

**Семенюк Славик Денисович**, д-р техн. наук, профессор, МОУВО  
«Белорусско-Российский университет», г. Могилев (Беларусь)

**Кумашов Роман Владимирович**, магистр техн. наук, МОУВО  
«Белорусско-Российский университет», г. Могилев (Беларусь)

## **ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ОСАДОК ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ ПЛИТ ПОКРЫТИЯ АВТОМОБИЛЬНЫХ ДОРОГ И ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ РАСЧЕТНОЙ МЕТОДИКИ**

© РУП «Институт БелНИИС», 2020

Institute BelNIIS RUE, 2020

### **АННОТАЦИЯ**

*В статье приводятся результаты экспериментальных и численных исследований контактной задачи нелинейной теории упругости: физически нелинейная анизотропная неоднородная плита на линейно-упругом однородном основании. Для определения фактического распределения осадок под железобетонной плитой проводились натурные испытания плиты 2ППЗ0.18-30 серии 3.503.1-1. По результатам натурных испытаний были построены изополя перемещений плиты при различных вариантах загрузки. Для решения контактной задачи применяется способ Жемочкина, для определения прогибов плиты с защемленной в начале координат нормалью – метод Ритца. Прогибы срединной поверхности плиты от единичной силы определялись в виде ряда по первым 5 частным решениям Клебша. Для определения приемлемости предлагаемой методики расчета железобетонных плит на линейно упругом основании проведена обработка теоретических численных исследований и экспериментальных данных при помощи математической статистики. Прогибы плиты являются основополагающими при вычислении величин изгибающих и крутящих моментов, а также поперечной силы. Поэтому статистическая обработка*

численных и экспериментальных результатов выполнялась по значениям прогибов при различных стадиях приложения нагрузки на плиту. При этом рассматривалось центральное нагружение плиты. Для точек в местах расположения прогибомеров определены отношения экспериментальных прогибов к прогибам, вычисленных теоретически. Способ Жемочкина в общем позволяет довольно точно описать распределение осадок и реактивных давлений под плитой. Однако значения осадок при численных исследованиях занижены в среднем в 1,5 раза по сравнению с натурными испытаниями. Анализ табличных данных показывает хорошую сходимость предлагаемой методики расчета с опытными данными при центральном нагружении. Обеспеченность точности предлагаемой методики при отклонении в 30 % составила 83,3 %, при отклонении в 40 % составила 93,4 %. Отклонение объясняется нелинейным поведением грунта в реальности, в то время как при численных исследованиях используется линейная модель грунта.

**Ключевые слова:** железобетонная плита, несущая способность, модели расчета, экспериментальные исследования, численные исследования, оценка точности.

**Для цитирования:** Семенюк, С. Д. Экспериментальные исследования осадок железобетонных плит покрытия автомобильных дорог и оценка точности расчетной методики / С. Д. Семенюк, Р. В. Кумашов // Проблемы современного бетона и железобетона : сб. науч. тр. / Ин-т БелНИИС; редкол.: О. Н. Лешкевич [и др.]. – Минск, 2020. – Вып. 12. – С. 185-208. <https://doi.org/10.35579/2076-6033-2020-12-12>.

**Slavik Semenyuk**, DSc in Engineering Science, Professor, Belarusian-Russian University, Mogilev (Belarus)

**Roman Kumashov**, Master in Engineering Science, Belarusian-Russian University, Mogilev (Belarus)

## **EXPERIMENTAL RESEARCH OF THE DISPLACEMENTS OF THE REINFORCED CONCRETE SLABS OF HIGHWAYS PAVEMENT AND ASSESSMENT OF THE ACCURACY OF THE CALCULATION METHOD**

## ABSTRACT

*The article presents the results of experimental and numerical researches of the contact problem of nonlinear elasticity theory: a physically non-linear anisotropic inhomogeneous slab on a linear-elastic homogeneous base. Static load tests of the 2PP30.18-30 plate of the 3.503.1-1 series were performed to determine the actual distribution of displacements under the concrete slab. Based on the results of static load tests, the slab displacement fields were constructed for various loading options. The Zhemochkin method is used to solve the contact problem. The Ritz method is used to determine the displacements of a slab with a pinched normal at the origin. The displacements of the middle surface of the slab from the unit force were determined as a series based on the first 5 Clebsch partial solutions. Theoretical numerical researches and experimental data were processed using mathematical statistics to determine the acceptability of the proposed method for calculating reinforced concrete slabs on a linearly elastic base. Slab displacements are fundamental when calculating the values of bending and torques, as well as the transverse force. Therefore, statistical processing of numerical and experimental results was performed based on the values of displacements at various stages of load application on the slab. The central loading of the slab was considered. The relations of experimental displacements to theoretical displacements are determined for points in the locations of displacement meters. The Zhemochkin method allows quite accurately describe the distribution of displacements and the reactive pressure under the slab in general. However, the values of displacements in numerical researches are underestimated by an average of 1.5 times compared to static load tests. Analysis of tabular data shows a good convergence of the proposed calculation method with experimental data for Central loading. The accuracy of the proposed method was 83.3 % for a deviation of 30 %, and 93.4 % for a deviation of 40 %. The deviation is explained by the nonlinear behavior of the soil in reality, while the numerical studies use a linear model of the soil.*

**Keywords:** reinforced concrete slab, bearing capacity, calculation models, experimental research, numerical research, accuracy assessment.

**For citation:** Semenyuk S., Kumashov R. *Eksperymentalnye issledovaniya osadok zhelezobetonnykh plit pokrytiya avtomobilnykh dorog i otsenka tochnosti raschetnoy metodiki* [Experimental research of the displacements of the reinforced concrete slabs of highways pavement and assessment of the accuracy of the calculation method]. In: *Contemporary Issues of Concrete and Reinforced Concrete: Collected Research Papers*. Minsk. Institute BelNIIS. Vol. 12. 2020. pp. 185-208. [https://doi.org/ 10.35579/2076-6033-2020-12-12](https://doi.org/10.35579/2076-6033-2020-12-12) (in Russian).

