

МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Технологии металлов»

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ И ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

*Методические рекомендации к практическим занятиям для
студентов специальности 1-40 05 01 «Информационные системы
и технологии (по направлениям)» очной и заочной форм обучения*



Могилев 2021

УДК 539.3/.6
ББК 30.121
С64

Рекомендовано к изданию
учебно-методическим отделом
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Технологии металлов» «06» декабря 2020 г., протокол № 6

Составители: канд. техн. наук, доц. В. А. Попковский;
ст. преподаватель С. В. Гонорова

Рецензент канд. техн. наук, доц. А. П. Прудников

Методические рекомендации составлены в соответствии с учебной программой дисциплины «Сопротивление материалов и теория упругости» для специальности 1-40 05 01 «Информационные системы и технологии (по направлениям)» для студентов очной и заочной форм обучения. Содержат материалы к практическим занятиям.

Учебно-методическое издание

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ И ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Ответственный за выпуск

Д. И. Якубович

Корректор

И. В. Голубцова

Компьютерная верстка

Е. В. Ковалевская

Подписано в печать 11.03.2021 . Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Печать трафаретная. Усл. печ. л. 2,79 . Уч.-изд. л. 3,0 . Тираж 26 экз. Заказ № 162.

Издатель и полиграфическое исполнение:
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования
«Белорусско-Российский университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/156 от 07.03.2019.
Пр-т Мира, 43, 212022, г. Могилев.

© Белорусско-Российский
университет, 2021

Содержание

Введение.....	4
1 Геометрические характеристики поперечных сечений.....	5
2 Построение эпюр продольных сил и крутящих моментов.....	8
3 Построение эпюр поперечных сил и изгибающих моментов для прямого бруса.....	11
4 Расчеты на прочность при растяжении-сжатии прямого бруса.....	14
5 Определение главных напряжений и главных площадок при плоском напряженном состоянии.....	15
6 Расчеты на прочность при прямом поперечном изгибе: проверочный, проектировочный расчет и определение допускаемой нагрузки.....	17
7 Расчет линейных и угловых перемещений при прямом поперечном изгибе.....	20
8 Расчеты на прочность и жесткость при кручении прямолинейного бруса круглого поперечного сечения.....	23
9 Расчет вала круглого поперечного сечения на прочность при совместном действии изгиба и кручения.....	25
10 Расчет бруса при косом изгибе.....	28
11 Расчет бруса при внецентренном растяжении-сжатии. Определение положения опасных точек в поперечном сечении.....	30
12 Определение угловых и линейных перемещений в балках по способу Верещагина.....	33
13 Решение статически неопределимых балок с помощью метода сил.....	35
14 Расчет продольно сжатого стержня на устойчивость.....	38
15 Продольный и поперечный удары по брусу. Определение деформаций и напряжений в стержне.....	41
16 Расчеты плоской задачи теории упругости с использованием функции напряжений.....	43
Список литературы	47
Приложение А.....	48

Введение

Цель преподавания курса «Сопротивление материалов и теория упругости» – получение теоретических знаний в объеме лекций по основам расчета на прочность, жесткость и устойчивость деталей и элементов конструкций.

Практические занятия позволяют закрепить теоретические знания и приобрести навыки расчета при различных видах нагружения.

Данные методические рекомендации содержат примеры решения задач по основным темам курса. Кроме того, в них приведены задачи для самостоятельного решения с целью подготовки к занятиям, контрольным работам и экзамену. Также приведены контрольные вопросы по теории курса.

1 Геометрические характеристики поперечных сечений

Пример 1 – Для сечения, изображенного на рисунке 1.1, определить осевые и центробежный моменты инерции относительно указанных осей.

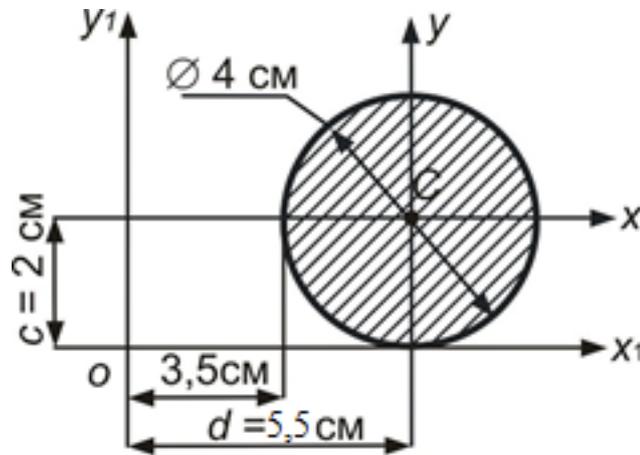


Рисунок 1.1 – К примеру 1

Решение

Заданное сечение имеет оси симметрии, которые являются собственными главными центральными осями [1–4]. На их пересечении находится центр тяжести – точка C (см. рисунок 1.1).

Определим геометрические характеристики сечения относительно собственных главных центральных осей. Площадь поперечного сечения

$$A = \frac{\pi \cdot d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 4^2}{4} = 12,56 \text{ см}^2.$$

Осевые моменты инерции, в соответствии с таблицей А.1,

$$I_x = I_y = \frac{\pi \cdot d^4}{64} = \frac{3,14 \cdot 4^4}{64} = 12,56 \text{ см}^4.$$

Центробежный момент инерции для симметричного сечения [1–4] $I_{x_c y_c} = 0$.

Координатные оси $x_1 - y_1$ и собственные главные центральные оси $x_c - y_c$ параллельны друг другу (см. рисунок 1.1). Поэтому осевые и центробежный моменты инерции относительно осей x_1 и y_1 определяем по формулам при параллельном переносе осей [1, 2]:

$$I_{x_1} = I_{x_c} + c^2 \cdot A = 12,56 + 2^2 \cdot 12,56 = 62,8 \text{ см}^4;$$

$$I_{y_1} = I_{y_c} + d^2 \cdot A = 12,56 + 5,5^2 \cdot 12,56 = 392,5 \text{ см}^4;$$

$$I_{x_1 y_1} = I_{x_c y_c} + c \cdot d \cdot A = 5,5 \cdot 2 \cdot 12,56 = 138,16 \text{ см}^4.$$

Пример 2 (для самостоятельного решения) – Для сечения, изображенного на рисунке 1.2, определить положение центральных осей и центральные моменты инерции.

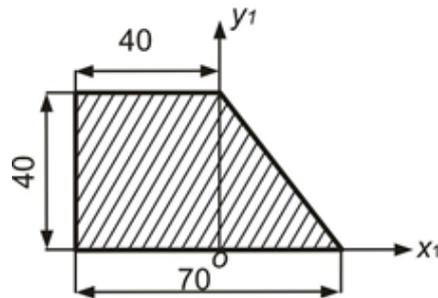


Рисунок 1.2 – К примеру 2

Пример 3 – Для сечения, изображенного на рисунке 1.3, определить главные центральные моменты инерции и положение главных центральных осей.

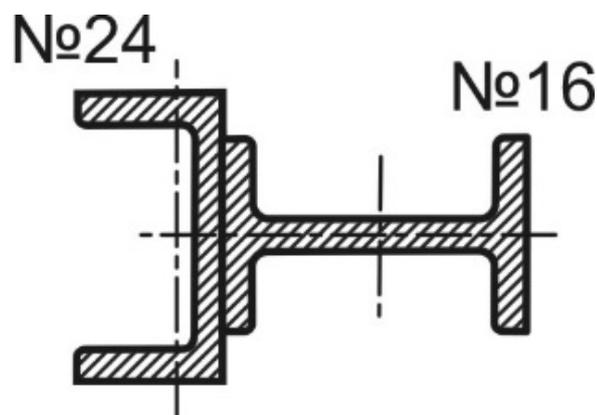


Рисунок 1.3 – К примеру 3

Решение

Заданное сечение (рисунок 1.4) состоит из профилей проката: 1 – швеллер; 2 – двутавр, для которых геометрические характеристики относительно собственных главных центральных осей принимают следующие значения:

- для швеллера ГОСТ 8240–97 $A_1 = 30,6 \text{ см}^2$; $I_{x_1} = 2900 \text{ см}^4$; $I_{y_1} = 208 \text{ см}^4$;
- для двутавра ГОСТ 8239–89 с учетом горизонтального расположения профиля в сечении $A_2 = 15,9 \text{ см}^2$; $I_{x_2} = 58,6 \text{ см}^4$; $I_{y_1} = 873 \text{ см}^4$.

Через центры тяжести профилей проведем собственные главные центральные оси (см. рисунок 1.4).

Заданное сечение имеет ось симметрии, которая будет являться главной центральной осью x_C .

Определим положение центра сечения относительно произвольно выбранных начальных осей y_1, x_C .

Центр тяжести располагается на главной центральной оси x_C , следовательно,

$$x_C = \frac{\sum A_i \cdot x_i}{\sum A_i} = \frac{A_1 \cdot x_1 + A_2 \cdot x_2}{A_1 + A_2} = \frac{30,6 \cdot 0 + 15,9 \cdot 10,42}{30,6 + 15,9} = 3,56 \text{ см};$$

$$y_C = 0,$$

где x_1, x_2 – координаты центров тяжести фигур, составляющих сечение относительно начальных осей x_C, y_1 .

Полученные координаты откладываем на начальных осях и отмечаем центр тяжести – точку C (см. рисунок 1.4). Через данную точку проводим вторую главную центральную ось y_C .

Определим межосевые расстояния: $c_1 = 0$ см, $d_1 = 3,56$ см; $c_2 = 0$, $d_2 = 6,86$ см.

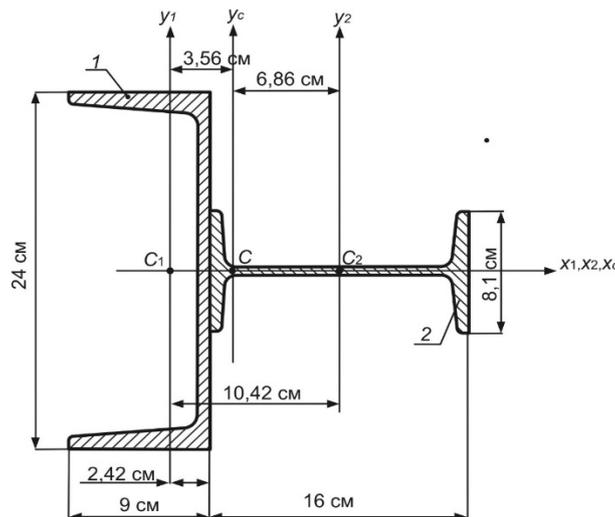


Рисунок 1.4 – Определение положения центра тяжести сечения

Для расчета главных центральных моментов инерции воспользуемся формулами параллельного переноса осей:

$$I_{x_C} = \sum_1^n (I_{x_i} + c_i^2 \cdot A_i) = (I_{x_1} + c_1^2 \cdot A_1) + (I_{x_2} + c_2^2 \cdot A_2) = 2900 + 58,6 = 2958,6 \text{ см}^4;$$

$$I_{y_C} = \sum_1^n (I_{y_i} + d_i^2 \cdot A_i) = (I_{y_1} + d_1^2 \cdot A_1) + (I_{y_2} + d_2^2 \cdot A_2) = (208 + 3,56^2 \cdot 30,6) + \\ + (873 + 6,86^2 \cdot 15,9) = 2217,1 \text{ см}^4.$$

Поскольку одна из центральных осей всего сечения совпадает с осью симметрии, то центробежный момент инерции относительно этих осей будет

$$I_{x_C y_C} = 0.$$

Следовательно, в данном случае положение центральных и главных центральных осей совпадает. В результате главные центральные моменты инерции будут соответственно

$$I_{\max} = I_{x_C} = 2958,6 \text{ см}^4; \quad I_{\min} = I_{y_C} = 2217,1 \text{ см}^4.$$

Пример 4 (для самостоятельного решения) – Для сечений, изображенных на рисунке 1.5, определить главные центральные моменты инерции и положение главных центральных осей.



Рисунок 1.5 – Примеры для самостоятельного решения

Контрольные вопросы

- 1 Запишите формулы для определения координат центра тяжести сечения.
- 2 Какие оси называют центральными осями сечения?
- 3 Относительно каких осей сечения статические моменты инерции равны нулю?
- 4 Относительно каких осей центробежный момент инерции будет равен нулю?
- 5 Запишите выражения для определения осевых моментов инерции при параллельном переносе осей.
- 6 Запишите выражения для определения центробежного момента инерции при параллельном переносе осей.
- 7 Как определить величину полярного момента инерции сечения, если известны величины осевых моментов инерции?
- 8 Какие оси называют главными центральными осями сечения?
- 9 В каких случаях можно установить положение главных центральных осей без соответствующих расчетов?
- 10 Изменится ли сумма осевых моментов инерции относительно взаимно перпендикулярных осей при повороте этих осей?
- 11 Запишите выражения для определения величин главных центральных моментов инерции сечения.

2 Построение эпюр продольных сил и крутящих моментов

Пример 1 – Для бруса, изображенного на рисунке 2.1, построить эпюру продольных (нормальных) сил.

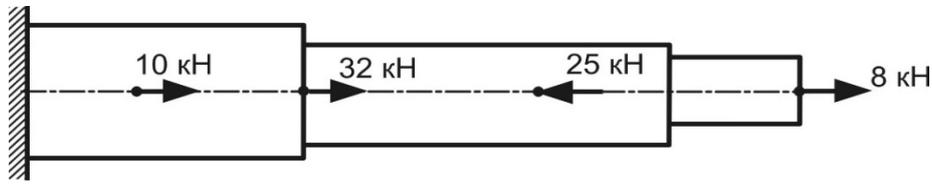


Рисунок 2.1 – К примеру 1

Решение

Разобьем брус на участки, начало и концы участков должны совпадать с местом приложения сосредоточенной нагрузки, а также с началом и концом приложения распределенной нагрузки.

Определяем нормальные силы по участкам бруса (рисунок 2.2, а), используя метод сечений [1–4]:

- участок 1: $N_1 = 8$ кН;
- участок 2: $N_2 = 8 - 25 = -17$ кН;
- участок 3: $N_3 = 8 - 28 + 32 = 15$ кН;
- участок 4: $N_4 = 8 - 25 + 32 + 10 = 25$ кН.

Построим эпюру продольных сил (рисунок 2.2, б).

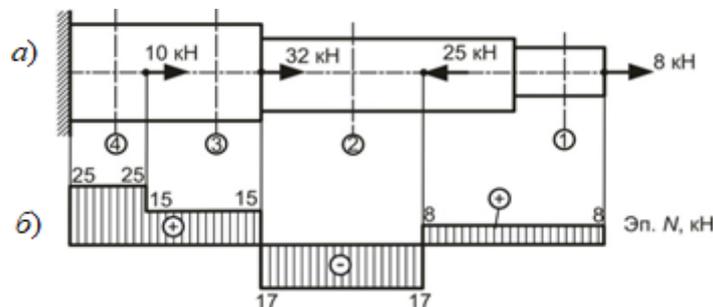


Рисунок 2.2 – Построение эпюры продольных сил

Контрольные вопросы

- 1 Какой вид нагружения называется осевым растяжением-сжатием?
- 2 Какие внутренние силовые факторы возникают при растяжении-сжатии?
- 3 Запишите правило знаков для определения продольной силы.
- 4 Как определить величину продольной силы в произвольном сечении бруса?
- 5 Сформулируйте основные правила контроля построения эпюр продольных сил.

Пример 2 (для самостоятельного решения) – Для брусьев, изображенных на рисунке 2.3, построить эпюры продольных сил.

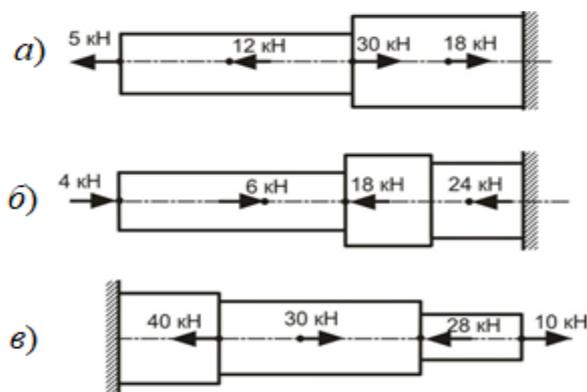


Рисунок 2.3 – Примеры для самостоятельного решения

Пример 3 – Для вала, изображенного на рисунке 2.4, построить эпюру крутящих моментов.

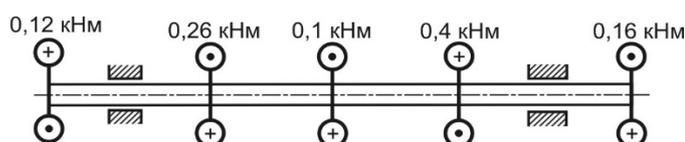


Рисунок 2.4 – Расчетная схема вала

Решение

Разбиваем брус на участки (рисунок 2.5, а). Определяем крутящие моменты по участкам вала, используя метод сечений:

- участок 1: $M_{к1} = 0,12$ кН·м;
- участок 2: $M_{к2} = 0,12 - 0,26 = -0,14$ кН·м;
- участок 3: $M_{к3} = 0,12 - 0,26 - 0,1 = -0,24$ кН·м;
- участок 4: $M_{к4} = 0,12 - 0,26 - 0,1 + 0,4 = 0,16$ кН·м.

