УДК 531.3; 796.02

А. Е. Покатилов, М. А. Киркор, В. И. Ильенков

ДЕФОРМАЦИЯ УПРУГОЙ БАЛКИ ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ С БИОМЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ

UDC 531.3; 796.02

A. E. Pokatsilov, M. A. Kirkor, V. I. Ilienkov

DEFORMATION OF AN ELASTIC SUPPORT DURING INTERACTION WITH THE BIOMECHANICAL SYSTEM

Аннотация

Исследована статическая и динамическая деформация спортивного снаряда при биомеханическом взаимодействии человека с упругой балкой в большом обороте назад на перекладине. Сочетание методов экспериментального определения значений характеристик движения человека и теоретического анализа деформации снаряда на основании законов механики позволило получить ряд математических моделей колебания упругой балки, моделирующей спортивный снаряд. В конечном итоге колебания полной системы, включающей спортивный снаряд и человека, можно представить в виде вынужденных колебаний одной из типовых балок, применяемых в теории упругости для схематизации при вычислении упругих перемещений конструкций.

Ключевые слова:

спортивный снаряд, вынужденные колебания, приведение масс, опора, деформация.

Abstract

Static and dynamic deformation of a gymnastic apparatus is investigated during biomechanical interaction of a person with an elastic support in a big turn back on a horizontal bar. The combination of methods of experimental definition of values of characteristics of person's movement with the theoretical analysis of deformation of a gymnastic apparatus based on the mechanics laws has allowed receiving a number of mathematical models of fluctuation of an elastic support. Finally, the fluctuations of the complete system including a gymnastic apparatus and a person can be presented in the form of forced fluctuations of one of typical beams applied in the theory of elasticity for schematization in the calculation of elastic displacements of the structure.

Key words:

vehicles, network of streets, road signs, speed, kinetic energy.

Введение

Наличие объективной информации о технике спортивных упражнений является одним из факторов, способствующих повышению эффективности учебно-тренировочного процесса. Особую значимость это положение приобретает в спортивной и художественной гимнастике, акробатике, прыжках на батуте и в воду и в ряде других видах спорта, в которых техническая подготовка доминирует над остальными сторонами спортивной подготовки [1].

В настоящее время можно выделить два основных направления, по которым осуществляется исследование техники спортивных упражнений. К первому относится достаточно широко распространенный метод анализа кинематической и динамической структуры двигательных действий, ко второму – синтез движений человека в имитационном моделировании на ЭВМ [2].

© Покатилов А. Е., Киркор М. А., Ильенков В. И., 2016

Электронная библиотека Белорусско-Российского университета

Одним из сдерживающих факторов в обоих направлениях исследования является отсутствие моделей динамической деформации спортивных снарядов в тех случаях, когда они выполняют роль опоры, проявляя при этом упругие свойства. Отметим, что при развитии теории упругости были исследованы силовые факторы и перемещения, возникающие в телах почти всех мыслимых форм при действии самых разнообразных нагрузок. Такие разделы механики, как сопротивление материалов, теория механизмов и машин, строительная механика и детали машин, давно и широко используют аналитические методы определения сил и перемещений, возникающих в различных системах [3–6]. Именно на основе этих методов можно создать модели для проведения полного анализа движения спортсмена в условиях упругой опоры. Кроме того, полученные модели позволяют выявить физическую картину взаимодействия биомеханической системы со спортивным снарядом и раскрывают все закономерности влияния опоры на движение человека [7, 8].

Статическая деформация спортивного снаряда

Уточним некоторые моменты, необходимые для выбора способов определения деформации спортивного снаряда. Во-первых, нагрузка, им испытываемая, является динамической в большую часть времени выполнения спортивного упражнения. Во-вторых, она чаще всего носит колебательный характер, даже удар в конечном итоге вызывает колебания снаряда. С точки зрения теории эти колебания являются параметрическими, тем не менее, выполнив силовой анализ на основе экспериментальных данных, можно применить методику расчета как для вынужденных колебаний спортивного снаряда, нагруженного возмущающими силами с произвольным законом изменения. Для начала рассмотрим статическое нагружение спортивного снаряда и сделаем определенные выводы.

