee A_2)$; б) $(A_1 \to (A_2 \to A_3)) \to ((A_1 \to A_2) \to (A_1 \to A_3))$; в) $(P \leftrightarrow Q) \to (P \wedge Q)$; г) $(P \wedge (Q \to P)) \vee$ $\vee \neg P$; д) $(P \wedge (Q \to \neg P)) \wedge (\neg Q \to P) \vee Q$.

8 Известно, что $x \to y$ имеет значение 1. Определите значения $z \to (x \to y), \neg(x \to y) \to y, (x \to y) \to z$.

9 Доказать выполнимость формул:

а) $\neg(P \to \neg P)$;

б) $(Q \to P \wedge R) \wedge (P \vee R \to Q)$;

в) $(P \to Q) \to (Q \to P)$.

10 Доказать тождественную истинность формул: а) $P \to (Q \to P \wedge Q)$; б) $(P \to Q) \to ((P \to \neg Q) \to \neg P)$; в) $(P \to R) \to ((Q \to R) \to (P \vee Q \to R))$; г) $(Q \to R) \to$ $\to (P \vee Q \to P \vee R)$.

11 Доказать следующие эквивалентности: а) $\neg(A \to B) = A \wedge \neg B$; б) $A \wedge (A \vee C) \wedge$ $\wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$; в) $A \vee (B \wedge A) = A$; г) $(A \wedge B) \vee ((A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B)) =$ $= (A \vee B)$.

29.3 Домашнее задание

1 Определить, является ли данная последовательность формулой: а) $A_1 \wedge A_2 \to A_3 A_1$; б) $(A_1 \to A_2) \vee (A_1 \to A_2 \wedge A_1)$.

2 Выяснить при каких значениях переменных P, Q, R следующие формулы ложны: а) $((P \to Q \wedge R) \to (\neg Q \to \neg P)) \to \neg Q$; б) $((P \vee Q) \vee R) \to ((P \vee Q) \wedge (P \vee R))$.

3 Составить таблицу истинности для формул: а) $\neg(P \to \neg(Q \wedge P)) \to P \vee R$; б) $(P \wedge (Q \vee \neg P)) \wedge ((\neg Q \to P) \vee Q)$; в) $(P \to Q) \vee (P \to (P \wedge Q))$.

4 Доказать тождественную истинность формул; а) $(\neg Q \to \neg P) \to ((\neg Q \to P) \to Q)$; б) $\neg P \to (P \to Q)$; в) $P \to \neg\neg P$.

5 Доказать следующие эквивалентности: а) $A \wedge A = A$; б) $A \vee (B \wedge C) =$ $= (A \vee B) \wedge (A \vee C)$; в) $\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$.

6 Выразить все основные операции через конъюнкцию и отрицание, через дизъюнкцию и отрицание.

7 Определить, является ли каждая из следующих форм тавтологией, противоречием или не является ни тем, ни другим: а) $A = (A \vee A)$; б) $(A \to B) \to$ $\to ((B \to C) \to (A \to C))$; в)$((A \to B) \wedge B)) \to A$; г) $(\neg A) \to (A \wedge B)$; д) $A \wedge \neg(A \vee B)$; е) $(A \to B) = ((\neg A) \vee B)$; ж) $(A \to B) = \neg(A \wedge \neg B)$.

30 Практическое занятие № 30. Логика предикатов

На занятии рассматриваются предикаты, кванторы, формулы логики предикатов [1, 6–10].

30.1 Теоретическая часть

Предикат – это высказывание-функция, значение (истина/ложь) которого зависит от параметров.

Дадим более строгое определение.

Предикатом $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется функция типа $P: M_1 \times M_2 \times ... M_n \to \{1,0\}$, где M_i – произвольное множество, которое называется ***предметной областью*** предиката, x_i $(i = 1, 2, ..., n)$ – ***предметные переменные***. Предикат от n переменных называется ***n-местным***. Нульместный предикат представляет собой высказывание.

Областью истинности предиката $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется множество $I_p \subseteq M_1 \times M_2 \times ... M_n$, на котором $P(x_1, x_2, ..., x_n) = 1$.