По полученным значениям строим эпюру крутящих моментов (рисунок 2.5, б).

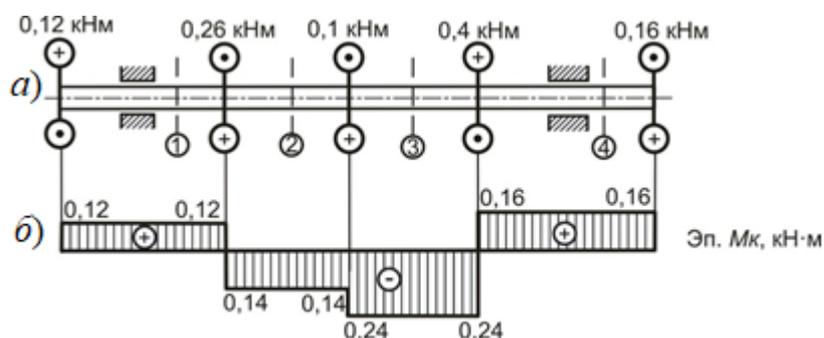


Рисунок 2.5 – Построение эпюры крутящих моментов

Пример 4 (для самостоятельного решения) – Для брусьев, изображенных на рисунке 2.6, построить эпюры крутящих моментов.

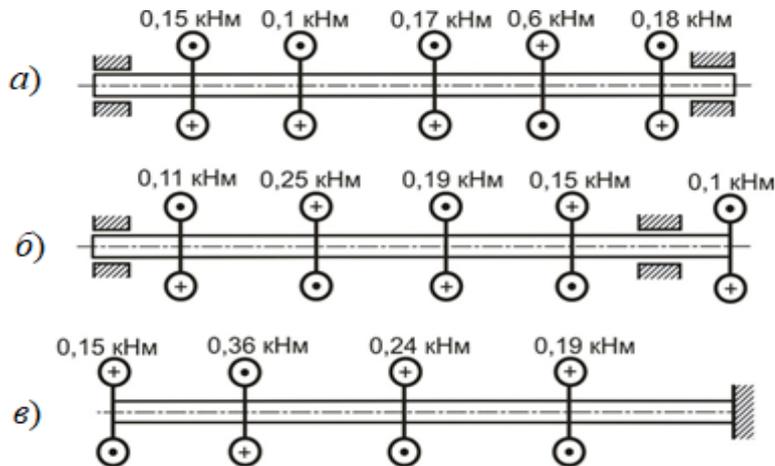


Рисунок 2.6 – Примеры для самостоятельного решения

Контрольные вопросы

- 1 Какой вид нагружения называется кручением?
- 2 Какие внутренние силовые факторы возникают при кручении?
- 3 Как определить величину крутящего момента в произвольном сечении вала?
- 4 Сформулируйте основные правила контроля построения эпюр крутящих моментов.

3 Построение эпюр поперечных сил и изгибающих моментов для прямого бруса

Пример 1 – Для бруса (балки), изображенного на рисунке 3.1, построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов.

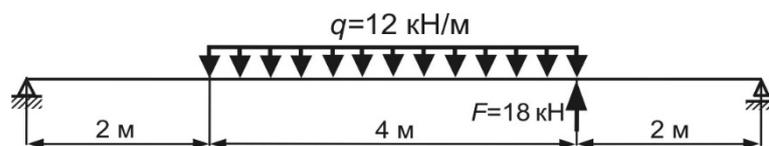


Рисунок 3.1 – Расчетная схема балки

Решение

Определим реактивные усилия, возникающие в опорах заданной балки (рисунок 3.2, а):

$$\sum M_B = 0; -R_A \cdot 8 + 12 \cdot 4 \cdot 4 - 18 \cdot 2 = 0; R_A = \frac{12 \cdot 4 \cdot 4 + 18 \cdot 2}{8} = 19,5 \text{ кН};$$

$$\sum M_A = 0; R_B \cdot 8 - 12 \cdot 4 \cdot 4 + 18 \cdot 6 = 0; R_B = \frac{12 \cdot 4 \cdot 4 - 18 \cdot 6}{8} = 10,5 \text{ кН}.$$

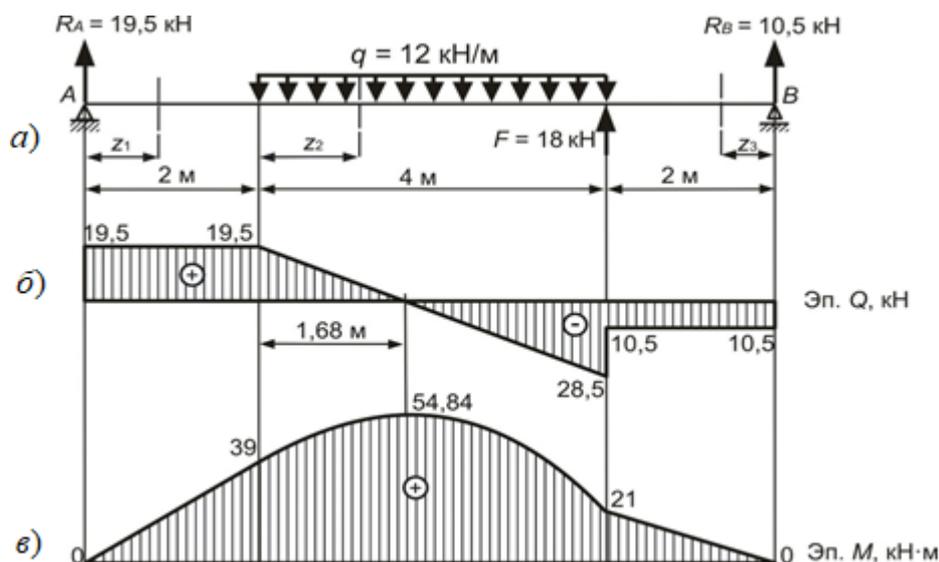


Рисунок 3.2 – Построение эпюр внутренних силовых факторов в балке

Проверка правильности определения реакций осуществляется из условия:

$$\sum Y = 0; 19,5 - 12 \cdot 4 + 18 + 10,5 = 0.$$

Разбиваем балку на три участка. Используя метод сечений, для каждого из участков записываем выражения для определения поперечной силы Q и изгибающего момента M . Расчет значений поперечных сил и изгибающих моментов выполняем для сечений на каждом из участков балки.

$$\text{Участок 1: } 0 \leq z_1 \leq 2 \text{ м.} \quad Q_1 = 19,5 \text{ кН}; M_1 = 19,5 \cdot z_1;$$

$$z_1 = 0; M_1 = 0;$$

$$z_1 = 2 \text{ м}; M_1 = 39 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

$$\text{Участок 2: } 0 \leq z_2 \leq 4 \text{ м}.$$

$$Q_2 = 19,5 - 12 \cdot z_2; M_2 = 19,5 \cdot (2 + z_2) - 12 \cdot \frac{z_2^2}{2};$$

$$z_2 = 0; Q_2 = 19,5 \text{ кН}; M_2 = 39 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$z_2 = 4 \text{ м}; Q_2 = -28,5 \text{ кН}; M_2 = 21 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

$$\text{Экстремум: } Q_2 = 19,5 - 12 \cdot z_2 = 0;$$

$$z_2 = \frac{19,5}{12} = 1,68 \text{ м}; M_2 = 54,84 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Участок 3: $0 \leq z_3 \leq 2$ м. $Q_3 = -10,5$ кН; $M_3 = 10,5 \cdot z_3$;

$$z_3 = 0; M_3 = 0;$$

$$z_3 = 2 \text{ м}; M_3 = 21 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

По полученным результатам строим эпюры поперечных сил Q и изгибающих моментов M (рисунок 3.2, б и в).

Пример 2 (для самостоятельного решения) – Для балок, изображенных на рисунке 3.3, построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов.

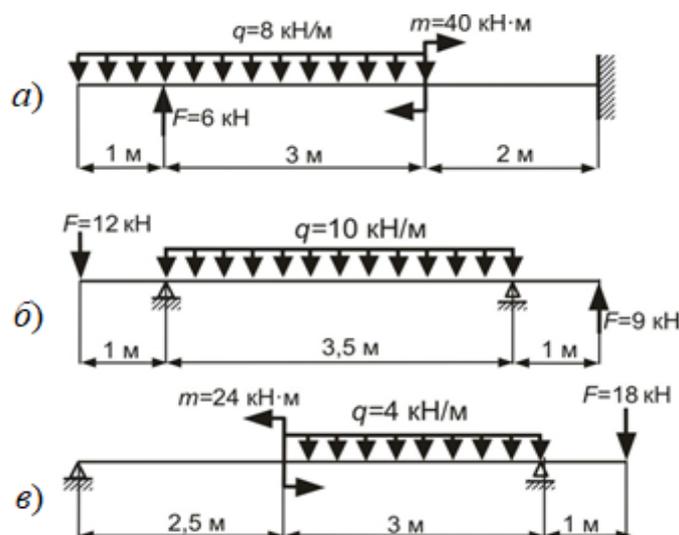


Рисунок 3.3 – Примеры для самостоятельного решения

Контрольные вопросы

- 1 Какие внутренние силовые факторы возникают в поперечном сечении балки при изгибе?
- 2 Какое правило знаков принято для поперечной силы?
- 3 Какое правило знаков принято для изгибающего момента?
- 4 Как вычисляется поперечная сила в произвольном сечении балки?
- 5 Как вычисляется изгибающий момент в произвольном сечении балки?
- 6 Какая дифференциальная зависимость существует между поперечной силой и интенсивностью распределенной нагрузки?
- 7 Какая дифференциальная зависимость существует между изгибающим моментом и интенсивностью распределенной нагрузки?
- 8 Какая линия очерчивает эпюру изгибающего момента, если на рассматриваемом участке действует распределенная нагрузка?
- 9 Какая линия очерчивает эпюру поперечной силы, если на рассматриваемом участке действует распределенная нагрузка?
- 10 В каком случае выполняется исследование на экстремум?
- 11 В каком случае на эпюре поперечных сил должен иметь место скачок? Как при этом изменится сосредоточенный момент?
- 12 Как выглядит эпюра изгибающих моментов в сечении, где приложен сосредоточенный момент?

4 Расчеты на прочность при растяжении-сжатии прямого бруса

Пример 1 – Требуется определить площадь поперечного сечения чугунного стержня (рисунок 4.1, а). Для материала стержня $[\sigma]_{СЖ} = 50$ МПа; $[\sigma]_P = 20$ МПа.

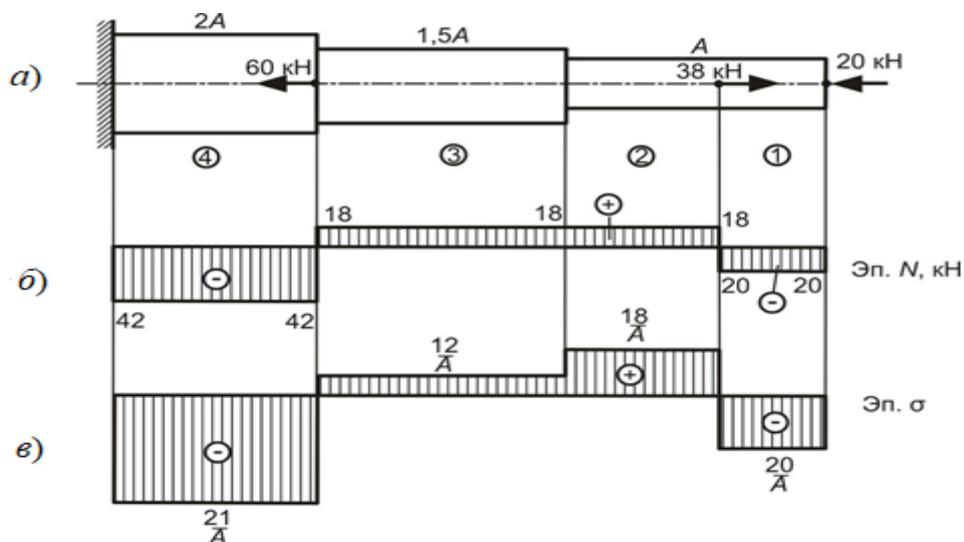


Рисунок 4.1 – Пример расчета бруса

Решение

Разбиваем брус на участки (см. рисунок 4.1, а). Строим эпюру нормальных сил (рисунок 4.1, б).

Напряжения на участках бруса определяются из соотношений

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = -\frac{12}{A}; \sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = -\frac{18}{A}; \sigma_3 = \frac{N_3}{A_3} = \frac{18}{1,5 \cdot A} = \frac{12}{A}; \sigma_4 = \frac{N_4}{A_4} = -\frac{42}{2 \cdot A} = -\frac{21}{A}.$$

Исходя из полученных соотношений, построим эпюру нормальных напряжений (рисунок 4.1, в).

Определение площадей поперечных сечений бруса осуществляется исходя из выполнения условий прочности. Отдельно рассмотрим растянутую и сжатую области эпюры нормальных напряжений.

Условие прочности на сжатие

$$|\sigma_{\max}|_{СЖ} \leq [\sigma]_{СЖ}; |\sigma_{\max}|_{СЖ} = \left| \frac{21}{A} \right| \leq [\sigma]_{СЖ} = 280 \text{ МПа.}$$

Откуда площадь поперечного сечения

$$A_{СЖ} \geq \frac{21 \cdot 10^3}{280 \cdot 10^6} = 7,5 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2 = 0,075 \text{ см}^2.$$

Условие прочности на растяжение

$$|\sigma_{\max}|_P = \left| \frac{18}{A} \right| \leq [\sigma]_P = 50 \text{ МПа.}$$

Откуда площадь поперечного сечения

$$A_p \geq \frac{18 \cdot 10^3}{50 \cdot 10^6} = 3,6 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 3,6 \text{ см}^2.$$

Из сопоставления полученных значений площадей примем $A = 3,6 \text{ см}^2$.

Пример 2 (для самостоятельного решения) – Определить допускаемую нагрузку на стержень, изображенный на рисунке 4.2. Допускаемые напряжения $[\sigma]_p = 28 \text{ МПа}$; $[\sigma]_{сж} = 170 \text{ МПа}$.

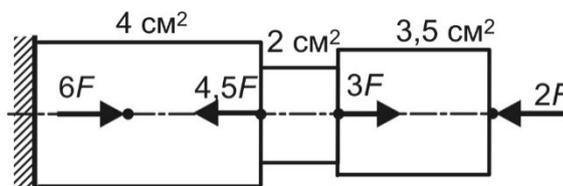


Рисунок 4.2 – Пример для самостоятельного решения

Контрольные вопросы

- 1 Какой вид нагружения называется осевым растяжением-сжатием?
- 2 Какие внутренние силовые факторы возникают при центральном растяжении-сжатии?
- 3 Запишите правило знаков для определения продольной силы.
- 4 Как определить величину продольной силы в произвольном сечении бруса?
- 5 Запишите формулу для определения нормальных напряжений в поперечном сечении бруса при центральном растяжении-сжатии.
- 6 Запишите условие прочности при центральном растяжении-сжатии.
- 7 Перечислите задачи, решаемые из условия прочности при анализе центрального растяжения-сжатия бруса.

5 Определение главных напряжений и главных площадок при плоском напряженном состоянии

Пример 1 – В опасной точке нагруженной детали напряженное состояние оказалось таким, как показано на рисунке 5.1. Требуется определить величину главных напряжений и ориентацию главных площадок.

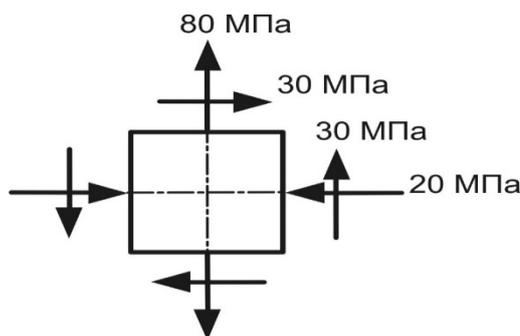


Рисунок 5.1 – К примеру 1

Решение

Действующие напряжения принимают следующие значения [4]:

$$\sigma_x = -20 \text{ МПа}; \sigma_y = 80 \text{ МПа}; \tau_{xy} = 30 \text{ МПа}.$$

Главные напряжения [4]

$$\sigma_{\pm 1} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \cdot \tau_{xy}^2} = \frac{-20 + 80}{2} \pm \sqrt{(-20 - 80)^2 + 4 \cdot 30^2} = 30 \pm 58.$$

Компоненты главных напряжений индексируются исходя из следующего неравенства [4]:

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 .$$

Следовательно, $\sigma_1 = 88 \text{ МПа}$; $\sigma_2 = 0$; $\sigma_3 = -28 \text{ МПа}$.

