МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Физические методы контроля»

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Методические рекомендации к курсовому проектированию для студентов направления подготовки 12.03.01 «Приборостроение» очной формы обучения

Могилев 2021

УДК 519.876.2:620.179
ББК 22.18:34.9
М34

Рекомендовано к изданию
учебно-методическим отделом
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Физические методы контроля» «6» января 2021 г., протокол № 5

Составители: канд. техн. наук, доц. А. В. Кушнер;
ст. преподаватель Е. Н. Прокопенко

Рецензент канд. техн. наук, доц. С. Н. Емельянов

Методические рекомендации составлены в соответствии с рабочей программой по дисциплине «Математическое моделирование физических процессов».

В методических рекомендациях кратко изложены теоретические сведения, необходимые для выполнения курсовой работы и требования к оформлению.

Учебно-методическое издание

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Ответственный за выпуск С. С. Сергеев

Корректор А. А. Подошевко

Компьютерная верстка Н. П. Полевничая

Подписано в печать . Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Печать трафаретная. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 26 экз. Заказ №

Издатель и полиграфическое исполнение:
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования
«Белорусско-Российский университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/156 от 07.03.2019.
Пр-т Мира, 43, 212022, г. Могилев.

Содержание

1 Общие указания

1.1 Цель и задачи курсовой работы

Выполнение курсовой работы по курсу «Математическое моделирование физических процессов» является важным этапом при подготовке квалифицированных специалистов направления подготовки 12.03.01 «Приборостроение» и может рассматриваться как подготовительный этап к изучению ряда специальных дисциплин на последующих курсах.

Цель курсовой работы заключается в практическом освоении общих вопросов теории моделирования, методов построения математических моделей и формирования описания объектов математических моделей для проведения вычислительных экспериментов и решения оптимизационных задач.

Выполнение курсовой работы ставит следующие задачи:

– приобрести умение пользоваться литературой, справочными материалами, в которых освещаются те или иные вопросы математического моделирования;

– закрепить и расширить знания основ построения математических моделей;

– закрепить знания правил оформления документации в соответствии со стандартами;

– подготовить студентов к самостоятельному решению задач, связанных с построением математических моделей физических процессов.

1.2 Тематика курсовой работы

Тематика курсовых работ должна быть актуальной, соответствовать современному состоянию и перспективам развития математического моделирования. Темой курсовой работы является разработка математической модели и проведения имитационного моделирования.

Примерная тематика курсовых работ:

– разработка аналитической модели фрагмента измерительного тракта датчика физической величины и проведение имитационного моделирования;

– разработка модели на основе пассивного эксперимента и проведение имитационного моделирования;

– разработка модели на основе активного эксперимента и проведение имитационного моделирования.

1.3 Содержание курсовой работы и требования к ее оформлению

Курсовая работа выполняется в соответствии с заданием, которое включает краткое описание объекта, подлежащего моделированию, его схематизацию, основные исходные данные, условия функционирования объекта, состав графической и расчетной части работы, а также этапы ее выполнения.

Расчетно-пояснительная записка включает титульный лист, задание на курсовую работу, содержание, вводную часть, расчетную часть и список использованных источников.

Во вводной части расчетно-пояснительной записки должен быть приведен анализ исходных данных, освещены возможные пути построения математической модели.

В расчетной части необходимо изложить механизм получения математической модели, строго соблюдая при этом общепринятую этапность моделирования и ход имитационного моделирования. При необходимости, получаемые промежуточные соотношения должны поясняться с помощью схем, графиков и т. п.

Построение пояснительной записки, изложение ее текста, а также оформление иллюстраций и приложений должны осуществляться согласно ГОСТ 2.105–95.

Пояснительная записка выполняется на листах белой бумаги формата А4. Шрифтом Times New Roman 14 пт основной и 12 пт дополнительный текст.

Изложение материала в записке должно быть кратким и выполнено техническим языком. В тексте не должно быть общих фраз и общих рекомендаций.

Не допускаются сокращения слов (кроме общепринятых), а терминология должна строго соответствовать принятой в учебниках.