## **ВВЕДЕНИЕ**

С развитием экономических связей и резким возрастанием объемов грузоперевозок автомобильным транспортом возникла потребность в строительстве новых автомагистралей и восстановлении старых дорожных покрытий. Дорожное покрытие из железобетонных плит обладает способностью выдерживать большие нагрузки. Дорожные плиты предназначены для возведения постоянных и временных дорог.

Железобетонные изделия имеют возможность повторного применения при условии, что они сохранили качественные характеристики. Такая особенность в плитах позволяет экономить денежные средства и повторно использовать их для сооружения временных дорог. Быстрота монтажа и пониженные требования к основанию (в сравнении с асфальтобетонными дорогами) позволяют устраивать автодороги на различной местности. Дорожное полотно позволяет устанавливать асфальт, который оберегает плиты от негативного внешнего воздействия и увеличивает эксплуатационный срок.

Однако наряду с преимуществами применения железобетонных плит покрытия автомобильных дорог существуют и недостатки. При укладке отдельных плит образуются швы, что приводит к расхождению дороги вследствие температурных воздействий. При эксплуатации дорог передача нагрузки на плиту дорожного покрытия от колес автомобиля всегда будет вне оси симметрии конструкции, а также не исключена вероятность образования выбоин, воронок и других дефектов под основанием

плиты, поэтому в ней будут проявляться изгибающие и крутящие моменты, а также поперечная сила. Данные факторы следует считать одними из основных, влияющих на несущую способность, деформативность и долговечность плит дорожного покрытия.

Таким образом, используя бетонные элементы, нужно периодически проверять их состояние и вид. Своевременное устранение дефектов увеличит эксплуатацию дорожного покрытия.

### ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ И ИХ РЕЗУЛЬТАТЫ

Изучение реального распределения осадок под железобетонной плитой проводилось в натуральных условиях при испытании плиты 2ПП30.18-30 серии 3.503.1-1. Методика испытаний и их результаты приведены в [1, 2].

До проведения испытаний на площадке был выполнен комплекс инженерно-геологических изысканий. В таблице 1 приведены нормативные и расчетные характеристики грунтов; на рисунке 1 – результаты статического зондирования.

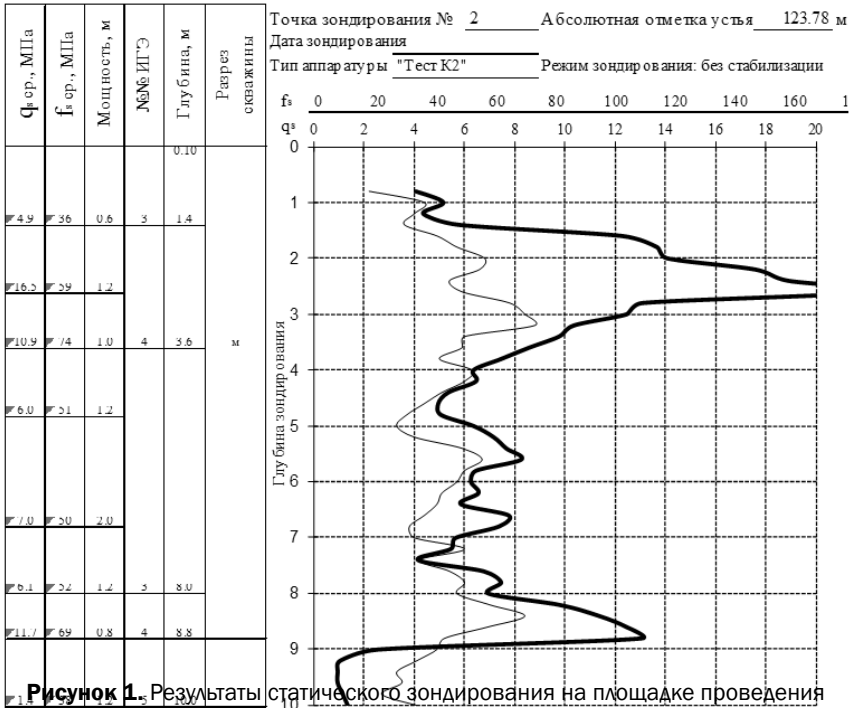
Таблица 1

#### Нормативные и расчетные значения характеристик грунтов

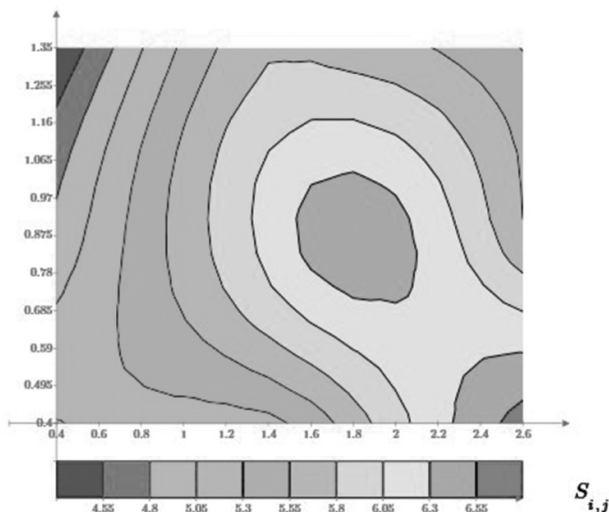
№№ ИГЭ	Грунт	Удельный вес, кН/м <sup>3</sup>		Удельное сцепление, МПа		Угол внутреннего трения, град		Модуль деформации, МПа Е
		$\gamma^H$	$\gamma_{II}$	$c^H$	$c_{II}$	$\varphi^H$	$\varphi_{II}$	
<u>Озерно-аллювиальные отложения (I, a III pz)</u>								
1	Песок пылеватый средней прочности	$\bar{\gamma}$ 10,1	$\bar{\gamma}$ 10,1	0,004	0,004	31	31	16
2	Песок пылеватый прочный	$\bar{\gamma}$ 10,5	$\bar{\gamma}$ 10,5	0,006	0,006	34	34	27
3	Песок мелкий средней прочности	$\frac{17,3}{19,8/10,0}$	$\frac{17,3}{19,8/10,0}$	0,002	0,002	33	33	20
4	Песок мелкий прочный	$\frac{18,0}{20,3/10,4}$	$\frac{18,0}{20,3/10,4}$	0,004	0,004	36	36	31

Окончание таблицы 1

Моренные отложения (g II d)								
5	Супесь моренная средней прочности	21,0	20,9	0,025	0,025	26	26	7
Примечания:		Удельный вес грунтов ИГЭ – 1–4: в числителе – в маловлажном состоянии, в знаменателе – в водонасыщенном состоянии и с учетом взвешивающего действия воды.						



