

МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Физика»

# ФИЗИКА

*Методические рекомендации к лабораторным работам  
для студентов всех специальностей и направлений подготовки  
очной и заочной форм обучения*

Часть 3

МЕХАНИКА



Могилев 2021

УДК 531  
ББК 22.31  
Ф55

Рекомендовано к изданию  
учебно-методическим отделом  
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Физика» «26» января 2021 г., протокол № 6

Составители: д-р физ.-мат. наук, доц. А. В. Хомченко;  
ст. преподаватель Н. С. Манкевич;  
канд. физ.-мат. наук, доц. П. Я. Чудаковский

Рецензент канд. техн. наук, доц. Б. Б. Скарыно

В методических рекомендациях приводится описание лабораторных установок, рассматривается их принцип действия, излагается порядок выполнения работ по разделу «Механика» курса общей физики.

Учебно-методическое издание

ФИЗИКА

Часть 3

Ответственный за выпуск	А. В. Хомченко
Корректор	И. В. Голубцова
Компьютерная верстка	Н. П. Полевничая

Подписано в печать . Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.  
Печать трафаретная. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 36 экз. Заказ №

Издатель и полиграфическое исполнение:  
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования  
«Белорусско-Российский университет».

Свидетельство о государственной регистрации издателя,  
изготовителя, распространителя печатных изданий  
№ 1/156 от 07.03.2019.

Пр-т Мира, 43, 212022, г. Могилев.

© Белорусско-Российский  
университет, 2021

## Содержание

Меры безопасности при проведении лабораторных работ на кафедре «Физика».....	4
1 Лабораторная работа № 3. Исследование кинематических законов поступательного движения на машине Атвуда.....	5
2 Лабораторная работа № 6. Изучение основного закона динамики вращательного движения на приборе Обербека.....	10
3 Лабораторная работа № 7. Определение моментов инерции тел с помощью маятника Максвелла.....	17
4 Лабораторная работа № 8. Определение моментов инерции твердых тел методом крутильных колебаний.....	23
5 Лабораторная работа № 10. Изучение упругих свойств материалов.....	30
6 Лабораторная работа № 11. Изучение особенностей упругого удара.....	43
Список литературы.....	48

## **Меры безопасности при проведении лабораторных работ на кафедре «Физика»**

1 К работе в учебной лаборатории допускаются студенты, прошедшие инструктаж по охране труда с соответствующей записью в протоколе проверки знаний по мерам безопасности.

2 В учебную лабораторию запрещено входить в верхней одежде.

3 Для работы приборов используется напряжение 220 В, представляющее опасность для жизни, что требует повышенного внимания и обязательного выполнения правил и норм охраны труда.

4 Перед началом проведения лабораторной работы студенту необходимо внимательно осмотреть приборы и оборудование на рабочем столе: нет ли механических повреждений, оголенных или оборванных проводов; проверить наличие заземления на приборах. О неисправностях сообщить преподавателю или лаборанту.

5 При проведении работы следует надёжно закреплять грузы на лабораторной установке, находиться вне зоны действия движущихся предметов.

6 При работе с электроплитками и колбами нужно остерегаться ожогов.

7 Приступить к выполнению лабораторной работы с разрешения преподавателя.

8 При проведении работы следует быть внимательным, не отходить от рабочего места, при нарушении хода работы остановить выполнение и сообщить о неполадках преподавателю или лаборанту.

9 В случае возгорания электрических проводов или приборов необходимо их немедленно обесточить и сообщить преподавателю или лаборанту.

10 В случае поражения работающего электрическим током нужно:

- немедленно отключить оборудование;
- освободить пострадавшего от токоведущих частей;
- уложить пострадавшего;
- проверить у пострадавшего наличие дыхания;
- убедиться в наличии пульса;
- при необходимости приступить к искусственному дыханию, вызвать

врача скорой помощи по тел. 103.

11 По окончании лабораторной работы необходимо отключить электрические приборы, навести порядок на своём рабочем месте.

# 1 Лабораторная работа № 3. Изучение законов поступательного движения на машине Атвуда

**Цель работы:** экспериментально проверить законов кинематики и динамики поступательного движения с помощью машины Атвуда.

## Общие сведения

Движение тела, при котором прямая, соединяющая любые две его точки, перемещаясь вместе с телом, остаётся параллельной своему первоначальному направлению, называется поступательным. При поступательном движении все точки тела движутся одинаково, поэтому для описания движения тела достаточно изучить движение только одной его точки.

Тело, размерами и формой которого можно пренебречь в данной задаче, называется материальной точкой. Длиной пути называют расстояние  $S$ , пройденное точкой за рассматриваемый промежуток времени и измеряемое вдоль траектории в направлении движения точки. Для характеристики движения материальной точки вводят векторную величину – скорость  $\vec{v}$ , определяющую как быстроту движения, так и его направление в данный момент времени. Вектор скорости направлен по касательной к траектории точки в сторону её движения. При прямолинейном движении направление вектора скорости  $\vec{v}$  не изменяется, модуль вектора перемещения равен длине пути. Если модуль скорости точки остается во время движения неизменным ( $v = \text{const}$ ), то такое движение называется равномерным. При равномерном движении за любые равные промежутки времени материальная точка проходит равные пути.

Если же за произвольные равные промежутки времени точка проходит разные пути, то численное значение ее скорости с течением времени изменяется. Такое движение называется неравномерным. Для характеристики изменения скорости таких движений вводится понятие ускорения:  $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ . В случае неравномерного прямолинейного движения ускорение характеризует только быстроту изменения численного значения скорости движения:  $a = \frac{dv}{dt}$ .

Движение точки, при котором ускорение остается постоянным  $a = \text{const}$ , называется равнопеременным. Тогда за равные промежутки времени значения изменения модуля скорости одинаковы. Если  $a > 0$ , то движение называется равноускоренным и вектор  $\vec{a}$  совпадает по направлению с вектором скорости  $\vec{v}$ , если  $a < 0$ , то движение – равнозамедленное и вектор  $\vec{a}$  противоположен по направлению  $\vec{v}$ .

Рассмотрим равнопеременное прямолинейное поступательное движение точки вдоль оси ОХ. Так как  $a_x = \frac{dv_x}{dt} = \text{const}$ , то скорость

$$v_x = v_x(0) + a_x t. \quad (1.1)$$

Модуль скорости точки равен первой производной по времени от пути этой точки:

$$v_x = \frac{dS}{dt}.$$

Зависимость пути  $S$  от времени определяется с помощью интегрирования:

$$S(t) = S(0) + \int_0^t v_x(t) dt = S(0) + v_x(0)t + \frac{a_x t^2}{2}, \quad (1.2)$$

где  $S(0)$  и  $v_x(0)$  – значения пути и скорости в момент начала отсчета времени.

Таким образом, при равнопеременном движении путь является квадратичной функцией времени.

В инерциальных системах отсчета изменение скорости тела происходит под действием других тел, действующих на данное тело. Второй закон Ньютона для поступательного движения устанавливает связь между действующими на тело силами и ускорением: *произведение массы тела на его ускорение равно силе, действующей на тело.*

Под силой подразумевается результирующая сила, действующая на тело и равная векторной сумме всех действующих сил.

### ***Описание лабораторной установки***

Основные законы кинематики и динамики могут быть проверены опытным путем на машине Атвуда (рисунок 1.1). Машина Атвуда состоит из вертикальной штанги 1 со шкалой, сверху которой установлен легкий блок 2. Через блок перекинута тонкая капроновая нить с прикрепленными грузами 7 одинаковых масс  $M$ . На штанге крепится платформа с кольцом 4, предназначенная для снятия перегрузка массой  $m$ , под действием которого грузы приходят в движение. Секундомер отсчитывает время прохождения груза между световыми барьерами 5 и 6.

Груз с перегрузком будут двигаться равноускорено от начала движения до снятия перегрузка кольцевой платформы 4. Если в начальный момент времени  $S(0) = 0$ ,  $v_x(0) = 0$ , то из формул (1.1) и (1.2) получим

$$v = at; \quad (1.3)$$

$$S = \frac{at^2}{2}, \quad (1.4)$$

где  $S$  – расстояние, проходимое грузом с перегрузком за время  $t$ ;  
 $v$  – скорость груза на момент снятия перегрузка.

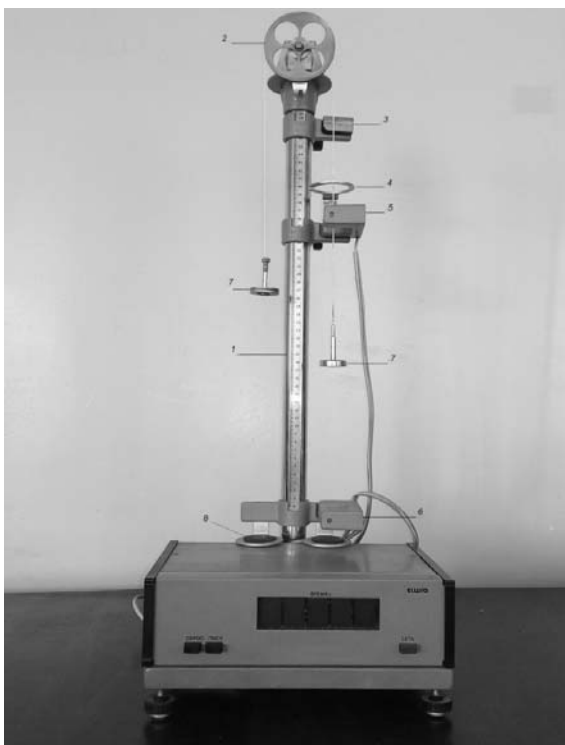


Рисунок 1.1 – Машина Атвуда

Решая совместно уравнения (1.3) и (1.4), выразим время прохождения грузом расстояния  $S$ :

$$t = \frac{2S}{v}. \quad (1.5)$$

Начиная с того момента, когда перегрузок снят, грузы движутся равномерно ( $a = 0$ ) с той скоростью, которой они обладали в момент снятия перегрузка:

$$v = \frac{h}{\Delta t}, \quad (1.6)$$

где  $h$  – путь, проходимый грузом между световыми барьерами за время  $\Delta t$ .

При изменении расстояния между висящим грузом и кольцевой платформой увеличивается скорость равномерного движения, но при одном и том же перегрузке ускорение системы должно оставаться постоянным, поэтому из (1.3)

$$a = \frac{v_1}{t_1} = \frac{v_2}{t_2} = \dots = \frac{v_n}{t_n} = \text{const}. \quad (1.7)$$

Так как ускорение системы одинаково при изменении расстояния от груза до платформы, то из формулы (1.4), выражая ускорение, получим

$$a = \frac{2S_1}{t_1^2} = \frac{2S_2}{t_2^2} = \dots = \frac{2S_n}{t_n^2} = \text{const}. \quad (1.8)$$

Для проверки второго закона Ньютона необходимо, чтобы движущая масса оставалась постоянной, а величина действующей силы изменялась. Это можно осуществить, перекладывая перегрузки  $m_1$  и  $m_2$  с одного груза на другой. Сила, приводящая систему в движение, равна разности весов правого и левого тел. Если два перегрузка находятся на правом грузе, то

$$F_1 = (m_1 + m_2)g .$$

Если меньший перегрузок массой  $m_2$  переложить на левый груз, то

$$F_2 = (m_1 - m_2)g .$$

На основании второго закона Ньютона эти силы будут выражаться следующими соотношениями:

$$F_1 = (2M + m_1 + m_2)a_1;$$

$$F_2 = (2M + m_1 + m_2)a_2.$$

Используя зависимость (1.8), найдем отношение  $F_1$  к  $F_2$ :

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{a_1}{a_2} = \frac{m_1 + m_2}{m_1 - m_2} = \frac{S_1 \cdot t_2^2}{S_2 \cdot t_1^2}. \quad (1.9)$$

### ***Программа работы***

*Проверка законов кинематики равноускоренного движения.*

1 Установить систему в исходное положение: левый груз должен находиться на сплошной платформе 8, тогда правый груз будет находиться напротив начала отсчета по шкале 3. Установить первый световой барьер 5 на расстоянии  $h = 37$  см от светового барьера 6. Установить на правый груз перегрузок. Измерить расстояние  $S$  от начала отсчета 3 до первого светового барьера 5.

2 Нажать кнопку «ПУСК», по секундомеру записать время  $\Delta t$  прохождения грузом расстояния  $h$ . После падения груза кнопка «ПУСК» остается в полутопленном состоянии. После приведения системы в исходное состояние кнопка «ПУСК» отжимается. При этом срабатывает электромагнит, который фиксирует систему в неподвижном состоянии. Опыт провести 5 раз. Определить среднее время движения  $\langle \Delta t \rangle$ .

3 Повторить измерения ещё 2 раза для различных расстояний  $h$  по указанию преподавателя. Результаты измерений и вычислений занести в таблицу 1.1.

4 Считая, что груз между световыми барьерами движется равномерно, рассчитать для каждого расстояния  $h$  скорость движения груза  $v$  по формуле (1.6).

5 По формуле (1.5) определить время  $t$  движения груза от верхней точки до первого светового барьера для каждого расстояния  $S$ .

6 По формуле (1.7) рассчитать ускорение  $a$  для каждого расстояния  $S$ . Убе-



даться в справедливости формулы (1.8).

Таблица 1.1 – Проверка законов кинематики равноускоренного движения

Номер измерения	$h$ , м	$S$ , м	$\Delta t$ , с	$\langle \Delta t \rangle$ , с	$v$ , м/с	$t$ , с	$a$ , м/с <sup>2</sup>
1							
2							
3							

*Проверка второго закона Ньютона.*

1 Установить световой барьер 5 на расстоянии  $h$  по указанию преподавателя от светового барьера 6. Привести систему в исходное состояние так, чтобы правый груз находился на уровне верхнего светового барьера 5. Установить на правый груз оба перегрузка  $m_1$  и  $m_2$ .