На рис. 1 показана схема перекладины при тестировании на прочность, которая состоит из гладкого, шлифованного грифа диаметром 28 мм, закрепленного горизонтально на двух стойках с помощью растяжек. Ее можно устанавливать на различную высоту в зависимости от упражнения – от 120 до 240 см. Перекладина олимпийского образца имеет пустотелые стойки, которые крепят к полу с помощью крюков [9].

Представим гриф перекладины в виде различных типов балок, чаще всего используемых для анализа деформации в механике [3, 5].

На практике модуль упругости первого рода E грифа для каждого конкретного снаряда может варьироваться. Об этом свидетельствуют данные, приведенные в [8, 10]. Например, в [8] исследовалось поведение перекладины с динамической деформацией порядка 100 мм, а в [10] рассматривается поведение «мягких» грифов перекладины, прогибающихся до 250…300 мм. Поэтому выполним расчеты с учетом интервала, в котором изменяется модуль [3].

Для определения прогиба грифа необходимо найти значение осевого момента инерции поперечного сечения относительно главных центральных осей:

$$I_{y(x)} = \frac{\pi d^4}{64}, \qquad (1)$$

где d – диаметр грифа, мм.

Все возможные случаи и результаты расчетов представлены в табл. 1, анализ которой показывает, что при статическом нагружении эквивалентной моделью спортивного снаряда является статически определимая двухопорная однопролетная балка.

Белорусско-Российского университета

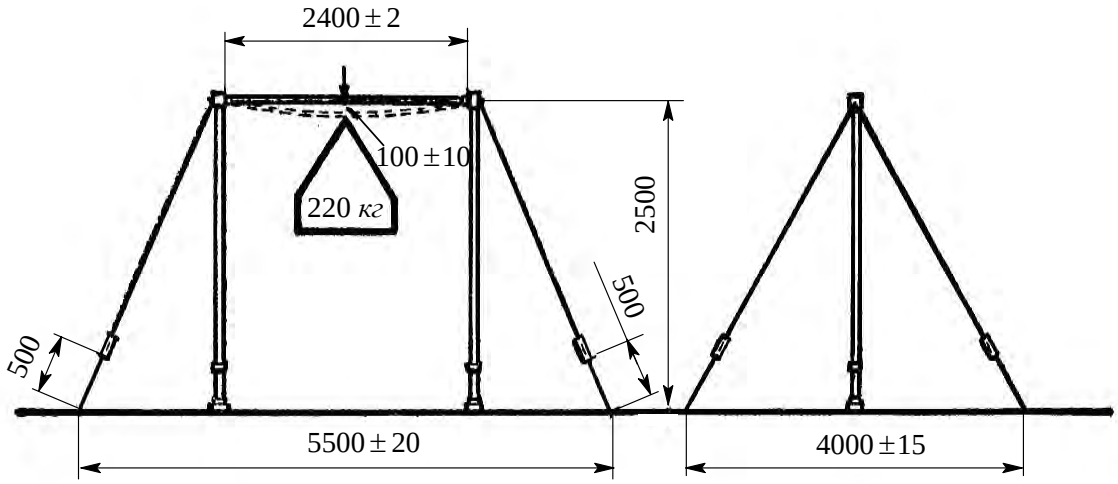
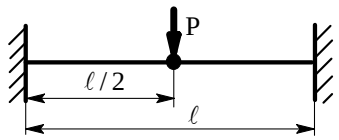
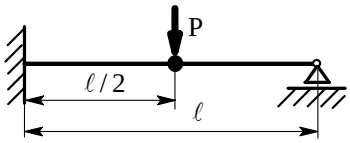
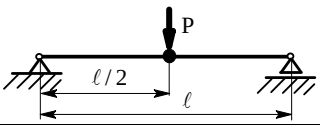