Положение главных площадок определяется углом поворота:

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{2 \cdot \tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2 \cdot 30}{-20 - 80} = -0,6; \quad 2\alpha_0 = -31^\circ; \quad \alpha_0 = -15^\circ 30'.$$

Положение главных площадок и направление главных напряжений показано на рисунке 5.2.

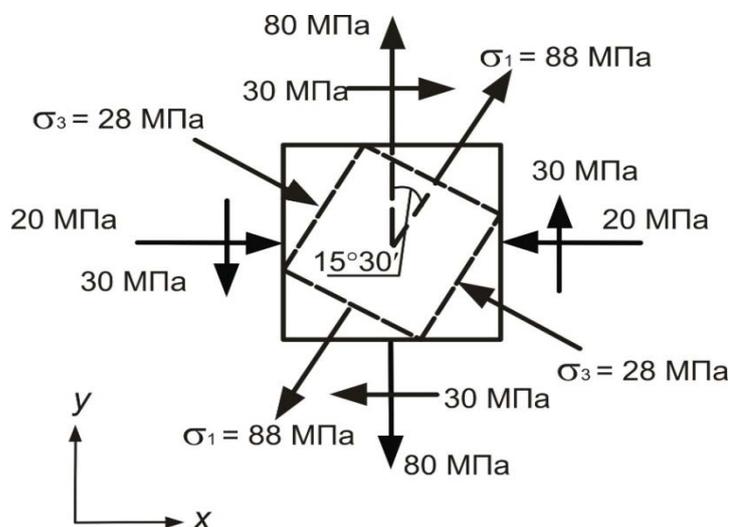


Рисунок 5.2 – Ориентация в пространстве главных напряжений

Пример 2 (для самостоятельного решения) – В опасных точках нагруженных деталей напряженное состояние оказалось таким, как показано на рисунке 5.3, а и б. Определить величину и направление главных площадок.

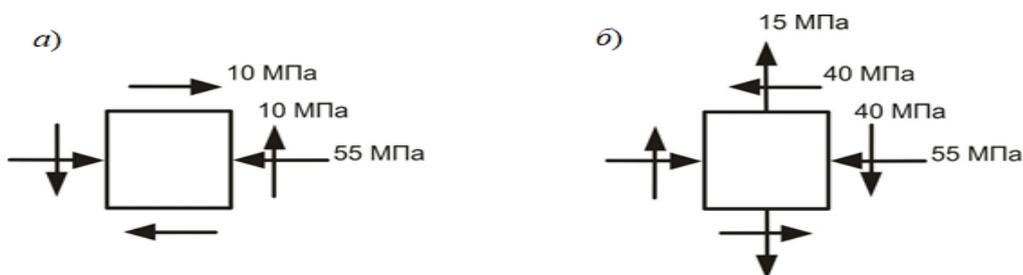


Рисунок 5.3 – Примеры для самостоятельного решения

Контрольные вопросы

- 1 Дайте определение плоскому напряженному состоянию.
- 2 Какие напряжения называют главными?
- 3 Какие площадки называют главными?
- 4 Перечислите виды напряженного состояния.
- 5 Запишите формулу для определения величин главных напряжений при плоском напряженном состоянии.
- 6 Как определить положение главных площадок при плоском напряженном состоянии?
- 7 Как формулируется правило знаков для компонент напряжений и угла поворота главных площадок?

6 Расчеты на прочность при прямом поперечном изгибе: проверочный, проектировочный расчет и определение допускаемой нагрузки

Пример 1 – Проверить прочность балки, изображенной на рисунке 6.1, а. Для материала балки допустимое напряжение $[\sigma] = 160$ МПа.

Решение

Определим реактивные усилия, возникающие в опорах заданной балки (см. рисунок 6.1, а).

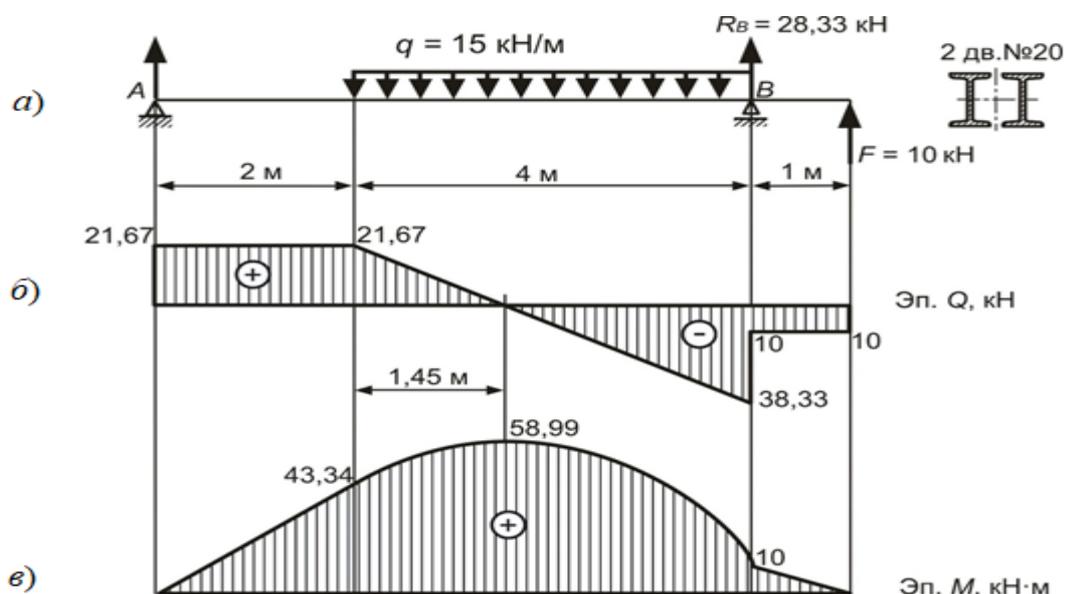


Рисунок 6.1 – Проверка балки на прочность

Строим эпюры поперечных сил Q (рисунок 6.1, б) и изгибающих моментов M (рисунок 6.1, в).

Условие прочности при изгибе выглядит следующим образом [1–4]:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_X} \leq [\sigma].$$

Из эпюры изгибающих моментов определим опасное сечение, в котором $M_{\max} = 58,99 \text{ кН}\cdot\text{м}$ (см. рисунок 6.1, в).

Для заданного двутавра из таблиц ГОСТ 8239–89 выписываем значение момента сопротивления: $W_X^{Д6} = 184 \text{ см}^3$. Момент сопротивления всего сечения, состоящего из двух двутавров,

$$W_X = 2 \cdot W_X^{Д6} = 2 \cdot 184 = 368 \text{ см}^3.$$

Тогда условие прочности имеет вид:

$$\sigma_{\max} = \frac{58,98 \cdot 10^3}{368 \cdot 10^{-6}} = 0,1603 \cdot 10^9 \text{ Па} = 160,3 \text{ МПа} > [\sigma] = 160 \text{ МПа}.$$

Допускаемый процент перенапряжения должен удовлетворять неравенству [3]

$$\delta = \frac{\sigma_{\max} - [\sigma]}{[\sigma]} \cdot 100 \% \leq 5 \% ;$$

$$\delta = \frac{160,3 - 160}{160} \cdot 100 \% = 0,13 \% < 5 \% .$$

Данное перенапряжение не является опасным. Прочность балки обеспечена.

Пример 2 – Определить размеры поперечного сечения балки, изображенной на рисунке 6.2, а. Допускаемое напряжение $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$.

Решение

Строим эпюры поперечных сил Q (рисунок 6.2, б) и изгибающих моментов M (рисунок 6.2, в).

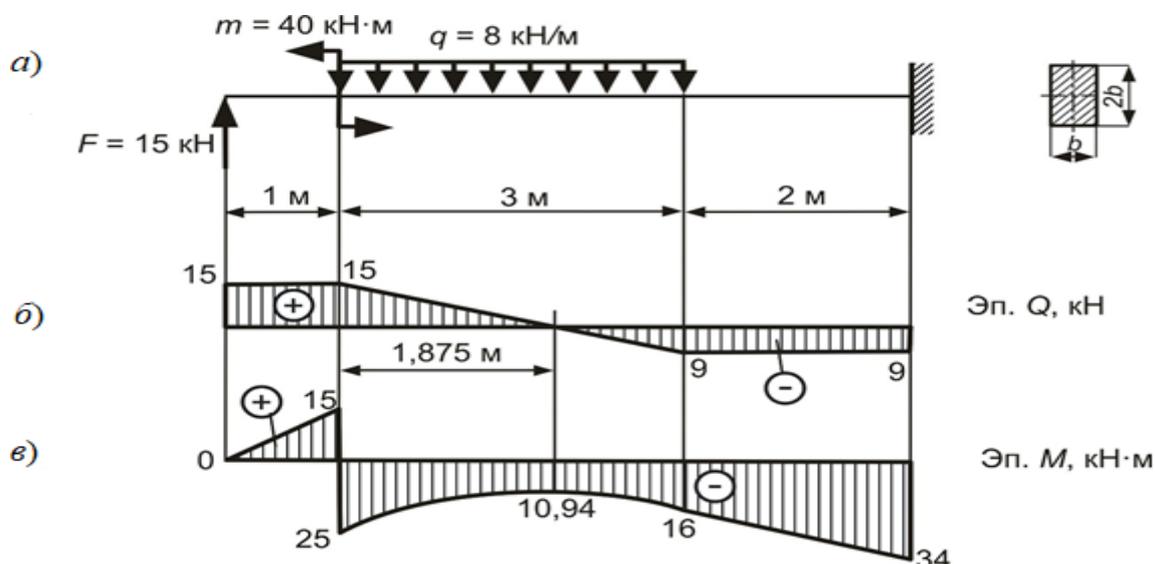


Рисунок 6.2 – Определение размеров поперечного сечения

Из эпюры изгибающих моментов определим опасное сечение, в котором $|M_{\max}| = 34 \text{ кН}\cdot\text{м}$ (см. рисунок 6.2, в).

Определим расчетный момент сопротивления заданного сечения из условия прочности при изгибе:

$$W_x \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{34 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 0,2125 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3.$$

С другой стороны, в соответствии с таблицей А.1

$$W_x = \frac{b \cdot h^2}{6} = \frac{b \cdot (2b)^2}{6} = \frac{2}{3} \cdot b^3 = 0,2125 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3.$$

Тогда ширина сечения

$$b = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 0,2125 \cdot 10^{-3}}{2}} = 0,068 \text{ м} = 68 \text{ мм}.$$

Высота сечения $h = 2 \cdot b = 2 \cdot 68 = 136 \text{ мм}$.

Пример 3 (для самостоятельного решения) – Проверить прочность балки (рисунок 6.3). Допускаемое напряжение $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$.

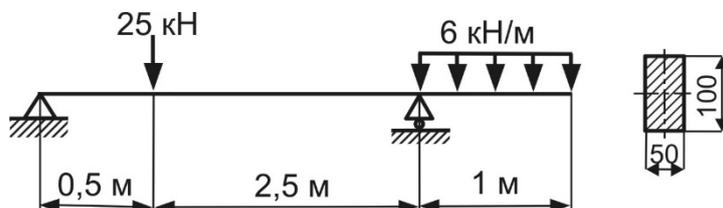


Рисунок 6.3 – Пример для самостоятельного решения

Пример 4 (для самостоятельного решения) – Определить диаметр балки (рисунок 6.4) при $[\sigma] = 180 \text{ МПа}$.

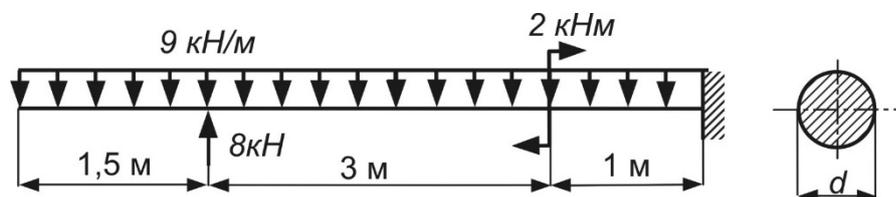


Рисунок 6.4 – Пример для самостоятельного решения

Контрольные вопросы

- 1 Какой вид деформаций называется изгибом?
- 2 В каком случае имеет место прямой изгиб?
- 3 Какие внутренние силовые факторы возникают при чистом изгибе?
- 4 Какие внутренние силовые факторы возникают при поперечном изгибе?
- 5 Что такое нейтральная ось?

- 6 Как расположены нейтральная ось и нейтральная линия?
 7 Какие напряжения возникают при чистом изгибе?
 8 Какие напряжения возникают при поперечном изгибе?
 9 Какая формула используется для определения нормальных напряжений при изгибе?
 10. В каких точках по высоте поперечного сечения возникают наибольшие нормальные напряжения?
 11 По какому закону изменяются нормальные напряжения по высоте поперечного сечения?
 12 Как определяют знак нормальных напряжений при изгибе? Зависит ли знак нормального напряжения от знака координаты рассматриваемой точки?
 13 Запишите условие прочности по нормальным напряжениям.
 14 Как выбирается опасное сечение для проверки прочности по нормальным напряжениям?
 15 Сформулируйте задачи, решаемые с использованием условия прочности по нормальным напряжениям.
 16 Какая формула используется при определении касательных напряжений при поперечном изгибе?
 17 В каких точках по высоте сечения возникают наибольшие касательные напряжения?

7 Расчет линейных и угловых перемещений при прямом поперечном изгибе

Пример 1 – Определить прогиб сечения D стальной балки (рисунок 7.1).

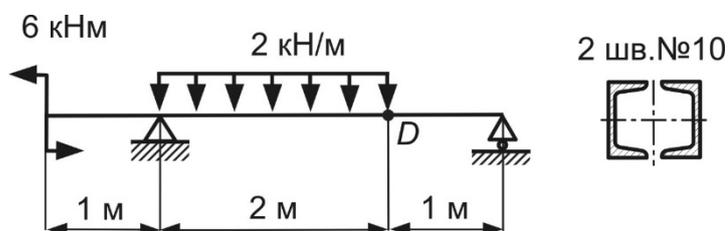


Рисунок 7.1 – Расчетная схема балки

Решение

Определим реактивные усилия, возникающие в опорах заданной балки (рисунок 7.2):

$$\sum M_A = 0; -R_B \cdot 3 - 2 \cdot 2 \cdot 1 + 6 = 0; R_B = 0,67 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = 0; -R_A \cdot 3 + 2 \cdot 2 \cdot 2 + 6 = 0; R_A = 4,67 \text{ кН};$$

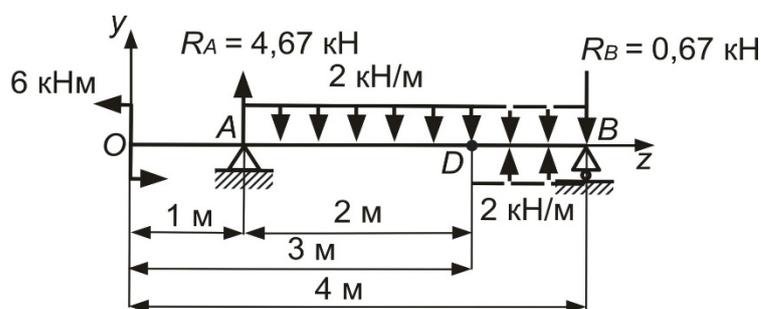


Рисунок 7.2 – Значения реактивных усилий в опорах

Проверка правильности определения реакций из условия:

$$\sum Y = 0; 4,67 - 4 - 0,67 = 0.$$

Поместим начало координат осей $zoу$ в крайнее левое сечение рассматриваемой балки. Заданную распределенную нагрузку продлеваем до правой опоры и прикладываем компенсирующую нагрузку (см. рисунок 7.2).