Расчетные формулы должны записываться в индексной форме с полной экспликацией и сквозной или пораздельной нумерацией формул. Таблицы должны иметь наименование и нумерацию. Все используемые в работе величины должны быть выражены в системе СИ.

Список литературы должен содержать лишь те источники, которые использованы при выполнении и на которые есть ссылки в тексте записки. Оформление списка литературы должно соответствовать принятым правилам.

В приложения необходимо включать распечатки программ на ЭВМ, таблицы, графики, алгоритмы, по каким-либо причинам не включенные в основную часть записки.

2 Методические указания к выполнению отдельных этапов работы

2.1 Анализ исходных данных

Анализ объекта моделирования выполняется с целью выявления существенных параметров объекта и факторов, влияющих на его работу. На этом этапе уясняются физические принципы и законы, описывающие поведение объекта моделирования, вводится необходимая формализация и идеализация. На этом этапе необходимо выделить входные $\overline{X}$ и выходные $\overline{Y}$ параметры объекта, внутренние параметры $\overline{H}$ и параметры, характеризующие воздействия внешней среды $\overline{V}$ (рисунок 2.1).

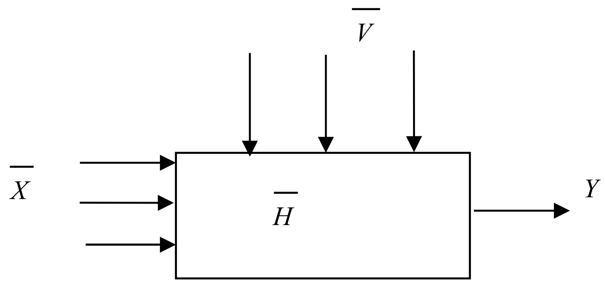

Рисунок 2.1 – Обобщенная модель

2.2 Построение модели

2.2.1 Построение аналитической модели. Построение аналитической модели основывается на использовании физических законов, описывающих поведение объекта моделирования. Аналитическая модель должна быть построена в виде алгебраических или дифференциальных уравнений или систем уравнений, связывающих выходные параметры объекта моделирования со входными параметрами, внутренними параметрами и параметрами внешней среды. Если модель динамическая, то в качестве одной из независимых переменных выступает время *t*.

$$\overline{Y} = F(\overline{X}, \overline{H}, \overline{V}, t) \qquad (2.1)$$

После построения модели, необходимо провести проверку на логическую непротиворечивость. Для этого можно воспользоваться методом проверки размерностей. Кроме этого, все выделенные существенные параметры должны входить в математическую формулировку модели.

По результатам построения модели решается прямая задача анализа. Фактически она представляет передаточную характеристику моделируемой части измерительного тракта. Результаты решения прямой задачи анализа описываются следующим образом: указывается минимальное и максимальное значение выходного параметра, диапазон линейности характеристики и т. д.

2.2.2 Построение модели на основе пассивного эксперимента. Исходными данными для построения модели на основе пассивного эксперимента являются массивы значений факторов $\overline{X}_1, \overline{X}_2, ..., \overline{X}_n$ и массив значений выходного параметра $\overline{Y}$, которые представляют собой выборки случайных величин.

Обработка данных производится по следующей схеме.

Все выборки должны принадлежать нормальному распределению. Для этого в начале производят группирование данных массивов. Вся область изменения выборки разбивается на k частей:

$$k = \text{целая часть}\,(1 + 3{,}2 \cdot \lg(N)), \tag{2.2}$$

где N – объем выборки.

Далее определяют длину интервала

$$\Delta x = \frac{(x_{\max} - x_{\min})}{k}. \tag{2.3}$$

Строится массив относительных частот

$$\nu_j = \frac{n_j}{N}, \tag{2.4}$$

где j – номер интервала группировки;

n_j – количество элементов выборки, значения которых попадают в j-й интервал.