2 Измерить время  $\Delta t$  прохождения грузом расстояния  $h$  не менее пяти раз. Рассчитать среднее время движения  $\langle \Delta t \rangle$ .

3 Переложить меньший перегрузок на левый груз и повторить п. 2.

4 Проверить соотношение (1.9). Результаты измерений и вычислений занести в таблицу 1.2.

*Примечание* – Если положение световых барьеров не меняется при выполнении пп. 2 и 3, тогда в формуле (1.9)  $S_1 = S_2 = h$ .

Таблица 1.2 – Проверка второго закона Ньютона

Номер измерения	$m_1$ , кг	$m_2$ , кг	$h$ , м	$\Delta t$ , с	$\langle \Delta t \rangle$ , с	$\frac{m_1 + m_2}{m_1 - m_2}$	$\frac{S_1 \cdot t_2^2}{S_2 \cdot t_1^2}$
1							
2							

### Контрольные вопросы

- 1 Какое движение называется поступательным, равномерным, равнопеременным?
- 2 Что такое скорость, что она характеризует?
- 3 Что такое ускорение, что оно характеризует?
- 4 Выведите формулу перемещения точки при равнопеременном прямолинейном поступательном движении.
- 5 В каких случаях модуль перемещения точки равен пути, пройденному точкой за тот же промежуток времени?
- 6 Сформулируйте второй закон Ньютона.
- 7 Выведите формулу (1.9).

## 2 Лабораторная работа № 6. Изучение основного закона динамики вращательного движения на приборе Обербека

**Цель работы:** экспериментально проверить основное уравнение динамики вращательного движения с помощью маятника Обербека.

### Общие сведения

*Вращательное движение* – это движение, при котором все точки твердого тела описывают окружности, центр которых лежит на одной прямой, являющейся осью вращения.

*Моментом силы*  $F$  относительно неподвижной точки  $O$  называется векторное произведение радиуса-вектора  $\vec{r}$ , проведенного из точки  $O$  в точку  $N$  приложения силы  $\vec{F}$ , на вектор силы  $\vec{F}$  (рисунок 2.1):

$$\vec{M} = [\vec{r} \cdot \vec{F}]$$

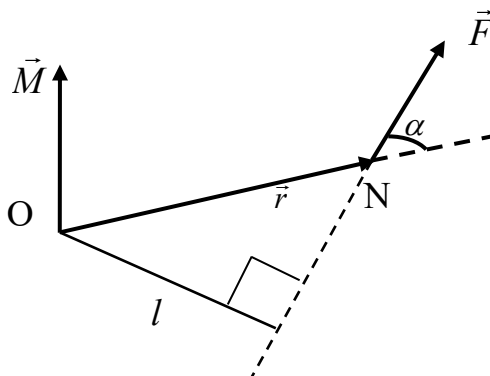


Рисунок 2.1 – Определение момента силы

Вектор  $\vec{M}$  направлен перпендикулярно плоскости векторов  $\vec{r}$  и  $\vec{F}$  по правилу правого винта. Модуль момента силы

$$M = F \cdot r \cdot \sin \alpha = F \cdot l, \quad (2.1)$$

где  $\alpha$  – угол между  $\vec{r}$  и  $\vec{F}$ ;

$l$  – плечо действия силы (длина перпендикуляра, опущенного из точки  $O$  на линию действия силы  $\vec{F}$ ),  $l = r \cdot \sin \alpha$ .

*Моментом инерции материальной точки* относительно данной оси называется произведение ее массы на квадрат расстояния до этой оси:

$$I = m \cdot r^2. \quad (2.2)$$

*Моментом инерции материального тела* относительно данной оси называется сумма произведений элементарных масс на квадрат их расстояний от этой оси:

$$I = \sum m_i \cdot r_i^2. \quad (2.3)$$

Суммирование производится по всем элементарным массам  $m_i$ , на которые мысленно разбито тело.

*Момент инерции твердого тела*, имеющего плотность  $\rho$ , определяется путем интегрирования:

$$I = \rho \int r^2 \cdot dV, \quad (2.4)$$

где  $dV$  – элемент объема.

Интегрирование должно быть распространено на весь объем тела  $V$ .

Как видно из формул (2.3) и (2.4), момент инерции тела относительно данной оси, как и масса тела, не зависит от характера движения, а зависит от размеров, формы и плотности тела, т. е. от распределения массы тела относительно оси вращения. Момент инерции тела является мерой инертности тела во вращательном движении подобно тому, как масса тела является мерой его инертности при поступательном движении. Момент инерции – величина аддитивная, т. е. момент инерции системы равен сумме моментов инерции всех тел, входящих в состав этой системы. В перечисленных свойствах момента инерции убеждаемся, выполнив второе упражнение данной работы.

При неравномерном вращении тела вокруг неподвижной оси его угловая скорость  $\omega$  изменяется. Вектор  $\vec{\epsilon}$ , характеризующий быстроту изменения угловой скорости тела, называется *угловым ускорением*:

$$\vec{\epsilon} = d\vec{\omega}/dt.$$

Если тело вращается ускоренно, то  $d\omega/dt > 0$  и вектор  $\vec{\epsilon}$  направлен по оси вращения так же, как и вектор  $\vec{\omega}$ . При замедленном вращении  $d\omega/dt < 0$  и вектор  $\vec{\epsilon}$  направлен в сторону, противоположную вектору  $\vec{\omega}$ .

Пусть на тело с осью вращения  $O_1O_2$  (рисунок 2.2) действует сила  $\vec{F}$ , приложенная в точке В тела. За время  $dt$  под действием  $\vec{F}$  тело повернётся на угол  $d\varphi$  и точка приложения силы пройдёт путь  $ds$ . Касательная составляющая силы выполнит элементарную работу  $dA = F_\tau \cdot ds$ . Длина дуги  $ds = l \cdot d\varphi$ .

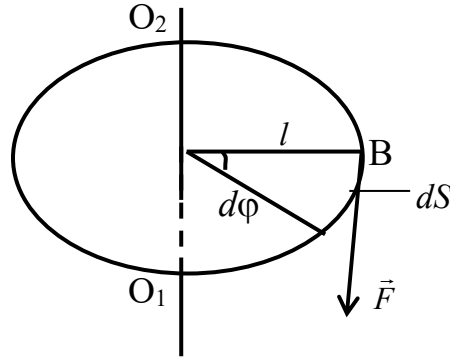


Рисунок 2.2 – Для вывода основного уравнения динамики вращательного движения

Тогда элементарная работа при вращательном движении равна произведению момента силы на угловое перемещение  $d\varphi$ :

$$dA = F_\tau \cdot l \cdot d\varphi = M \cdot d\varphi. \quad (2.5)$$

Работа пойдёт на изменение кинетической энергии вращающегося тела:

$$W_k = \frac{I \cdot \omega^2}{2}.$$

Значит,

$$d\left(\frac{I \cdot \omega^2}{2}\right) = dA \quad \text{или} \quad I \cdot \omega \cdot d\omega = M \cdot d\varphi.$$

Разделим правую и левую части этого уравнения на время  $dt$ :

$$\frac{I \cdot \omega \cdot d\omega}{dt} = \frac{M \cdot d\varphi}{dt}.$$

Учитывая, что  $\frac{d\omega}{dt} = \varepsilon$ ;  $\frac{d\varphi}{dt} = \omega$ , и сократив на  $\omega$ , получим

$$I \cdot \varepsilon = M \Rightarrow \varepsilon = \frac{M}{I}. \quad (2.6)$$

Таким образом, угловое ускорение  $\varepsilon$  прямо пропорционально моменту сил, приложенных к телу, и обратно пропорционально моменту инерции тела.

Соотношение (2.6) называется *основным уравнением динамики вращательного движения* в интегральной форме или *вторым законом Ньютона для динамики вращательного движения*.

Основное уравнение динамики вращательного движения относительно неподвижной оси вращения в виде  $\vec{M} = I \cdot \vec{\epsilon}$  аналогично уравнению  $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$  для поступательного движения. Роль массы играет момент инерции, роль линейного ускорения – угловое ускорение и роль результирующей силы – суммарный момент внешних сил.

### **Описание лабораторной установки**

Общий вид маятника Обербека изображен на рисунке 2.3. Он представляет собой крестовину, состоящую из четырех стержней с делениями, прикрепленных к втулке с осью.

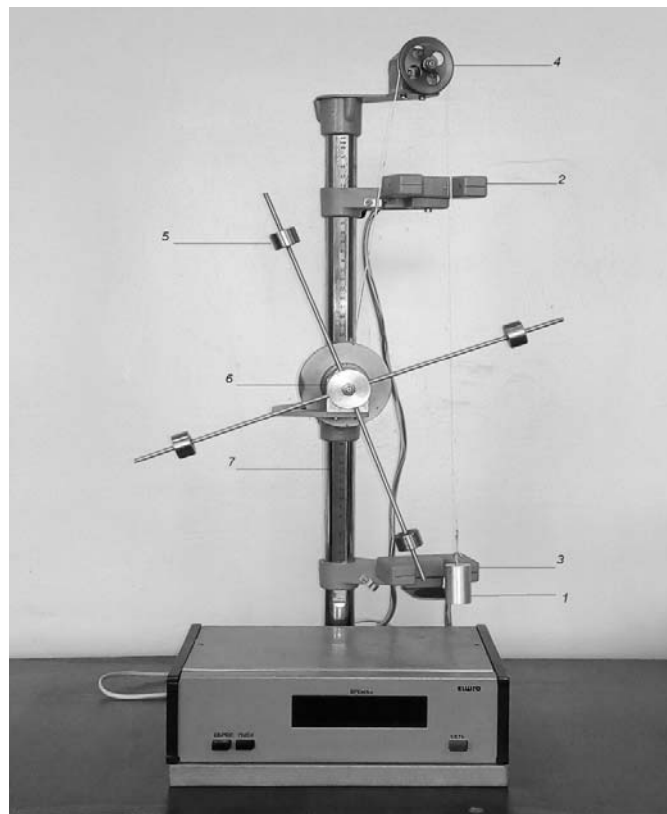


Рисунок 2.3 – Маятник Обербека

Два шкива с различными радиусами  $r_1$  и  $r_2$  посажены на ось маятника. На шкив 4 радиусом  $r_1$  наматывается нить, к свободному концу которой прикрепляется груз массой  $m$ . Положение груза  $m$  отмечается по шкале 7. Расстояние  $h$  от верхнего светового барьера 2 до нижнего светового барьера 3 определяется по шкале 7. Под действием груза нить разматывается и приводит маятник в равноускоренное движение. К шкиву 6 радиусом  $r_2$  прикреплены симметрично четыре стержня, на которые закрепляются одинаковые цилиндрические грузы массой  $m_1$  (по одному на каждый стержень), которые можно перемещать вдоль

стержней и закреплять на определенном расстоянии от оси. Грузы закрепляются симметрично, чтобы центр масс системы совпадал с осью вращения.

Измеряя время  $t$ , за которое груз проходит расстояние  $h$  при несвободном падении, можно определить ускорение  $a$  падения груза:

$$a = 2h/t^2. \quad (2.7)$$

Если шнур при падении груза сматывается со шкива без скольжения, то линейное ускорение точек, лежащих на поверхности шкива радиусом  $r_1$ , равно ускорению падающего груза. Тогда угловое ускорение вращения маховика

$$\varepsilon = \frac{a}{r_1} = \frac{2h}{t^2 r_1}. \quad (2.8)$$

При движении груза массой  $m$  на него действуют две силы: сила тяжести этого груза  $F_m = m \cdot g$  и сила натяжения нити  $N$ . Под действием этих сил груз падает с ускорением  $a$ . В соответствии со вторым законом Ньютона для поступательного движения можно записать уравнение движения

$$mg - N = ma.$$

Тогда

$$N = m(g - a).$$

Под действием силы натяжения  $N$  крестовина совершает ускоренное вращательное движение. Момент силы, согласно (2.1),

$$M = Nr_1 = m(g - a)r_1 = mr_1 \left( g - \frac{2h}{t^2} \right). \quad (2.9)$$

Из основного закона динамики вращательного движения

$$I = \frac{\dot{M}}{\varepsilon} = m \left( g - \frac{2h}{t^2} \right) r_1 / \varepsilon. \quad (2.10)$$

Тогда, решая совместно (2.8) и (2.10), получим формулу для расчета момента инерции системы тел, приведенных во вращение грузом:

$$I = \frac{mr_1^2(gt^2 - 2h)}{2h}. \quad (2.11)$$

Так как  $M = I \cdot \varepsilon$ , то, изменяя момент  $M$ , действующий на вращающуюся

часть прибора при постоянном моменте инерции  $I$  маятника, можно проверить основной закон вращательного движения:

$$\frac{M_1}{\varepsilon_1} = \frac{M_2}{\varepsilon_2} = \frac{M_3}{\varepsilon_3} = I = \text{const.} \quad (2.12)$$

### **Программа работы**

*Определение момента инерции маятника Обербека без грузов на стержнях.*

1 Включить установку в сеть. Нажать кнопки «СЕТЬ» и «ПУСК». На нить прикрепить груз массой  $m$ . Вращая крестовину против часовой стрелки, поднять груз так, чтобы низ груза оказался на уровне верхнего светового барьера. Отжать кнопку «ПУСК», при этом срабатывает электромагнит, который фиксирует систему. Обнулить секундомер, нажав кнопку «СБРОС».