Уравнение прогибов по методу начальных параметров для заданной балки будет выглядеть следующим образом:

$$EIy_z = EIy_o + EI\Theta_o \cdot z - 6 \cdot \frac{(z-0)^2}{2} + 4,67 \cdot \frac{(z-1)^3}{6} - 2 \cdot \frac{(z-1)^4}{24} + 2 \cdot \frac{(z-3)^4}{24}.$$

В данном случае начало координат находится на консоли. Следовательно, определению подлежат оба начальных параметра. Их величины рассчитаем из рассмотрения условий закрепления балки. Для этого составим уравнения метода начальных параметров для опорных сечений:

$$z = 1 \text{ м}; EIy_A = EIy_o + EI\Theta_o \cdot 1 - 6 \cdot \frac{(z-0)^2}{2} = 0;$$

$$z = 4 \text{ м}; EIy_B = EIy_o + EI\Theta_o \cdot 4 - 6 \cdot \frac{(4-0)^2}{2} + 4,67 \cdot \frac{(4-1)^3}{6} - 2 \cdot \frac{(4-1)^4}{24} + 2 \cdot \frac{(4-3)^4}{24} = 0.$$

Посредством совместного решения данных уравнений определим начальный прогиб $EIy_o = -7,22 \text{ кН}\cdot\text{м}^3$ и начальный угол поворота $EI\Theta_o = 10,22 \text{ кН}\cdot\text{м}^2$. Прогиб в сечении D

$$z = 3 \text{ м}; EIy_D = -7,22 + 10,22 \cdot 3 - 6 \cdot \frac{3^2}{2} + 4,67 \cdot \frac{(3-1)^3}{6} - 2 \cdot \frac{(4-1)^4}{24} = 1,33 \text{ кН}\cdot\text{м}^3.$$

Модуль продольной упругости стальной балки из таблицы Б.1

$$E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа} = 2 \cdot 10^{11} \text{ Па}.$$

Для швеллера № 10 из таблиц ГОСТ 8240–97 осевой момент инерции

$$I_X^{III_6} = 174 \text{ см}^4.$$

Осевой момент инерции сечения, состоящего из двух швеллеров,

$$I_x = 2 \cdot I_x^{шв} = 2 \cdot 174 = 348 \text{ см}^4; \quad y_D = \frac{EI y_D}{E \cdot I_x} = \frac{1,33 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 348 \cdot 10^{-8}} = 1,9 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 1,9 \text{ мм}.$$

Пример 2 – Определить прогиб C сечения стальной балки (рисунок 7.3).

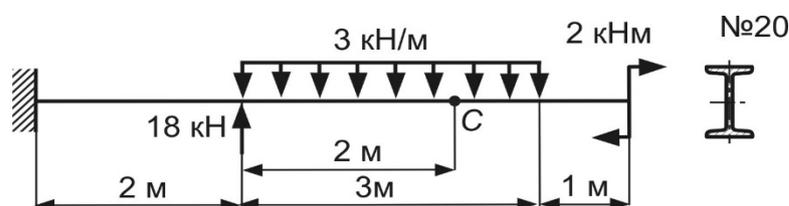


Рисунок 7.3 – Расчетная схема к примеру 2

Решение

Определим опорные реакции в заделке:

$$\sum Y = 0; \quad -R_o + 18 - 3 \cdot 3 = 0; \quad R_o = 9 \text{ кН};$$

$$\sum M_o = 18 \cdot 2 - 3 \cdot 3 \cdot 3,5 - 2 - M_o = 0; \quad M_o = 2,5 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

y

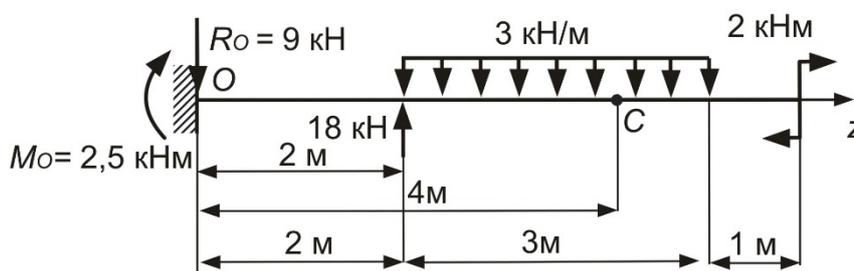


Рисунок 7.4 – Определение опорных реакций в заделке

В начале балки (рисунок 7.4) находится заделка, поэтому начальный прогиб и начальный угол поворота [1–4] $y_o = 0$; $\Theta_o = 0$.

Уравнение прогиба в точке C по методу начальных параметров

$$EI y_z = EI y_o + EI \Theta_o \cdot z + 2,5 \cdot \frac{(z-0)^2}{2} - 9 \cdot \frac{(z-0)^3}{6} + 18 \cdot \frac{(z-2)^2}{6} - 3 \cdot \frac{(z-2)^4}{24};$$

$$z = 4 \text{ м}; \quad EI y_C = 2,5 \cdot \frac{4^2}{2} - 9 \cdot \frac{4^3}{6} + 18 \cdot \frac{(4-2)^2}{6} - 3 \cdot \frac{(4-2)^4}{24} = -54 \text{ кН} \cdot \text{м}^3.$$

Модуль продольной упругости стальной балки $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа} = 2 \cdot 10^{11} \text{ Па}$.

Для заданного двутавра из таблиц ГОСТ 8239–89 осевой момент инерции $I_x = 1840 \text{ см}^4$.

$$y_C = \frac{EIy_C}{E \cdot Ix} = \frac{-54 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 1840 \cdot 10^{-8}} = -0,015 \text{ м} = -15 \text{ мм}.$$

Пример 3 (для самостоятельного решения) – Для стальных балок, изображенных на рисунке 7.5, определить прогиб в точке С.

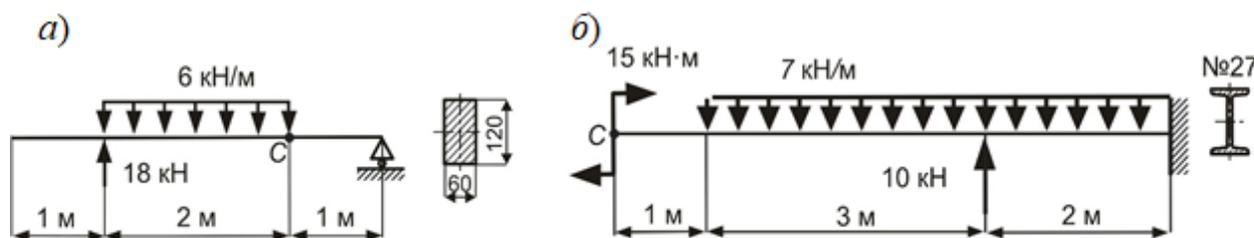


Рисунок 7.5 – Примеры для самостоятельного решения

Контрольные вопросы

- 1 Какие перемещения возникают при изгибе балки?
- 2 Что такое прогиб?
- 3 Запишите дифференциальное уравнение изогнутой оси балки.
- 4 Как определяется жесткость при изгибе?
- 5 Как необходимо расположить начало координат осей при расчете перемещений по методу начальных параметров?
- 6 Запишите уравнение метода начальных параметров для определения прогиба в произвольном сечении.
- 7 Запишите уравнение метода начальных параметров для определения угла поворота в произвольном сечении.
- 8 Что такое начальные параметры?
- 9 Чему равны начальный прогиб и начальный угол поворота, если на левом конце балки расположена заделка?
- 10 Чему будет равен начальный прогиб, если левый конец балки шарнирно закреплен? Как в этом случае определить начальный угол поворота?

8 Расчеты на прочность и жесткость при кручении прямолинейного бруса круглого поперечного сечения

Пример 1 – Требуется проверить прочность вала (рисунок 8.1, а), если $[\tau] = 60 \text{ МПа}$.

Решение

Разбиваем вал на участки (рисунок 8.1, а) и строим эпюру крутящих моментов M_k (рисунок 8.1, б)

Полярные моменты сопротивления круглого сечения, в соответствии с таблицей А.1,

$$W_p^1 = \frac{\pi \cdot d^3}{16} = \frac{3,14 \cdot 3^3}{16} = 5,29 \text{ см}^3; \quad W_p^2 = \frac{\pi \cdot d^3}{16} = \frac{3,14 \cdot 4^3}{16} = 12,56 \text{ см}^3.$$

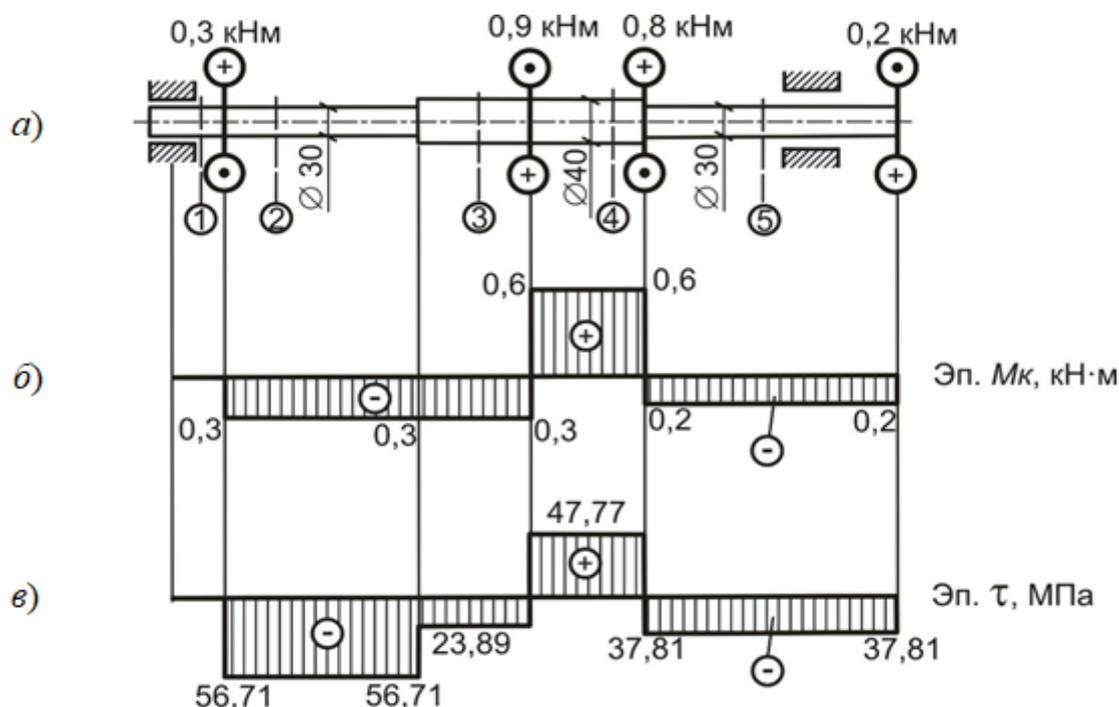


Рисунок 8.1 – Построение эпюр крутящих моментов и касательных напряжений

Касательные напряжения по участкам вала будут соответственно

$$\tau_1 = 0; \tau_2 = -\frac{0,3 \cdot 10^3}{5,29 \cdot 10^{-6}} = -56,71 \text{ МПа}; \tau_3 = -\frac{0,3 \cdot 10^3}{12,56 \cdot 10^{-6}} = -23,89 \text{ МПа};$$

$$\tau_4 = \frac{0,6 \cdot 10^3}{12,56 \cdot 10^{-6}} = 47,77 \text{ МПа}; \tau_5 = -\frac{0,2 \cdot 10^3}{5,29 \cdot 10^{-6}} = -37,81 \text{ МПа}.$$

Построим эпюру касательных напряжений (рисунок 8.1, в). Из эпюры видно, что наиболее нагружен второй участок, на котором возникают большие по величине напряжения. Для этого участка выполняем проверку прочности. Условие прочности при кручении выглядит следующим образом:

$$\tau_{\max} \leq [\tau]; \tau_{\max} = 56,71 \text{ МПа} \leq [\tau] = 60 \text{ МПа}.$$

Таким образом, условие выполнено, прочность обеспечена.

Пример 2 (для самостоятельного решения) – Построить эпюру абсолютных углов закручивания заданного вала (рисунок 8.2).

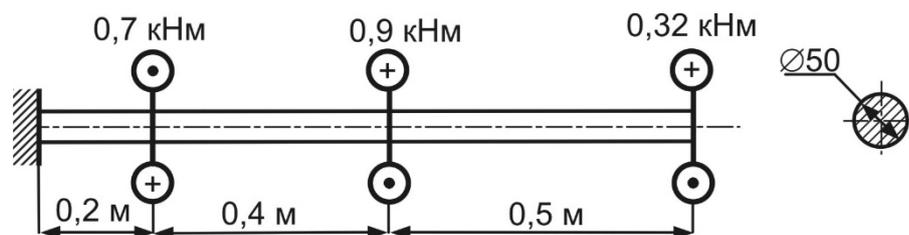


Рисунок 8.2 – Пример для самостоятельного решения

Пример 3 (для самостоятельного решения) – Определить допускаемую нагрузку на вал, изображенный на рисунке 8.3, если $[\tau] = 70$ МПа.

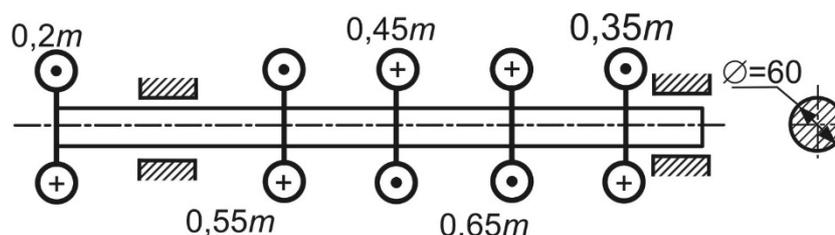


Рисунок 8.3 – Пример для самостоятельного решения

Контрольные вопросы

- 1 Какой вид нагружения называют кручением?
- 2 Какие внутренние силовые факторы и напряжения возникают при кручении?
- 3 Запишите формулу для определения касательных напряжений при кручении.
- 4 Как выглядит условие прочности при кручении?
- 5 Как определить абсолютный угол закручивания при кручении?
- 6 Что такое модуль сдвига?
- 7 Запишите закон Гука при сдвиге.

9 Расчет вала круглого поперечного сечения на прочность при совместном действии изгиба и кручения

Пример 1 – Вал круглого поперечного сечения (рисунок 9.1, а) передает мощность $N = 6$ кВт, вращаясь с угловой скоростью $\omega = 100$ рад/с. На валу установлены шкив диаметром $D_1 = 0,15$ м и шестерня, средний диаметр которой $D_2 = 0,1$ м. Требуется определить диаметр вала по четвертой теории прочности, если $[\sigma] = 80$ МПа.

Решение

Приводим действующие нагрузки к центру поперечного сечения вала (рисунок 9.1, б).

Определим внешние моменты на шкиве и шестерне [1–4]:

$$m_1 = m_2 = \frac{N}{\omega} = \frac{6}{100} = 0,06 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Составим схему действия на вал внешних моментов (рисунок 9.1, в), в соответствии с которой построим эпюру крутящих моментов (рисунок 9.1, г).

Определим внешние силы, действующие на вал со стороны шкива и шестерни:

$$F_1 = 3 \cdot t_1 = 3 \cdot \frac{2 \cdot m_1}{D_1} = 3 \cdot \frac{2 \cdot 0,06}{0,15} = 2,4 \text{ кН}; \quad F_2 = \frac{2 \cdot m_2}{D_2} = \frac{2 \cdot 0,06}{0,1} = 1,2 \text{ кН}.$$

Составим схему действия сил на вал в вертикальной плоскости (рисунок 9.1, д). Определим реакции опор и построим эпюру изгибающих моментов от сил в вертикальной плоскости (рисунок 9.1, е).

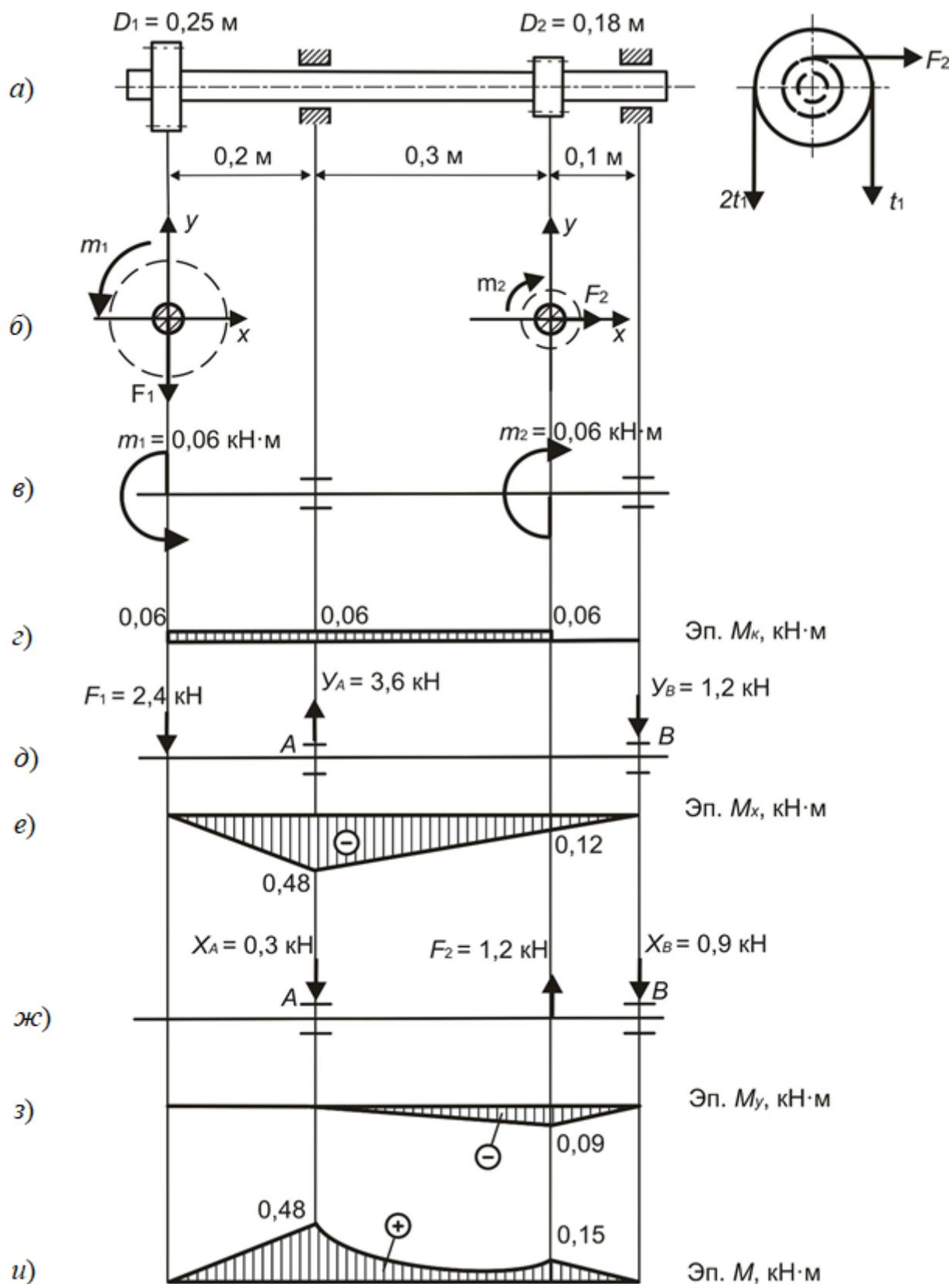


Рисунок 9.1 – Расчет вала при совместном действии изгиба с кручением

Составим схему действия сил на вал в горизонтальной плоскости (рисунок 9.1, ж). Определим реакции опор и построим эпюру изгибающих моментов от сил в горизонтальной плоскости (рисунок 9.1, з).