По результатам натуральных испытаний были построены изополюса перемещений плиты при различных вариантах загрузки. На рисунке 2 приведены результаты испытаний при центральном нагружении.

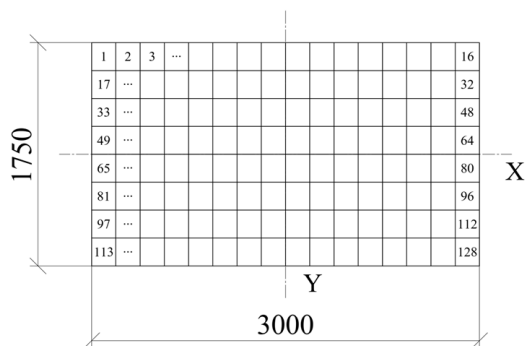


**Рисунок 2.** Изополя осадок плиты (мм) при центральном нагружении силой  $F=100$  кН по результатам экспериментальных исследований

## ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА

После проведения испытаний выполнены численные исследования для 1-й схемы загрузки (центральная нагрузка  $F_{\max} = 100$  кН).

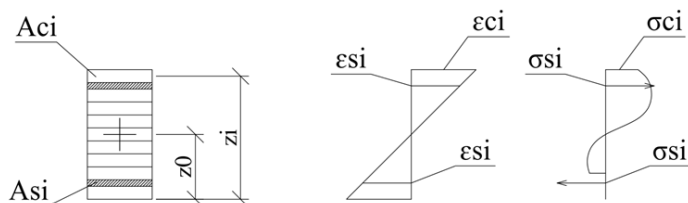
Плита в плане разбивается на равные участки (рисунок 3), в середине каждого участка ставятся абсолютно жесткие связи, через которые осуществляется контакт плиты с упругим основанием. Считается, что усилие в каждой связи вызывает равномерную эпюру давлений в пределах каждого участка. Таким образом, от расчета плиты на упругом основании переходим к расчету статически неопределимой плиты, связанной с упругим основанием жесткими связями в отдельных точках. Для решения этой задачи выбираем смешанный метод строительной механики [3], приняв за неизвестные усилия во введенных связях, линейное и угловое перемещения, введенного в центре плиты защемления.



**Рисунок 3.** Разбивка плиты на участки Жемочкина

В свою очередь, сечение участка Жемочкина рассматривается как совокупность элементарных площадок (рисунок 4), в пределах которых деформации считаются равномерно распределенными, а по высоте сечения элемента связанными гипотезой плоских сечений.

Расчет прочности сечений железобетонных элементов производится из условий равновесия, гипотезы плоских сечений и диаграмм состояния бетона и арматуры.



**Рисунок 4.** Расчетное поперечное сечение и распределение деформаций и напряжений изгибаемого железобетонного элемента

Алгоритм определения несущей способности железобетонных элементов по нормальному сечению предусматривает шаговый метод последовательных нагружений, на каждом этапе которого реализован итерационный процесс вычисления относительных деформаций в элементарных площадках.

На первой итерации при заданном усилии от внешней нагрузки задается положение центра изгиба сечения плиты в предположении упругой работы бетона и арматуры



$$z_{0x} = z_{0y} = \frac{\sum_{i=1}^n E_{oi} A_i z_i}{\sum_{i=1}^n E_{oi} A_i}, \quad (1)$$

где  $E_{oi}$  – начальный модуль упругости бетона или арматуры  $i$ -й элементарной площадки;

$z_i$  – расстояние от выбранной оси элемента до центра тяжести  $i$ -й элементарной площадки;

$A_i$  – площадь сечения  $i$ -й элементарной площадки;

$n$  – количество элементарных площадок бетона и арматуры.

Определяются жесткости плиты по формулам

$$\begin{aligned} D11 &= \sum_{i=1}^n Ecm_i \cdot B_{1,1} \cdot h_i \cdot zcx_i^2 + \sum_{j=1}^2 Es_j \cdot \frac{Asx_j}{a} \cdot zsx_i^2; \\ D12 &= \sum_{i=1}^n Ecm_i \cdot B_{1,2} \cdot h_i \cdot zcy_i^2 + \sum_{j=1}^2 Es_j \cdot \frac{Asy_j}{b} \cdot zsy_i^2; \\ D21 &= \sum_{i=1}^n Ecm_i \cdot B_{2,1} \cdot h_i \cdot zcx_i^2 + \sum_{j=1}^2 Es_j \cdot \frac{Asx_j}{a} \cdot zsx_i^2; \\ D22 &= \sum_{i=1}^n Ecm_i \cdot B_{2,2} \cdot h_i \cdot zcy_i^2 + \sum_{j=1}^2 Es_j \cdot \frac{Asy_j}{b} \cdot zsy_i^2; \\ D33 &= \sum_{i=1}^n Ecm_i \cdot B_{3,3} \cdot h_i \cdot zcx_i^2, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $zcx_i$ ,  $zcy_i$ ,  $zsx_i$ ,  $zsy_i$  – положение нейтральной линии для бетона и арматуры в двух направлениях;

$Asx_j$ ,  $Asy_j$  – верхнее и нижнее армирование плиты в двух направлениях.

Составляются канонические уравнения смешанного метода, выражающие условия совместности деформаций плиты и упругого основания. К этим уравнениям добавляются уравнения равновесия. Получается такая система линейных алгебраических уравнений способа Жемочкина:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n \left( \sum_{k=1}^n \delta_{ik} R_k + \varphi_{0x} y_i + \varphi_{0y} x_i + u_0 + \Delta_{ip} = 0 \right); \\ - \sum_{k=1}^n R_k y_k + M_{px} = 0; \\ - \sum_{k=1}^n R_k x_k + M_{py} = 0; \\ - \sum_{k=1}^n R_k + Q = 0, \end{array} \right. , \quad (3)$$

где  $u_0$ ,  $\varphi_{0x}$ ,  $\varphi_{0y}$  – линейное и угловые перемещения введенного защемления на плите;

$Q$ ,  $M_{px}$ ,  $M_{py}$  – равнодействующая внешних сил, действующих на плиту, и ее моменты относительно координатных осей;

$R_k$  – реактивные усилия.

