УДК 517.958:537.812:621.372

ВЫЧИСЛЕНИЕ КОМПЛЕКСНЫХ КОРНЕЙ ТРАНСЦЕНДЕНТНОГО УРАВНЕНИЯ $f(z)=0$

Т. Н. АФАНАСЬЕВА, А. Н. ДУДКИНА
Научный руководитель А. А. РОМАНЕНКО, канд. физ.-мат. наук, доц.
БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Для вычисления комплексных корней трансцендентного уравнения $f(z)=0$, расположенных в замкнутой односвязной области G комплексной плоскости, существует ряд классических альтернативных подходов. Их недостатки состоят в необходимости выбора достаточно точного нулевого приближения для корня и вычисления производных от функции $f(z)$. Избежать данных недостатков позволяет подход, основанный на контурном интегрировании аналитических функций.

Пусть в замкнутой односвязной области G, ограниченной контуром C, находится корень уравнения, т. е. $f(z_0)=0$, и на контуре C функция $f(z)$ не обращается в ноль. Это позволяет определить интегралы вида $I_0=\oint\limits_c f^{-1}(z)dz$, $I_1=\oint\limits_c z\, f^{-1}(z)dz$, которые по теореме о вычетах имеют значения $I_0=2\pi i\left[f'(z_0)\right]^{-1}$, $I_1=2\pi i\, z_0\left[f'(z_0)\right]^{-1}$. Численно определив интегралы I_0, I_1, можем записать $z_0=I_1/I_0$.

Эффективность данного подхода проиллюстрирована на примере нахождения комплексных корней h трансцендентного уравнения, описывающего электродинамические характеристики трехслойной волноведущей структуры толщиной d

$$f(h)=\left(\nu_s\frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_s}+\nu_a\frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_a}\right)cos(\nu_m k_0 d)+i\left(\nu_m+\frac{\nu_s\nu_a}{\nu_m}\frac{\varepsilon_m^2}{\varepsilon_s\varepsilon_a}\right)sin(\nu_m k_0 d)=0,$$

где $\nu_{s,a,m}=\sqrt{\varepsilon_{s,a,m}-\bar{h}^2}$, $\bar{h}=k_0^{-1}h$, $\varepsilon_m=\varepsilon'_m-\mathrm{i}\varepsilon''_m$, $k_0=2\pi\lambda_0^{-1}$ – волновое число вакуума. На рис. 1 представлены графики решений $Re\bar{h}(d)$ и $Im\bar{h}(d)$ для наноразмерной структуры с параметрами $\varepsilon_m=-14.4-i14.6$, $\varepsilon_s=2.123$, $\varepsilon_a=1$.

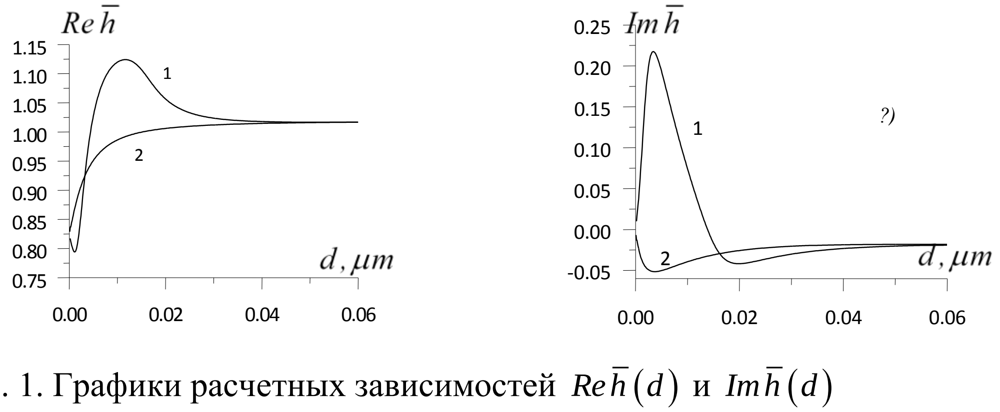

Рис. 1. Графики расчетных зависимостей $Re\bar{h}(d)$ и $Im\bar{h}(d)$