Рис. 1. Схема перекладины

Табл. 1. Расчет стрелы прогиба типовых балок

Номер балки	Схема балки	Стрела прогиба	Модуль упругости, МПа	Прогиб, мм
1		$q_{max} = -\frac{P\ell^3}{192EI}$	$E_{min} = 1{,}9 \cdot 10^5$ $E_{max} = 2{,}2 \cdot 10^5$	$q_1 = -27{,}01$ $q_2 = -23{,}41$
2		$q_{max} = -\frac{7P\ell^3}{768EI}$	$E_{min} = 1{,}9 \cdot 10^5$ $E_{max} = 2{,}2 \cdot 10^5$	$q_1 = -47{,}43$ $q_2 = -40{,}97$
3		$q_{max} = -\frac{P\ell^3}{48EI}$	$E_{min} = 1{,}9 \cdot 10^5$ $E_{max} = 2{,}2 \cdot 10^5$	$q_1 = -108{,}42$ $q_2 = -93{,}64$

Для вывода необходимых уравнений примем в качестве гипотезы, что при статическом и динамическом нагружении наиболее близким к реальному поведению спортивного снаряда является поведение балки № 3. Влиянием стоек и растяжек пренебрегаем.

Динамическая деформация спортивного снаряда

Для решения сложных динамических задач, подобных задаче колебания спортивного снаряда, приходится упрощать расчетную модель уменьшением числа степеней свободы. Одним из способов образования конечномерных моделей является метод приведения масс [11].

Расчетная схема показана на рис. 2. Выберем за точку приведения середину между руками 1 и 2 под номером 3.

Приравняем точное значение круговой частоты ω_T к значению частоты системы с одной степенью свободы,

имеющей приведенную массу $m_{пр}$ в выбранной точке [5]. Получим

$$\omega_T = \sqrt{\frac{c}{m_{пр}}} = \sqrt{\frac{1}{m_{пр}\delta_{33}}}, \qquad (2)$$

где c – жесткость балки, Н/м; δ_{33} – единичное перемещение для точки 3 от действия единичной силы R = 1 в этой же точке, м.

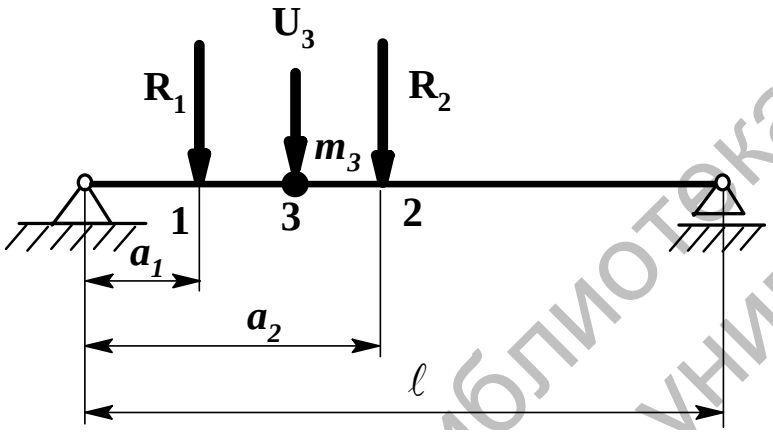


Рис. 2. Расчетная схема опоры с приведением массы посередине между руками

Зная частоту колебаний, находим выражение для приведенной массы:

$$m_{пр} = \frac{1}{\omega_T^2 \delta_{33}}. \qquad (3)$$

Значение круговой частоты колебаний найдем по известной формуле [12] для данной балки как

$$\omega_T \approx \frac{100EI}{m_0 \ell^3}, \qquad (4)$$

где m_0 – масса балки, кг; ℓ – длина балки, м.

Поперечное сечение грифа перекладины или брусьев разной высоты представляет собой круг, что означает равенство осевых моментов инерции сечения и, соответственно, частот колебаний во взаимно перпендикулярных плоскостях.

Отметим, что рабочая часть перекладины и женских брусьев не имеет возможности вращаться – вращается лишь упругая линия грифа или жерди. Такое движение в механике называется обращением [13]. Поэтому уравнение, описывающее вращательное движение балки, отсутствует и колебания спортивного снаряда можно описать двумя независимыми выражениями, отражающими колебания в двух взаимно перпендикулярных плоскостях [14].

Для вывода уравнения колебания опоры выберем метод сил [5]. Анализ колебаний спортивного снаряда выполним по точке, расположенной посередине между руками спортсмена.

Рассмотрим случай действия двух рук на опору в точках 1 и 2. Силы, возникающие от действия рук, равны друг другу: $R_1 = R_2$. Масса балки приведена к точке 3 (середина между руками) и обозначена как m_3 (расчетная схема представлена на рис. 2).