2 Нажать кнопку «ПУСК». Секундомер отсчитывает время  $t$  прохождения грузом расстояния  $h$  между световыми барьерами. Опыт повторить 3 раза.

3 Определить по формуле (2.11) момент инерции  $I_0$  маятника Обербека без грузов на стержнях. Радиус шкива  $r_1 = 42$  мм.

4 Изменяя массу груза  $m$ , повторить пп. 2 и 3 ещё 2 раза (высота  $h$  остается постоянной). Найти среднее значение момента инерции маятника Обербека без грузов на стержнях  $\langle I_0 \rangle$ .

5 По формуле (2.8) вычислить угловое ускорение  $\varepsilon$  для каждой из масс  $m$ .

6 По формуле (2.9) найти моменты действующих сил  $M$ . Результаты измерений и расчетов внести в таблицу 2.1.

7 Для проверки закона динамики вращательного движения убедиться в справедливости формулы (2.12), используя экспериментальные и расчетные данные.

Таблица 2.1 – Определение момента инерции крестовины без грузов, углового ускорения и момента действующих сил

$m$ , кг	$r_1$ , м	$h$ , м	$t$ , с	$\langle t \rangle$ , с	$I_0$ , кг·м <sup>2</sup>	$\langle I_0 \rangle$ , кг·м <sup>2</sup>	$\varepsilon$ , рад/с <sup>2</sup>	$M$ , Н·м

*Определение момента инерции маятника Обербека.*

1 Насадить четыре одинаковых груза на стержни маятника на равных расстояниях от оси вращения. Измерить  $l$  – расстояние от центра тяжести груза  $m_1$  до шкива радиусом  $r_2$ . На шнур прикрепить груз средней массы  $m$ .

2 Поднять груз на уровень первого светового барьера, вращая крестовину.

Измерить время  $t$  прохождения грузом расстояния  $h$  между световыми барьерами. Опыт повторить 3 раза.

3 Определить момент инерции  $I$  маятника Обербека с грузами на стержнях по формуле (2.11).

4 Теоретический момент инерции маятника  $I_{теор}$  может быть вычислен как сумма моментов инерции крестовины без грузов  $I_0$  и грузов:

$$I_{теор} = I_0 + 4m_1R^2,$$

где  $m_1$  – масса одного груза на стержне,  $m_1 = 56$  г;

$$R = l + r_2;$$

$l$  – расстояние от центра тяжести груза  $m_1$  до шкива;

$r_2$  – радиус малого шкива,  $r_2 = 19$  мм.

Вычислить  $I_{теор}$  и сравнить со значением момента инерции  $I$ , найденным в п. 3.

5 Передвинуть грузы  $m_1$  на 5...7 см к центру, повторить измерения и вычисления по пп. 2–4 (груз на шнуре не меняется). Данные занести в таблицу 2.2.

Таблица 2.2 – Определение момента инерции крестовины с грузами

$m$ , кг	$r_1$ , м	$h$ , м	$t$ , с	$\langle t \rangle$ , с	$I$ , кг·м <sup>2</sup>	$m_1$ , кг	$l$ , м	$r_2$ , м	$R$ , м	$I_{теор}$ , кг·м <sup>2</sup>

### Контрольные вопросы

1 Какое движение называют вращательным?

2 Дайте определение момента инерции материальной точки и твердого тела. От чего зависит момент инерции твердого тела?

3 Дайте определение момента силы. Как определяется направление вектора момента силы?

4 Выведите и сформулируйте основной закон динамики вращательного движения.

5 Под действием каких сил маятник Обербека совершает вращательное движение?

6 Выведите формулы (2.9) и (2.11).



### 3 Лабораторная работа № 7. Определение моментов инерции тел с помощью маятника Максвелла

**Цель работы:** изучить особенности поступательно-вращательного движения; экспериментально определить момент инерции маятника Максвелла.

#### Общие сведения

Общая теория динамики вращательного движения приводится в общих сведениях к лабораторной работе № 6. Описать движение твердого тела можно с помощью двух независимых векторных уравнений. Первое уравнение – это уравнение движения центра масс данного тела

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}, \quad (3.1)$$

где в правой части записана производная от импульса центра масс по времени, а в левой – равнодействующая всех внешних сил, приложенных к телу.

Второе уравнение – это уравнение моментов внешних сил

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}, \quad (3.2)$$

где справа записана производная от момента импульса данного тела относительно мгновенной оси вращения, а слева – результирующий момент внешних сил относительно той же оси.

Уравнение движения (3.1) представляет собой математическое выражение второго закона Ньютона, последовательно примененное к системе материальных точек. Уравнение моментов (3.2) можно брать относительно произвольной неподвижной оси или относительно оси, проходящей через центр масс твердого тела. В уравнения (3.1) и (3.2) входят только *внешние* силы. Внутренние силы не влияют на движение центра масс и не могут изменить момент импульса тела.

Одним из простейших можно считать плоскопараллельное движение твердого тела, когда каждая частица тела движется в плоскости, параллельной некоторой неподвижной плоскости. Примером такого движения может служить движение маятника Максвелла.

Маятник Максвелла состоит из тонкого металлического стержня 2 с симметрично укрепленным на нем диском 1 (рисунок 3.1).

К концам стержня 2 прикреплена крепкая нить, пропущенная через два отверстия в планке 5, которая укреплена на массивном штативе. На середине планки имеется винт, которым нить закрепляется в нужном положении после уравнивания длин отрезков нитей 4. Нити тщательно, виток к витку, наматываются на стержень (от его концов к диску). После освобождения маятник начинает движение из верхнего положения под действием силы тяжести: поступа-

тельное – вниз и вращательное – вокруг своей оси симметрии. Вращение, продолжаясь по инерции в низшей точке, когда нити уже размотаны, приводит вновь к наматыванию нитей на стержень, а следовательно, и к подъему маятника. Затем движение маятника вверх замедляется, он останавливается, снова начинается движение вниз и т. д. Такой колебательный характер движения вверх-вниз напоминает движение маятника, и поэтому устройство называется маятником Максвелла.

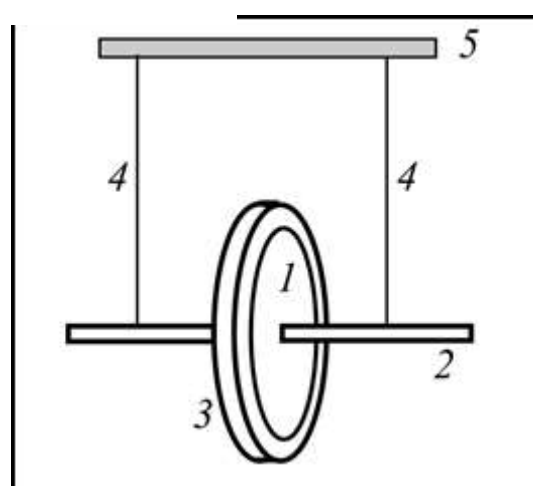


Рисунок 3.1 – Маятник Максвелла

Цикл движения маятника Максвелла может быть подразделен на три этапа: спуск, удар, поднятие вверх. В соответствии с этим силы, действующие на маятник, должны быть подразделены на силы длительного действия (при спуске и поднятии) и силы кратковременного действия (удар). В первом случае эти силы не изменяются во времени, во втором – они резко нарастают и убывают. За время спуска скорость возрастает линейно. Во время удара происходит смена знака скорости. За время подъема скорость маятника изменяется также линейно. В процессе падения и подъема маятника его ускорение имеет постоянную величину. Удар приводит к кратковременной смене знака ускорения, связанной со значительным увеличением его модуля.

Устойчивое движение маятника (без раскачивания) возможно только, если нити находятся в вертикальной плоскости. При отклонении нитей у силы натяжения возникает горизонтальная составляющая, возвращающая маятник к положению, когда нити вертикальны, т. е. возникают колебания, период которых зависит от длины нитей. Это явление наблюдается во время подъема маятника, когда нити выходят из вертикальной плоскости. Перед тем как отпустить маятник, следует убедиться, что маятник находится в правильном положении. При этом обе нити должны лежать в одной вертикальной плоскости. В этом случае движение маятника вниз происходит без колебаний.

Если пренебречь небольшим горизонтальным смещением, то движение маятника Максвелла можно рассматривать как движение, состоящее из поступательного движения (вниз и вверх) и вращения, происходящего под действием

силы тяжести и силы натяжения нитей. Тогда, без учета сил трения о воздух, уравнения движения маятника Максвелла, согласно (3.1), (3.2), имеют вид:

$$ma = mg - 2T ; \quad (3.3)$$

$$I\varepsilon = 2rT ; \quad (3.4)$$

$$a = \varepsilon r , \quad (3.5)$$

где  $m$  – масса маятника;

$I$  – момент инерции диска маятника относительно его оси;

$r$  – радиус стержня маятника;

$T$  – сила натяжения одной нити;

$g$  – ускорение силы тяжести;

$a$  – ускорение поступательного движения центра масс маятника;

$\varepsilon$  – угловое ускорение маятника.

Из уравнений (3.3)–(3.5) для ускорения поступательного движения маятника находим

$$a = \frac{g}{\frac{I}{mr^2} + 1} . \quad (3.6)$$

С другой стороны, для равноускоренного движения

$$a = \frac{2h_1}{t_1^2} , \quad (3.7)$$

где  $t_1$  – время падения маятника;

$h_1$  – высота, на которую опускается центр масс маятника.

Из выражений (3.6) и (3.7) получаем формулу для экспериментального определения момента инерции маятника

$$I = mr^2 \left( \frac{gt_1^2}{2h_1} - 1 \right) . \quad (3.8)$$

Маятник Максвелла представляет собой диск радиусом  $R$  и массой  $m_d$ , насаженный на стержень цилиндрической формы радиусом  $r$  и массой  $m_0$ . Момент инерции тела такой формы

$$I = m_0 r^2 + m_d R^2 . \quad (3.9)$$

Если на диск маятника прикрепить кольцо массой  $m_k$  с внешним и внут-

ренним радиусами  $R_1$  и  $R_2$ , то для результирующего момента инерции маятника получим

$$I_P = m_0 r^2 + m_A R^2 + m_K R_1^2 - m_K R_2^2. \quad (3.10)$$

Согласно законам равноускоренного движения скорость центра масс маятника  $v_1$  непосредственно перед ударом

$$v_1 = at_1 = \frac{2h_1}{t_1}. \quad (3.11)$$

Скорость центра масс непосредственно после удара  $v_2$  или начальная скорость равнозамедленного движения маятника при его подъеме будет связана с максимальной высотой подъема центра масс маятника  $h_2$  соотношением

$$v_2 = \sqrt{2ah_2}. \quad (3.12)$$

Во время удара центр масс маятника движется по окружности радиусом  $r$ . Средняя угловая скорость вращения центра масс маятника при ударе

$$\omega_{cp} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = \frac{v_1 + v_2}{2r}. \quad (3.13)$$

Время соударения можно оценить по формуле

$$\Delta t = \frac{\pi}{\omega_{cp}}. \quad (3.14)$$

Средняя сила натяжения нитей во время удара, согласно второму закону Ньютона,

$$F_{cp} = \frac{m(v_1 + v_2)}{\Delta t}. \quad (3.15)$$

### ***Описание лабораторной установки***

Общий вид маятника Максвелла показан на рисунке 3.2. Установка состоит из основания, на котором закреплена стойка с неподвижным верхним кронштейном и подвижным нижним кронштейном. На верхнем кронштейне находится электромагнит, фотодатчик и вороток для регулирования длины бифилярного подвеса маятника. Нижний кронштейн вместе с фотодатчиком можно перемещать вдоль стойки. Маятник Максвелла – это диск, закрепленный на оси и подвешенный на бифилярный подвес на который накладываются сменные кольца; при этом изменяется момент инерции системы. Маятник с наложенным

кольцом удерживается в верхнем положении электромагнитом. Длина маятника определяется по шкале на стойке прибора. С этой целью нижний кронштейн оснащен указателем, помещенным на высоте оптической оси нижнего фотодатчика. Фотодатчики управляют работой миллисекундомера: верхний фотодатчик запускает его, нижний – останавливает. Запуск и остановка миллисекундомера происходят в момент пересечения маятником лучей фотодатчиков.

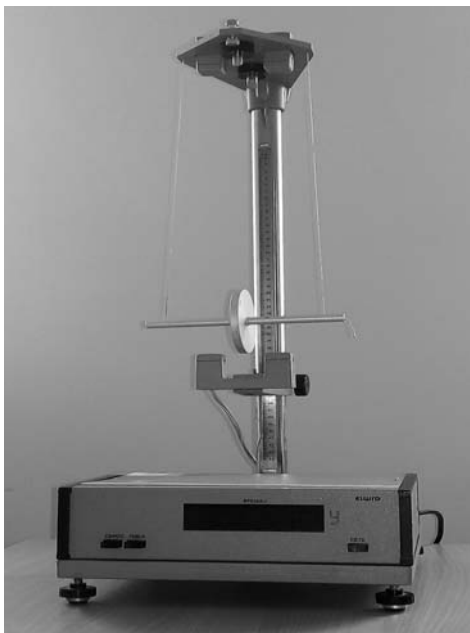


Рисунок 3.2 – Лабораторная установка «Маятник Максвелла»

На лицевой панели установки находятся: клавиша «СЕТЬ» – для включения напряжения питания; клавиша «СБРОС» – для установки нулевых показаний миллисекундомера; клавиша «ПУСК» – для управления электромагнитом. Нажатие этой клавиши отключает электромагнит, а отжатие – включает электромагнит.