Полученный массив относительных частот используется для построения гистограммы частот и статистических оценок моментов распределения:

$$\overline{x} = \sum\nolimits_{j=0}^{k} \overline{x}_j \nu_j; \tag{2.5}$$

$$S_x^2 = \sum\nolimits_{j=0}^{k} (\overline{x}_j - \overline{x})^2 \nu_j; \tag{2.6}$$

$$\mu_3 = \sum\nolimits_{j=0}^{k} (\overline{x}_j - \overline{x})^3 \nu_j; \tag{2.7}$$

$$\mu_4 = \sum\nolimits_{j=0}^{k} (\overline{x}_j - \overline{x})^4 \nu_j; \tag{2.8}$$

$$\beta_1 = A_x^2 = \left(\frac{\mu_3}{S_x^3}\right)^2; \tag{2.9}$$

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{S_x^4}. \quad (2.10)$$

Коэффициенты β_1 и β_2 необходимы для определения близости эмпирического распределения к нормальному по номограмме (рисунок 2.2).

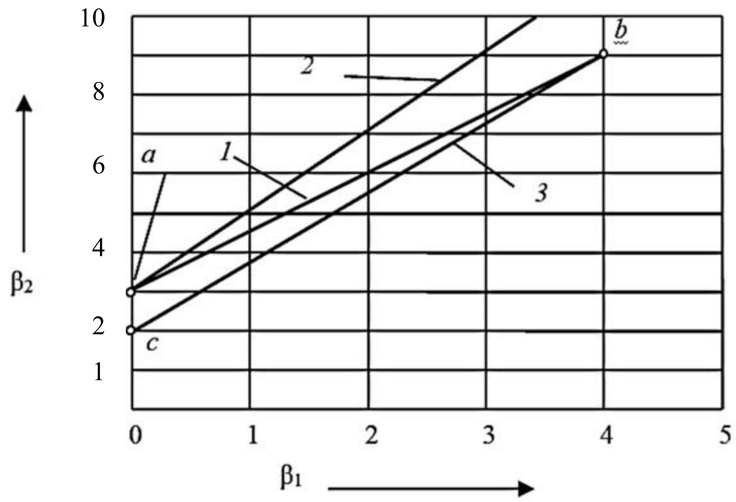

Рисунок 2.2 – Номограмма оценки близости эмпирического и теоретических распределений

Нормальному распределению соответствует точка *a*, экспоненциальному – точка *b*, равномерному – точка *c*. Линия *1* соответствует гамма-распределению, *2* – логарифмически нормальному распределению, область между *2* и *3* – бета-распределению.

Для проведения регрессионного анализа необходимо, чтобы выборки исходных данных принадлежали нормальному распределению. Если это не так, то дальнейший анализ не проводится.

После установления близости распределения выборок к нормальному, осуществляется корреляционный анализ результатов статистических испытаний.

Рассчитываются коэффициенты парной корреляции:

$$r_{x_i,x_j} = \frac{1}{(N-1)S_{x_i}S_{x_j}}\left(\sum_{u=1}^{N} x_{iu}, x_{ju} - N\overline{x}_i, \overline{x}_j\right), \quad (2.11)$$

где x_{iu}, x_{ju} –значения переменных x_i и x_j в u-м опыте;

$\overline{x}_i$, $\overline{x}_j$ – выборочные средние переменных;

S_{xi}, S_{xj} – среднеквадратичные отклонения.

Близость коэффициента корреляции к единице или минус единице обозначает сильную связь между двумя переменными и, наоборот, близость к нулю обозначает отсутствие статистически значимой связи.

Поэтому если коэффициент корреляции между выходным параметром и фактором близок к нулю, то данный фактор можно исключить из рассмотрения в модели.

С другой стороны, наличие сильной связи между двумя факторами приводит к невозможности разделить их влияние в регрессионной модели. Поэтому один из таких факторов также исключается из модели.