С использованием метода сил определим прогиб в точке 3:

$$q_3 = R_1\delta_{31} + R_2\delta_{32} + U_3\delta_{33}, \qquad (5)$$

Электронная библиотека Белорусско-Российского университета

где δ_{31}, δ_{32} и δ_{33} – единичные перемещения, м; U_3 – сила инерции, Н, которая определяется по выражению

$$U_3 = -m_3\ddot{q}_3, \qquad (6)$$

где $\ddot{q}_3$ – ускорение точки 3, м/с^2.

Действие рук на снаряд вызывает колебания опоры. Возникающие реакции в контакте рука-опора запишем как [7]

$$R_1 = R_2 = -0{,}5m_{БМС}\ddot{q}_3 + 0{,}5R_{10}^{БМС}, \qquad (7)$$

где $m_{БМС}$ – масса тела спортсмена, кг.

Эти силы разбиваются на две части: одна непосредственно отражает деформацию спортивного снаряда (выделенная опора), а вторая, обозначенная как $R_{10}^{БМС}$, тоже в явном виде отражает, но уже движение самого человека (выделенная по силе биомеханическая система).

Отметим, что уравнение (7) дает возможность рассчитать силы R_1 и R_2, действующие на гриф перекладины со стороны спортсмена, через реакции, влияющие на самого человека и определяемые со стороны опоры. Необходимо учитывать, что выражения для опорных реакций, подставляемые в формулу (7), различаются по плоскостям: в вертикальной плоскости учитывают силы тяжести, отсутствующие в горизонтальной.

Тогда уравнение (5) для перемещений точки 3, являющейся средней между руками, примет вид:

$$q_3 = \left(-0{,}5m_{БМС}\ddot{q}_3 + 0{,}5R_{10}^{БМС}\right)\delta_{31} + \\ + \left(-0{,}5m_{БМС}\ddot{q}_3 + 0{,}5R_{10}^{БМС}\right)\delta_{32} - m_3\ddot{q}_3\delta_{33}, \qquad (8)$$

или

$$q_3 = \left(-0{,}5m_{БМС}\ddot{q}_3 + 0{,}5R_{10}^{БМС}\right)\times \\ \times\left(\delta_{31} + \delta_{32}\right) - m_3\ddot{q}_3\delta_{33}. \qquad (9)$$

Раскрыв скобки и выполнив необходимые преобразования, получим уравнение колебаний балки в произвольной плоскости

$$\left(0{,}5m_{БМС}\delta_{31} + 0{,}5m_{БМС}\delta_{32} + m_3\delta_{33}\right)\ddot{q}_3 + q_3 = \\ = 0{,}5R_{10}^{БМС}\left(\delta_{31} + \delta_{32}\right), \qquad (10)$$

или

$$\ddot{q}_3 + \frac{1}{\left(0{,}5m_{БМС}\delta_{31} + 0{,}5m_{БМС}\delta_{32} + m_3\delta_{33}\right)}q_3 = \\ = 0{,}5R_{10}^{БМС}\frac{\left(\delta_{31} + \delta_{32}\right)}{\left(0{,}5m_{БМС}\delta_{31} + 0{,}5m_{БМС}\delta_{32} + m_3\delta_{33}\right)}. \qquad (11)$$

Выполним преобразования:

$$\ddot{q}_3 + \frac{1}{\left(\dfrac{0{,}5m_{БМС}\delta_{31}}{\delta_{33}} + \dfrac{0{,}5m_{БМС}\delta_{32}}{\delta_{33}} + m_3\right)\delta_{33}}\times \\ \times q_3 = 0{,}5R_{10}^{БМС}\times \\ \times\frac{\left(\delta_{31} + \delta_{32}\right)}{\left(\dfrac{0{,}5m_{БМС}\delta_{31}}{\delta_{33}} + \dfrac{0{,}5m_{БМС}\delta_{32}}{\delta_{33}} + m_3\right)\delta_{33}}. \qquad (12)$$