### ***Программа работы***

*Внимание!* Перед началом измерений с помощью воротка для регулирования длины подвеса скорректировать установку маятника таким образом, чтобы его ось была параллельна основанию прибора. Произвести блокировку воротка. Перемещая нижний кронштейн с фотодатчиком вдоль стойки, зафиксировать его в таком положении, чтобы нижний край маятника находился примерно на 2 мм ниже оптической оси нижнего фотодатчика. Нижняя грань кольца при этом должна соответствовать нулю шкалы на стойке.

*Определение момента инерции маятника Максвелла без кольца.*

- 1 Нажать клавишу «СЕТЬ».
- 2 Клавиши «ПУСК» и «СБРОС» отжать.
- 3 Измерить длину бифилярного подвеса  $h_1$ . Намотав на ось маятника нить

подвески, зафиксировать маятник с помощью электромагнита.

4 Повернуть маятник в направлении его движения на угол примерно  $5^\circ$ .

5 Нажать на клавишу «ПУСК». Измерить время падения маятника  $t_1$  по миллисекундомеру.

6 Нажать на клавишу «СБРОС», отжать клавишу «ПУСК».

7 Повторить измерения 5 раз. Определить среднее значение времени падения  $\langle t_1 \rangle$ . Полученные данные записать в таблицу 3.1.

8 Вычислить экспериментальное значение момента инерции  $I$  маятника Максвелла по формуле (3.8), учтя, что  $m = m_0 + m_d$ .

9 Вычислить теоретическое значение момента инерции  $I_T$  маятника Максвелла по формуле (3.9) и сравнить его с экспериментальным значением.

Таблица 3.1 – Определение момента инерции маятника Максвелла

$h_1$ , м	$t_1$ , с	$\langle t_1 \rangle$ , с	$I$ , кг·м <sup>2</sup>	$m_0$ , кг	$r$ , м	$m_d$ , кг	$R$ , м	$I_T$ , кг·м <sup>2</sup>

*Определение момента инерции маятника Максвелла с кольцом.*

1 Надеть на диск маятника одно из съемных колец.

2 По методике, описанной ранее, измерить время падения маятника 5 раз. Определить среднее значение времени падения  $\langle t_1 \rangle$ . Полученные данные записать в таблицу 3.2.

Таблица 3.2 – Определение момента инерции маятника Максвелла с кольцом

$h_1$ , м	$t_1$ , с	$\langle t_1 \rangle$ , с	$I_P$ , кг·м <sup>2</sup>	$m_k$ , кг	$R_1$ , м	$R_2$ , м	$I_{PT}$ , кг·м <sup>2</sup>

3 Вычислить экспериментальное значение момента инерции  $I_P$  маятника Максвелла по формуле (3.8), учтя, что  $m = m_0 + m_d + m_k$ .

4 Вычислить теоретическое значение момента инерции  $I_{PT}$  маятника Максвелла по формуле (3.10) и сравнить его с экспериментальным значением.

5 По указанию преподавателя повторить пп.1–4 с другим кольцом.

*Определение средней силы удара.*

1 По методике, описанной ранее, в одном опыте измерить время падения маятника с кольцом  $t_1$  и высоту подъема  $h_2$  после удара. Повторить измерения 5 раз. Полученные данные записать в таблицу 3.3.

2 По формуле (3.11) вычислить скорость  $v_1$  центра масс маятника непосредственно перед ударом.

3 По формуле (3.12) вычислить скорость  $v_2$  центра масс маятника непосредственно после удара.

4 Вычислить время соударения по формуле (3.14).

5 Вычислить среднюю силу в момент удара по формуле (3.15). Результаты расчетов занести в таблицу 3.3.

Таблица 3.3 – Определение средней силы удара

$h_1$ , м	$h_2$ , м	$\langle h_2 \rangle$ , м	$t_1$ , с	$\langle t_1 \rangle$ , с	$v_1$ , м/с	$v_2$ , м/с	$\Delta t$ , с	$F_{cp}$ , Н

### **Контрольные вопросы**

1 Запишите закон, определяющий движение центра масс системы под действием внешних сил.

2 Запишите основной закон динамики вращательного движения для абсолютно твердого тела с неподвижной осью вращения.

3 Что представляет собой маятник Максвелла?

4 Как связано ускорение поступательного движения маятника с его угловым ускорением?

5 Что называется моментом силы?

6 Что называется моментом инерции твердого тела? От чего зависит момент инерции тела?

7 Чему равна кинетическая энергия маятника Максвелла в процессе его спуска?

## **4 Лабораторная работа № 8. Определение моментов инерции твердых тел с помощью крутильного маятника**

**Цель работы:** определение моментов инерции твёрдых тел относительно различных осей; экспериментальная проверка теоремы Штейнера.

### **Общие сведения**

Пусть твёрдое тело вращается относительно оси  $Z$  (рисунок 3.1). Его можно представить как систему разных материальных точек  $m_i$ , каждая из которых движется по окружности радиусом  $r_i$ , лежащей в плоскости, перпендикулярной

оси  $Z$ . Угловые скорости всех материальных точек одинаковы. Моментом инерции тела относительно оси  $Z$  называется величина

$$I_z = \sum m_i r_i^2 = \sum I_{zi},$$

где  $I_{zi}$  – момент инерции отдельной материальной точки относительно оси  $OZ$ ,  $I_{zi} = m_i r_i^2$ .

Момент инерции – **аддитивная величина**, т. е. момент инерции тела, состоящего из отдельных частей, равен сумме моментов инерции частей.

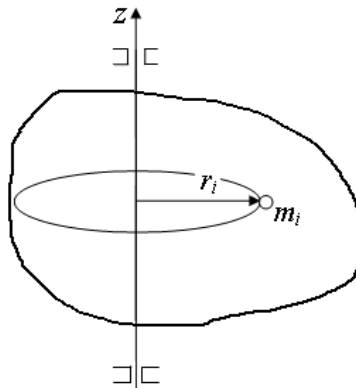


Рисунок 4.1 – Вращение твердого тела относительно оси  $Z$

Вычисление моментов инерции реальных тел сводится к вычислению тройного интеграла и может быть произведено лишь для ограниченного числа симметричных тел и лишь для осей симметрии. Количество осей, вокруг которых может вращаться тело, бесконечно велико. Среди всех осей выделяется та, которая проходит через **центр масс** тела (точку, для описания движения которой достаточно представить, что вся масса системы сосредоточена в центре масс и к этой точке приложена сила, равная сумме всех сил). Но осей, проходящих через центр масс, также бесконечно много. Для любого твёрдого тела произвольной формы существуют три взаимно перпендикулярных оси  $C_x$ ,  $C_y$ ,  $C_z$ , называемые **осями свободного вращения**, обладающие замечательным свойством: если тело закрутить вокруг любой из этих осей и подбросить вверх, то при последующем движении тела ось останется параллельной самой себе, т. е. не будет кувыркаться. Закручивание относительно любой другой оси этим свойством не обладает. Если ось проходит через центр масс, но составляет углы  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  с осями  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  соответственно, то момент инерции относительно такой оси

$$I_c = I_{cx} \cos^2 \alpha + I_{cy} \cos^2 \beta + I_{cz} \cos^2 \gamma. \quad (4.1)$$

Индекс «с» у момента инерции  $I_c$  означает, что это момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс (центр симметрии тела). Напомним, что  $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ .



Момент инерции тела относительно оси вращения, не проходящей через центр масс, можно найти с помощью теоремы Штейнера: *момент инерции  $I_{O'}$  тела относительно произвольной оси  $O'$  равен моменту инерции  $I_0$  тела относительно оси  $O$ , параллельной данной и проходящей через центр масс тела, плюс масса тела, умноженная на квадрат расстояния  $d$  между осями* (рисунок 4.2):

$$I_{O'} = I_0 + md^2. \quad (4.2)$$

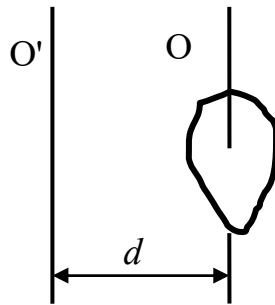


Рисунок 4.2 – Пояснение теоремы Штейнера

Вычисление моментов инерции для тел стандартной формы относительно произвольной оси сводится к следующему.

1 Проведите ось  $C$ , параллельную данной оси вращения  $O$  и проходящую через центр масс (рисунок 4.3).

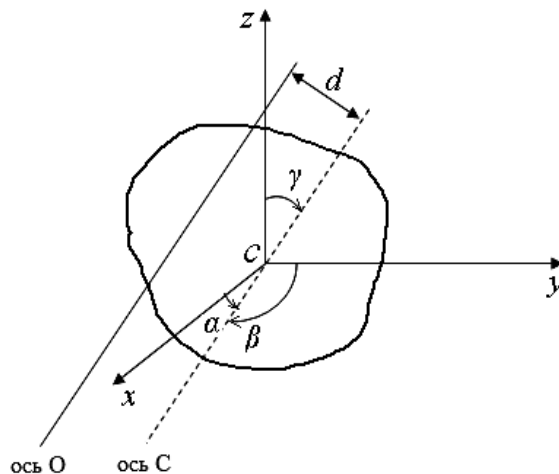


Рисунок 4.3 – Определение момента инерции твердого тела

2 Найдите углы  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  между осями  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  и осью  $C$  и по формуле (4.1) определите  $I_c$ .

3 По формуле (4.2) определите искомый момент инерции.

В качестве примера определим момент инерции цилиндра в ситуации, показанной на рисунке 4.4.

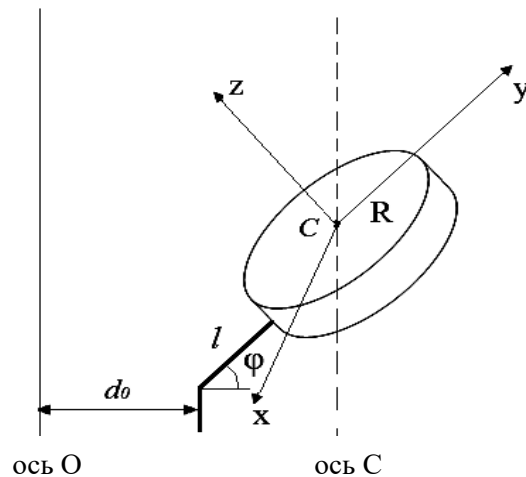


Рисунок 4.4 – Определение момента инерции цилиндра относительно оси O.

Здесь ось O лежит в плоскости YCZ, ось OX перпендикулярна этой плоскости, поэтому

$$\alpha = \frac{\pi}{2}; \beta = \frac{\pi}{2} - \varphi; \gamma = \varphi;$$

$$d = d_i + (l + R) \cos \varphi.$$

Тогда

$$I_i = \frac{1}{12} m (h^2 + 3R^2) \sin^2 \varphi + \frac{1}{2} m R^2 \cos^2 \varphi + m [d_i + (l + R) \cos \varphi]^2.$$

### **Описание лабораторной установки**

На практике приходится определять момент инерции тел достаточно сложной формы. Это связано в частности с тем, например, что напряжения, возникающие в упругом теле при изгибе и кручении, зависят от моментов инерции, а значения этих напряжений необходимы во многих задачах. Вычисление моментов инерции в таких случаях достаточно затруднительно, поэтому используются экспериментальные методы. Один из таких методов и рассмотрен в данной работе.

Работа выполняется на установке ГРМ-05 (рисунок 4.5), которая позволяет проводить прямые измерения периода крутильных колебаний  $T$  рамки с закрепленными в ней телами при различных угловых амплитудах колебаний. В работе изучаются крутильные колебания рамки с закреплёнными в ней различными телами. Закрепление тел в рамке, а также их крепление к стержню осуществляется с помощью небольших штырьков. Оси, на которых лежат эти штырьки, проходят через центры масс соответствующих тел, и крепление обеспечивает параллельность этих осей и оси, относительно которой совершаются колебания.

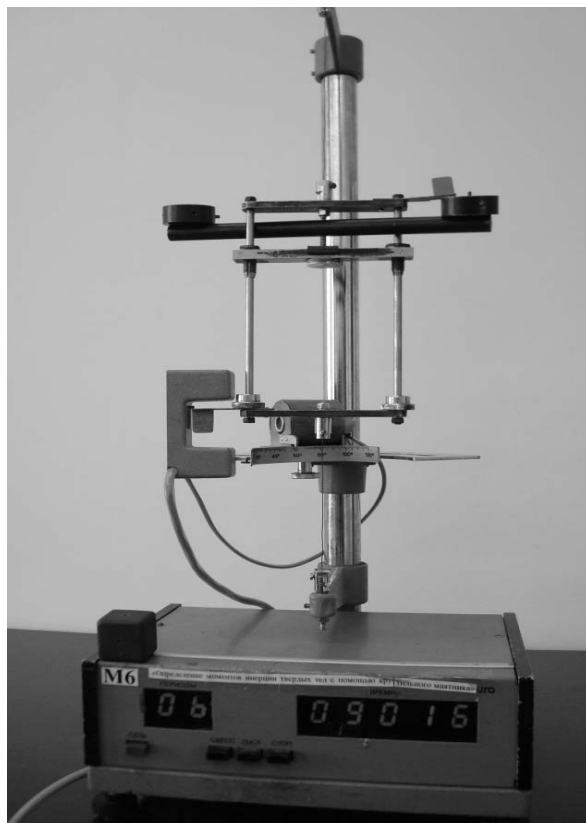


Рисунок 4.5 – Общий вид установки ГРМ-05

Определение периода колебаний осуществляется следующим образом. При выключенной установке отверните стопорный винт под электромагнитом и, передвигая по шкале углов электромагнит, установите начальную угловую амплитуду колебаний, после чего зафиксируйте положение электромагнита. Нажмите кнопку «СЕТЬ», поверните рамку до касания выступом рамки электромагнита. Кнопка «ПУСК» при этом должна быть отжата. Нажмите кнопку «СБРОС», а затем утопите кнопку «ПУСК». Электромагнит при этом перестает удерживать рамку и начинаются крутильные колебания. Количество полных колебаний фиксируется на счётчике «ПЕРИОДЫ», а время – на соответствующем счётчике справа. Если измеряется время десяти полных колебаний, то после появления цифры «9» на счётчике периодов нажимается кнопка «СТОП» и отсчёт времени прекращается после завершения десяти колебаний. Период колебаний  $T = t/10$ , где  $t$  – показания правого счётчика.