После определения числа факторов, учитываемых в модели, составляется уравнение регрессии. Если факторов два и более, то составляется линейная модель, учитывающая влияние самих факторов и их парных взаимодействий в виде

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_n x_n + b_{12} x_1 x_2 + b_{13} x_1 x_3 + \dots +$$

$$+ b_{1n} x_1 x_n + \dots + b_{n-1} x_{n-1} x_n. \qquad (2.12)$$

Если учитывается только один фактор, то исследуются три вида моделей:

1) линейная

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x; \qquad (2.13)$$

2) параболическая

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x + b_2 x^2; \qquad (2.14)$$

3) нелинейная

$$y = \frac{1}{1 + e^{b_1 \cdot x + b_0}}. \qquad (2.15)$$

Для определения коэффициентов регрессии составляется матрица Фишера, содержащая сочетания базисных функций. Для линейной многофакторной модели вектор базисных функций имеет вид:

$$\overline{f}(\overline{X}) = (1, x_1, x_2, \dots, x_n, x_1 x_2, x_1 x_3, \dots, x_1 x_n, \dots, x_{n-1} x_n), \qquad (2.16)$$

для линейной однофакторной модели

$$\overline{f}(\overline{X}) = (1, x), \qquad (2.17)$$

для параболической однофакторной модели

$$\overline{f}(\overline{X}) = (1, x, x^2). \qquad (2.18)$$

Матрица Фишера содержит d строк и столбцов, где d – количество искомых коэффициентов регрессии:

$$\Phi = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{N} f_{i0}^2 & \sum_{i=1}^{N} f_{i1} f_{i1} & \dots & \sum_{i=1}^{N} f_{id} f_{i0} \\ \sum_{i=1}^{N} f_{i0} f_{i1} & \sum_{i=1}^{N} f_{i1}^2 & \dots & \sum_{i=1}^{N} f_{id} f_{i1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{i=1}^{N} f_{i0} f_{id} & \sum_{i=1}^{N} f_{i1} f_{id} & \dots & \sum_{i=1}^{N} f_{id}^2 \end{bmatrix}, \tag{2.19}$$

где f_{ij} – элементы вектора базисных функций.

Например, для параболической регрессии матрица Фишера имеет вид:

$$\Phi = \begin{bmatrix} N & \sum_{i=1}^{N} x_i & \sum_{i=1}^{N} x_i^2 \\ \sum_{i=1}^{N} x_i & \sum_{i=1}^{N} x_i^2 & \sum_{i=1}^{N} x_i^3 \\ \sum_{i=1}^{N} x_i^2 & \sum_{i=1}^{N} x_i^3 & \sum_{i=1}^{N} x_i^4 \end{bmatrix}.$$

Фактически матрица Фишера – это матрица коэффициентов в системе линейных уравнений для определения коэффициентов регрессии. Вектор-столбец свободных членов в этой системе имеет вид:

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{N} y_i f_{i0} \\ \sum_{i=1}^{N} y_i f_{i1} \\ \dots \\ \sum_{i=1}^{N} y_i f_{id} \end{bmatrix}. \tag{2.20}$$

Решение этой системы и дает значение коэффициентов регрессии.

Для нелинейной регрессии сначала проводится лианеризация исходных данных, а затем рассчитываются коэффициенты линейной регрессии.

Далее рассчитываются остаточные дисперсии для каждой регрессионной модели:

$$S_{ост}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2}{N - n_B}, \tag{2.21}$$

где n_b – количество коэффициентов в уравнении регрессии.

Из всех моделей выбирается та, для которой остаточная дисперсия минимальна.

Для каждого коэффициента рассчитывается его дисперсия, как

$$S_{bj}^2 = S_{ост}^2 \cdot C_{jj}, \qquad (2.22)$$

где C_{jj} – диагональные элементы матрицы $C = \Phi^{-1}$.

Проверяется значимость коэффициентов по критерию Стьюдента. Для этого рассчитывается значение критерия

$$t_j = \frac{|b_j|}{S_{b_j}}. \qquad (2.23)$$

Полученный критерий сравнивается с табличным значением критерия Стьюдента t, выбираемого по уровню значимости $\alpha = 1 - p$ и количеству степеней свободы $\nu = N$.

Если $t_j > t$, то данный коэффициент значимо отличается от нуля. В противном случае коэффициент незначимый и может быть исключен из модели. Для значимых коэффициентов определяются доверительные интервалы, величина которых определяется по формуле

$$\Delta_{b_j} = t_{\alpha,\nu} \cdot S_{b_j}. \qquad (2.24)$$

На последнем этапе определяется адекватность полученной модели по критерию Фишера.