Построение эпюры суммарных изгибающих моментов (рисунок 9.1, и) в характерных сечениях вала осуществлялось с использованием выражения

$$M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}.$$

$$M = 0; \quad M = 0,48 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad M = \sqrt{0,09^2 + 0,12^2} = 0,15 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad M = 0.$$

По эпюре суммарных изгибающих моментов M и эпюре крутящих моментов M_K определим опасное сечение. Анализ этих эпюр показал, что опасным является сечение, в котором действуют наибольший изгибающий момент $M = 0,48 \text{ кН}\cdot\text{м}$ и наибольший крутящий момент $M_K = 0,06 \text{ кН}\cdot\text{м}$.

Эквивалентный (расчетный) момент по четвертой теории прочности в опасном сечении будет соответственно

$$M_{\text{экв}}^{IV} = \sqrt{M^2 + 0,75 \cdot M_K^2} = \sqrt{0,48^2 + 0,75 \cdot 0,06^2} = 0,483 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Расчетное значение диаметра вала из условия прочности

$$d = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot M_{\text{экв}}^{IV}}{\pi \cdot [\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 0,483 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 80 \cdot 10^6}} = 0,0395 \text{ м} = 39,5 \text{ мм}.$$

Пример 2 (для самостоятельного решения) – Проверить прочность вала, изображенного на рисунке 9.2, по четвертой теории прочности.

Исходные данные: $N = 40 \text{ кВт}$; $\omega = 100 \text{ об/мин}$; диаметр вала $d = 55 \text{ мм}$; $[\sigma] = 70 \text{ МПа}$.

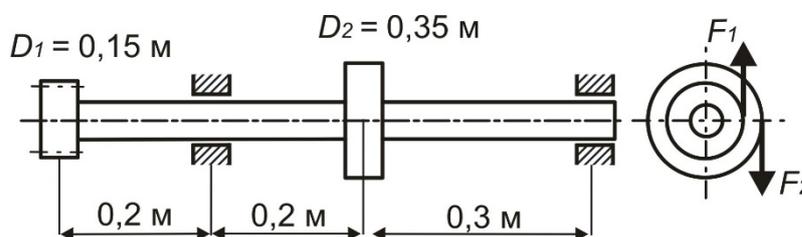


Рисунок 9.2 – Пример для самостоятельного решения

Контрольные вопросы

1 Какие внутренние силовые факторы возникают при совместном действии изгиба и кручения?

2 Как определяется внешний момент, если известна передаваемая мощность?

- 3 Как определить усилие, изгибающее вал со стороны колеса (шестерни)?
- 4 Запишите формулу для определения полного (суммарного) изгибающего момента.
- 5 При помощи каких эпюр определяют опасное сечение вала?
- 6 Какие напряжения возникают в поперечном сечении вала при совместном действии изгиба и кручения?
- 7 Какие точки поперечного сечения вала являются опасными при совместном действии изгиба и кручения?
- 8 Запишите выражения для определения эквивалентных (расчетных) напряжений по третьей и четвертой теориям прочности.
- 9 Запишите выражения для определения эквивалентного (расчетного) момента по третьей и четвертой теориям прочности.
- 10 Запишите условие прочности при совместном действии изгиба и кручения.

10 Расчет бруса при косом изгибе

Пример 1 – Проверить прочность стальной балки двутаврового поперечного сечения, изображенной на рисунке 10.1, а, если $[\sigma] = 170$ МПа.

Исходные данные: двутавр № 27 ($W_x = 371$ см³; $W_y = 41,5$ см³).

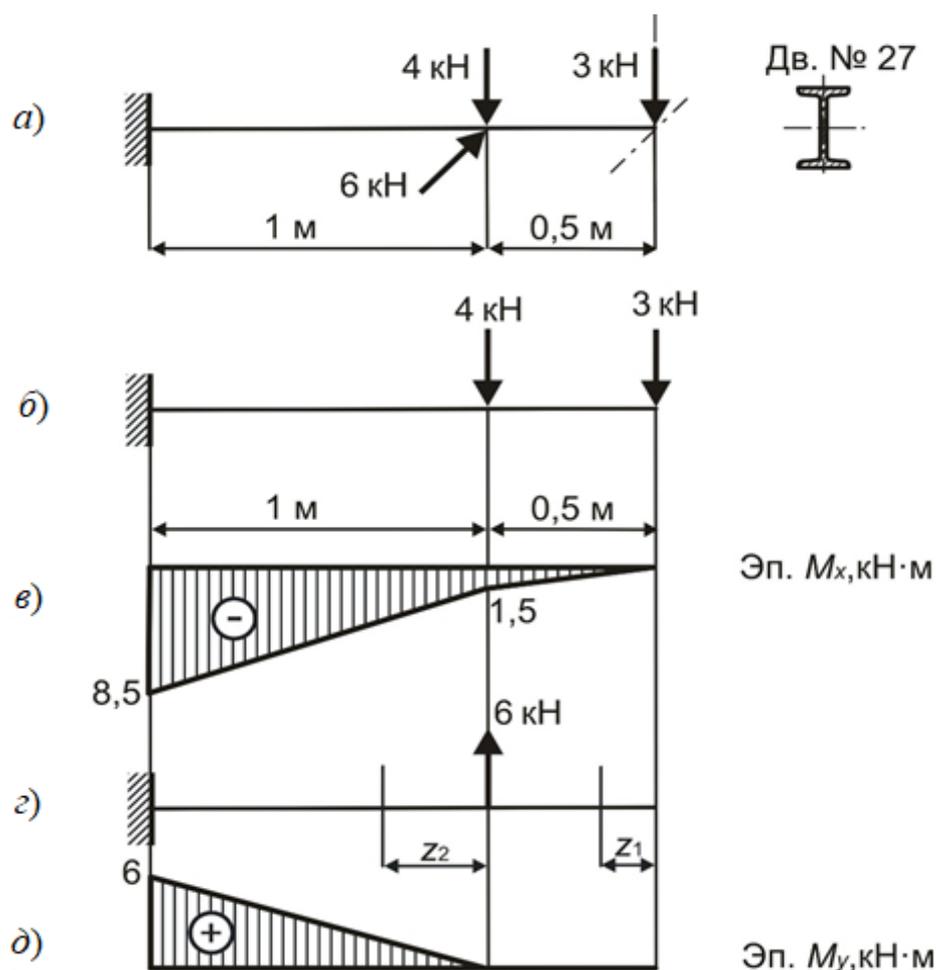


Рисунок 10.1 – Пример расчета бруса при косом изгибе

Решение

На основании принципа независимости действия сил рассмотрим отдельно каждую плоскость нагружения [1, 2].

Составим схему нагружения балки в вертикальной плоскости (рисунок 10.1, б). Построим эпюру изгибающих моментов от сил в вертикальной плоскости (рисунок 10.1, в).

Составим схему нагружения балки в горизонтальной плоскости (рисунок 10.1, г). Построим эпюру изгибающих моментов от сил в горизонтальной плоскости (рисунок 10.1, д).

В результате условие прочности для опасного сечения будет выглядеть так:

$$\sigma_{\max} = \frac{8,5 \cdot 10^3}{371 \cdot 10^{-6}} + \frac{6 \cdot 10^3}{41,5 \cdot 10^{-6}} = 167,5 \text{ МПа} \leq [\sigma] = 170 \text{ МПа}.$$

Пример 2 (для самостоятельного решения) – Определить размеры поперечного сечения балки, изображенной на рисунке 10.2.

Исходные данные: $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$.

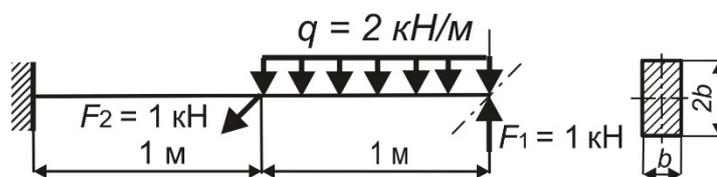


Рисунок 10.2 – Пример для самостоятельного решения

Контрольные вопросы

- 1 Какой случай изгиба называется косым изгибом?
- 2 В чем состоит принцип независимости действия сил при расчете балки на кривой изгиб?
- 3 Запишите формулу для определения нормальных напряжений при косом изгибе.
- 4 Сформулируйте условие прочности при косом изгибе.
- 5 Запишите выражение для определения положения нейтральной оси при косом изгибе.
- 6 Проходит ли нейтральная ось при косом изгибе через центр тяжести сечения?
- 7 Как определить опасные точки опасного сечения, если известно положение нейтральной оси?
- 8 Возможен ли косой изгиб балки, если осевые моменты ее поперечного сечения равны?
- 9 Как определить прогиб балки при косом изгибе?

11 Расчет бруса при внецентренном растяжении-сжатии. Определение положения опасных точек в поперечном сечении

Пример 1 – Требуется проверить прочность бруса, сжатого сосредоточенной силой $F = 120$ кН, приложенной в точке F (рисунок 11.1). Брус изготовлен из материала, для которого $[\sigma]_{СЖ} = 100$ МПа; $[\sigma]_P = 20$ МПа.

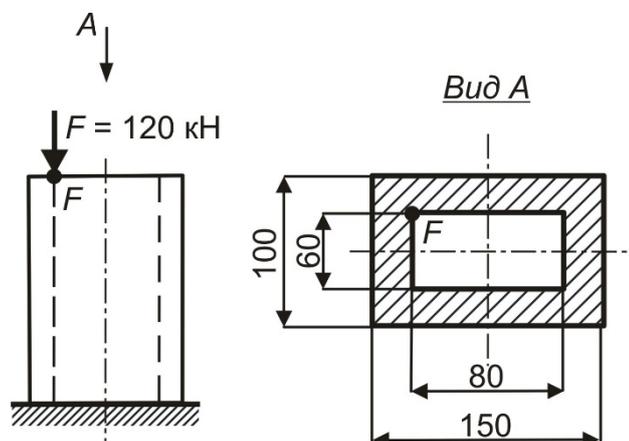


Рисунок 11.1 – Расчетная схема стойки при внецентренном приложении продольной силы

Решение

Составим расчетную схему поперечного сечения (рисунок 11.2). На схеме размеры указываем в сантиметрах. Сечение имеет оси симметрии, следовательно, координатные оси, проведенные через них, являются главными центральными осями (см. рисунок 11.2).

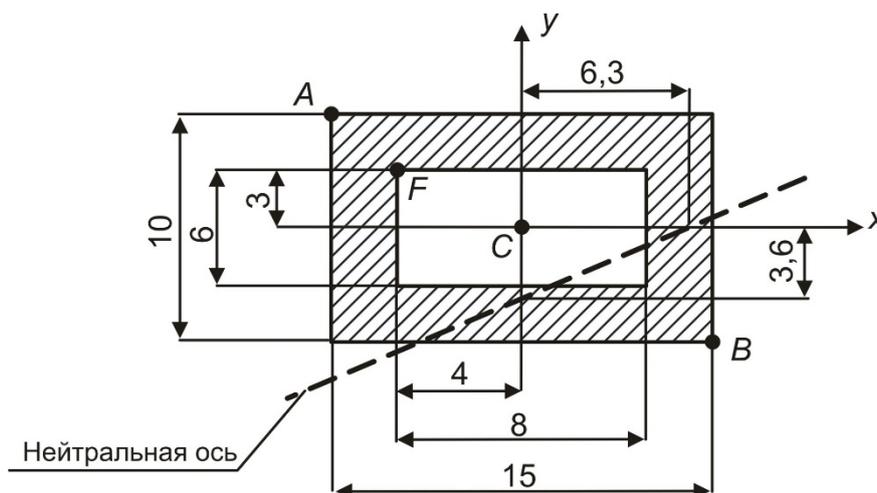


Рисунок 11.2 – Положение нейтральной оси в поперечном сечении при внецентренном приложении продольной силы

Определим геометрические характеристики заданного поперечного сечения.

Площадь

$$A = 15 \cdot 10 - 8 \cdot 6 = 102 \text{ см}^2.$$

Главные центральные моменты инерции [2]

$$I_X = \frac{15 \cdot 10^3}{12} - \frac{8 \cdot 6^3}{12} = 1106 \text{ см}^4; \quad I_Y = \frac{15^3 \cdot 10}{12} - \frac{8^3 \cdot 6}{12} = 2556,5 \text{ см}^4.$$

Осевые моменты сопротивления [2]

$$W_X = \frac{1106}{5} = 221,2 \text{ см}^3; \quad W_Y = \frac{2556,5}{7,5} = 340,9 \text{ см}^3.$$

Квадраты радиусов инерции сечения [2]

$$i_X^2 = \frac{I_X}{A} = \frac{1106}{102} = 10,84 \text{ см}^2; \quad i_Y^2 = \frac{I_Y}{A} = \frac{2556,5}{102} = 25,06 \text{ см}^2.$$

Координаты точки приложения силы относительно главных центральных осей координат будут соответственно

$$x_F = -4 \text{ см}; \quad y_F = 3 \text{ см}.$$

Внутренние силовые факторы

$$N = -120 \text{ кН};$$

$$M_X = \pm F \cdot y_F = \pm 120 \cdot 0,03 = \pm 3,6 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_Y = \pm F \cdot x_F = \pm 120 \cdot 0,04 = \pm 4,8 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Длины отрезков, которые нейтральная ось (линия) отсекает на главных центральных осях, соответственно (см. рисунок 11.2)

$$x_0 = a_x = -\frac{i_Y^2}{x_F} = -\frac{25,06}{(-4)} = 6,3 \text{ см}; \quad y_0 = a_y = -\frac{i_X^2}{y_F} = -\frac{10,84}{3} = -3,6 \text{ см}.$$

Следует иметь в виду, что нейтральная ось делит сечение на растянутую и сжатую области.

Опасными являются точки, наиболее удаленные от нейтральной оси: в сжатой области точка – *A*, в растянутой области – точка *B* (см. рисунок 11.2).

Напряжения в указанных опасных точках будут соответственно

$$\sigma_A = -\frac{N}{A} - \frac{M_X}{W_X} - \frac{M_Y}{W_Y} = -\frac{120 \cdot 10^3}{102 \cdot 10^{-4}} - \frac{3,6 \cdot 10^3}{221,2 \cdot 10^{-6}} - \frac{4,8 \cdot 10^3}{340,9 \cdot 10^{-6}} = -42,12 \text{ МПа};$$

$$\sigma_B = -\frac{N}{A} + \frac{M_X}{W_X} + \frac{M_Y}{W_Y} = -\frac{120 \cdot 10^3}{102 \cdot 10^{-4}} + \frac{3,6 \cdot 10^3}{221,2 \cdot 10^{-6}} + \frac{4,8 \cdot 10^3}{340,9 \cdot 10^{-6}} = 18,6 \text{ МПа}.$$

Проверим выполнение условия прочности на растяжение:

$$\sigma_{\max}^P \leq [\sigma]_P; \quad \sigma_{\max}^P = 18,6 \text{ МПа} \leq [\sigma]_P = 20 \text{ МПа}.$$

Проверим выполнение условия прочности на сжатие:

$$\sigma_{\max}^{СЖ} \leq [\sigma]_{СЖ}; \quad \sigma_{\max}^{СЖ} = 42,12 \text{ МПа} \leq [\sigma]_{СЖ} = 100 \text{ МПа}.$$

Прочность бруса обеспечена.