Поскольку множество значений любого предиката лежит во множестве $\{0,1\}$, то с предикатами можно производить все операции алгебры логики и все известные свойства логических операций обобщаются для предикатов. Рассмотрим эти свойства на примере одноместных предикатов:

1) коммутативность: $P(x) \vee Q(x) = Q(x) \vee P(x)$, $P(x) \wedge Q(x) = Q(x) \wedge P(x)$;

2) ассоциативность: $P(x) \vee (Q(x) \vee R(x)) = (P(x) \vee Q(x)) \vee R(x)$, $P(x) \wedge$ $\wedge (Q(x) \wedge R(x)) = (P(x) \wedge Q(x)) \wedge R(x)$;

3) дистрибутивность: $P(x) \vee (Q(x) \wedge R(x)) = (P(x) \vee Q(x)) \wedge (P(x) \vee R(x))$, $P(x) \wedge (Q(x) \vee R(x)) = (P(x) \wedge Q(x)) \vee (P(x) \wedge R(x))$;

4) идемпотентность: $P(x) \vee P(x) = P(x)$, $P(x) \wedge P(x) = P(x)$;

5) закон двойного отрицания: $\neg\neg P(x) = P(x)$;

6) закон исключения третьего: $P(x) \vee \neg P(x) = 1$;

7) закон противоречия: $P(x) \wedge \neg P(x) = 0$;

8) законы де Моргана: $\neg(P(x) \vee Q(x)) = \neg P(x) \wedge \neg Q(x)$, $\neg(P(x) \wedge Q(x)) = \neg P(x) \vee \neg Q(x)$;

9) свойства операций с логическими константами: $P(x) \vee 1 = 1$, $P(x) \vee 0 = P(x)$, $P(x) \wedge 1 = P(x)$, $P(x) \wedge 0 = 0$, где $P(x)$, $Q(x)$ и $R(x)$ – любые предикаты.

Для предикатов также определены операции специального вида, которые называются ***кванторами***.

Пусть дан n-местный предикат $P(x_1, x_2, ..., x_n)$, означающий, что для набора $(x_1, x_2, ..., x_n)$ выполнено свойство P, и пусть x_i – одна из переменных. Тогда запись $\forall x_i P(x_1, x_2, ..., x_n)$ означает, что для всех значений переменной x_i свойство P выполнено. Символ $\forall$ называется ***квантором всеобщности*** (***общности***). Предикат $\forall x_i P(x_1, x_2, ..., x_n)$ является $(n-1)$-местным. Он зависит от переменных $x_1, x_2, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n$.

В то же время запись $\exists x_i P(x_1, x_2, ..., x_n)$ означает, что существует значение переменной x_i, такое, что выполняется свойство P. Символ $\exists$ называется ***квантором существования***. Предикат $\exists x_i P(x_1, x_2, ..., x_n)$ является также $(n-1)$-местным и зависит от переменных $x_1, x_2, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n$..

Переменную, к которой относится квантор, называют ***связанной***, остальные переменные называют ***свободными***. Выражение, на которое навешен квантор, называется ***областью действия квантора***. Все вхождения переменной x в это выражение являются связанными.

Если предикат $P(x)$ одноместный, то утверждения $\forall x P(x)$ и $\exists x P(x)$ являются ***нульместными*** предикатами, т. е. истинными или ложными высказываниями.

Предикат называется ***тождественно истинным*** (***тождественно ложным***), если при всех возможных значениях переменных он принимает значение 1(0).

Предикат называется ***выполнимым***, если при некоторых значениях переменных он принимает значение 1.

Из предикатов как высказываний можно образовывать составные высказывания – ***формулы логики предикатов***.

1 Всякий нульместный предикатный символ есть формула.

2 Всякий n-местный предикатный символ $P(x_1, x_2, ..., x_n)$, где $x_1, x_2, ..., x_n$ – свободные перменные, есть формула.

3 Если A и B – формулы, то формулами также являются $\neg A$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \to B$, $A \sim B$, $A \oplus B$.

4 Если A – формула, в которую предметная переменная x входит свободно, то $\forall x\, A$ и $\exists x\, A$ – формулы, в которых переменная x связана.

5 Никаких других формул, кроме тех, которые получаются по правилам (1)–(4), нет.

Формулы P и Q логики предикатов называются ***равносильными*** или ***эквивалентными***, если в любой предметной области их истинностные таблицы совпадают.