Для последующих измерений кнопка «ПУСК» отжимается и показания счётчиков обнуляются нажатием кнопки «СБРОС».

### ***Программа работы***

***Внимание!*** Все измерения проводить по 3 раза и для расчетов брать среднее значение. Начальный угол отклонения рамки от положения равновесия и число периодов колебаний  $n$  задаются преподавателем.

Определение момента инерции рамки  $I_p$  и коэффициента упругих сил кручения  $C$ .

1 Определить экспериментально период колебаний рамки без закреплённых в ней тел  $T_1 = \langle t \rangle / n$ . Измерения времени колебаний провести 3 раза. Данные занести в таблицу 4.1.

Таблица 4.1 – Определение периода колебаний рамки

Номер измерения	$n$	$t, c$	$\langle t \rangle, c$	$T_1, c$
1				
2				
3				

Теоретическое значение периода колебаний определяется по формуле

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{I_p}{C}}, \quad (4.3)$$

где  $I_p$  – момент инерции рамки без закреплённых в ней тел;  
 $C$  – коэффициент упругих сил кручения.

2 Измерить период колебаний рамки с кубом  $T_2$ . Для этого следует закрепить в рамке эталонный куб в центрах противоположных граней и найти период  $T_{21}$  колебаний системы (рисунок 4.6). Повторить измерения для остальных двух пар противоположных граней, найдя  $T_{22}, T_{23}$ . Определить среднее значение периода  $T_2$  колебаний рамки с закреплённым в ней эталонным кубом:

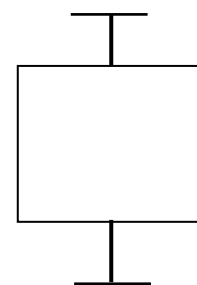


Рисунок 4.6

$$T_2 = \frac{T_{21} + T_{22} + T_{23}}{3}.$$

Теоретическое значение периода колебаний рамки с закреплённым в ней кубом определяется по формуле

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{I_p + \frac{ma^2}{6}}{C}}, \quad (4.4)$$

где  $m$  – масса куба;  
 $a$  – сторона куба (указаны на рабочем месте);  
 $C$  – постоянная упругих сил кручения.

3 Из системы уравнений (4.3) и (4.4) найти  $I_p$  и  $C$ . Данные занести в таблицу 4.2.

Таблица 4.2 – Определение момента инерции рамки

$\langle t_{21} \rangle, \text{с}$	$T_{21}, \text{с}$	$\langle t_{22} \rangle, \text{с}$	$T_{22}, \text{с}$	$\langle t_{23} \rangle, \text{с}$	$T_{23}, \text{с}$	$T_2, \text{с}$	$I_p, \text{кг} \cdot \text{м}^2$	$C, \text{кг} \cdot \text{м}^2 / \text{с}^2$

### Определение момента инерции груза $I_{gp}$ .

1 Измерить период колебаний рамки со стержнем  $T_3$ . Для этого необходимо закрепить в рамке стержень так, чтобы ось колебаний проходила через центр масс и перпендикулярно стержню (рисунок 4.7). Данные занести в таблицу 4.3.

Теоретическое значение  $T_3$  вследствие аддитивности момента инерции

$$T_3 = 2\pi \sqrt{\frac{I_p + I_{cm}}{C}}, \quad (4.5)$$

где  $I_{cm}$  – момент инерции стержня.

2 Из формулы (4.5), зная момент инерции рамки  $I_p$  из предыдущего задания, найти момент инерции стержня  $I_{cm}$ .

3 Прикрепите к стержню, закрепленному в рамке, симметрично два одинаковых тела с помощью штырьков, имеющих на этих телах, на расстоянии  $d$  от стержня (рисунок 4.8).

4 Измерить период колебаний конструкции из стержня и двух грузов  $T_4$ :

$$T_4 = 2\pi \sqrt{\frac{I_p + I_{cm} + 2I_{gp}}{C}}. \quad (4.6)$$

5 Из формулы (4.6) найти момент инерции одного груза  $I_{gp}$  и сравнить его с теоретическим значением, найденным по теореме Штейнера по формулам (4.7) или (4.8).

$$I_{gp} = m_{gp} d^2 + \frac{1}{2} m_{gp} R^2, \quad (4.7)$$

где  $R$  – радиус груза.

Если грузы одеть иначе (рисунок 4.9), то момент инерции груза относительно оси вращения будет равен

$$I_{gp} = m_{gp} d^2 + \frac{1}{4} m_{gp} R^2. \quad (4.8)$$

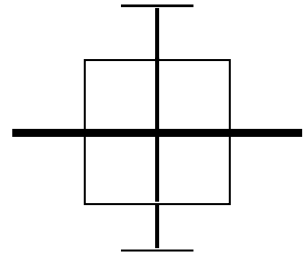


Рисунок 4.7

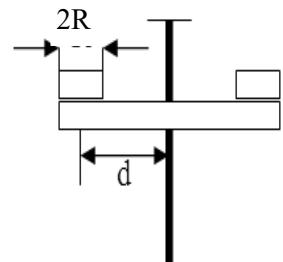


Рисунок 4.8

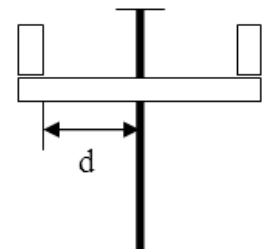


Рисунок 4.9

Таблица 4.3 – Определение момента инерции груза

$\langle t_3 \rangle$ , с	$T_3$ , с	$\langle t_4 \rangle$ , с	$T_4$ , с	$I_{cm}$ , кг·м <sup>2</sup>	$I_{грэкс}$ , кг·м <sup>2</sup>	$I_{гртеор}$ , кг·м <sup>2</sup>

### **Контрольные вопросы**

1 Сформулируйте основное уравнение динамики твёрдого тела для вращательного движения относительно неподвижной оси.

2 Запишите момент инерции материальной точки, системы материальных точек и однородного тела.

3 Как записать момент инерции твёрдого тела относительно центра масс тела, выраженный через проекции на оси свободного вращения?

4 Получите выражение для момента инерции стержня относительно оси, проходящей через центр масс стержня и перпендикулярной ему.

5 Получите выражение для момента инерции стержня относительно оси, проходящей через конец стержня и перпендикулярной ему.

6 Получите выражение для момента инерции диска относительно оси, проходящей через его центр масс и перпендикулярной плоскости диска.

## **5 Лабораторная работа № 10. Изучение упругих свойств материалов**

**Цель работы:** проверить применимость закона Гука для различных материалов; определить модуль Юнга для различных материалов; оценить погрешность измерения.

### **Общие сведения**

Все реальные тела под действием внешних сил деформируются, т. е. изменяют свою форму и размеры. Различаются деформации растяжения (сжатия), сдвига, изгиба, кручения и более сложные виды деформации, которые всегда можно свести к двум: растяжение (сжатие) и сдвиг.

Если деформации исчезают после прекращения действия приложенных сил, то они называются упругими. Деформации, частично сохраняющиеся после снятия нагрузки, называются неупругими или пластическими. Следует отметить, что разделение деформаций на упругие и пластические условно, т. к. после любой нагрузки возникает остаточная деформация. Но если она пренебрежимо мала, то деформации считаются упругими.

Рассмотрим деформацию растяжения однородного круглого стержня АВ длиной  $l_0$ , один конец которого жестко закреплен (рисунок 5.1). Если к другому концу стержня приложить силу  $\vec{F}$ , его длина станет  $l$ . В качестве меры деформации растяжения служит абсолютное удлинение

$$x = \Delta l = l - l_0 \quad (5.1)$$

и относительное удлинение

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{x}{l_0}. \quad (5.2)$$

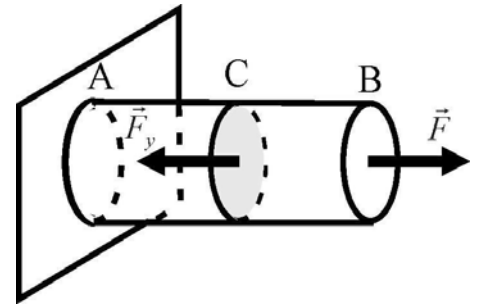


Рисунок 5.1 – Деформация растяжения

При деформации растяжения или сжатия изменяются также и поперечные размеры стержня. Пусть  $d_0$  и  $d$  – диаметры стержня до и после деформации растяжения. При деформации растяжения диаметр стержня уменьшается, т. е.  $d < d_0$ . Величина

$$\delta = -\frac{\Delta d}{d_0} = \frac{d_0 - d}{d_0} \quad (5.3)$$

называется относительным поперечным сжатием стержня. Относительное изменение объема стержня

$$\frac{\Delta V}{V_0} = \frac{Sl - S_0 l_0}{S_0 l_0} = \frac{d^2 l}{d_0^2 l_0} - 1 = (1 - \delta)^2 (1 + \varepsilon) - 1 \approx \varepsilon - 2\delta. \quad (5.4)$$

Так как  $\varepsilon$  и  $\delta$  много меньше единицы, то их произведениями можно пренебречь.

Величина, равная отношению относительного поперечного сжатия к соответствующему относительному продольному удлинению, называется коэффициентом Пуассона:

$$\mu = \frac{\delta}{\varepsilon}. \quad (5.5)$$

Коэффициент Пуассона  $\mu$  зависит только от материала тела и является одной из важных характеристик его упругих свойств.

Выделим мысленно в стержне некоторое поперечное сечение  $C$  площадью  $S$ . Часть  $BC$  стержня находится в равновесии. Следовательно, в выделенном сечении со стороны другой части стержня  $AC$  действует упругая сила  $\vec{F}_y$ , равная по модулю внешней силе. Поскольку положение сечения  $C$  выбрано произвольно, то это значит, что упругая сила, действующая в любом поперечном сечении стержня равна по модулю внешней силе. Для характеристики деформированного состояния стержня вводят понятие нормального напряжения

$$\sigma = \frac{F_y}{S}, \quad (5.6)$$

которое численно равно упругой силе, действующей на единицу площади сечения, перпендикулярного силе. Отметим, что *сила упругости направлена противоположно направлению абсолютного удлинения*. При однородной деформации нормальное напряжение одинаково в любой точке поперечного сечения стержня. При неоднородной деформации нормальное напряжение определяется как

$$\sigma = \frac{dF_y}{dS}, \quad (5.7)$$

где  $dF_y$  – упругая сила, перпендикулярная элементарной площадке  $dS$ , в пределах которой деформацию можно считать однородной.

При малых деформациях справедлив закон Гука: *в пределах упругости напряжение, возникающее в теле, прямо пропорционально относительной деформации*:

$$\sigma = E\varepsilon. \quad (5.8)$$

Коэффициент пропорциональности  $E$  называется модулем продольной упругости или модулем Юнга и характеризует упругие свойства вещества. Модуль Юнга численно равен нормальному напряжению, которое возникает в теле при его относительном удлинении, равном единице, т. е. при увеличении длины стержня в 2 раза.

Из (5.1)–(5.5) следует, что при однородной деформации растяжения модуль силы упругости

$$F_y = S\sigma = SE\varepsilon = \frac{ES}{l_0}x = kx,$$

где  $k$  – коэффициент упругости стержня,  $k = \frac{ES}{l_0}$ .

При квазистатической деформации состояние стержня в любой момент времени является равновесным. Работа внешней силы  $F$  (рисунок 5.1) при упругом растяжении переходит в потенциальную энергию упругой продольной деформации стержня. Если выполняется закон Гука (5.8), то

$$A = \int_0^x F dx = \int_0^x kx dx = \frac{kx^2}{2} = U. \quad (5.9)$$

Найдем объемную плотность потенциальной энергии упругой деформации, которая равна упругой потенциальной энергии единицы объема деформированного стержня:



$$u = \frac{U}{Sl} = \frac{kx^2}{2Sl} = \frac{ESl_0^2 \varepsilon^2}{2Sl_0 l} = \frac{E\varepsilon^2}{2(1+\varepsilon)}.$$

При  $\varepsilon \ll 1$  (например, для металлов) получаем

$$u = \frac{E\varepsilon^2}{2} = \frac{\sigma\varepsilon}{2}. \quad (5.10)$$

Упругие свойства реальных тел удобно изучать с помощью *диаграммы растяжения*. Диаграммой растяжения стержня называют кривую, выражающую зависимость нормального напряжения  $\sigma$  от относительного удлинения  $\varepsilon$  стержня (рисунок 5.2). При малых деформациях (от 0 до  $\varepsilon_a$ ) выполняется закон Гука; это практически линейный участок  $0a$ . Максимальное нормальное напряжение  $\sigma_a$ , соответствующее этому участку, называется пределом пропорциональности. При дальнейшем увеличении напряжения закон Гука не выполняется, хотя упругие свойства могут еще сохраняться. Максимальное напряжение  $\sigma_b$ , при котором сохраняются упругие свойства тела, называется пределом упругости. На участке  $ab$  диаграммы деформация нелинейная, но еще упругая (обычно этот участок очень малый:  $\sigma_b$  больше  $\sigma_a$  на доли процента).