Пример 2 (для самостоятельного решения) – Бетонная колонна нагружена сжимающей силой, приложенной в точке F (рисунок 11.3). Определить допускаемую нагрузку.

Исходные данные $b = 60 \text{ мм}$; $h = 200 \text{ мм}$; $r = 40 \text{ мм}$; материал – бетон; $[\sigma]_P = 4 \text{ МПа}$; $[\sigma]_{СЖ} = 25 \text{ МПа}$.

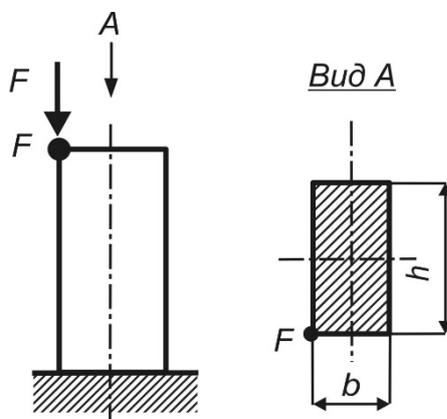


Рисунок 11.3 – Пример к самостоятельному решению

Контрольные вопросы

- 1 Какие внутренние силовые факторы возникают при внецентренном растяжении (сжатии)?
- 2 Запишите выражение для определения нормальных напряжений при внецентренном растяжении (сжатии).
- 3 Влияет ли на положение нейтральной оси величина и направление внецентренно приложенной нагрузки?
- 4 Как определить положение нейтральной оси при внецентренном растяжении (сжатии)? Запишите соответствующие формулы.
- 5 Как определить опасные точки сечения, если известно положение нейтральной оси?
- 6 Запишите условие прочности при внецентренном растяжении (сжатии).

12 Определение угловых и линейных перемещений в балках по способу Верещагина

Пример 1 – Для балки, приведенной на рисунке 12.1, а, определить прогиб в сечении С способом Верещагина.

Дано: двутавр № 18 ($I_{X_{об}} = 1290 \text{ см}^4$); модуль продольной упругости стали $E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Па}$.

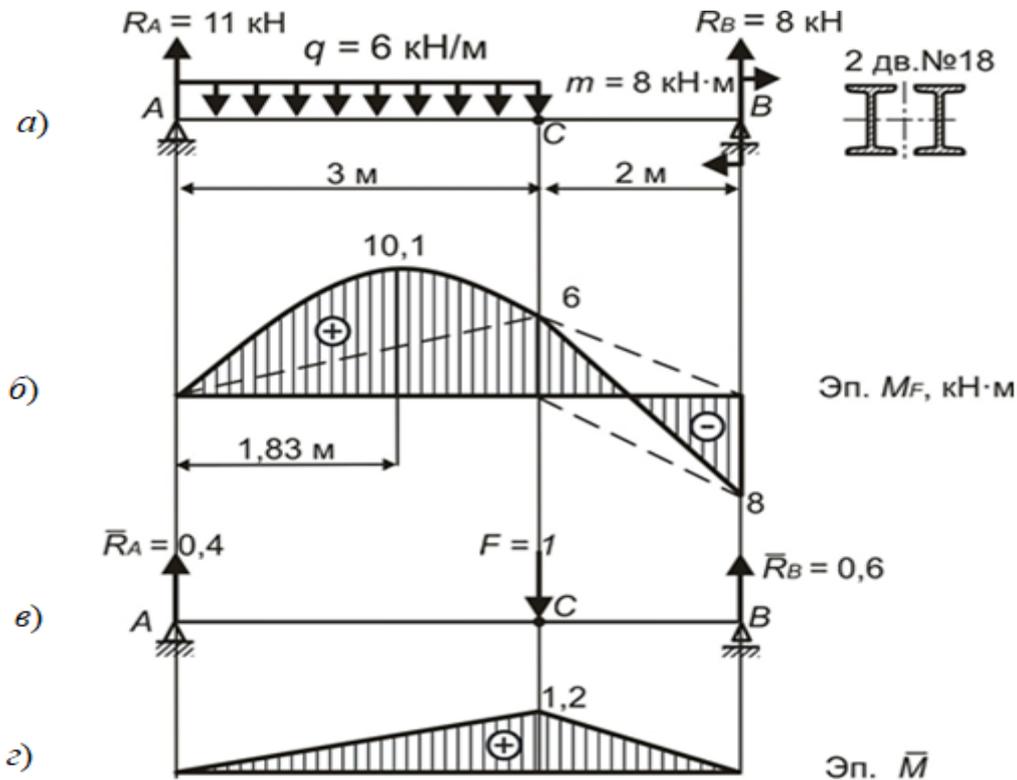


Рисунок 12.1 – Пример расчета по определению прогиба в сечении С

Решение

Определим реакции опор от заданной нагрузки и построим грузовую эпюру M_F (рисунок 12.1, б).

Для определения прогиба в сечении С прикладываем в данном месте (рисунок 12.1, в) единичную силу $\bar{F} = 1$. Определяем опорные реакции и строим единичную эпюру \bar{M} (рисунок 12.1, г).

Определим прогиб сечения С посредством перемножения единичной и грузовой эпюр по формуле

$$\Delta_C = \sum_1^n \frac{\omega_{F_i} \cdot \bar{M}_{C_i}}{EI_X} = \frac{1}{EI_X} \left[\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,2 + \frac{6 \cdot 3^3}{12} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1,2 + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,2 - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 2 \cdot 1,2 \cdot \frac{1}{3} \right] = \frac{84,5}{3EI_X}.$$

Осей момент инерции заданного сечения $I_X = 2 \cdot I_{X_{ос}} = 2 \cdot 1290 = 2580 \text{ см}^4$.

$$\text{Окончательно получим } \Delta_C = \frac{84,5}{3EI_X} = \frac{84,5 \cdot 10^3}{3 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 2580 \cdot 10^{-8}} = 5,46 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

Пример 2 – Для заданной стальной балки (рисунок 12.2, а) определить угол поворота сечения C способом Верещагина.

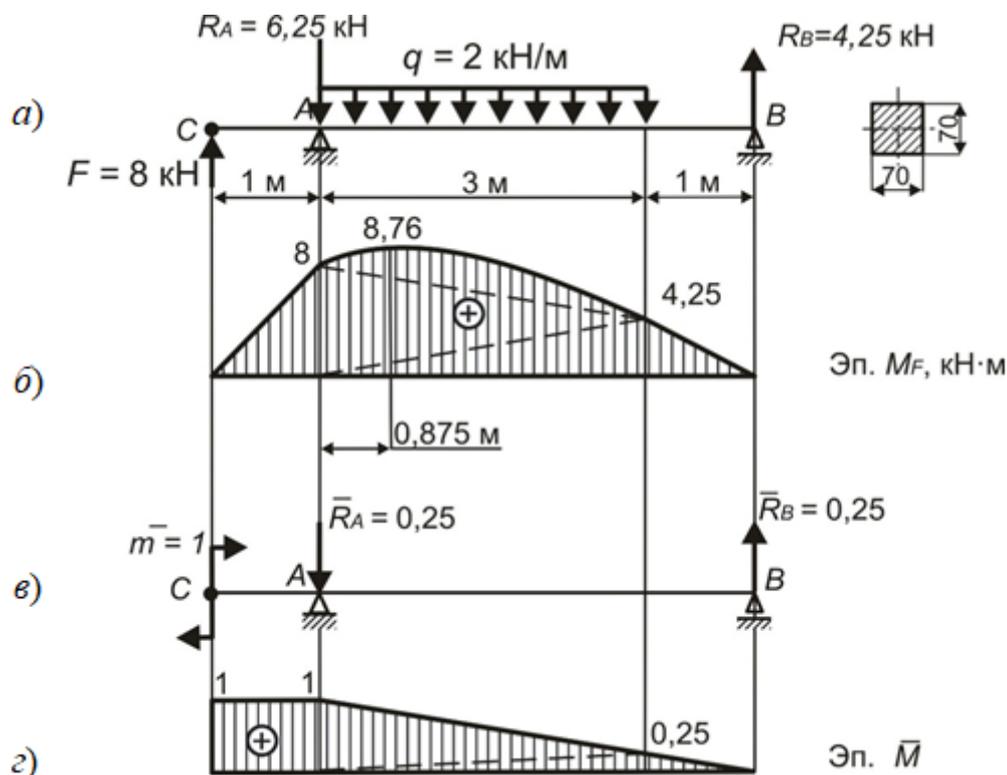


Рисунок 12.2 – Определение угла поворота в сечении C

Решение

Определим реакции опор от заданной нагрузки и построим грузовую эпюру M_F (рисунок 12.2, б).

Рассмотрим единичное состояние балки (рисунок 12.2, в). От момента $\bar{m} = 1$, приложенного в сечении C , найдем опорные реакции и построим единичную эпюру \bar{M} (рисунок 12.2, г).

Определим прогиб сечения C перемножением единичной и грузовой эпюр:

$$\Theta_C = \sum_1^n \frac{\omega_{F_i} \cdot \bar{M}_{C_i}}{EI_X} = \frac{1}{EI_X} \left[\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 1 \cdot 1 + \left(\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 3 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 0,25 \right) + \frac{1}{2} \cdot 4,25 \cdot 3 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot 0,25 \right) + \frac{2 \cdot 3^3}{12} \cdot \frac{1}{2} \cdot (1 + 0,25) \right) + \frac{1}{2} \cdot 4,25 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,25 \right] = \frac{19,354}{E \cdot I_X}.$$

Осей момент инерции заданного квадратного сечения, в соответствии с таблицей А.1,

$$I_x = \frac{b^4}{12} = \frac{7^4}{12} = 200,08 \text{ см}^4.$$

Модуль продольной упругости $E = 2 \cdot 10^5$ МПа или $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па.
Окончательно получим

$$\Theta_C = \frac{19,354 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 200,08 \cdot 10^{-8}} = 0,048 \text{ рад.}$$

Контрольные вопросы

- 1 Запишите выражение для определения перемещений способом Верещагина.
- 2 Какие нагрузки рассматриваются при построении грузовой эпюры?
- 3 Какие нагрузки рассматриваются при построении единичной эпюры?
- 4 Как перемножать эпюры по способу Верещагина?
- 5 Опишите порядок определения перемещений по способу Верещагина.

13 Решение статически неопределимых балок с помощью метода сил

Пример 1 – Требуется определить размеры поперечного сечения балки, изображенной на рисунке 13.1. Допускаемое напряжение $[\sigma] = 160$ МПа.

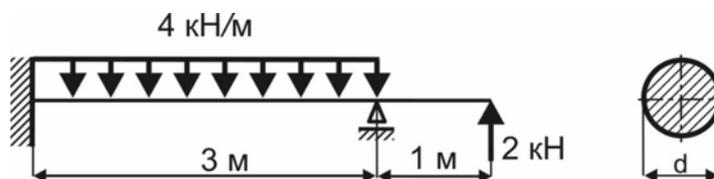


Рисунок 13.1 – Расчетная схема статически неопределимой балки

Решение

Степень статической неопределимости заданной балки (см. рисунок 13.1)

$$S = R - 3 = 4 - 3 = 1.$$

Выберем основную систему (рисунок 13.2), освободив балку от заданной нагрузки и дополнительной (лишней) связи.

Приложим к полученной основной системе заданную внешнюю нагрузку и реактивное усилие, действующее в отброшенной лишней связи (см. рисунок 13.2). Полученная таким образом система называется эквивалентной системой.

Составим каноническое уравнение метода сил [1–4]:

$$X_1 \cdot \delta_{11} + \Delta_{1F} = 0.$$

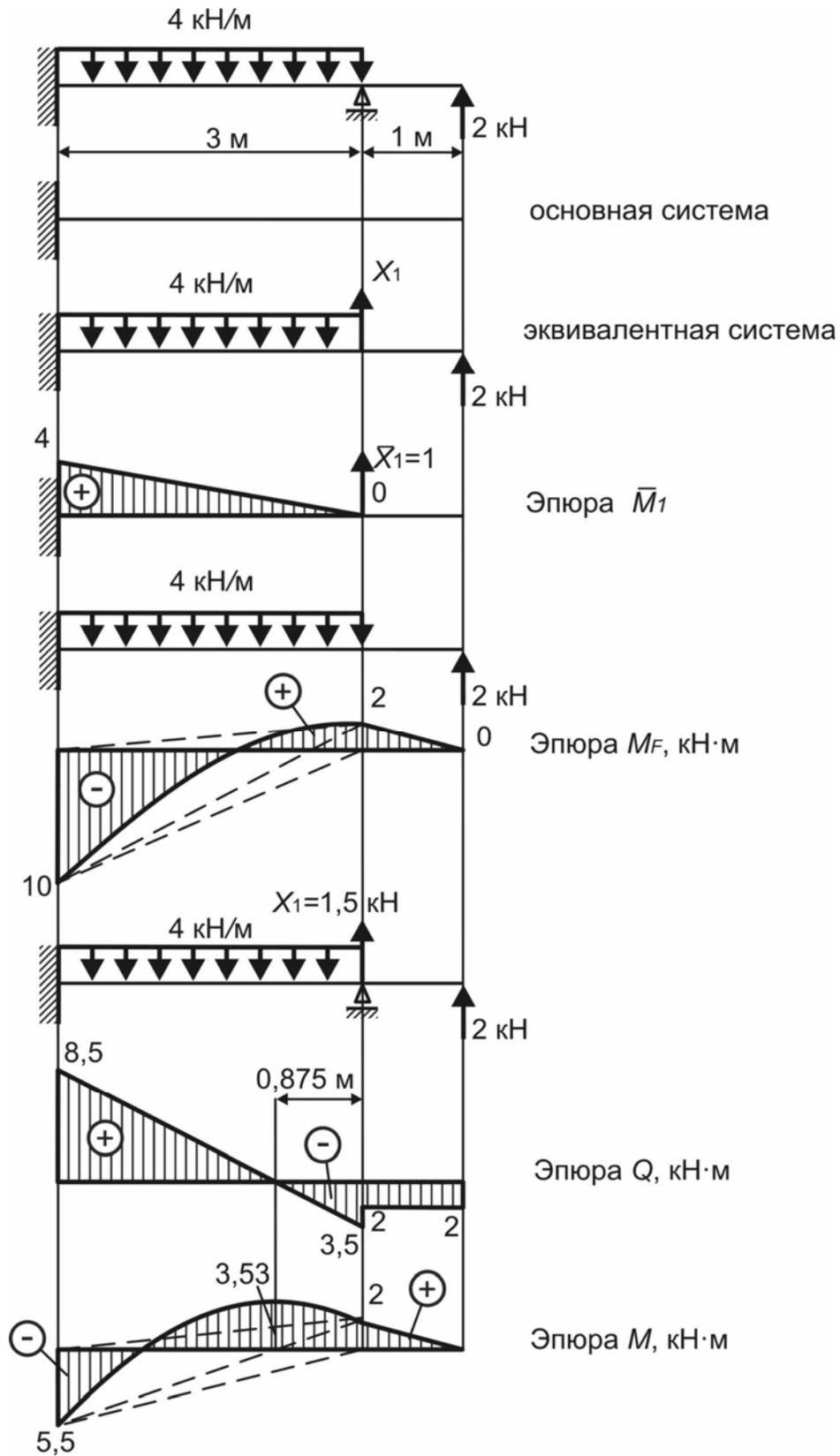


Рисунок 13.2 – Расчет статически неопределимой балки методом сил

Приложим к основной системе заданные нагрузки и построим грузовую эпюру M_F (см. рисунок 13.2).

Приложим к основной системе единичную нагрузку $\bar{X}_1 = 1$ и построим единичную эпюру \bar{M}_1 (см. рисунок 13.2).

Определим коэффициенты канонического уравнения метода сил способом Верещагина [1–4]:

$$\delta_{11} = \frac{\bar{M}_1 \cdot \bar{M}_1}{EI} = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 = \frac{9}{EI};$$

$$\Delta_{1F} = \frac{M_F \cdot \bar{M}_1}{EI} = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 10 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 + \frac{4 \cdot 3^3}{12} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \right) = -\frac{40,5}{EI}.$$

Решим каноническое уравнение метода сил с учетом найденных коэффициентов:

$$X_1 \cdot \frac{9}{EI} - \frac{40,5}{EI} = 0; \quad X_1 = 1,5 \text{ кН.}$$

Построим окончательные эпюры поперечных сил Q и изгибающих моментов M (см. рисунок 13.2).