В логике предикатов справедливы все эквивалентные соотношения логики высказываний, а также собственные эквивалентные соотношения, включающие кванторы $\forall x$ и $\exists x$:

1) $\neg(\forall x P(x)) \sim \exists x \neg(P(x))$;

2) $\neg(\exists x P(x)) \sim \forall x \neg(P(x))$;

3) $\forall x\forall yP(x,y)=\forall y\forall xP(x,y)$;

4) $\exists x\exists yP(x,y)=\exists y\exists xP(x,y)$;

5) $\left(\forall xP(x)\wedge\forall xQ(x)\right)\sim\forall x(P(x)\wedge\forall xQ(x))$;

6) $\left(\exists xP(x)\vee\exists xQ(x)\right)\sim\exists x(P(x)\vee\exists xQ(x))$;

7) $\forall x\left(P(x)\wedge Q(y)\right)\sim(\forall xP(x)\wedge Q(y))$;

8) $\forall x\left(P(x)\vee Q(y)\right)\sim(\forall xP(x)\vee Q(y))$;

9) $\exists x\left(P(x)\wedge Q(y)\right)\sim(\exists xP(x)\wedge Q(y))$;

10) $\exists x\left(P(x)\vee Q(y)\right)\sim(\exists xP(x)\vee Q(y))$.

Предикатная формула находится в ***приведенной форме***, если в ней использованы только кванторные операции, а также операции инверсии, конъюнкции, дизъюнкции, причем инверсия относится только к предикатным буквам.

Предикатная формула находится в ***предваренной форме*** (***предваренной нормальной форме***), если она имеет вид $Q_1x_1Q_2x_2...Q_kx_kP$, где $Q_1,Q_2,...,Q_k$ – кванторы всеобщности или существования, а формула P находится в приведенной форме и не содержит кванторов.

30.2 Задачи к занятию

1 Среди следующих предложений выделить предикаты и для каждого предиката установить местность и область истинности, если $M=R$. Для двуместных предикатов изобразить область истинности графически: а) $x+2=0$; б) при $x=0$ выполняется равенство $x-2=0$; в) $x^3-8=0$; г) $\exists x\left(x^3-8=0\right)$; д) $x-y=1$; е) x^2-5x+7; ж) $\sin^2 x+\cos^2 x=1$; з) $x-y^2\geq 0$; и) Однозначное число x является простым; к) $\dfrac{x^2-1}{x^2-2x+1}=0$.

2 Записать с помощью кванторов следующие утверждения и их отрицания: а) функция $f(x)$ возрастает на интервале (a,b); б) функция $f(x)$ непрерывна на интервале (a,b); в) множество A является собственным подмножеством множества B; г) точка x_0 является точкой экстремума функции $f(x)$; д) функция $f(x)$ достигает наибольшего значения на отрезке $[a,b]$ в точке x_0; е) функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0; ж) множества A и B не пересекаются; з) бинарное отношение ρ является симметричным; и) функция $f(x)$ ограничена на множестве R; к) булева функция $f(x_1,x_2,...,x_k)$ самодвойственна.

3 Доказать равносильность формул:

а) $F=\neg(x)\left[(y)P(x,y)\to(z)\left(P(z,z)Q(z)\right)\right]$ и

$G=(x)(y)(z)\left[P(x,y)\,\&\neg P(z,z)\,\&\neg Q(z)\right]$;

б) $F=\neg(x)\left[T(x)\to(y)(z)\left(R(y,z)\,\&\,T(z)\to R(z,z)\right)\right]$ и

$G=(x)(y)(z)\left[T(x)\&\neg R(z,z)\&\neg\left(R(y,z)\rightarrow\neg T(z)\right)\right]$;

в) $F=(x)\left[(y)P(x,y)\rightarrow(z)\left(P(x,z)\&Q(z)\right)\right]$ и

$G=(x)(u)\left[P(x,u)\rightarrow Q(u)\right]$;

г) $F=\neg(x)\left[(y)T(x,y)\rightarrow(z)\left(S(x,z)Q(z)\right)\right]$ и

$G=(x)(y)(z)\left[T(x,y)\&\neg\left(\neg S(x,z)\rightarrow Q(z)\right)\right]$;

д) $F=\neg(x)\left[(y)T(x,y)\rightarrow(z)\left(T(x,z)\&Q(z)\right)\right]$ и

$G=(x)(u)\left[T(x,u)\&\neg Q(u)\right]$.

4 Показать (приведя примеры), что квантор всеобщности не дистрибутивен относительно дизъюнкции, а квантор существования – относительно конъюнкции предикатов.