При напряжениях, превышающих  $\sigma_b$ , деформация становится пластической (участок диаграммы  $bc$ ). Точка  $c$  диаграммы, которой соответствует напряжежение  $\sigma_c$  и относительное удлинение  $\varepsilon_c$ , отражает *предел текучести* стержня. При напряже-

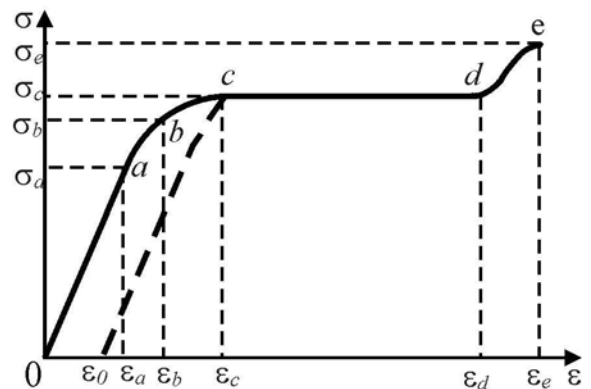


Рисунок 5.2 – Диаграмма растяжения

ниях, превышающих  $\varepsilon_c$ , удлинение нарастает практически без увеличения нагрузки. Это – область текучести материала (участок  $cd$ ). Когда относительное удлинение превзойдет значение  $\varepsilon_d$ , соответствующее *пределу прочности*, наступает разрыв стержня. В некотором месте стержня образуется сужение, площадь поперечного сечения резко сокращается, в результате чего здесь напряжение возрастает (участок  $de$ ). После достижения максимального значения  $\sigma_e$  напряжение резко уменьшается и стержень разрывается.

При упругих деформациях стержня, в том числе на участке  $ab$ , между напряжением  $\sigma$  и вызванным им относительным удлинением  $\varepsilon$  существует однозначная зависимость (линия  $Ob$ ) как при увеличении, так и при уменьшении напряжения. При пластических деформациях такой однозначности нет. После снятия напряжения на участке пластической деформации  $bc$  в стержне наблюдается остаточная деформация  $\varepsilon_0$ ; при уменьшении напряжения зависимость  $\sigma$  от  $\varepsilon$  будет иной (линия  $c\varepsilon_0$ ), чем при увеличении напряжения. При повторном увеличении напряжения предел упругости стержня возрастает, его

прочность (а вместе с тем и хрупкость) повышается. Это явление называют *наклепом*. Явление наклепа при многократных деформациях тела, превышающих предел упругости, используется для упрочения тела (отбивание кос, прокат металла и т. д.).

При деформациях имеет место так называемое *упругое последствие*. Сущность его состоит в том, что при неизменной величине напряжения, сразу после его быстрого возрастания, относительное удлинение тела будет возрастать еще в течение некоторого промежутка времени, постепенно замедляясь. И, наоборот, при неизменной величине напряжения, сразу после его быстрого уменьшения, относительное удлинение тела будет уменьшаться еще некоторое время. При квазистатическом, т. е. очень медленном, изменении напряжения упругое последствие не будет наблюдаться. При периодических, одинаковых по модулю растяжениях и сжатиях стержня, при которых модуль максимального напряжения попадает в область пластических деформаций ( $\sigma_y < \sigma_A < \sigma_T$ ,  $\sigma_A = |\sigma_B|$ ,  $\varepsilon_A = |\varepsilon_B|$ ), зависимость  $\sigma$  от  $\varepsilon$  представляет собой *петлю упругого гистерезиса* (рисунок 5.3, замкнутая кривая  $A\varepsilon_0B\varepsilon_0'A$ ). Линия  $OA$  – диаграмма первоначального растяжения стержня. Точка  $A$  находится в области пластических деформаций. Линия  $A\varepsilon_0B$  – график зависимости  $\sigma(\varepsilon)$  при уменьшении напряжения и последующем сжатии стержня. При  $\sigma = 0$  имеет место остаточная деформация растяжения  $\varepsilon_0$ . Точка  $B$ , симметричная точке  $A$ , также находится в области пластических деформаций. Линия  $B\varepsilon_0'A$  – зависимость  $\sigma(\varepsilon)$  при уменьшении напряжения сжатия и последующем растяжении стержня. При  $\sigma = 0$  сохраняется остаточная деформация сжатия  $\varepsilon_0'$ .

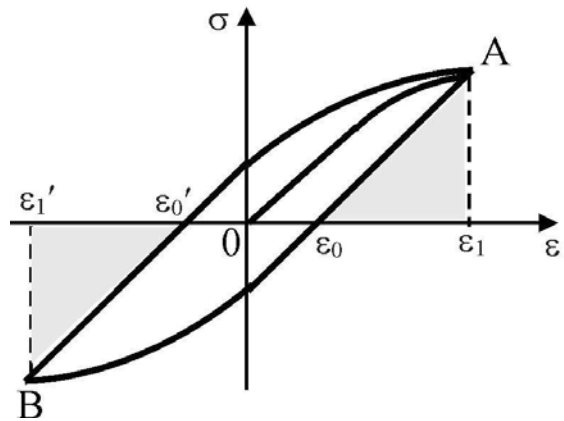


Рисунок 5.3 – Петля упругого гистерезиса

Элементарная работа действующей на стержень внешней силы  $F$  ( $F = F_y$ )  $\delta A = Fdx = F_y dx = \sigma S l_0 d\varepsilon$ , т. е.  $\sigma d\varepsilon = \delta A / (S l_0)$ , равна элементарной работе по деформации единицы объема стержня. Отсюда следует, что площадь криволинейной трапеции под графиком зависимости  $\sigma(\varepsilon)$  равна работе внешней силы (или силы упругости) при деформации единицы объема стержня.

Так как при растяжении и сжатии стержня деформации являются пластическими, то работа внешней силы частично переходит в потенциальную энергию упругой деформации, частично – во внутреннюю энергию стержня. Площади криволинейных треугольников  $\varepsilon_0'A\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_0B\varepsilon_1'$  равны работе внешней силы по деформации единицы объема стержня при растяжении и сжатии соответственно. Площади треугольников  $\varepsilon_0A\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_0'B\varepsilon_1'$  (на рисунке 5.3 затемнены) равны потенциальной энергии единицы объема деформированного стержня, которая переходит в работу силы упругости единицы объема стержня при уменьшении напряжения до нуля растянутого и сжатого стержня

соответственно. Разность суммарной работы внешней силы и силы упругости за один цикл деформации единицы объема стержня равна площади петли гистерезиса  $A\varepsilon_0 B\varepsilon_0' A$  и представляет собой количество теплоты, выделившееся в единице объема стержня за один цикл деформации.

## Часть 1

### Описание лабораторной установки

Общий вид установки показан на рисунке 5.4. Стальная проволока  $AB$  растягивается под действием переменных грузов  $P$ . Первоначальная длина проволоки  $l_0$  измеряется линейкой  $D$ , ее диаметр  $d$  – микрометром, абсолютное удлинение  $\Delta l$  – индикатором  $C$ .

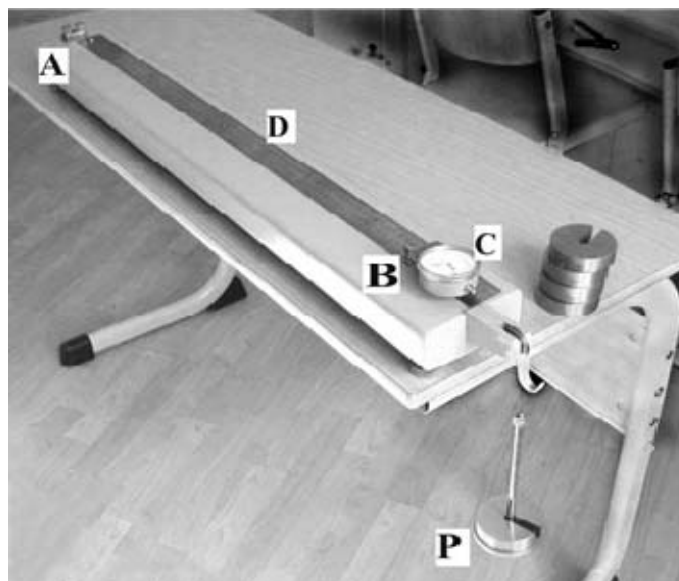


Рисунок 5.4 – Лабораторная установка

Проволока диаметром поперечного сечения  $d$ , начальной длины  $l_0$ , изготовленная из исследуемого материала, растягивается под действием груза  $P$  массой  $m$ . Закон Гука в этом случае можно представить в виде

$$\Delta l = \frac{4l_0 g}{\pi d^2 E} m = \alpha m, \quad (5.11)$$

где  $\alpha$  – коэффициент пропорциональности постоянен для данного образца.

Если, изменяя массу груза  $m$ , каждый раз измерять абсолютное удлинение проволоки  $\Delta l$  и построить график  $\Delta l = f(m)$ , то можно убедиться в справедливости закона Гука. По тангенсу угла наклона графика можно определить коэффициент пропорциональности  $\alpha$  в (5.11) и рассчитать модуль продольной упругости (модуль Юнга) проволоки:

$$E = \frac{4l_0 g}{\pi d^2 \alpha}. \quad (5.12)$$

Для уменьшения погрешности интервал нагрузок  $\Delta m$  и соответствующий ему интервал абсолютных удлинений  $\Delta(\Delta l)$  на графике следует выбирать по возможности большими (но в пределах пропорциональности).

### **Программа работы**

1 Провести измерения величин  $l_0$ ,  $d$ , входящих в уравнение (5.11).

2 Провести измерения  $\Delta l$  при различных массах  $m$  подвешиваемых к проволоке грузов, постепенно увеличивая, а затем уменьшая нагрузку. Результаты измерений занести в таблицу 5.1.

3 Построить графики зависимости  $\Delta l = f(m)$  при увеличении и уменьшении нагрузки на одних осях. Убедиться в справедливости закона Гука. По тангенсу угла наклона графика определить коэффициент пропорциональности  $\alpha$  в (5.11).

4 Определить модуль Юнга проволоки по формуле (5.12). Результаты расчетов занести в таблицу 5.1.

Таблица 5.1 – Определение модуля продольной упругости проволоки

Номер измерений	$m$ , кг	$\Delta l \cdot 10^3$ , м		$l_0$ , м	$d \cdot 10^3$ , м	$\alpha$ , м/кг	$E$ , Н/м <sup>2</sup>
		при увеличении нагрузки	при уменьшении нагрузки				
1							
2							
3							
4							
5							

5 Оценить относительную случайную погрешность величины  $\alpha$  методом наименьших квадратов. При  $n = 10$  абсолютная случайная погрешность  $\Delta\alpha_c = 3\sigma_\alpha$ , где стандартное отклонение  $\sigma_\alpha = 3,0694 \cdot 10^{-6}$  м/кг  $\approx 3,07 \cdot 10^{-6}$  м/кг.

$$\varepsilon_{\alpha c} = \frac{\Delta\alpha_c}{\alpha} 100 \%$$

6 Оценить полную относительную погрешность косвенных измерений величины  $\alpha$ .

$$\varepsilon_\alpha = \varepsilon_{\alpha c} + \varepsilon_{\alpha l} + \varepsilon_{\alpha d} + \varepsilon_{\alpha g}$$

где  $\varepsilon_{\alpha c}$  – относительная случайная погрешность косвенного измерения величины  $\alpha$ ;

$\varepsilon_{\alpha u}$  – относительная приборная погрешность;  
 $\varepsilon_{\alpha o}$  – относительная погрешность прямого измерения;  
 $\varepsilon_{\alpha \delta}$  – относительная погрешность вычисления,  $\varepsilon_{\alpha \delta} = 0$ .

Относительная приборная погрешность  $\varepsilon_{\alpha u}$  определяется по формуле

$$\varepsilon_{\alpha u} = \frac{\Delta(\Delta l)_u}{\Delta l_1} + \frac{\Delta m_u}{m},$$

где  $\Delta(\Delta l)_u$  – абсолютная приборная погрешность индикатора,  $\Delta(\Delta l)_u = 0,020$  мм;

$\Delta l_1$  – минимальное значение  $\Delta l$  из таблицы 5.1;

$\Delta m_u$  – абсолютная погрешность в определении массы,  $\Delta m_u = 0,5$  г;

$m$  – масса наименьшего груза.

Относительная погрешность прямого измерения определяется по формуле

$$\varepsilon_{\alpha o} = \frac{\Delta(\Delta l)_o}{\Delta l_1} + \frac{\Delta m_o}{m},$$

где  $\Delta(\Delta l)_o$  – погрешность округления,  $\Delta(\Delta l)_o = h/2$  (где  $h$  – цена деления индикатора);

$\Delta l_1$  – минимальное значение  $\Delta l$  из таблицы 5.1;

$\Delta m_o$  – абсолютная погрешность в определении массы при измерениях, принять  $\Delta m_o = 0$ .

7 Оценить полную относительную погрешность косвенных измерений модуля Юнга проволоки по формуле

$$\varepsilon_E = \varepsilon_g + \varepsilon_l + \varepsilon_\pi + 2\varepsilon_d + \varepsilon_\alpha,$$

где  $\varepsilon_g$  – относительная погрешность округления ускорения свободного падения  $g$ ,  $\varepsilon_g = \Delta g/g \cdot 100\%$  (где  $\Delta g = 0,00335$  м/с<sup>2</sup>,  $g = 9,81$  м/с<sup>2</sup>);

$\varepsilon_l$  – относительная погрешность измерения длины проволоки  $l$  (т. к. длина проволоки изменяется незначительно, а с учетом округления этой величины до 0,001 м, то  $\varepsilon_l$  принимается равной 0);

$\varepsilon_\pi$  – относительная погрешность определения числа  $\pi$ ,  $\varepsilon_\pi = 0,05\%$ ;

$\varepsilon_d$  – относительная погрешность определения толщины проволоки  $d$ ,  
 $\varepsilon_d = \varepsilon_{d,c} + \varepsilon_{d,u} + \varepsilon_{d,o} + \varepsilon_{d,\delta}$ .