Коэффициенты при неизвестных усилиях в связях в системе зависят от прогибов плиты в основной системе смешанного метода и осадок упругого основания и определяются формулой [4]:

$$\delta_{ik} = w_{ik} + V_{ik}, \quad (4)$$

где  $w_{ik}$  – прогиб плиты в точке  $X_i$  в основной системе от действия  $R_k = 1$ ;

$V_{ik}$  – перемещение точки приложения  $X_i$  на границе основания от действия равномерно распределенного по участку  $b \times x$  усилия  $R_k = 1$ .

Прогибы срединной поверхности плиты от единичной силы определялись в виде ряда по первым 5 частным решениям Клебша [5]:

$$\begin{aligned} W(x, y) = & A_{00} \cdot \left[ \left( \frac{x}{b} \right)^2 + \left( \frac{y}{a} \right)^2 \right] + A_{01} \cdot \left[ \left( \frac{x}{b} \right)^4 + \left( \frac{y}{a} \right)^4 \right] + \\ & + A_{02} \cdot \frac{2 \cdot x \cdot y}{b \cdot a} \cdot \left[ \left( \frac{x}{b} \right)^2 + \left( \frac{y}{a} \right)^2 \right] + \quad , \quad (5) \\ & + A_{03} \cdot \frac{x}{b} \cdot \left[ \left( \frac{x}{b} \right)^2 - 3 \cdot \left( \frac{y}{a} \right)^2 \right] + A_{04} \cdot \frac{y}{a} \cdot \left[ 3 \cdot \left( \frac{x}{b} \right)^2 - \left( \frac{y}{a} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

где  $A_{00}, A_{01}, A_{02}, A_{03}, A_{04}$  – неопределенные коэффициенты;  
 $a, b$  – полуширина плиты в направлении  $y$  и  $x$  соответственно.

Для определения коэффициентов используем метод Ритца. Составляем функционал полной энергии плиты с заземленной нормалью и действующей силой  $P(u, t)$ :

$$\begin{aligned} \dot{Y} = & \frac{1}{2} \int_{-a}^a \int_{-b}^b \left[ D11 \cdot \left( \frac{\partial^2 W(x, y)}{\partial x^2} \right)^2 + D22 \cdot \left( \frac{\partial^2 W(x, y)}{\partial y^2} \right)^2 + \right. \\ & + (D12 + D21) \times \frac{\partial^2 W(x, y)}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 W(x, y)}{\partial y^2} + \\ & \left. + 4D33 \cdot \frac{\partial^2 W(x, y)}{\partial x \partial y} \right] dx dy - P \cdot W(u, t) \end{aligned} \quad (6)$$

Из условия минимума функционала составляется система линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов в виде

$$\begin{cases} \frac{\partial \dot{Y}}{\partial A_{0i}} = 0 \end{cases}$$

В результате решения данной системы получаем выражения для коэффициентов  $A_{0i}$  и, соответственно, значения прогибов срединной поверхности плиты  $W(x, y)$ .

После решения системы канонических уравнений по найденным значениям реактивных усилий  $R_k$  находятся реактивное давление под плитой и распределение осадок  $S_k$ .

Кривизна нейтральной поверхности плиты в двух взаимно перпендикулярных направлениях, а также относительное кручение поверхности будут равны

$$\frac{1}{r_x} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad \frac{1}{r_y} = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \quad \frac{1}{r_{xy}} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (7)$$

В соответствии с [6] находим главные радиусы кривизны для каждого участка Жемочкина:

$$\frac{1}{r_{1,2}} = \frac{1}{2} \cdot \left[ \frac{1}{r_x} + \frac{1}{r_y} \pm \sqrt{\left( \frac{1}{r_x} - \frac{1}{r_y} \right)^2 + 4 \cdot \left( \frac{1}{r_{xy}} \right)^2} \right]. \quad (8)$$

Относительные деформации слоя, отстоящего от нейтральной поверхности на расстоянии  $z_i$ , будут равны

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{z_0 - z_i}{r_{1,2}}. \quad (9)$$

Далее по диаграмме деформирования бетона с учетом найденных относительных деформаций находим напряжения и секущие модули деформации в каждом элементарном слое

$$E_i = \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}, \quad (10)$$

а также по формуле уточненное положение центра изгиба сечения плиты  $z_{0x}, z_{0y}$ .

Если напряжения растяжения в бетоне элементарной площадки превышают предельные значения, это свидетельствует об образовании трещины в этой площадке. В дальнейших расчетах осевые жесткости этой элементарной площадки принимаются равными нулю.

Найденные новые секущие модули деформаций вводятся в расчет в новом расчетном цикле, в котором уточняются положение нейтральной поверхности плиты, жесткости и осадки плиты.

Критерием окончания процесса последовательных приближений является сравнение осадок и главных радиусов кривизны на смежных этапах:

$$\Delta S_i = \frac{S_i^n - S_i^{n-1}}{S_i^n} \cdot 100\% \leq \xi; \quad (11)$$

$$\Delta \frac{1}{r_i} = \frac{\left(\frac{1}{r_i}\right)^n - \left(\frac{1}{r_i}\right)^{n-1}}{\left(\frac{1}{r_i}\right)^n} \cdot 100\% \leq \xi, \quad (12)$$

где  $i$  – номер участка Жемочкина.

После окончания итерационного процесса в результате решения системы канонических уравнений по найденным значениям реактивных усилий  $R_k$  находятся окончательные значения реактивного давления под плитой и распределение осадок  $S_k$ .

Расчет производился для каждой ступени нагружения в несколько итераций: нулевая (расчет в упругой стадии), первая и последующие (расчет в нелинейной стадии). При расчете для каждой ступени нагружения условия сходимости и были выполнены на второй итерации ( $\xi \leq 1\%$ ). На рисунке 5 приведены изополя осадок плиты, вычисленные на второй итерации, для различных стадий нагружения.