Введем следующие обозначения:

$$k_{пр31} = \frac{\delta_{31}}{\delta_{33}}, \qquad k_{пр32} = \frac{\delta_{32}}{\delta_{33}}. \qquad (13)$$

В результате получим

$$\ddot{q}_3 + \frac{1}{\left(0{,}5m_{БМС}k_{пр31} + 0{,}5m_{БМС}k_{пр32} + m_3\right)\delta_{33}}\times \\ \times q_3 = 0{,}5R_{10}^{БМС}\times \\ \times\frac{\left(\delta_{31} + \delta_{32}\right)}{\left(0{,}5m_{БМС}k_{пр31} + 0{,}5m_{БМС}k_{пр32} + m_3\right)\delta_{33}}, \qquad (14)$$

или

Электронная библиотека Белорусско-Российского университета

$$\ddot{q}_3 + \frac{1}{\left[0,5m_{БМС}\left(k_{пр31}+k_{пр32}\right)+m_3\right]\delta_{33}}\times$$
$$\times\, q_3 = 0,5R_{10}^{БМС}\times$$
$$\times\frac{\left(\delta_{31}+\delta_{32}\right)}{\left[0,5m_{БМС}\left(k_{пр31}+k_{пр32}\right)+m_3\right]\delta_{33}}. \quad (15)$$

Обозначим

$$M_{пр} = 0,5m_{БМС}\left(k_{пр31}+k_{пр32}\right)+m_3. \quad (16)$$

Тогда

$$\ddot{q}_3 + \frac{1}{M_{пр}\delta_{33}}q_3 = 0,5R_{10}^{БМС}\frac{\left(\delta_{31}+\delta_{32}\right)}{M_{пр}\delta_{33}}. \quad (17)$$

Введя обозначение

$$\omega_{пр}^2 = \frac{1}{M_{пр}\delta_{33}}, \quad (18)$$

получим

$$\ddot{q}_3 + \omega_{пр}^2 q_3 = 0,5R_{10}^{БМС}\frac{\left(\delta_{31}+\delta_{32}\right)}{M_{пр}\delta_{33}}. \quad (19)$$

В правой части уравнения числитель и знаменатель разделим на δ_{33}. С учетом уравнений (13) окончательно имеем

$$\ddot{q}_3 + \omega_{пр}^2 q_3 = 0,5R_{10}^{БМС}\frac{\left(k_{пр31}+k_{пр32}\right)}{M_{пр}}. \quad (20)$$

Анализ формул показывает, что колебания опоры в случае приложения возмущающих сил в виде действия рук на спортивный снаряд можно представить колебательной системой, в которой масса человеческого тела, с учетом отношений единичных перемещений, сосредоточена посередине между руками. К этой же точке приведена и масса рабочей части спортивного снаряда.

Рассмотрим случай приведения общей реакции, возникающей в контакте рук с грифом перекладины R_{01}, к точке 3 (середина между руками). Имеем $R_{01} = R_1 + R_2$. Масса балки приведена тоже к точке 3. Расчетная схема показана на рис. 3.

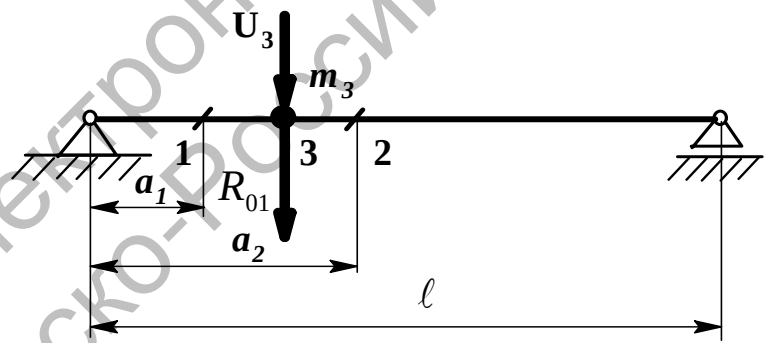


Рис. 3. Расчетная схема опоры с приведением сил и массы к середине между руками

Следуя методу сил [5], запишем

$$q_3 = R_{01}\delta_{33} + U_3\delta_{33}. \quad (21)$$

Сила инерции, как и ранее, определяется по уравнению (6). Реакция R_{01}, действующая со стороны биомеханической системы на спортивный снаряд, с учетом выводов по [7, 8],

$$R_{01} = -m_{БМС}\ddot{q}_3 + R_{10}^{БМС}. \quad (22)$$

Тогда уравнение (21) примет вид:

$$q_3 = \left(-m_{БМС}\ddot{q}_3 + R_{10}^{БМС}\right)\delta_{33} - m_3\ddot{q}_3\delta_{33}. \quad (23)$$