Случайная погрешность  $\varepsilon_{d,c} = 0$ , т. к. разброса результатов при измерении диаметра проволоки  $d$  не должно наблюдаться. По той же причине погрешность вычисления  $\varepsilon_{d,\delta} = 0$ . Абсолютная погрешность микрометра  $\Delta d_u = 0,004$  мм. Интервал округления (см. таблицу 5.1)  $h = 0,01$  мм, значит, абсолютная погрешность отсчета  $\Delta d_o = h/2 = 0,005$  мм.

Следовательно, относительная погрешность

$$\varepsilon_d = \frac{\Delta d_{\text{ц}}}{d} + \frac{\Delta d_o}{d} = 0,034, \text{ или } 3,4 \%$$

8 Определить абсолютную погрешность измерения модуля Юнга  $E$ :

$$\Delta E = \varepsilon_E E.$$

Записать ответ в виде  $E = (E \pm \Delta E) \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2$ ,  $\varepsilon_E = \dots$

**Пример** –  $E = (2,0 \pm 0,3) \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2$ ,  $\varepsilon_E = 14 \%$ .

## Часть 2

### Описание лабораторной установки

Если прямоугольный деревянный брусок свободно положить на две опоры  $A$  и  $B$  и на его середину подействовать силой  $F = mg$ , то брусок изогнется (рисунок 5.5). Деформация изгиба характеризуется стрелой прогиба  $h$ , которая при изменении массы груза  $m$  также изменяется.

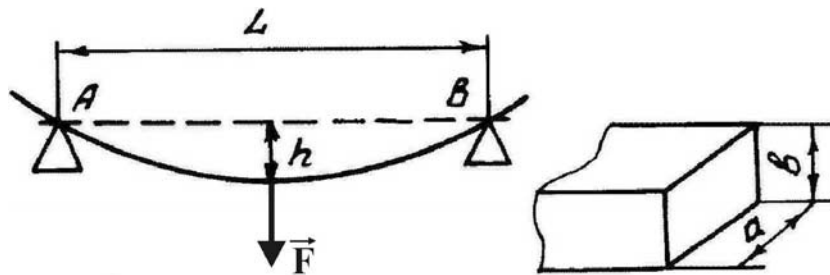


Рисунок 5.5 – Действие силы  $F$  на однородный брусок

Стрела прогиба  $h$  для однородного изотропного бруска из закона Гука

$$h = \frac{L^3 g}{4ab^3 E} m = \beta m, \quad (5.13)$$

где  $L$  – расстояние между опорами;

$g$  – ускорение свободного падения;

$a$  – ширина бруска;

$b$  – высота бруска;

$E$  – модуль продольной упругости (модуль Юнга) материала бруска;

$m$  – масса груза, создающего добавочную силу давления  $F$  на середину бруска.

Коэффициент пропорциональности  $\beta$  для данного образца – постоянная величина. Построив график  $h = h(m)$ , можно убедиться в справедливости закона Гука. По наклону графика  $\Delta h / \Delta m$  легко определить коэффициент пропор-

циональности  $\beta$  в (5.13) и рассчитать модуль продольной упругости прямоугольного бруска:

$$E = \frac{L^3 g}{4ab^3\beta}. \quad (5.14)$$

Для уменьшения погрешности интервал нагрузок  $\Delta m$  и соответствующий ему интервал стрелы прогиба  $\Delta h$  на графике следует выбирать по возможности большим (но в пределах пропорциональности).

Общий вид установки показан на рисунке 5.6, ее рабочая часть крупным планом – на рисунке 5.6, б).

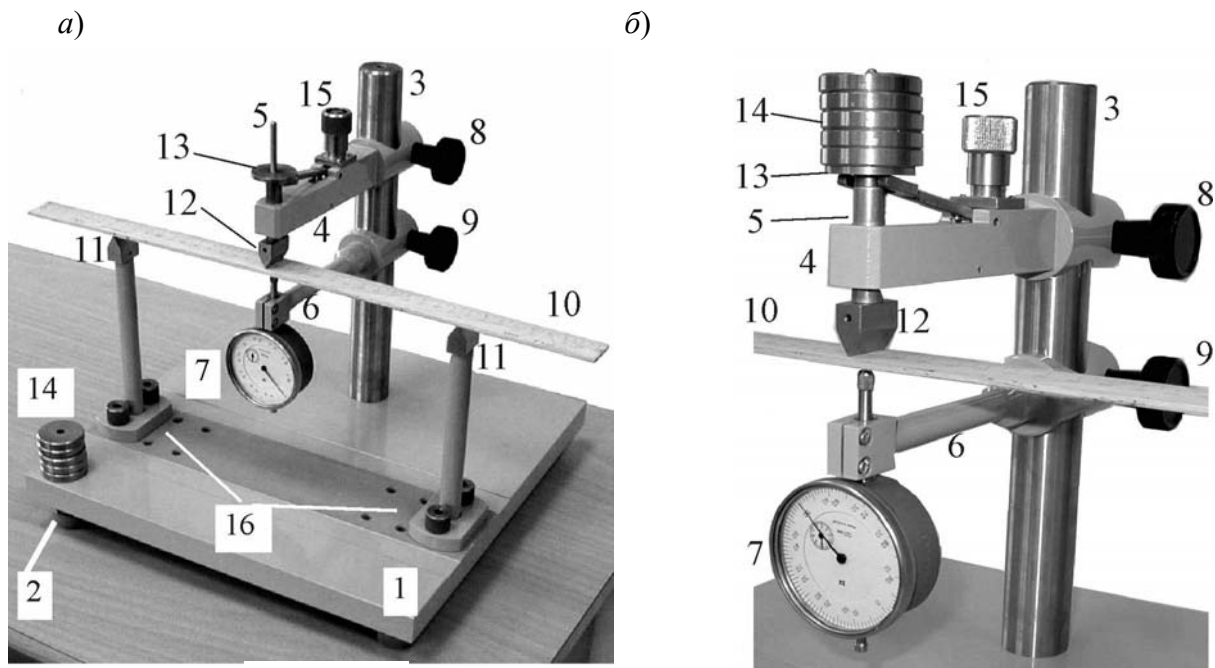


Рисунок 5.6 – Общий вид лабораторной установки

Основание  $1$  оснащено регулируемыми ножками  $2$ , которые позволяют производить выравнивание прибора. В основании закреплена колонка  $3$ , вдоль которой можно перемещать верхний кронштейн  $4$  со стержнем  $5$  и нижний кронштейн  $6$  с индикатором часового типа  $7$ . Кронштейны зафиксированы на колонке с помощью винтов  $8$  и  $9$ . Исследуемый образец (деревянный брусок)  $10$  располагается на опорах  $11$ . На нижнем конце стержня  $5$  закреплена треугольная призма  $12$ , а сверху – платформа  $13$ , на которую помещают грузы  $14$ . Положение стержня в кронштейне  $4$  регулируется винтом  $15$ . Прогиб бруска осуществляется с помощью призмы  $12$ , добавочная сила давления которой на брусок равна силе тяжести грузов, положенных на платформу. Расстояние между опорами  $11$  можно изменять. Каждая из них может быть установлена на основании в одном из трех гнезд  $16$ .

Перемещая кронштейны  $4$  и  $6$ , необходимо установить их так, чтобы призма  $12$  и измерительный штифт индикатора касались бруска. Установив нулевое значение шкалы индикатора и помещая на платформу  $13$  грузы,

измеряют стрелу прогиба бруска с помощью индикатора часового типа.

В работе используется индикатор часового типа модели ИЧ-10, класса точности 1, с ценой деления 0,01 мм. Он имеет абсолютную погрешность  $\Delta(\Delta h)_u = 0,020$  мм.

### **Программа работы**

1 Установить опоры на максимальном расстоянии друг от друга. Провести контрольные измерения ширины бруска  $a$ , толщины бруска  $b$ , расстояния между опорными призмами  $L$  и стрелы прогиба  $h$  при минимальной массе груза  $m$ .

2 Провести измерения  $h$  при различных массах  $m$  груза на платформе, постепенно увеличивая, а затем уменьшая нагрузку. Результаты измерений занести в таблицу 5.2.

Таблица 5.2 – Результаты измерений и расчетов для определения модуля продольной упругости деревянного бруска

Номер измерения	$a$ , м	$B$ , м	$L$ , м	$m$ , кг	$h \cdot 10^3$ , м	
					при увеличении нагрузки	при уменьшении нагрузки

3 Построить графики зависимости  $h = f(m)$  при увеличении и уменьшении нагрузки на одних осях. По тангенсу угла наклона графика определить коэффициент пропорциональности  $\beta$ .

4 Определить модуль Юнга бруска по формуле (5.14).

5 Оценить относительную случайную погрешность величины  $\beta$  методом наименьших квадратов. Необходимо учесть, что при  $n = 10$   $\Delta\beta_c = 3\sigma_\beta$ , при  $n = 5$   $\Delta\beta_c = 5\sigma_\beta$ , где  $\sigma_\beta$  – стандартное отклонение, вычисляется по формуле

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum h_i^2}{n(\sum m_i^2 + \beta^2)}}$$

где  $n$  – число измерений.

6 Оценить полную относительную погрешность косвенных измерений величины  $\beta$ .

$$\varepsilon_\beta = \varepsilon_{\beta c} + \varepsilon_{\beta u} + \varepsilon_{\beta o} + \varepsilon_{\alpha \beta}$$

где  $\varepsilon_{\beta c}$  – относительная случайная погрешность косвенного измерения величины  $\beta$ ;

$\varepsilon_{\beta u}$  – относительная приборная погрешность;



$\varepsilon_{\beta o}$  – относительная погрешность отсчета;

$\varepsilon_{\beta e}$  – относительная погрешность вычисления,  $\varepsilon_{\beta e} = 0$ .

Относительная приборная погрешность  $\varepsilon_{\beta u}$  определяется по формуле

$$\varepsilon_{\beta u} = \frac{\Delta(h)_u}{h} + \frac{\Delta m_u}{m},$$

где  $\Delta(h)_u$  – абсолютная приборная погрешность индикатора,  $\Delta(h)_u = 0,020$  мм;

$h$  – минимальное значение  $h$  из таблицы 5.1;

$\Delta m_u$  – абсолютная погрешность в определении массы,  $\Delta m_u = 0,5$  г;

$m$  – масса наименьшего груза.

Относительная погрешность прямого измерения отсчета определяется по формуле

$$\varepsilon_{\beta o} = \frac{\Delta(h)_o}{h} + \frac{\Delta m_o}{m},$$

где  $\Delta(h)_o$  – погрешность округления,  $\Delta(h)_o = H/2$  (где  $H$  – цена деления индикатора);

$h$  – минимальное значение  $h$  из таблицы 5.2;

$\Delta m_o$  – абсолютная погрешность в определении массы при измерениях, принять  $\Delta m_o = 0$ .

7 Оценить относительные погрешности прямых измерений расстояния между призмами  $\varepsilon_L$ , ширины бруска  $\varepsilon_a$  и толщины бруска  $\varepsilon_b$  по формуле

$$\varepsilon = \varepsilon_c + \varepsilon_u + \varepsilon_o,$$

где  $\varepsilon_c$  – относительная случайная погрешность измерения, для величин  $L$ ,  $a$ ,  $b$   $\varepsilon_c = 0$ , т. к. во всех опытах эти расстояния не меняются;

$\varepsilon_u$  – относительная приборная погрешность,

$$\varepsilon_{Lu} = \frac{\Delta(L)_u}{L},$$

где  $\Delta(L)_u$  – абсолютная приборная погрешность измерительного инструмента, которым пользовались при измерении расстояний  $L$ ,  $a$ ,  $b$  равная половине цены деления измерительного инструмента;

$\varepsilon_o$  – относительная погрешность отсчета,

$$\varepsilon_{Lo} = \frac{\Delta(L)_o}{L},$$

где  $\Delta(L)_o$  – погрешность округления,  $\Delta(L)_o = H/2$  ( $H$  – цена деления измерительного инструмента).

8 Оценить полную относительную погрешность косвенных измерений модуля Юнга деревянного бруска по формуле

$$\varepsilon_E = 3\varepsilon_L + \varepsilon_g + \varepsilon_a + 3\varepsilon_b + \varepsilon_\beta,$$

где  $\varepsilon_L$  – относительная погрешность измерения расстояния между опорными призмами  $L$ ;

$\varepsilon_g$  – относительная погрешность округления ускорения свободного падения  $g$ ,  $\varepsilon_g = \Delta g/g \cdot 100\%$ ,  $\Delta g = 0,00335 \text{ м/с}^2$ ,  $g = 9,81 \text{ м/с}^2$ ;

$\varepsilon_a$  – относительная погрешность измерения ширины бруска  $a$ ;

$\varepsilon_b$  – относительная погрешность измерения толщины бруска  $b$ ;

$\varepsilon_\beta$  – относительная погрешность косвенного измерения величины  $\beta$ .

9 Определить абсолютную погрешность измерения модуля Юнга  $E$ :

$$\Delta E = \varepsilon_E E.$$

Записать ответ в виде  $E = (E \pm \Delta E) \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2$ ,  $\varepsilon_E = \dots$ .

**Пример** –  $E = (2,0 \pm 0,3) \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2$ ,  $\varepsilon_E = 14\%$ .

### **Контрольные вопросы**

1 Сформулируйте закон Гука для изучаемой деформации. Исходя из каких соображений подбираются внешние нагрузки для проверки закона Гука?