Модуль деформации грунта основания определен по результатам статического зондирования. При этом в расчет принимались три верхних слоя грунта. Определение общего модуля деформации выполнялось послойно снизу вверх [7] по формуле

$$E_i^{y\acute{e}a} = \frac{\left[ 1.05 - 0.1 \cdot \frac{h_i}{D} \cdot \left( 1 - \sqrt[3]{\frac{E_{i\acute{a}u}}{E_i}} \right) \right] \cdot E_i}{0.71 \cdot \sqrt[3]{\frac{E_{i\acute{a}u}}{E_{i\acute{a}u}}} \cdot \arctg \left( \frac{1.35 \cdot h_y}{D_y} \right) + \frac{E_i}{E} \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \arctg \left( \frac{D}{h} \right)}, \quad (13)$$

$$\frac{h_y}{D} = \frac{2 \cdot h_i}{D} \cdot \sqrt[3]{\frac{E_{i\acute{a}u}}{6 \cdot E_i}},$$

где  $i$  – номер, рассматриваемого слоя;

$h_i$  – толщина  $i$ -го слоя;

$D$  – диаметр нагруженной площади;

$E_{\text{общ}}$  – общий модуль упругости полупространства, подстилающего  $i$ -й слой (на первом этапе расчета принимается равным модулю деформации нижнего многослойного основания, на последующих этапах принимается равным определенному на предыдущем этапе эквивалентному модулю деформации  $E_{i-1}^{\text{экв}}$ );

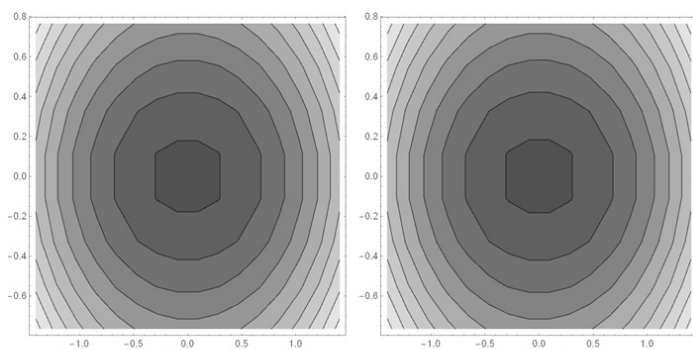
$E_i$  – модуль деформации  $i$ -го слоя.

Для определения диаметра нагруженной площади находились площадь контакта плиты с основанием и эквивалентная ей площадь круга:

$$A_{\text{кон}} = a \cdot b = 1,75 \cdot 3 = 5,25 \text{ м}^2;$$

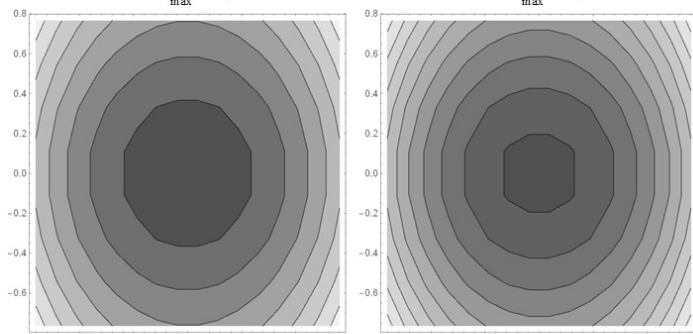
$$D = \sqrt{\frac{4 \cdot A_{\text{кон}}}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 5,25}{3,14159}} = 2,585 \text{ м}^2;$$

$$E_{\text{экв}} = 10,079 \text{ МПа}.$$



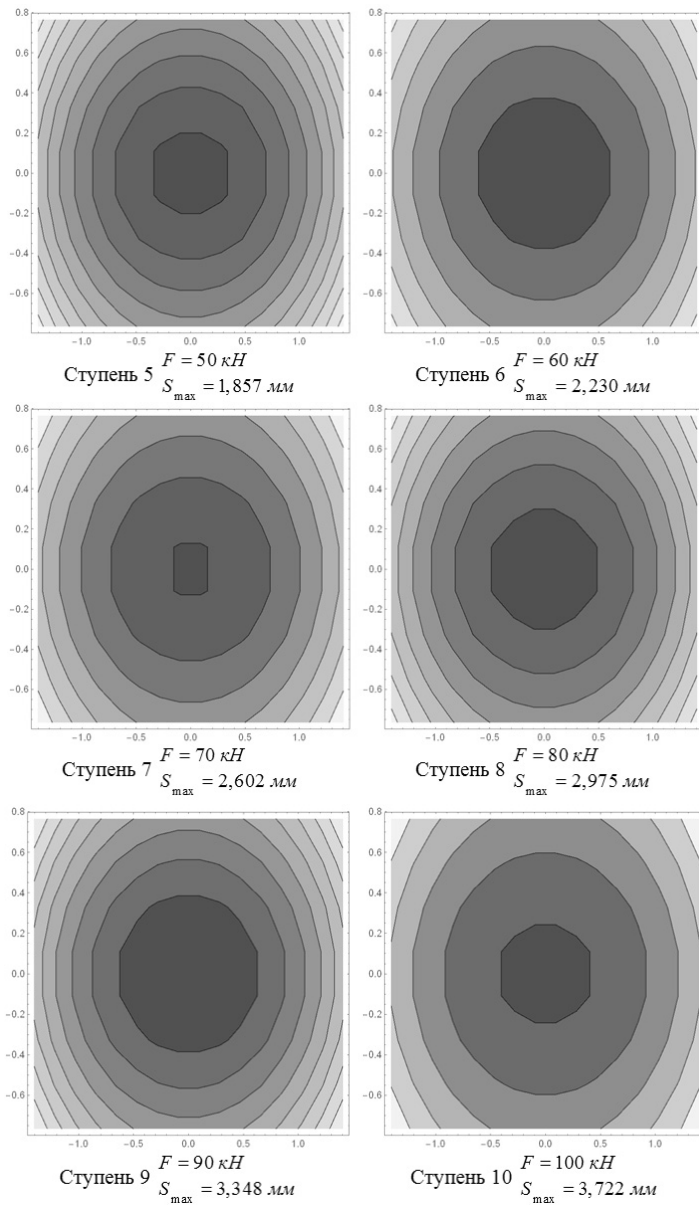
Ступень 1  $F = 10 \text{ кН}$   
 $S_{\text{max}} = 0,371 \text{ мм}$