5 Найти предикат, не содержащий кванторов, логически эквивалентный данному предикату. Предикаты A и B определены на множестве $\{a,b,c\}$: а) $\forall yA(x,y)\rightarrow\forall x\exists zB(x,z)$; б) $\forall x\exists yA(x,y)\wedge\forall zB(x,z)$; в) $\forall xA(x,y)\vee\forall x\exists zB(x,z)$; г) $\forall y\exists xA(x,y)\rightarrow\exists x\forall zB(x,z)$; д) $\exists y\forall xA(x,y)\vee\forall zB(x,z)$; е) $\forall xA(x,y)\vee\forall x\forall zB(x,z)$; ж) $\forall x\,A(x,y)\wedge\exists z\forall xB(x,z)$; з) $\forall xA(x,z)\rightarrow\exists x\exists yB(x,y)$; и) $\forall x\exists yA(x,y)\wedge\forall zB(x,z)$; к) $\forall yA(x,y)\vee\exists x\forall zB(x,z)$.

6 Записать формулу в приведенной форме, если это необходимо, а затем преобразовать к предваренной форме: а) $\exists x\exists zR(x,y,z)\rightarrow\forall xP(x,y)$; б) $\forall x\exists yR(x,y,z)\rightarrow\exists xP(x,y)$; в) $\forall xP(x,y)\wedge\exists yQ(x,y)$; г) $\exists x\forall yP(x,y)\wedge\exists xQ(x,y)$; д) $\forall yR(x,y)\rightarrow\exists x\forall zP(x,y,z)$; е) $\forall x\exists yP(x,y)\wedge\exists x\exists yQ(x,y)$; ж) $\forall xP(x,y)\rightarrow\exists x\forall zQ(x,z)$; з) $\exists x\forall yP(x,y)\vee\neg\forall x\exists yQ(x,y)$; и) $\exists x\forall zP(x,y,z)\rightarrow\left(\forall zR(x,y,z)\vee Q(x,y)\right)$; к) $\forall xP(x,y,z)\rightarrow\exists x\forall zQ(x,y,z)$.

30.3 Домашнее задание

1 Выписать все подформулы формулы: а) $Q^2\left(f^1(v_0),g^2(v_0,v_1)\right)$; б) $\exists v_0\,Q^2(v_0,v_1)\rightarrow\neg\left(P^1\left(g^2(v_0,v_1)\right)\wedge\forall v_2P^1(v_2)\right)$.

2 Найти такие два замещения предикатного символа F конкретным предикатом в формуле, чтобы при одном замещении получилось истинное предложение, при другом – ложное: а) $\exists x\,F(x)\rightarrow\forall x\,F(x)$; б) $\exists x\left(F(x)\vee G(x)\right)\rightarrow\forall x\,H(x)$; в) $\forall x\exists y\,F(x,y)\rightarrow\exists y\forall x\,F(x,y)$.

3 Доказать тождественную ложность формул:

а) $\exists x\exists y\left(\left(F(x)\rightarrow\overline{F(x)}\right)\wedge\left(\overline{F(x)}\rightarrow F(x)\right)\right)$;

б) $\exists x\exists y\left(\left(F(x)\rightarrow F(y)\right)\wedge\left(F(x)\rightarrow\overline{F(y)}\right)\wedge F(x)\right)$.

4 Доказать, что: а) $\forall x\big(F(x)\wedge G(x)\big)=\forall x\,F(x)\wedge\forall x\,G(x)$; б) $\forall x\big(F(x)\vee G(x)\big)=$ $=\exists x\,F(x)\wedge\exists x\,G(x)$.

5 Доказать эквивалентность $\exists x\big(P(x)\vee Q(x)\big)=\exists xP(x)\vee\exists xQ(x)$.

6 Доказать, что не эквивалентны формулы $\exists x\big(P(x)\wedge Q(x)\big)$ и $\exists xP(x)\wedge\exists xQ(x)$.

31 Практическое занятие № 31. Теория доказательств

На занятии рассматривается метод резолюций в логике высказываний [1, 11, 12].

31.1 Теоретическая часть

Пусть имеется множество формул $\Gamma=\{A_1,A_2,...,A_n\}$ и формула A. ***Автоматическим доказательством формулы*** A называют алгоритм, который проверяет вывод [1] $A_1,A_2,...,A_n\vdash A$ ($\Gamma\vdash A$), что означает, если посылки $A_1,A_2,...,A_n$ истинны, то истинно заключение A (формула A является ***логическим следствием*** формул $A_1,A_2,...,A_n$).

Классическим алгоритмом автоматического доказательства теорем является метод резолюций. Рассмотрим его для исчисления высказываний. Для любого множества формул Γ и любой формулы A метод дает утвердительный ответ, если $\Gamma\vdash A$, и дает отрицательный ответ, если неверно, что $\Gamma\vdash A$.