Выполнив преобразования, получим

Электронная библиотека ско-Российского университета

$$q_3 = \left(-m_{БМС}\ddot{q}_3 + R_{10}^{БМС}\right)\delta_{33} - m_3\ddot{q}_3\delta_{33} =$$
$$= -m_{БМС}\ddot{q}_3\delta_{33} + R_{10}^{БМС}\delta_{33} - m_3\ddot{q}_3\delta_{33} =$$
$$= -\left(m_{БМС}\delta_{33} + m_3\delta_{33}\right)\ddot{q}_3 + R_{10}^{БМС}\delta_{33}. \quad (24)$$

Уравнение примет следующий вид:

$$\left(m_{БМС}\delta_{33} + m_3\delta_{33}\right)\ddot{q}_3 + q_3 = R_{10}^{БМС}\delta_{33}, \quad (25)$$

или

$$\ddot{q}_3 + \frac{1}{\left(m_{БМС} + m_3\right)\delta_{33}}q_3 = \frac{R_{10}^{БМС}}{\left(m_{БМС} + m_3\right)}. \quad (26)$$

Обозначим массу полной системы как $M_{ПС} = m_{БМС} + m_3$. Тогда выражение (26) можно записать как

$$\ddot{q}_3 + \frac{1}{M_{ПС}\delta_{33}}q_3 = \frac{R_{10}^{БМС}}{M_{ПС}}. \quad (27)$$

Полученное выражение имеет принятую форму уравнения вынужденных колебаний [5, 11, 14]. Это дифференциальное уравнение вынужденных незатухающих колебаний системы с одной степенью свободы

$$\ddot{q}_3 + \omega_{ПС}^2 q_3 = \frac{R_{10}^{БМС}}{M_{ПС}}. \quad (28)$$

Здесь круговая частота $\omega_{ПС}$ является круговой частотой балки, но с учетом массы полной системы, т. е. системы, включающей опору и самого человека:

$$\omega_{ПС}^2 = \frac{1}{M_{ПС}\delta_{33}}. \quad (29)$$

Уравнения показывают, что при выполнении упражнений на спортивных снарядах с упругой рабочей частью существует влияние движения человека на спортивный снаряд и влияние деформации последнего на движение самого спортсмена.

Приведение массы опоры к середине между руками позволяет получить модель деформации (движения) грифа спортивного снаряда в виде, поддающемся решению. При этом кратность корней частотного уравнения свободных колебаний дает возможность рассмотреть колебания спортивного снаряда в двух взаимно перпендикулярных плоскостях независимо друг от друга.

Заключение

Анализ уравнений колебания спортивного снаряда показывает, что в конечном итоге его колебания можно представить как колебания двухопорной шарнирной балки с одной подвижной опорой и с круговой частотой, определяемой по массе всей системы, включающей массу самой опоры и массу биомеханической системы. Полученные уравнения справедливы для любой типовой балки, используемой при схематизации реальной конструкции. Различие состоит лишь в расчете единичных перемещений и формул для приведения массы балки, зависящих от ее конкретного типа. Отметим, что уравнения колебания реального спортивного снаряда будут значительно сложнее по ряду причин. Во-первых, перекладина представляет собой пространственную шесть раз статически неопределимую систему. Во-вторых, снаряды, используемые в тренировочном процессе в каждом спортивном зале, обычно отличаются от тех, что применяются на соревнованиях. Иногда это отличие значительное. Причем оно касается как конструкций, так и схем их крепления, а также упругих свойств всех элементов снаряда, оказывающих влияние на движение спортсмена. Неидеальность сопряжений в конструкции спортивного снаряда также влияет на колебания всей системы. Разница в поведении реальных спортивных снарядов одного типа настолько существенна, что, по сути дела, требуется колебательная модель того конкретного снаряда, на котором

выполняется исследование. В-третьих, предлагаемые уравнения выведены без учета внутреннего сопротивления материала.