Выполним деформационную проверку [1–4]:

$$\Delta_{1F} = \frac{M \cdot \bar{M}_1}{EI} = 0;$$

$$\Delta_{1F} = \frac{M \cdot \bar{M}_1}{EI} = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 5,5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 + \frac{4 \cdot 3^3}{12} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \right) = 0.$$

Из условия прочности по нормальным напряжениям определим диаметр балки:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_X} = \frac{32 \cdot M_{\max}}{\pi \cdot d^3} \leq [\sigma];$$

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot M_{\max}}{\pi \cdot [\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 5,5 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 160 \cdot 10^6}} = 7,05 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 70,5 \text{ мм.}$$

Пример 2 (для самостоятельного решения) – Требуется определить размеры поперечного сечения для балки, изображенной на рисунке 13.3.

Исходные данные: $m = 12 \text{ кН}\cdot\text{м}$; $m_1 = 18 \text{ кН}\cdot\text{м}$; $l_1 = 1,5 \text{ м}$; $l_2 = 2 \text{ м}$; $[\sigma] = 160 \text{ Мпа}$; $h = 2b$.

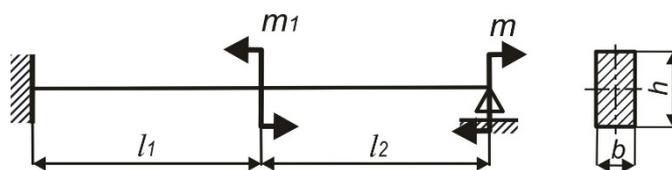


Рисунок 13.3 – Пример к самостоятельному решению

Контрольные вопросы

- 1 Какие системы называют статически неопределимыми?
- 2 Что называют степенью статической неопределимости?
- 3 Что такое основная система?
- 4 Что такое эквивалентная система?
- 5 Запишите канонические уравнения метода сил. Объясните их физический смысл.
- 6 Что означают величины X_1, X_2, \dots, X_n ?
- 7 Что означают величины $\delta_{ii}, \delta_{in}, \delta_{ni}, \delta_{nn}$?
- 8 Что означают величины $\Delta_{1F}, \Delta_{2F}, \dots, \Delta_{iF}$?
- 9 Как строятся единичные эпюры? Как определить необходимое количество единичных эпюр?
- 10 Как строится грузовая эпюра?
- 11 Какие эпюры необходимо перемножить, чтобы определить коэффициенты δ_{nn} ? Могут ли указанные коэффициенты быть отрицательными?
- 12 Какие эпюры необходимо перемножить, чтобы определить коэффициенты δ_{in}, δ_{ni} ? Будут ли указанные коэффициенты равны между собой?
- 13 Какие эпюры необходимо перемножить для определения грузовых коэффициентов?
- 14 Каким образом выполняется деформационная проверка?

14 Расчет продольно сжатого стержня на устойчивость

Пример 1 – Для стального стержня (рисунок 14.1) требуется определить допустимое значение сжимающей нагрузки $[F]$, критическую силу $F_{кр}$ и коэффициент запаса устойчивости n_y .

Исходные данные: материал стержня – сталь 3; модуль продольной упругости стали $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; $a = 310$ МПа; $b = 1,14$ МПа; $\mu = 1$; $[\sigma] = 160$ МПа.

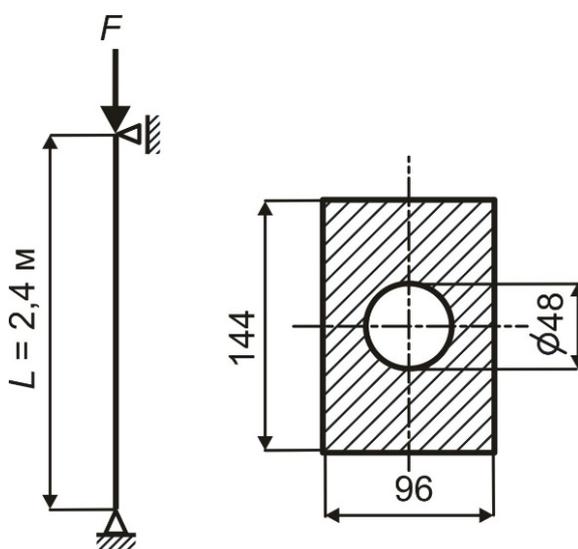


Рисунок 14.1 – Расчетная схема сжатого стержня на устойчивость

Решение

Определим геометрические характеристики заданного поперечного сечения, которое состоит из двух простых фигур: 1 – прямоугольник; 2 – круг (рисунок 14.2).

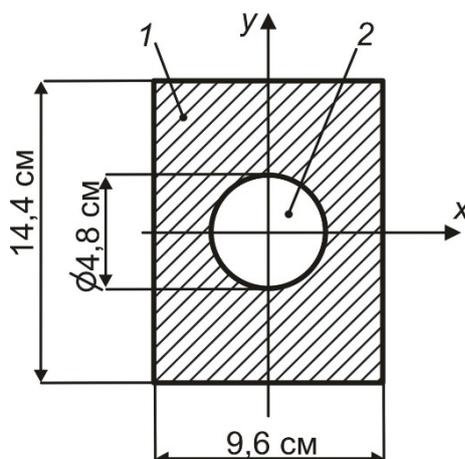


Рисунок 14.2 – Определение геометрических характеристик поперечного сечения

Площадь сечения

$$A = A_1 - A_2 = 9,6 \cdot 14,4 - \frac{3,14 \cdot 4,8^2}{4} = 120,14 \text{ см}^2.$$

Главные центральные моменты инерции [1–4]

$$I_x = I_{x_1} - I_{x_2} = \frac{9,6 \cdot 14,4^3}{12} - \frac{3,14 \cdot 4,8^4}{64} = 2362,73 \text{ см}^4;$$

$$I_y = I_{y_1} - I_{y_2} = \frac{14,4 \cdot 9,6^3}{12} - \frac{3,14 \cdot 4,8^4}{64} = 1035,63 \text{ см}^4.$$

Минимальный момент инерции $I_{\min} = I_y = 1035,63 \text{ см}^4$.

Минимальный радиус инерции $i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{1035,63}{120,14}} = 2,93 \text{ см}$.

Определяем максимальную гибкость стержня относительно материальной оси y :

$$\lambda_y = \frac{\mu \cdot l}{i_{\min}} = \frac{1 \cdot 2,4}{2,93 \cdot 10^{-2}} = 81,9.$$

Определяем коэффициент продольного изгиба в соответствии с таблицей значений коэффициентов продольного изгиба:

$$\begin{aligned} \lambda = 80; & \quad \varphi = 0,75; \\ \lambda = 90; & \quad \varphi = 0,69. \end{aligned}$$

Вычислим значение коэффициента продольного изгиба φ , используя формулу линейной интерполяции:

$$\varphi = 0,75 - \frac{0,75 - 0,69}{90 - 80} \cdot (81,9 - 80) = 0,74.$$

Из условия устойчивости стержня [1–4] определим допускаемое значение сжимающей силы:

$$\sigma_y = \frac{F}{A} \leq \varphi \cdot [\sigma];$$

$$[F] = \varphi \cdot A \cdot [\sigma] = 0,74 \cdot 120,14 \cdot 10^{-4} \cdot 160 \cdot 10^6 = 14224,6 \cdot 10^2 \text{ Н.}$$

Так как полученное значение гибкости меньше предельного значения для стали ($\lambda_{пред} = 100$), критическую силу определяем по формуле Ясинского [1–4]:

$$F_{кр} = (a - b \cdot \lambda) \cdot A = (310 - 1,14 \cdot 81,9) \cdot 10^2 \cdot 120,14 \cdot 10^{-4} = 26026,4 \cdot 10^2 \text{ Н.}$$

Коэффициент запаса устойчивости

$$n_y = \frac{F_{кр}}{[F]} = \frac{26026,4 \cdot 10^2}{14224,6 \cdot 10^2} = 1,83.$$

Пример 2 (для самостоятельного решения) – Определить критическую силу для двух случаев закрепления стержня (рисунок 14.3).

Исходные данные: материал – сталь 3; $b = 60$ мм; $h = 40$ мм; $L = 2$ м.

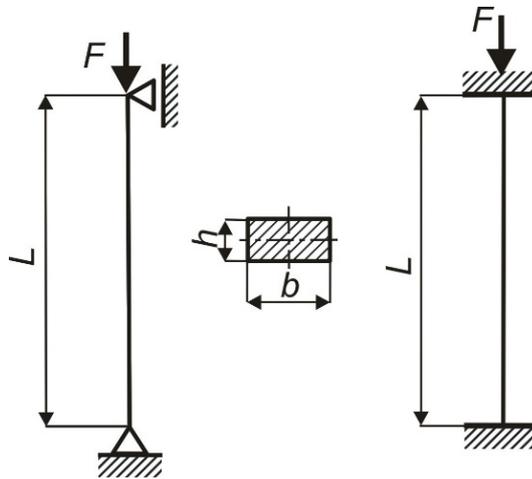


Рисунок 14.3 – Примеры для самостоятельного решения

Контрольные вопросы

- 1 Дайте определение устойчивости.
- 2 Назовите формы равновесия .
- 3 Что является признаком потери устойчивости?
- 4 Дайте определение критической силы.

- 5 Запишите формулу для определения гибкости стержня.
- 6 От каких параметров зависит коэффициент μ ?
- 7 Запишите формулу Эйлера. В каких случаях она применима для определения критической силы?
- 8 Запишите формулу Ясинского. В каких случаях она применима для определения критической силы?
- 9 Запишите условие устойчивости.
- 10 Как определяется коэффициент продольного изгиба?
- 11 Запишите выражение для определения коэффициента запаса устойчивости.

15 Продольный и поперечный удары по брусу. Определение деформаций и напряжений в стержне

Пример 1 – На двутавровую стальную балку с высоты h падает груз G (рисунок 15.1, а). Требуется проверить прочность, если $[\sigma] = 160$ МПа, и определить возникающие перемещения.

Исходные данные: двутавр № 20 ($W_x = 184$ см³; $I_x = 1840$ см⁴); модуль упругости $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; $[\sigma] = 160$ МПа.

Решение

Приведенный случай нагружения вызывает изгиб заданной балки (см. рисунок 15.1, а).

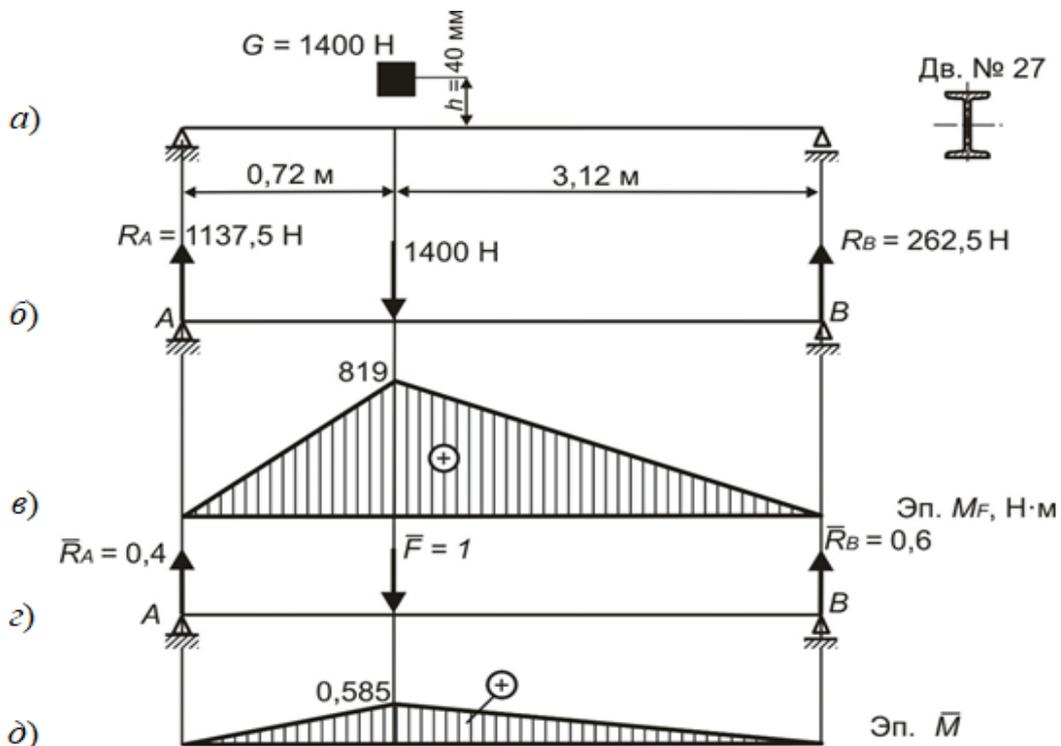


Рисунок 15.1 – Расчет балки на удар

Прикладываем к балке груз G статически (рисунок 15.1, б). Определяем реакции опор от данной статической нагрузки и строим эпюру изгибающих моментов M_F (рисунок 15.1, в). По этой эпюре определяем величину максимального изгибающего момента $M_{\max} = 819 \text{ Н}\cdot\text{м}$.

Тогда максимальное статическое напряжение будет

$$\sigma_{\max}^{cm} = \frac{M_{\max}}{W_X} = \frac{819}{184 \cdot 10^{-6}} = 4,45 \text{ МПа.}$$

Прикладываем к балке единичную силу $\bar{F} = 1$. Определяем реакции опор от единичной силы (рисунок 15.1, г). Строим единичную эпюру \bar{M} (см. рисунок 15.1, в).

Используя способ Верещагина, определяем перемещение в точке удара:

$$\begin{aligned} \Delta_{cm} &= \frac{M_F \cdot \bar{M}}{EI_X} = \left(\frac{1}{2} \cdot 819 \cdot 0,72 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,585 + \frac{1}{2} \cdot 819 \cdot 3,12 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,585 \right) = \\ &= \frac{613,27}{EI_X} = \frac{613,27}{2 \cdot 10^{11} \cdot 1840 \cdot 10^{-8}} = 0,000166 \text{ м.} \end{aligned}$$

Динамический коэффициент определим, используя выражение [1–4]

$$k_D = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{cm}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 40 \cdot 10^{-3}}{0,000166}} = 24.$$

Тогда максимальные динамические напряжения

$$\sigma_{\max}^D = k_D \cdot \sigma_{\max}^{cm} = 24 \cdot 4,45 = 106,8 \text{ МПа.}$$

Проверим выполнение условия прочности:

$$\sigma_{\max}^D = 106,8 \text{ МПа} < [\sigma] = 160 \text{ МПа. Прочность обеспечена.}$$

Динамическое перемещение $\Delta_D = k_D \cdot \Delta_{cm} = 24 \cdot 0,000166 = 0,004 \text{ м}$.

Пример 2 (для самостоятельного решения) – Требуется проверить прочность и определить возникающие перемещения для заданной балки (рисунок 15.2).

Исходные данные: $v = 1,2 \text{ м/с}$; $b = 85 \text{ мм}$; $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$.

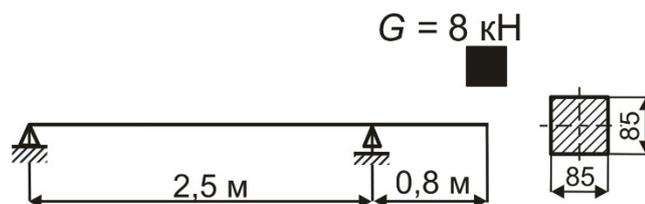


Рисунок 15.2 – Пример для самостоятельного решения

Контрольные вопросы

- 1 Какая нагрузка называется динамической?
- 2 Что такое динамический коэффициент?
- 3 Запишите формулу для определения напряжений при динамическом действии нагрузок.
- 4 Запишите выражение для определения динамического коэффициента в случае, когда груз поднимается (опускается) с постоянным ускорением.
- 5 Что такое удар?
- 6 Какие допущения приняты при расчете на ударное нагружение?
- 7 Запишите формулу для определения динамического коэффициента при ударе.

16 Расчеты плоской задачи теории упругости с использованием функции напряжений

Дано: для пластины прямоугольного сечения длиной L , высотой h и толщиной, равной 1 (рисунок 16.1), заданы функция напряжений φ и размеры L и h . Объёмными силами следует пренебречь.

Требуется:

- 1) проверить, удовлетворяет ли функция φ бигармоническому уравнению плоской задачи;
- 2) найти выражения, описывающие компоненты напряжений σ_x , σ_y и τ_{xy} ;
- 3) построить эпюры внешних сил действующих по контуру пластины;
- 4) для точки с координатами $x = \alpha \cdot L$ и $y = \beta \cdot h$ найти величины напряжений σ_x , σ_y и τ_{xy} , показать их на гранях элементарного параллелепипеда;
- 5) найти в этой точке главные напряжения (σ_1 , σ_2 , σ_3), направление главных площадок и показать их на эскизе.