Ступень 2  $F = 20 \text{ кН}$   
 $S_{\text{max}} = 0,731 \text{ мм}$



Ступень 3  $F = 30 \text{ кН}$   
 $S_{\text{max}} = 1,114 \text{ мм}$

Ступень 4  $F = 40 \text{ кН}$   
 $S_{\text{max}} = 1,485 \text{ мм}$



**Рисунок 5.** Изополя осадок плиты (мм) при центральном нагружении силой  $F = 10 \dots 100$  кН по результатам численного исследования

## ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ ПРЕДЛАГАЕМОЙ МЕТОДОКИ РАСЧЕТА

Для определения приемлемости предлагаемой методики расчета железобетонных плит на линейно упругом основании проведена обработка теоретических численных исследований и экспериментальных данных методами математической статистики [8, 9]. Особое внимание уделялось прогибам плиты, системы, так как они являются основополагающими при вычислении в сечениях участков Б. Н. Жемочкина величин изгибающих и крутящих моментов, а также поперечной силы. Поэтому для точек в местах расположения прогибомеров определены отношения экспериментальных прогибов к прогибам, вычисленных теоретически.

Для центрального нагружения среднее арифметическое значение отношений  $A_{\text{эксп}} / A_{\text{теор}}$  составило 1,4820; максимальное значение отношения  $A_{\text{эксп}} / A_{\text{теор}}$  составило 2,1084, минимальное значение – 0,6775; среднее квадратическое отношение –  $\sigma = \pm 0,3220$ ; коэффициент вариации –  $v \pm 21,73$  %; средняя ошибка среднего арифметического –  $m = \pm 0,0339$ ; показатель точности –  $p = \pm 2,29$  %; общее число значений соотношений  $n = 90$ .

Для представления о соотношении между экспериментальными и численными исследованиями большое значение имеет графический метод. Суть этого метода составляет сопоставление эмпирической и теоретической кривых распределения. Эмпирическую кривую строят с равным интервалом, величина которого определяется по формуле

$$\Delta X = \frac{X_{\max} - X_{\min}}{1 + 3,2 \cdot \lg(n)}. \quad (14)$$

Наибольшая ордината теоретической кривой нормального распределения

$$H = \frac{0,4 \cdot n \cdot \Delta X}{S}. \quad (15)$$

После распределения по классам отношение  $X_i$  построены гистограмма и кривая нормального распределения (рисунок 6). Для выявления



соответствия между эмпирическим и теоретическим распределением вычислен критерий  $\chi$  – квадрат, по которому найдены критерий В. И. Романовского и критерий Б. С. Ястремского Если величины критериев В. И. Романовского и Б. С. Ястремского по абсолютному значению меньше 3, то расхождение между эмпирическими и теоретическими распределениями несущественно, и, следовательно, для приведенных эмпирических данных можно принять теоретическую модель нормального распределения. Расчет производим в табличной форме.

Таблица 2

**Нахождение абсцисс и ординат теоретической кривой нормального распределения**

	$u_i$	$\sigma_i = u_i S$	$X_i = X_m + S_i$	$h$	$y_i$
1	-3	-0.9661	0.515896	0.0111	0.248174
2	-2.5	-0.80508	0.676912	0.0439	0.981516
3	-2	-0.64406	0.837929	0.1353	3.025038
4	-1.5	-0.48305	0.998945	0.3246	7.257408
5	-1	-0.32203	1.159961	0.6055	13.53777
6	-0.5	-0.16102	1.320977	0.8825	19.73094
7	0	0	1.481993	1	22.358
8	0.5	0.161016	1.643009	0.8825	19.73094
9	1	0.322032	1.804026	0.6055	13.53777
10	1.5	0.483049	1.965042	0.3246	7.257408
11	2	0.644065	2.126058	0.1353	3.025038
12	2.5	0.805081	2.287074	0.0439	0.981516
13	3	0.966097	2.44809	0.0111	0.248174

Примечание –  $h$  принимается по кривой нормального распределения Гаусса; при  $h = 1,0$  значение ординаты  $y_i = H$  (теоретической высоте кривой нормального распределения)

Таблица 3

**Нахождение значений критерия Пирсона  $\chi^2$**

Интервал		Фактическая частота $m$	Теоретическая частота $m'$	$m - m'$	$(m - m')^2$	$\chi^2$
$X_1$	$X_2$					
0.4	0.6	0	0.242365	-0.24236	0.058741	0.242365
0.6	0.8	3	1.261299	1.738701	3.02308	2.396798
0.8	1.0	6	4.512643	1.487357	2.212231	0.49023
1.0	1.2	7	11.10352	-4.10352	16.83888	1.516535
1.2	1.4	14	18.80112	-4.80112	23.05079	1.226033
1.4	1.6	26	21.91263	4.087366	16.70656	0.762417

Окончание таблицы 3

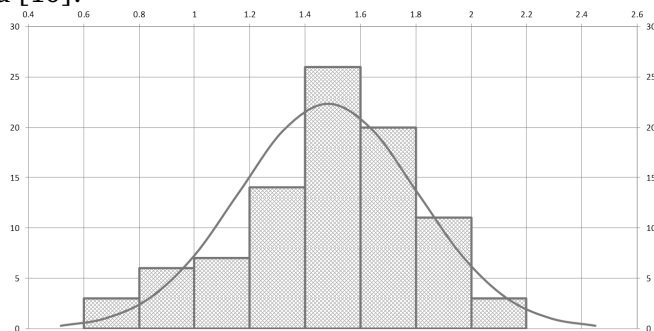
1.6	1.8	20	17.57824	2.421755	5.864898	0.333645
1.8	2.0	11	9.705933	1.294067	1.674609	0.172535
2.0	2.2	3	3.686949	-0.68695	0.471899	0.127992
2.2	2.4	0	0.963676	-0.96368	0.928672	0.963676
2.4	2.6	0	0.173435	-0.17344	0.03008	0.173435
$\Sigma =$		90	89.942	$\Sigma =$		8.406

$$n = 11, \quad k = n - 1 = 10$$

$$\text{Критерий Романовского } \frac{|\chi^2 - k|}{\sqrt{2 \cdot k}} = 0,357$$

$$\text{Критерий Ястремского } \frac{|\chi^2 - n|}{\sqrt{2 \cdot n + 2,4}} = 0,525$$

В случае, если случайная величина  $X_i = A_{\text{экс}} / A_{\text{теор}}$  не входит в интервал  $\pm 3\sigma$  (таблица 2), то данная величина исключается из расчета [10].