Рассчитывается дисперсия среднего выходного параметра

$$S_y^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2, \qquad (2.25)$$

где $\bar{y}$ – выборочное среднее значений выходного параметра.

Вычисляется наблюдаемое значение критерия Фишера:

$$F_{набл} = \frac{S_y^2}{S_{ост}^2}. \qquad (2.26)$$

Если при этом

$$F_{набл} \geq F_{\alpha;N-1;N-nb},$$

где $F_{\alpha;\,N-1;\,N-nb}$ – квантиль F-распределения со степенями $\nu_1 = N - 1$ и $\nu_2 = N - n_b$;

n_b – количество значимых коэффициентов регрессии;

то уравнение регрессии адекватно.

Далее, так же как и для аналитической модели, решается прямая задача анализа.

2.2.3 Построение модели на основе активного эксперимента. Цель планирования активного эксперимента – получение максимума информации по результатам минимального числа экспериментов.

Необходимо составить план дробного факторного эксперимента (ДФЭ) для построения линейной многофакторной модели, в предположении, что эффектами сочетаний трех, четырех и т. д. факторов можно пренебречь. Также можно пренебречь любыми парными взаимодействиями.

План ДФЭ составляется по следующей процедуре.

Сначала определяется структура уравнения регрессии и определяется степень дробности ДФЭ.

Выбираются ведущие факторы, и для них строится матрица спектра плана. Число k ведущих факторов принимается равным разности между количеством факторов n и степенью дробности ДФЭ. Для выбранных ведущих факторов строят план полного факторного эксперимента ПФЭ 2^k.

Строится матрица спектра плана, часть которой составляет построенная матрица спектра плана ПФЭ 2^k, оставшаяся часть составляется на основе генерирующих соотношений.

Полученный спектр плана проверяется на пригодность. Для этого строится матрица базисных функций и проверяется, нет ли в ней полностью совпадающих или полностью противоположных столбцов. Если таких столбцов нет, то полученный план пригоден для использования. В противном случае последовательно выполняются следующие процедуры:

– выбираются иные генерирующие соотношения;

– изменяется набор ведущих факторов;

– уменьшается степень дробности плана.

После составления полной матрицы планирования ДФЭ, необходимо получить у преподавателя значения результатов проведения эксперимента.

В каждой точке плана проводится от двух до пяти параллельных опытов.

Далее определяется выборочное среднее результатов в каждой точке плана:

$$\overline{y}_i = \frac{1}{m} \cdot \sum\nolimits_{u=1}^{m} y_{iu}, \tag{2.27}$$

где m – количество параллельных опытов в каждой точке плана.

Рассчитывается дисперсия воспроизводимости каждого опыта:

$$S_i^2 = \frac{1}{m-1} \cdot \sum\nolimits_{u=1}^{m} (y_{iu} - \overline{y}_i)^2, \tag{2.28}$$

и дисперсия воспроизводимости эксперимента

$$S_y^2 = \frac{1}{N} \cdot \sum\nolimits_{u=1}^{m} S_i^2, \tag{2.29}$$

где N – количество точек плана.

Любой коэффициент уравнения регрессии b_j определяется по формуле

$$b_j = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_{ji}\bar{y}_i \ . \tag{2.30}$$

Определяется значимость коэффициентов по критерию Стьюдента, для чего определяется дисперсия оценок коэффициентов регрессии:

$$S_{b_j}^2 = \frac{S_y^2}{N \cdot m}. \tag{2.31}$$

Далее рассчитывается критерий Стьюдента для каждого коэффициента

$$t_j = \frac{|b_j|}{S_b}. \tag{2.32}$$

Рассчитанный критерий сравнивается с табличным t_T, выбираемым по уровню значимости α = 0,01 и числу степеней свободы $v = N(m - 1)$. Те коэффициенты, для которых

$$t_j < t_J \tag{2.33}$$

исключаются из модели.

Далее проверяется адекватность полученного уравнения по критерию Фишера.

Рассчитывается дисперсия адекватности

$$S_{ад}^2 = \frac{m}{N - N_b}\sum_{i=1}^{N}\left(\bar{y}_i - \hat{y}_i\right)^2, \tag{2.34}$$

где N_b – количество значимых коэффициентов регрессии.