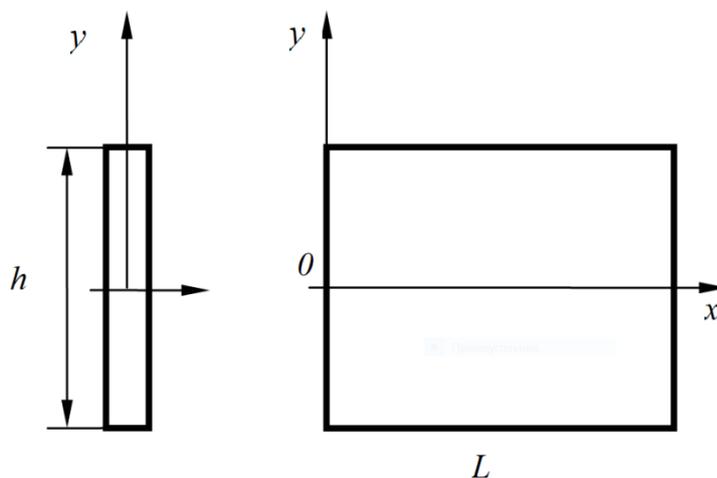


Рисунок 16.1 – Схема пластинки

Пример 1 – Дана функция напряжений $\varphi = 3 \cdot x^3 + x^2 \cdot y$; $L = 3$ м; $h = 1$ м; $\alpha = 0,1$; $\beta = 0,1$. Схема пластины и расположения координатных осей соответствует рисунку 16.1.

1 Чтобы проверить, удовлетворяет ли функция φ бигармоническому уравнению плоской задачи, продифференцируем функцию в соответствии с видом уравнения:

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0.$$

Частные производные по переменной x будут соответственно

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 9x^2 + 2x \cdot y; \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 18x + 2y; \quad \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} = 18; \quad \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} = 0.$$

Аналогичным образом могут быть получены еще два слагаемых бигармонического уравнения:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = x^2; \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 \varphi}{\partial y^3} = \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 9x^2 + 2xy; \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = 2x; \quad \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} = 0.$$

Так как все три слагаемых бигармонического уравнения обращаются в ноль, следовательно, данная функция может быть использована для рассмотрения плоского напряженного состояния в пластине.

2 Выражения, описывающие компоненты напряжений по плоскости пластины, могут быть получены на основании использования следующих соотношений:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}; \quad \tau_{xy} = - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}.$$

Посредством взятия этих производных окончательно получим

$$\sigma_x = 0; \quad \sigma_y = 18x + 2y; \quad \tau_{xy} = -2x.$$

3 Для построения эпюр внешних сил, действующих по контуру пластины, воспользуемся уравнениями, описывающими условия на поверхности для случая плоского напряженного состояния:

$$\begin{cases} X_v = \sigma_x \cdot \ell + \tau_{xy} \cdot m; \\ Y_v = \tau_{yx} \cdot \ell + \sigma_y \cdot m, \end{cases}$$

где X_v , Y_v – проекции внешней нагрузки на координатные оси;

ℓ и m – направляющие косинусы между нормалью v к поверхности и осями координат:

$$\ell = \cos(v, x); \quad m = \cos(v, y).$$

Подставив в уравнения, описывающие условия на поверхности, выражения для компонент напряжений, получим

$$\begin{cases} X_v = (-2x) \cdot m; \\ Y_v = (-2x) \cdot \ell + (18x + 2y) \cdot m. \end{cases}$$

Остановимся более подробно на построении эпюр вдоль стороны AB пластины. Для этой стороны

$$\ell = \cos(90^\circ) = 0; m = \cos(0^\circ) = 1;$$

$$\begin{cases} X_v = (-2x) \cdot m = -2x \Big|_0^4 = -8 \text{ МПа}; \\ Y_v = (-2x) \cdot \ell + (18x + 2y) \cdot m = 18x + 2 \cdot 0,5 \Big|_0^4 = 73 \text{ МПа}. \end{cases}$$

Так как все переменные в приведенных уравнениях находятся в первой степени, то зависимость внешних сил от координат носит линейный характер. В результате эпюры внешних сил вдоль стороны AB будут выглядеть, как показано на рисунке 16.2. Аналогичным образом строятся эпюры вдоль оставшихся трех сторон (сделать это самостоятельно).

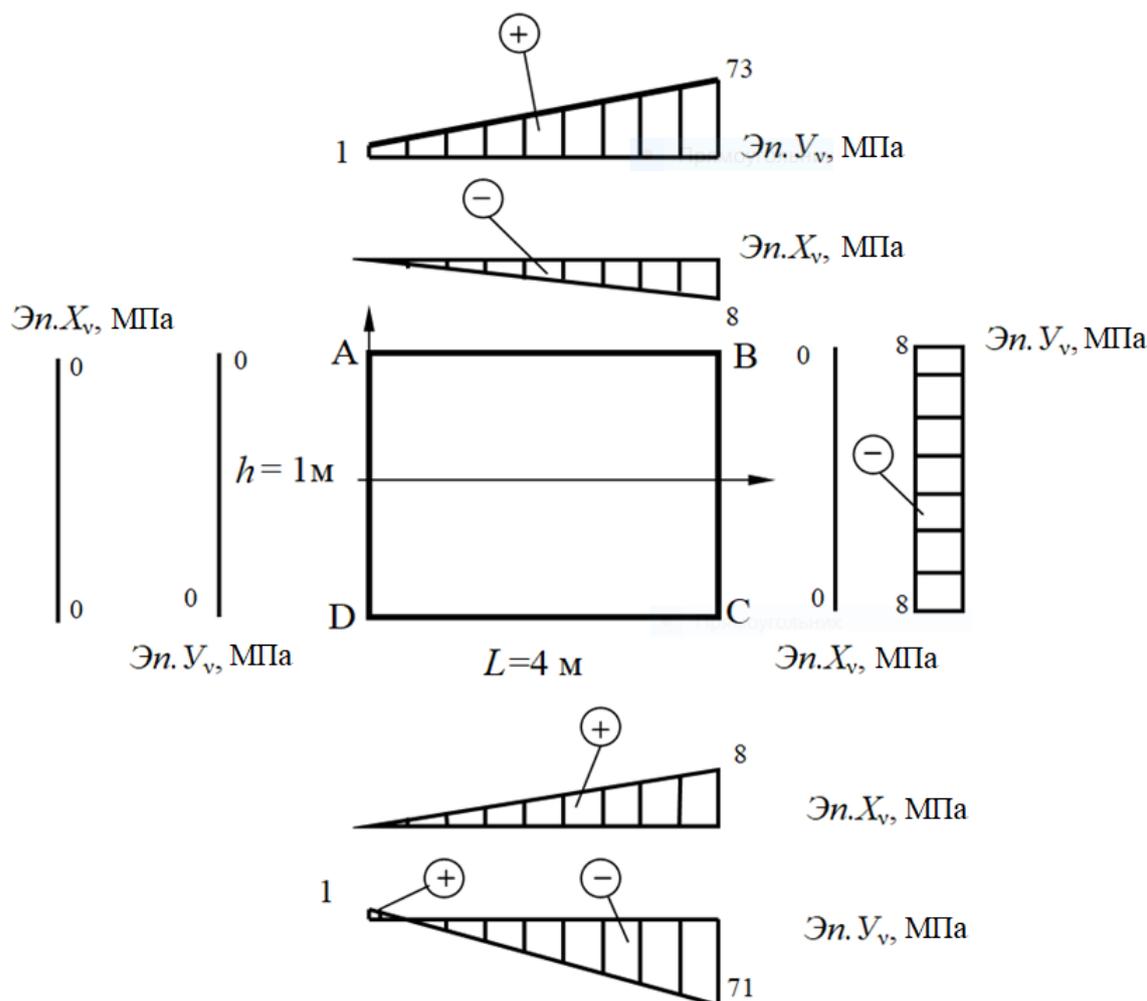


Рисунок 16.2 – Эпюры внешних сил, действующих по контуру пластины

4 Определим координаты точки, в которой необходимо произвести анализ напряженного состояния:

$$x = \alpha \cdot L = 0,1 \cdot 4 = 0,4 \text{ м};$$

$$y = \beta \cdot h = 0,1 \cdot 1 = 0,1 \text{ м}.$$

Для вычисленных координат значения напряжений будут

$$\sigma_x = 0;$$

$$\sigma_y = 18x + 2y = 18 \cdot 0,4 + 2 \cdot 0,1 = 7,4 \text{ МПа};$$

$$\tau_{xy} = -2x = -2 \cdot 0,4 = -0,8 \text{ МПа}.$$

Покажем направление действия этих компонент напряжений на гранях элементарного параллелепипеда, вырезанного вокруг данной точки (рисунок 16.3).

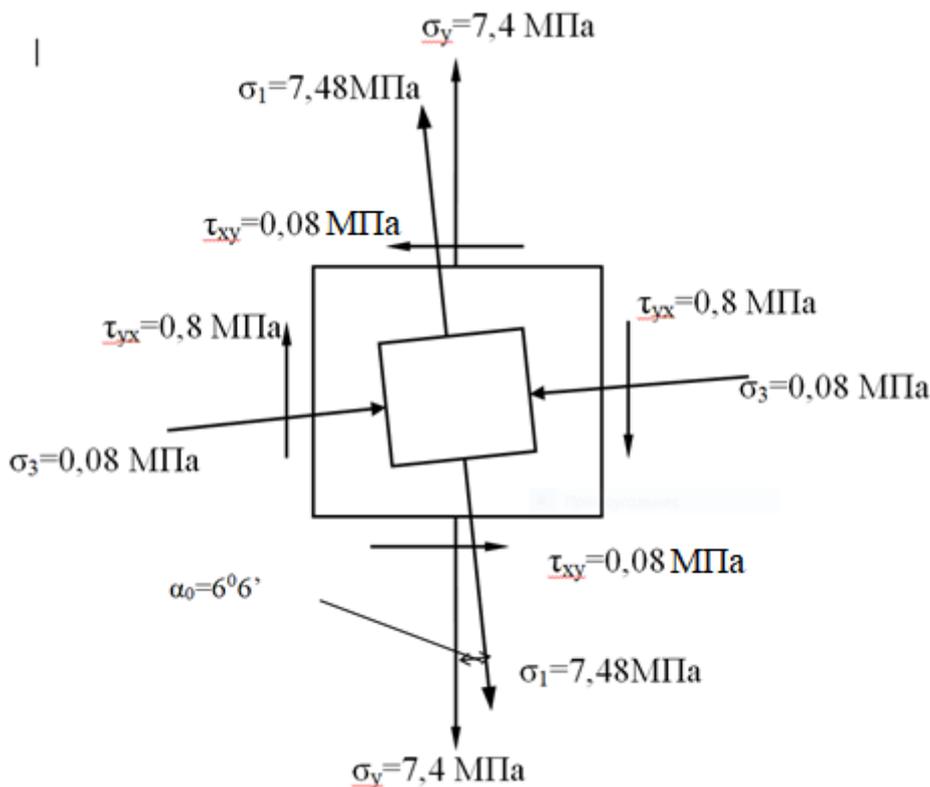


Рисунок 16.3 – Направление действия компонент напряжений, совпадающих с координатными осями, и направление действия главных напряжений

5 Определим направление действия главных напряжений и положение в пространстве главных площадок.

Положение главных площадок устанавливается посредством определения угла α_0 , на который необходимо повернуть исходные площадки, чтобы получить главные площадки. Положительный угол α_0 откладывается против хода часовой стрелки.

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2 \cdot (-0,8)}{0 - 7,4} = 0,216.$$

Это соответствует $\alpha_0 = 60^\circ$.

Главные напряжения вычисляются из выражения

$$\begin{aligned}\sigma_{\min}^{\max} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} = \\ &= \frac{0 + 7,4}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(0 - 7,4)^2 + 4(-0,8)^2} = 3,7 \pm 3,78.\end{aligned}$$

Отсюда

$$\sigma_{\max} = 3,7 + 3,78 = 7,48 \text{ МПа}; \sigma_{\min} = 3,7 - 3,78 = -0,08 \text{ МПа}.$$

Определим главные напряжения, руководствуясь неравенством

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3.$$

Таким образом, $\sigma_1 = \sigma_{\max} = 7,48 \text{ МПа}$; $\sigma_2 = 0$; $\sigma_3 = \sigma_{\min} = -0,08 \text{ МПа}$.

Покажем полученные напряжения на эскизе (см. рисунок 16.3). Вектор σ_1 направляется посредством поворота на угол α_0 вектора большего в алгебраическом смысле по величине напряжения в сторону действующего на этой площадке касательного напряжения.

6 Максимальные касательные напряжения в рассматриваемой точке будут

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} = \frac{7,48 - (-0,08)}{2} = 3,78 \text{ МПа}.$$

Контрольные вопросы

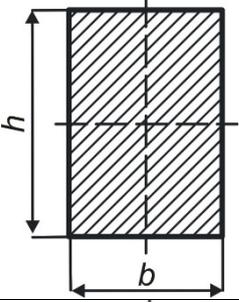
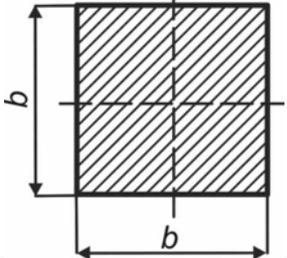
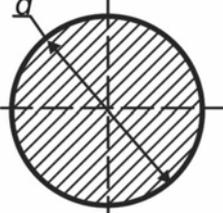
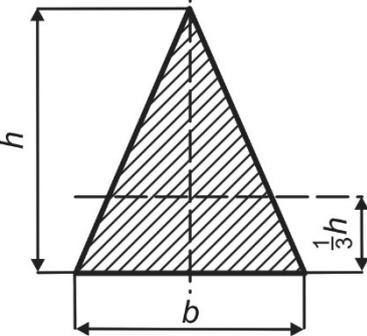
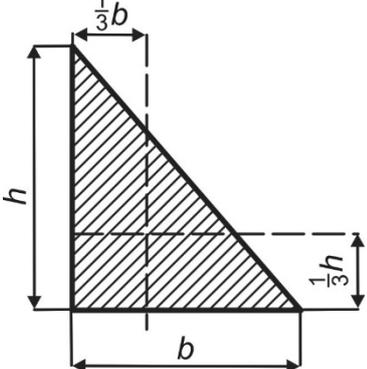
- 1 Что называется плоским напряженным состоянием?
- 2 Как выглядит бигармоническое уравнение?
- 3 Как взаимосвязаны компоненты напряжений и функция напряжений?
- 4 Как выглядят уравнения, описывающие условия на поверхности?
- 5 Какие напряжения называются главными?

Список литературы

- 1 **Волосухин, В. А.** Сопротивление материалов: учебник / В. А. Волосухин, В. Б. Логвинов, С. И. Евтушенко. – 5-е изд. – Москва: РИОР; ИНФРА-М, 2014. – 543 с.
- 2 **Муморцев, А. Н.** Сборник задач по сопротивлению материалов: учебное пособие / А. Н. Муморцев, Е. А. Фролов. – Москва: ФОРУМ; ИНФРА-М, 2015. – 112 с. : ил.
- 3 **Кривошапко, С. Н.** Сопротивление материалов: учебник и практикум для прикладного бакалавриата / С. Н. Кривошапко. – Москва: Юрайт, 2016. – 413 с.
- 4 Сопротивление материалов с основами теории упругости и пластичности: учебник / Г. С. Варданян [и др.]; под ред. Г. С. Варданяна, Н. М. Атарова. – 2-е изд., испр. и доп. – Москва: ИНФРА-М, 2011. – 638 с.

Приложение А (справочное)

Таблица А.1 – Геометрические характеристики некоторых сечений

Сечение	Площадь сечения	Осевой момент инерции I_x, I_y	Момент сопротивления W_x, W_y
	$b \cdot h$	$I_x = \frac{b \cdot h^3}{12};$ $I_y = \frac{h \cdot b^3}{12}$	$W_x = \frac{b \cdot h^2}{6};$ $W_y = \frac{h \cdot b^2}{6}$
	b^2	$I_x = I_y = \frac{b^4}{12}$	$W_x = W_y = \frac{b^3}{6}$
	$\frac{\pi \cdot d^2}{4}$	$I_x = I_y = \frac{\pi \cdot d^4}{64};$ $I_p = \frac{\pi \cdot d^4}{32}$	$W_x = W_y = \frac{\pi \cdot d^3}{32};$ $W_p = \frac{\pi \cdot d^3}{16}$
	$\frac{b \cdot h}{2}$	$I_x = \frac{b \cdot h^3}{36}; I_y = \frac{h \cdot b^3}{48}$	$W_{XB} = \frac{b \cdot h^2}{24};$ $W_{XH} = \frac{b \cdot h^2}{12};$ $W_y = \frac{b \cdot h^2}{24}$
	$\frac{b \cdot h}{2}$	$I_x = \frac{b \cdot h^3}{36}; I_y = \frac{h \cdot b^3}{36}$	$W_{XB} = \frac{b \cdot h^2}{24};$ $W_{XH} = \frac{b \cdot h^2}{12};$ $W_{yP} = \frac{b \cdot h^2}{24};$ $W_{yII} = \frac{b \cdot h^2}{12}$