**Рисунок 6.** Гистограмма и кривая нормального распределения для отношений экспериментальных значений прогибов к расчетным

Для оценки точности методик расчета воспользуемся следствием из теоремы Ляпунова:

$$P(\alpha < Z < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - X_m}{S}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - X_m}{S}\right) \quad (16)$$

**Обеспеченность точности предлагаемой методики расчета**

n	$X_m$	S	V	P, %	Обеспеченность точности, %, при отклонении					
					$\pm 5\%$	$\pm 10\%$	$\pm 15\%$	$\pm 20\%$	$\pm 30\%$	$\pm 40\%$
90	1.4820	0.3220	0.2173	2.2905	18.20	35.46	51.00	64.26	83.26	93.44

Согласно [11] достоверность модели должна быть проверена с помощью статистической интерпретации всех имеющихся результатов испытаний. При необходимости расчетную модель следует выверить до получения достаточной корреляции между теоретическими значениями и результатами испытаний.

Выполним оценку расчетной модели в соответствии с положениями [11].

Вероятностная модель сопротивления  $r$  представляется в виде

$$r = b \cdot \delta \cdot r_i, \quad (17)$$

где  $b$  – уклон, определяемый по методу наименьших квадратов

$$b = \frac{\sum r_{ei} \cdot r_{ii}}{\sum r_{ii}^2}. \quad (18)$$

Значение ошибки  $\delta_i$  для каждого экспериментального значения  $r_{ei}$  определяется по формуле

$$\delta_i = \frac{r_{ei}}{b \cdot r_{ii}} \quad (19)$$

Среднее значение теоретической функции сопротивления  $r_m$ , рассчитанное с использованием средних значений базисных переменных  $r_{im}$ , находят по формуле

$$r_m = b \cdot \delta_m \cdot r_{im}. \quad (20)$$

Логарифм вектора ошибок  $\Delta_i$  и его оценочное значение  $\bar{\Delta}$ :

$$\Delta_i = \ln(\delta_i) \quad (21)$$

$$\bar{\Delta} = \frac{\sum \Delta_i}{n}$$

Соответственно, выборочная дисперсия

$$s_{\Delta}^2 = \frac{(\bar{\Delta} - \Delta_i)^2}{n-1}. \quad (22)$$

Коэффициент вариации вектора ошибок

$$V_{\delta} = \sqrt{\exp(s_{\Delta}^2) - 1}. \quad (23)$$

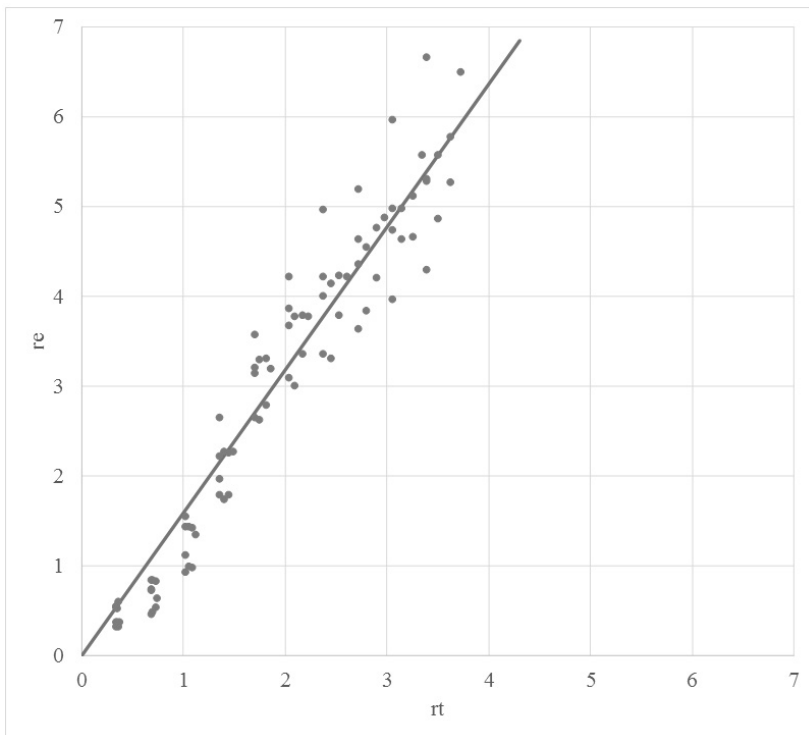
Результаты расчета соответствующих параметров представлены в таблице 5.

Таблица 5

**Оценка коэффициента вариации вектора ошибок**

Среднее значение экспериментальных результатов $r_{em}$	3.02
Среднее значение результатов расчета $r_{tm}$	1.93
Уклон, определяемый по методу наименьших квадратов $b$	1.592748288
Значение ошибки для экспериментальных значений $\delta_m$	0.930463
Оценочное значение $\bar{\Delta}$	-0.495973202
Выборочная дисперсия вектора $s_{\Delta}^2$	0.219050755
Коэффициент вариации для вектора ошибок $V_{\delta}$	0.494868123
Среднее значение теоретической функции сопротивления, рассчитанное с использованием средних значений базисных переменных $r_m$	2.854450757

Точки, представляющие пары соответствующих значений  $(r_{it}, r_{ei})$ , а также прямая  $r_e = br_t$  изображены на диаграмме « $r_e - r_t$ » (рисунок 7).