2 Как определяется нормальное напряжение стержня с косым срезом торца, если внешняя сила направлена вдоль оси стержня?

3 Каков физический смысл модуля Юнга? От чего зависит эта величина?

4 Опишите зависимость  $\sigma$  от  $\varepsilon$  при растяжении стержня.

5 Какова связь коэффициента Пуассона и относительного удлинения стержня?

6 Получите выражение для объемной плотности энергии упругих продольных деформаций стержня.

7 Опишите петлю гистерезиса при продольных деформациях.

## 6 Лабораторная работа № 11. Изучение особенностей упругого удара

**Цель работы:** ознакомиться с явлением удара на примере соударения подвешенных на нитях шаров; для упругого и неупругого ударов шаров определить коэффициенты восстановления скорости и энергии, проверить закон сохранения импульса.

### Общие сведения

Под ударом твердых тел понимается совокупность явлений, которые возникают при столкновении движущихся твердых тел, а также при некоторых видах взаимодействия твёрдого тела с жидкостью или газом (например, удар струи о тело, удар тела с поверхностью жидкости, гидравлический удар, действие взрывной или ударной волны на твердое тело и др.). Промежуток времени, за который происходит удар, очень мал и на практике составляет  $\sim 10^{-4} \dots 10^{-6}$  с, а силы (ударные силы или так называемые мгновенные), возникающие на площадках контакта соударяющихся тел, очень велики. Действие ударных сил приводит к значительному изменению за время удара скоростей точек. В результате удара могут возникать остаточные деформации, звуковые колебания, нагревание тел, изменение механических свойств материалов и др. При скоростях соударения, превышающих критические значения, происходит разрушение тел в месте удара. Например, критические скорости для металлов имеют порядок 15 м/с (медь), в то время как для высококачественной стали – 150 м/с.

Мерой механического взаимодействия тел при ударе вместо ударной силы  $\vec{F}$  служит её импульс за время удара (ударный импульс), т. е. величина

$$\int_0^t \vec{F} dt = \vec{F}_{cp} t,$$

где  $\vec{F}_{cp}$  – средняя сила удара;

$t$  – время удара.

За время удара  $t$  изменяется количество движения (импульс) на конечную величину  $\Delta(m \vec{v})$ . Из второго закона Ньютона следует

$$\vec{F}_{cp} t = \Delta(m \vec{v}). \quad (6.1)$$

Если определить время удара, то по формуле (6.1) можно определить среднюю ударную силу  $\vec{F}_{cp}$ .

Рассеяние механической энергии при ударе характеризуется коэффициентом восстановления скорости  $k_c$  или коэффициентом восстановления

энергии  $k_3$ . Коэффициент восстановления скорости определяется выражением

$$k_c = \frac{u_{2n} - u_{1n}}{g_{2n} - g_{1n}}, \quad (6.2)$$

где  $g_{1n}$  и  $g_{2n}$  – проекции скоростей первого и второго тела на линию удара до удара;

$u_{1n}$  и  $u_{2n}$  – проекции скоростей первого и второго тела на линию удара после удара (рисунок 6.1).

Под линией удара понимается общая нормаль к поверхности тел в точке их соприкосновения. На рисунке 6.1 линия удара обозначена как  $nn$ , точки контакта тел – А и В, а центры тяжести тел отмечены как  $O_1$  и  $O_2$ .

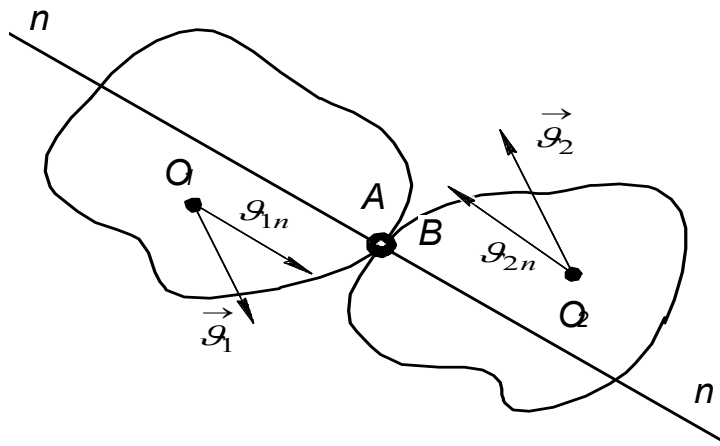


Рисунок 6.1 – Взаимодействие двух тел посредством удара

Коэффициент восстановления энергии  $k_3$  определяется отношением суммарной кинетической энергии тел после удара  $E_2$  к суммарной кинетической энергии тел до удара  $E_1$ :

$$k_3 = \frac{E_2}{E_1}. \quad (6.3)$$

Величины коэффициентов восстановления зависят от физических свойств материалов тел соударения, от их формы и в большей степени от их массы. Для абсолютно упругого удара  $k_3 = 1$ , а для абсолютно неупругого удара  $k_3 = 0$ . В реальных случаях  $0 < k_3 < 1$ .

В данной лабораторной работе рассматривается удар шаров, подвешенных на нитях. При этом один из шаров до удара покоится, его скорость до удара  $\vec{g}_2 = 0$ . Также предполагается, что удар является прямым и центральным, т. е. при ударе центры тяжести лежат на линии удара и их относительная скорость параллельна линии удара.

Для соударяющихся шаров применим закон сохранения импульса. Тогда для абсолютно упругого удара закон сохранения импульса в векторной форме имеет вид:

$$m_1 \vec{g}_1 = m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2, \quad (6.4)$$

а для абсолютно неупругого удара

$$m_1 \vec{g}_1 = (m_1 + m_2) \vec{u}. \quad (6.5)$$

В формулах (6.4) и (6.5)  $m_1, m_2$  – массы ударяющихся шаров;  $\vec{g}_1$  – скорость первого шара до удара;  $\vec{u}_1, \vec{u}_2$  – скорости шаров после упругого удара;  $\vec{u}$  – скорость шаров после абсолютно неупругого удара. Скорости шаров можно определить из закона сохранения энергии и с помощью тригонометрических формул преобразования

$$g_1 = 2\sqrt{gL} \sin(\alpha_0/2); u_1 = 2\sqrt{gL} \sin(\alpha_1/2); u_2 = 2\sqrt{gL} \sin(\alpha_2/2), \quad (6.6)$$

где  $g$  – ускорение свободного падения;

$L$  – расстояние от точки подвеса до центра тяжести шаров;

$\alpha_0$  – угол бросания первого шара;

$\alpha_1$  и  $\alpha_2$  – углы отскока первого и второго шаров.

### **Описание лабораторной установки**

Вид экспериментальной установки представлен на рисунке 6.2.

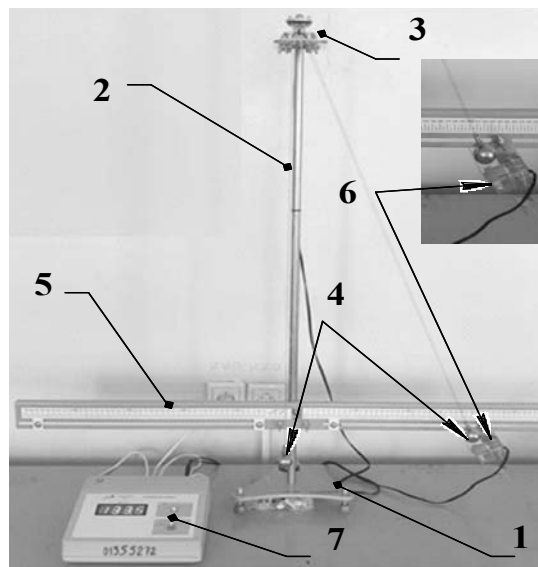


Рисунок 6.2 – Лабораторная установка

Согласно рисунку на основании 1 с регулировочными винтами смонтирована стойка 2, несущая подвеска 3 шаров 4, подвешенных на нитях.

Для отсчета положения шаров имеются две шкалы (линейки) 5. Для фиксации положения налетающего шара используется электромагнит 6, «включение» и «выключение» которого осуществляется тумблером измерительного блока 7 с цифровым микросекундомером.

### ***Программа работы***

*Определение коэффициентов восстановления энергии и скорости для упругого удара.*

1 Подключить секундомер к сети. Подвесить упругие шары и произвести их центровку. Отвести один из шаров на заданный угол бросания  $\alpha_0$  и удерживать его держателем с магнитом.

2 Угол бросания  $\alpha_0$  определить по формуле  $\alpha_0 = \arcsin(r/L)$ , где  $r$  отсчитывается по шкале,  $L$  – длина подвеса (нити) (измеряется линейкой). Полученное значение внести в таблицу 6.1.

3 Отпустить удерживаемый шар. После удара по шкале определить отклонение первого шара  $r_1$  и отклонение второго шара  $r_2$ . Произвести расчет углов  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  по формулам  $\alpha_1 = \arcsin(r_1/L)$  и  $\alpha_2 = \arcsin(r_2/L)$ . По цифровому секундомеру определить время удара  $t$ . Найденные значения  $\alpha_1, \alpha_2$  и  $t$  внести в таблицу 6.1. Обнулить время секундомера тумблером «Сброс».

4 Повторить пп. 2 и 3 еще 4 раза.

5 По формулам (6.6) определить скорости  $\mathcal{V}$ ,  $u_1$  и  $u_2$ . Полученные значения для каждого эксперимента внести в таблицу 6.1.

6 По формуле (6.2), учтя знаки проекции скоростей, определить коэффициент восстановления скоростей  $k_c$ . Найденные значения внести в таблицу 6.1.

7 Рассчитать коэффициент восстановления энергии  $k_s$  для каждого эксперимента по формуле

$$k_s = \frac{m_1 \sin^2(\alpha_1/2) + m_2 \sin^2(\alpha_2/2)}{m_1 \sin^2(\alpha_0/2)}.$$

Массы шаров указаны на лабораторной установке.

Значения коэффициентов внести в таблицу 6.1.

8 Рассчитать средние значения  $\langle k_c \rangle$  и  $\langle k_s \rangle$ .

Таблица 6.1 – Результаты измерений и вычислений коэффициентов восстановления скорости и энергии при упругом ударе

Номер измерения	$\alpha_0$ , град	$\alpha_1$ , град	$\alpha_2$ , град	$t$ , с	$\mathcal{G}_1$ , м/с	$u_1$ , м/с	$u_2$ , м/с	$k_c$	$k_s$	$\langle k_c \rangle$	$\langle k_s \rangle$
1											
2											
3											
4											
5											

*Проверка закона сохранения импульса для упругого удара.*

1 Скорость второго шара при упругом ударе из закона сохранения импульса  $\vec{u}_2 = (m_1 \vec{\mathcal{G}}_1 - m_1 \vec{u}_1) / m_2$  (см. формулу (6.4)). Учтя направления скоростей, рассчитать скорость второго шара  $u_{2T}$  после удара. Значения скоростей  $\mathcal{G}_1$  и  $u_1$  взять из таблицы 6.1.

2 Сравнить рассчитанную скорость  $u_{2T}$  со скоростью  $u_2$ , найденной по углу отскока (см. таблицу 6.1). По результатам сравнения сделать вывод.

*Определение средней силы удара.*

1 На основании данных из таблицы 6.1 рассчитать импульсы первого шара до и после удара. Результаты вычислений внести в таблицу 6.2.

2 Рассчитать изменение импульса шара. Вектор изменения импульса шара определяется как  $\Delta(m \vec{\mathcal{G}}) = m_1 \vec{u}_1 - m_1 \vec{\mathcal{G}}_1$ , где  $m_1 \vec{\mathcal{G}}_1$  – импульс налетающего шара до удара;  $m_1 \vec{u}_1$  – импульс этого шара после удара. Модуль вектора изменения импульса шара рассчитывается с учетом направлений векторов скоростей.

3 По формуле (6.1) определить среднюю силу удара, найти её среднее значение.

Таблица 6.2 – Результаты измерений и вычислений средней силы удара

Номер измерения	$m_1 \mathcal{G}_{1x}$ , кг·м/с	$m_1 u_{1x}$ , кг·м/с	$m_1 u_{1x} - m_1 \mathcal{G}_{1x}$ , кг·м/с	$t$ , с	$F_{cp}$ , Н	$\langle F_{cp} \rangle$ , Н

**Контрольные вопросы**

- 1 Дайте определение удара. Какими явлениями сопровождается удар?
- 2 Какие типы ударов различают?
- 3 Что понимают под ударной силой (силой удара)?

4 Дайте определение импульса тела (материальной точки), механической системы.

5 Что такое замкнутая (изолированная) механическая система?

6 Сформулируйте и запишите закон сохранения импульса.

7 Запишите и поясните закон сохранения импульса и закон сохранения энергии для абсолютно упругого и неупругого ударов.

8 Поясните способ проверки закона сохранения импульса в данной лабораторной работе.

9 Какой смысл имеют коэффициенты восстановления скорости и энергии? От чего зависят значения данных коэффициентов? Какие реальные значения принимают коэффициенты восстановления?

### Список литературы

1 **Савельев, И. В.** Курс общей физики: учебное пособие в 3 т. / И. В. Савельев. – 12-е изд., стер. – Санкт-Петербург; Москва; Краснодар: Лань, 2016. – Т. 1 : Механика. Молекулярная физика. – 432 с.

2 **Детлаф, А. А.** Курс физики / А. А. Детлаф, Б. М. Яворский. – Москва : Академия, 2008. – 718 с.

3 **Трофимова, Т. И.** Курс физики: учебное пособие для втузов / Т. И. Трофимова. – Москва : Высшая школа, 2017. – 560 с.