Рассчитывается значение критерия

$$F = \frac{S_{ад}^2}{S_y^2}. \tag{2.35}$$

Полученное значение сравнивается с табличным значением критерия Фишера F_T, определяемым в зависимости от уровня значимости $\alpha = 1 - p$ и числа степеней свободы k_1 и k_2, с которыми определялись дисперсии $S_{ад}^2$ и S_y^2:

$$k_1 = N - N_b; \ \ k_2 = N(m-1). \tag{2.36}$$

Если $F < F_T$, то полученное уравнение регрессии адекватно.

Далее, так же как и для аналитической модели, решается прямая задача анализа.

2.3 Имитационное моделирование

Имитационное моделирование ставит своей целью выяснение степени влияния на поведение объекта случайного характера его параметров. В задании указываются параметры, поведение которых носит случайный характер. Значение таких параметров описывается функцией распределения вероятностей.

Имитационное моделирование проводится по методу Монте-Карло. Этот метод заключается в использовании случайных чисел для моделирования различных объектов, ситуаций и физических явлений.

Численный эксперимент по методу Монте-Карло проводится в следующей последовательности:

– генерируется N чисел с соответствующим законом распределения для каждого стохастического параметра модели;

– вычисляется N значений выходного параметра модели в зависимости от значений случайных параметров в M точках на всем диапазоне варьирования входного параметра. Эта выборка мощностью $N \cdot M$ и будет результатом проведения численного эксперимента.

Наиболее часто используемыми законами распределения являются равномерный и нормальный. Равномерно распределенные числа в диапазоне [0,1] генерируются алгоритмически средствами Matcad. Если необходимо получить случайные числа с равномерным распределением в диапазоне [a, b], то пользуются формулой для масштабирования $Z_i = a + (b-a) \cdot X_i$. Случайные числа с нормальным распределением могут быть получены с помощью следующих формул:

$$R_i' = \cos(2\pi \cdot X_{i+1})\sqrt{2 \cdot \ln\left(\frac{1}{X_i}\right)};$$

$$R_i'' = \sin(2\pi \cdot X_{i+1})\sqrt{2 \cdot \ln\left(\frac{1}{X_i}\right)}.$$

При этом получается сопряженная пара чисел, имеющих среднее значение $m_R = 0$ и среднеквадратичное отклонение $\sigma_R = 1$. Для получения случайных чисел с заданным математическим ожиданием m и средним квадратичным отклонением σ используется формула

$$Z_i = m + R_i \cdot \sigma,$$

или можно воспользоваться формулой

$$Z_i = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_i - m)^2}{2\sigma^2}}.$$

Далее один из факторов разработанной модели задается выборкой полученных случайных чисел с заданным законом распределения, после чего проводится численный эксперимент, результатом которого является выборка мощностью $N{\cdot}M$.

В зависимости от того является численная модель однофакторной или многофакторной, то либо определяют гистограмму распределения результатов численного моделирования, либо в каждой точке диапазона варьирования входного параметра определяют выборочное среднее и выборочную дисперсию.

Гистограмма распределения результатов численного моделирования строится следующим образом: при большом объеме выборки (понятие «большой объем» зависит от целей и методов обработки, в данном случае будем считать n большим, если $n > 40$) в целях удобства обработки и хранения сведений прибегают к группированию данных в интервалы. Количество интервалов следует выбрать так, чтобы в необходимой мере отразилось разнообразие значений параметра в совокупности и в то же время закономерность распределения не искажалась случайными колебаниями частот по отдельным разрядам. Существуют нестрогие рекомендации по выбору количества y и размера h таких интервалов, в частности:

– в каждом интервале должно находиться не менее 5–7 элементов. В крайних разрядах допустимо всего два элемента;

– количество интервалов не должно быть очень большим или очень маленьким. Минимальное значение y должно быть не менее 6–7. При объеме выборки, не превышающем несколько сотен элементов, величину y задают в пределах от 10 до 20. Для очень большого объема выборки ($n > 1000$) количество интервалов может превышать указанные значения. Некоторые исследователи рекомендуют пользоваться соотношением $y = 1{,}441\ln(n) + 1$;

– при относительно небольшой неравномерности длины интервалов удобно выбирать одинаковыми и равными величине

$$h = (x_{\max} - x_{\min}) / y,$$

где $x_{\max}$, $x_{\min}$ – максимальное и минимальное значения параметра.