На сегодняшний день наиболее точные результаты дают методики экспериментального измерения упругих перемещений спортивных снарядов. Тем не менее при синтезе движения человека необходимы математические модели деформации опоры. Теоретические модели, выведенные на основе законов механики, решают данную проблему, но требуют дальнейшего усовершенствования и включения дополнительных факторов, приближающих теоретическую модель деформации к реальной картине движения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Загревский, В. И.** Расчетные модели кинематики и динамики биомеханических систем / В. И. Загревский. – Томск–Могилев, 1999. – 156 с.

2. **Загревский, В. И.** Построение оптимальной техники спортивных упражнений в вычислительном эксперименте на ПЭВМ / В. И. Загревский, Д. А. Лавшук, О. И. Загревский. – Могилев–Томск, 2000. – 190 с.

3. **Подскребко, М. Д.** Сопротивление материалов / М. Д. Подскребко. – Минск : Дизайн ПРО, 1998. – 592 с.

4. **Левитский, Н. И.** Теория механизмов и машин / Н. И. Левитский. – М. : Высш. шк., 1990. – 592 с.

5. **Снитко, Н. К.** Строительная механика / Н. К. Снитко. – М. : Высш. шк., 1980. – 432 с.

6. **Дмитриев, В. А.** Детали машин / В. А. Дмитриев. – Л. : Судостроение, 1970. – 792 с.

7. Управление движением на кинематическом уровне / Ю. Ю. Федосеев [и др.] // Техника и технология пищевых производств : тез. докл. IX Междунар. науч. конф. студентов и аспирантов, Могилев, 25–26 апр., 2013 г. : в 2 ч. / Могилев. гос. ун-т продовольствия ; редкол. : А. В. Акулич [и др.]. – Могилев, 2013. – Ч. 2. – С. 50.

8. Синтез движения в условиях упругой опоры / Ю. Ю. Федосеев [и др.] // Техника и технология пищевых производств : тез. докл. IX Междунар. науч. конф. студентов и аспирантов, Могилев, 25–26 апр., 2013 г. : в 2 ч. / Могилев. гос. ун-т продовольствия ; редкол. : А. В. Акулич [и др.]. – Могилев, 2013. – Ч. 2. – С. 51.

9. Гимнастика : учебник для техникумов физической культуры / Под ред. М. Л. Украна и А. М. Шлемина. – М. : Физкультура и спорт, 1977. – 422 с.

10. **Гавердовский, Ю. К.** Техника гимнастических упражнений : учеб. пособие / Ю. К. Гавердовский. – М.: Терра-Спорт, 2002. – 512 с.

11. **Пановко, Я. Г.** Введение в теорию механических колебаний / Я. Г. Пановко. – М. : Наука, 1991. – 256 с.

12. Справочник по сопротивлению материалов / Е. Ф. Винокуров [и др.]. – Минск : Наука и техника, 1988. – 464 с.

13. **Бабаков, И. М.** Теория колебаний / И. М. Бабаков. – М. : Наука, 1968. – 560 с.

14. **Бидерман, В. Л.** Теория механических колебаний / В. Л. Бидерман. – М.: Высш. шк., 1980. – 408 с.

Статья сдана в редакцию 15 февраля 2016 года

Алексей Евгеньевич Покатилов, ст. преподаватель, Могилевский государственный университет продовольствия. Тел.: +375-222-48-57-28.

Максим Александрович Киркор, канд. техн. наук, доц., Могилевский государственный университет продовольствия. Тел.: +375-222-45-35-78.

Валерий Игоревич Ильенков, студент, Могилевский государственный университет продовольствия.

Aleksei Yevgenyevich Pokatsilov, senior lecturer, Mogilev State University of Food Technologies. Phone +375-222-48-57-28.

Maksim Aleksandrovich Kirkor, PhD (Engineering), Associate Prof., Mogilev State University of Food Technologies. Phone +375-222-45-35-78.

Valery Igorevich Ilienkov, student, Mogilev State University of Food Technologies.

Электронная библиотека Белорусско-Российского университета