Теорема о доказательстве от противного. Если $\Gamma,\neg A\vdash F$, где F – тождественно ложная формула, то $\Gamma\vdash A$.

Как правило, в качестве формулы F используют пустую формулу (обозначается пустая формула как $\square$), которая не имеет никакого значения ни в какой интерпретации и, по определению, является противоречием.

Метод резолюций использует специальную форму формул, которая называется ***предложением***.

Предложением называется дизъюнкция формул вида A или $\neg A$, где A – высказывание (пропозициональная буква).

Любая формула исчисления высказываний может быть преобразована в предложение со следующей последовательностью действий:

1) замена импликации по формуле: $A\to B=\neg A\vee B$. В результате в формуле остаются связки $\neg$, $\vee$, $\wedge$;

2) преобразование выражений с инверсиями по закону двойного отрицания $\neg\neg A=A$, законам де Моргана $\neg\big(A\vee B\big)=\neg A\wedge\neg B$, $\neg\big(A\wedge B\big)=\neg A\vee\neg B$. В результате инверсии остаются только перед буквами;

3) приведение формулы к конъюнктивной нормальной форме [6] с помощью дистрибутивных законов: $A\wedge\big(B\vee C\big)=\big(A\wedge B\big)\vee\big(A\wedge C\big)$,

$A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$;

4) преобразование конъюнктивной нормальной формы во множество предложений: $AB \Rightarrow A, B$.

Множество формул называется ***невыполнимым***, если оно не имеет интерпретации, в которой все формулы истинны.

Теорема. Если из формулы A получено множество Δ предложений, то формула A тождественно ложна тогда, и только тогда, когда множество Δ невыполнимо.

Правило резолюций. Даны предложения $C_1 = P \vee C_1'$, $C_2 = \neg P \vee C_2'$, где P – пропозициональная буква, C_1' и C_2' – предложения (в частности, пустые или содержащие только одну букву или ее отрицание). Правило резолюций формулируется так: $C_1,\ C_2 \vdash C_1' \vee C_2'$. $C_1,\ C_2$ называются ***резольвируемыми предложениями***, а $C_1' \vee C_2'$ – ***резольвентой.***

Теорема. Резольвента логически следует из резольвируемых предложений.

31.2 Задачи к занятию

1 Методом резолюций доказать теоремы:

а) $\vdash \neg A \vee A$;

б) $\vdash (A \to (B \to A)) \to A$;

в) $\vdash (A \wedge B \to C) \to (A \to (B \to C))$;

г) $\vdash (A \to B) \to ((C \to A) \to (C \to B))$;

д) $\vdash A \to (\neg A \to B)$;

е) $\vdash (A \to B) \to ((\neg A \to B) \to B)$;

ж) $\vdash (A \to (B \to C)) \to (A \wedge B \to C)$;

з) $\vdash (A \to B) \to ((A \to (B \to C)) \to (A \to C))$.

2 Запишите следующие рассуждения в виде последовательности формул логики высказываний. Если рассуждение логично, то докажите это методом резолюций; если нелогично, то постройте интерпретацию, при которой посылки истинны, а заключение ложно:

а) если конгресс отказывается принять новые законы, то забастовка не будет окончена, кроме случая, когда она длится более месяца и президент фирмы уйдет в отставку. Допустим, что конгресс отказывается действовать и забастовка заканчивается. Следовательно, забастовка длилась более месяца;

б) если подозреваемый совершил эту кражу, то она была тщательно подготовлена или он имел соучастника. Если бы кража была тщательно подготовлена, то, если бы он имел соучастника, был бы украден дорогой компьютер. Компьютер остался на месте. Следовательно, подозреваемый невиновен.

3 Доказать с помощью метода резолюций, что формула G есть логическое следствие формул $F_1, ..., F_n$:

а) $F_1 = X \lor Y$, $F_2 = X \to Z$, $G = (Y \to Z) \to Z$;

б) $F_1 = X$, $F_2 = X \land Y \to Z$, $G = Y \to Z$;

в) $F_1 = X \to Y \lor Z$, $F_2 = Z \to W$, $F_3 = \neg W$, $G = X \to Y$;

г) $F_1 = X \lor Y \lor \neg Z$, $F_2 = X \to X1$, $F_3 = Y \to Y1$, $F_4 = Z$, $G = X1 \lor Y1$;

д) $F_1 = X \land Y \to \neg X \land Z$, $F_2 = \neg(X \land \neg Y) \lor Z$, $G = X \to Z$;

е) $F_1 = X \to [\neg Y \land (\neg Y \to Z)]$, $F_2 = (X \to \neg Y) \land \neg(\neg X \& \neg W)$, $G = W \lor Z$.