При существенной неравномерности закона распределения длины интервалов можно задавать меньшего размера в области быстрого изменения плотности распределения;

– при значительной неравномерности лучше в каждый разряд назначать примерно одинаковое количество элементов выборки. Тогда длина конкретного интервала будет определяться крайними значениями элементов выборки, сгруппироваными в этот интервал, т. е. будет различна для разных интервалов (в этом случае при построении гистограммы нормировка по длине интервала обязательна – в противном случае высота каждого элемента гистограммы будет одинакова).

Группирование результатов наблюдений по интервалам предусматривает: определение размаха изменений параметра x; выбор количества интервалов и их величины; подсчет для каждого i-го интервала $[x_i - x_i{+}1]$ частоты n_i или относительной частоты (частости ni) попадания варианты в интервал. В результате формируется представление ЭД в виде *интервального* или *статистического ряда*.

Графически статистический ряд отображают в виде гистограммы (рисунок 2.3).

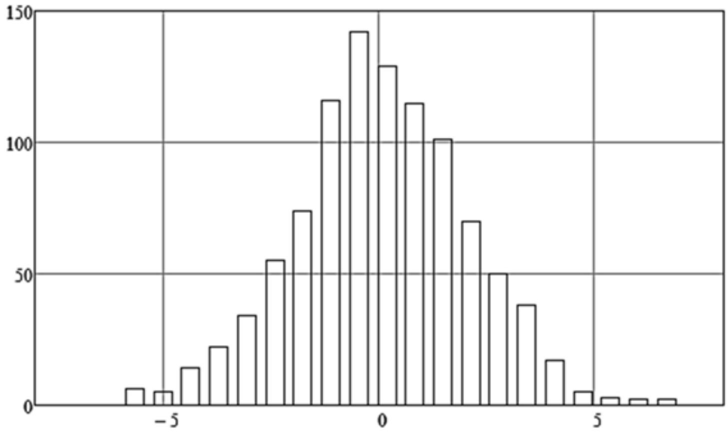

Рисунок 2.3 – Гистограмма распределения

В случае многофакторного эксперимента один из факторов меняется в определенном диапазоне и как минимум один фактор меняется случайным образом. На основе полученных данных в результате численного эксперимента формируется выборка размерностью $N{\cdot}M$.

Вычисляют выборочное среднее:

$$M_i = \frac{\sum_{j=1}^{M} Y_{i,j}}{N}$$

и выборочную дисперсию

$$D_i = \frac{\sum_{j=1}^{M} (Y_{i,j} - M_i)}{N-1}.$$

На основании этой выборки получают графики выборочного среднего и выборочную дисперсию.

В выводе необходимо проанализировать результаты имитационного моделирования.

Список литературы

1 **Тарасик, В. П.** Математическое моделирование технических систем : учебник / В. П. Тарасик. – Минск : Новое знание ; Москва : ИНФРА-М, 2020. – 592 с.

2 **Казарян, М. Л.** Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ / М. Л. Казарян, И. Д. Музаев, Е. Г. Гиоева. – Москва: ИНФРА-М, 2018. – 150 с.

3 **Веников, В. А.** Теория подобия и моделирования: применительно к задачам электроэнергетики: учебник для студентов вузов, обучающихся по специальности «Кибернетика электрических систем» / В. А. Веников, Г. В. Веников. – 4-е изд. – Москва: ЛИБРОКОМ, 2014. – 439 с.

4 **Краснощеков, П. С.** Принципы построения моделей / П. С. Краснощеков, А. А. Петров. – Москва : МГУ, 1983. – 264 с.

5 **Смит, Дж. М.** Математическое и цифровое моделирование для инженеров и исследователей / Дж. М. Смит. – Москва: Машиностроение, 1980. – 271 с.