**Рисунок 7.** Диаграмма « $r_e - r_t$ » –  $R^2=0.9297$ ;  $\alpha=57.878$

## **ВЫВОДЫ**

Способ Жемочкина в общем позволяет довольно точно описать распределение осадок и реактивных давлений под плитой. Однако значения осадок при численных исследованиях занижены в среднем в 1,5 раза по сравнению с натурными испытаниями. Это можно объяснить нелинейным поведением грунта. Так, при малых нагрузках (ступени нагружения 1-3) соотношение между расчетными и экспериментальными данными было близко к 1. При увеличении нагрузки это соотношение начало расти.

Анализ табличных данных показывает хорошую сходимость предлагаемой методики расчета с опытными данными при центральном нагружении. Обеспеченность точности предлагаемой методики при отклонении в 30 % составила 83,3 %, при отклонении в 40 % составила 93,4 %.

При оценке точности в соответствии с требованиями [11] отклонение оценочно прямой от  $45^\circ$  составило  $12,9^\circ$ . Отклонение можно объяснить нелинейным поведением грунта в реальности, в то время как при численных исследованиях используется линейная модель грунта.

### **СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ**

1. Семенюк, С. Д. Железобетонные плиты покрытия автомобильных дорог на упругом полупространстве / С. Д. Семенюк, Р. В. Кумашов // International Journal for Computation Civil and Structural Engineering [Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций]. – М.: Издательство АСВ, 2018. – С. 149–157.
2. Кумашов, Р. В. Методика и результаты полевых испытаний железобетонной плиты покрытия автомобильных дорог 2ПП30.18-30 / Р. В. Кумашов // Материалы, оборудование и ресурсосберегающие технологии: материалы междунар. науч.-техн. конф. / Могилев: Беларус.-Рос. ун-т, 2018. – С. 298–299.
3. Жемочкин, Б. Н. Практические методы расчета фундаментных балок и плит на упругом основании / Б. Н. Жемочкин, А. П. Сеницын. – М.: Госстройиздат, 1962. – 240 с.
4. Босаков, С. В. Статические расчеты плит на упругом основании / С. В. Босаков. – Минск: БНТУ, 2002. – 128 с.
5. Тимошенко, С. П. Пластинки и оболочки / С. П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер. – М.: Физ.-мат. изд-во, 1963. – 536 с.

6. Соломин, В. И. Методы расчета и оптимальное проектирование железобетонных фундаментных конструкций / В. И. Соломин, С. Б. Шматков. – М.: Стройиздат, 1986. – 206 с.
7. Семенюк, С. Д. Железобетонные пространственные фундаменты жилых и гражданских зданий на неравномерно деформированном основании: монография / С. Д. Семенюк. – Могилев: Белорус.-Рос. ун-т, 2003. – 269 с.
8. Венецкий, А. Г. Теория вероятностей и математическая статистика / А. Г. Венецкий, Г. С. Кильдишев. – М.: Статистика, 1975. – 278 с.
9. Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высш. шк., 1977. – 479 с.
10. Третьяк, Л. Н. Основы теории и практики обработки экспериментальных данных: учебное пособие / Л. Н. Третьяк, А. Л. Воробьев; Оренбургский гос. ун-т. – Оренбург: ОГУ, 2015. – 215 с.
11. Еврокод. Основы проектирования строительных конструкций : ТКП EN 1990-2011. Введ.: 01.07.12. – Минск: Минстройархитектуры, 2012. – 85 с.

## REFERENCES

1. Semeniyuk S. D., Kumashov R. V. *International Journal for Computation Civil and Structural Engineering*. 2018. pp. 149–157. (rus)
2. Kumashov R. V. *Materialy, oborudovanie i resursosberegayushchie tekhnologii: materialy mezhdunar. nauch.-tekhn. konf.* Mogilev: Belorus.-Ros. un-t, 2018. pp. 298–299. (rus)
3. Zhemochkin B. N., Sinicyn A. P. *Prakticheskie metody rascheta fundamentnykh balok i plit na uprugom osnovanii* [Practical methods for calculating foundation beams and slabs on an elastic foundation]. Mjscow: Gosstrojizdat, 1962. 240 p. (rus)
4. Bosakov S. V. *Staticheskie raschety plit na uprugom osnovanii* [Static calculations of slabs on an elastic base]. Minsk: BNTU, 2002. 128 p. (rus)

5. Timoshenko S. P., Vojnovskij-Kriger S. *Plastinki i obolochki* [Plates and membranes]. Moscow: Fiz.-mat. izd-vo, 1963. 536 p. (rus)
6. Solomin V. I. Shmatkov S. B. *Metody rascheta i optimal'noe proektirovanie zhelezobetonnykh fundamentnykh konstrukcij* [Calculation methods and optimal design of reinforced concrete foundation structures]. Moscow: Strojizdat, 1986. 206 p. (rus)
7. Semenyuk S. D. *Zhelezobetonnye prostranstvennye fundamenty zhilykh i grazhdanskikh zdaniy na neravnomerno deformirovannom osnovanii* [Reinforced concrete spatial foundations of residential and civil buildings on an unevenly deformed base]. Mogilev: Belarus.-Ros. un-t, 2003. 269 p. (rus)
8. Veneckij A. G. *Teoriya veroyatnostey i matematicheskaya statistika* [Probability theory and Mathematical Statistics]. Moscow: Statistika, 1975. 278 p. (rus)
9. Gmurman V. E. *Teoriya veroyatnostey i matematicheskaya statistika* [Probability theory and Mathematical Statistics]. Moscow: Vyssh. shk., 1977. 479 p. (rus)
10. Tretyak, L. N., Vorobev A. L. *Osnovy teorii i praktiki obrabotki eksperimentalnykh dannyh: uchebnoe posobie* [Fundamentals of theory and practice of experimental data processing: tutorial]. Orenburg: OGU, 2015. 215 p. (rus)
11. *Evrokod. Osnovy proektirovaniya stroitelnykh konstrukcij* [Eurocode Basis of structural design] : TKP EN 1990-2011. Introduced: 01.07.12. Minsk: Ministrojarhitektury, 2012. 85 p. (rus)

*Статья поступила: 07.11.2020*

*Received: 07.11.2020*