31.3 Домашнее задание

1 Методом резолюций доказать теоремы:

а) $\vdash (A \to B) \land (A \to \neg B) \to \neg A$;

б) $\vdash (A \to B) \lor (B \to A)$;

в) $\vdash (A \to B) \to ((B \to C) \to ((C \to D) \to (A \to D)))$;

г) $\vdash (A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$;

д) $\vdash (A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$;

е) $\vdash (A \to (B \to C)) \to (B \to (A \to C))$;

ж) $\vdash (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$.

2 Проверить аргумент методом резолюций. Получить все следствия из данных посылок:

а) если объект не обладает свойством X или обладает свойством У, то он обладает свойством Z. Если объект обладает свойством X, то он обладает свойством У. Следовательно, объект обладает свойством Z;

б) если Петр поедет в Сан-Франциско, то Иван поедет на Канары. Петр поедет в Чикаго или в Сан-Франциско. Если Петр поедет в Чикаго, то Анна останется в Москве. Но Анна не останется в Москве. Следовательно, Иван поедет на Канары;

в) если мы не будем продолжать политику сохранения цен, то мы потеряем голоса фермеров. Если же мы будем продолжать эту политику и не прибегнем к контролю над производством, то продолжится перепроизводство. Без голосов фермеров нас не переизберут. Следовательно, если нас переизберут и мы не прибегнем к контролю над производством, то продолжится перепроизводство;

г) если завтра будет хорошая погода, то я буду кататься на коньках или пойду на лыжах. Если я пойду на лыжах, то лучше поехать за город, а если буду кататься на конъках, то останусь в городе. Мне не хочется завтра в выходной день оставаться в городе. Следовательно, если завтра будет хорошая погода, то я пойду на лыжах.

Список литературы

1 **Новиков, Ф. А.** Дискретная математика для программистов / Ф. А. Новиков. – Санкт-Петербург: Питер, 2000. – 304 с.

2 **Белоусов, А. И.** Дискретная математика: учебник для вузов / А. И. Белоусов, С. Б. Ткачев; под ред. В. С. Зарубина, А. П. Крищенко. – 5-е изд. – Москва: МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2015. – 743 с.

3 **Васильев, А. В.** Высшая алгебра: конспект лекций / А. В. Васильев, Д. В. Лыткина, В. Д. Мазуров. – Новосибирск: Ин-т математики, 2020. – 252 с.

4 **Шульц, М. М.** Алгебраические системы. Задачи и решения: учебно-методическое пособие / М. М. Шульц. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2012. – 101 с.

5 **Авдеюк, О. А.** Лекции и практикум по основам дискретной математики и математической логике / О. А. Авдеюк, Л. В. Дружинина, И. В. Приходькова. – Волгоград: ВолгГГУ, 2019. – 316 с.

6 **Шевелев, Ю. П.** Дискретная математика: учебное пособие / Ю. П. Шевелев. – Санкт-Петербург: Лань, 2016. – 592 с.

7 **Алексеев, В. Е.** Сборник задач по дискретной математике: учебно-методическое пособие / В. Е. Алексеев, Л. Г. Кисилева, Т. Г. Смирнова. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2012. – 80 с.

8 **Москинова, Г. И.** Дискретная математика. Математика для менеджера в примерах и упражнениях: учебное пособие / Г. И. Москинова. – Москва: Логос, 2003. – 240 с.

9 **Яковлев, В. П.** Практикум по дискретной математике: учебное пособие / В. П. Яковлев, Н. Л. Леонова. – Санкт-Петербург: ВШТЭ СПбГУПТД, 2019. – Ч. 1. – 50 с.

10 **Феофанова, В. А.** Дискретная математика: учебно-методическое пособие / В. А. Феофанова, В. И. Воротников. – Нижний Тагил: НТИ (филиал) УрФУ, 2013. – 256 с.

11 **Блатов, И. А.** Математическая логика и теория алгоритмов: учебное пособие / И. А. Блатов, О. В. Старожилова. – Самара: ПГУТИ, 2017. – 214 с.

12 **Замятин, А. П.** Математическая логика и теория алгоритмов: учебное пособие / А. П. Замятин. – Екатеринбург: УрГУ, 2008. – 273 с.