

МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Технологии металлов»

МЕХАНИКА МАТЕРИАЛОВ И КОНСТРУКЦИЙ

*Методические рекомендации к практическим занятиям
для студентов специальности 1-36 07 02
«Производство изделий на основе трехмерных технологий»
очной и заочной форм обучения*

Часть 2



Могилев 2021

УДК 539.3/6
ББК 305.1212
М 55(64)

Рекомендовано к изданию
учебно-методическим отделом
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Технологии металлов» «12» апреля 2021 г.,
протокол № 9

Составители: канд. техн. наук, доц. А. А. Катькало;
канд. техн. наук, доц. И. А. Леонович

Рецензент канд. техн. наук, доц. А. Е. Науменко

Методические рекомендации составлены в соответствии с рабочей программой дисциплины «Механика материалов и конструкций» для студентов специальности 1-36 07 02 «Производство изделий на основе трехмерных технологий». Содержат материал для проведения практических занятий в осеннем семестре.

Учебно-методическое издание

МЕХАНИКА МАТЕРИАЛОВ И КОНСТРУКЦИЙ

Часть 2

Ответственный за выпуск	Д. И. Якубович
Корректор	И. В. Голубцова
Компьютерная верстка	Н. П. Полевничая

Подписано в печать . Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Печать трафаретная. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 36 экз. Заказ № .

Издатель и полиграфическое исполнение:
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования
«Белорусско-Российский университет».

Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/156 от 07.03.2019.

Пр-т Мира, 43, 212022, г. Могилев.

© Белорусско-Российский
университет, 2021

Содержание

Введение.....	4
1 Расчет вала круглого и прямоугольного поперечного сечения на прочность.....	5
2 Расчет вала круглого поперечного сечения на прочность при совместном действии изгиба и кручения.....	9
3 Расчеты при сложном изгибе.....	12
4 Расчет стержней большой жесткости на внецентренное растяжение-сжатие: проверочный и проектировочный.....	16
5 Расчет стержней большой жесткости на внецентренное растяжение-сжатие: определение несущей способности	18
6 Построение ядра сечения при внецентренном приложении продольной силы	20
7 Расчеты сжатых стержней на устойчивость: проверочный, проектировочный	22
8 Расчеты сжатых стержней на устойчивость. Определение несущей способности.....	26
9 Расчет составного сечения продольно сжатого стержня.....	27
10 Определение перемещений с использованием интегралов Мора...	29
11 Определение перемещений способом Верещагина.....	32
12 Расчет простейших статически неопределимых систем методом сил.....	35
13 Расчет при продольном ударе.....	37
14 Расчет при поперечном ударе.....	38
15 Колебания систем с одной степенью свободы.....	40
16 Расчет толстостенных труб.....	42
17 Расчет тонкостенных объектов.....	46
Список литературы.....	48

Введение

Цель преподавания дисциплины – сформировать у студентов основные знания и умения по расчету типового элемента конструкций (бруса) на прочность, жесткость и устойчивость, по выбору конструкционных материалов и форм поперечных сечений, обеспечивающих требуемые показатели надежности, безопасности и экономичности сооружений.

Студенты специальности 1-36 07 02 «Производство изделий на основе трехмерных технологий» изучают дисциплину «Механика материалов и конструкций» на протяжении 3-го и 4-го семестров. Методические рекомендации (Часть 2) выполнены в объеме практических занятий 4-го семестра.

По каждой теме практических занятий в методических рекомендациях приводится один или более примеров с подробным решением. Далее следуют вопросы для самопроверки в форме тестовых заданий.

Методические рекомендации помогут сформировать у студентов компетенцию: БПК-6. Быть способным выбрать конструктивную часть и форму элементов конструкций, расчетные схемы технических конструкций, производить расчеты технических конструкций и их элементов на прочность, устойчивость и жесткость.

Перед практическим занятием студентам предлагается изучить материал темы по конспекту лекций и рекомендуемой литературе [1–11], разобрать решение приведенных типовых примеров и проработать материал для самопроверки.

1 Расчет вала круглого и прямоугольного поперечного сечения на прочность

Пример 1 – Проверить прочность и жесткость стального бруса (рисунок 1.1). Исходные данные: $[\tau] = 60 \text{ МПа}$; $G = 0,8 \cdot 10^5 \text{ МПа}$; $[\varphi] = 0,03 \text{ рад}$.

Решение

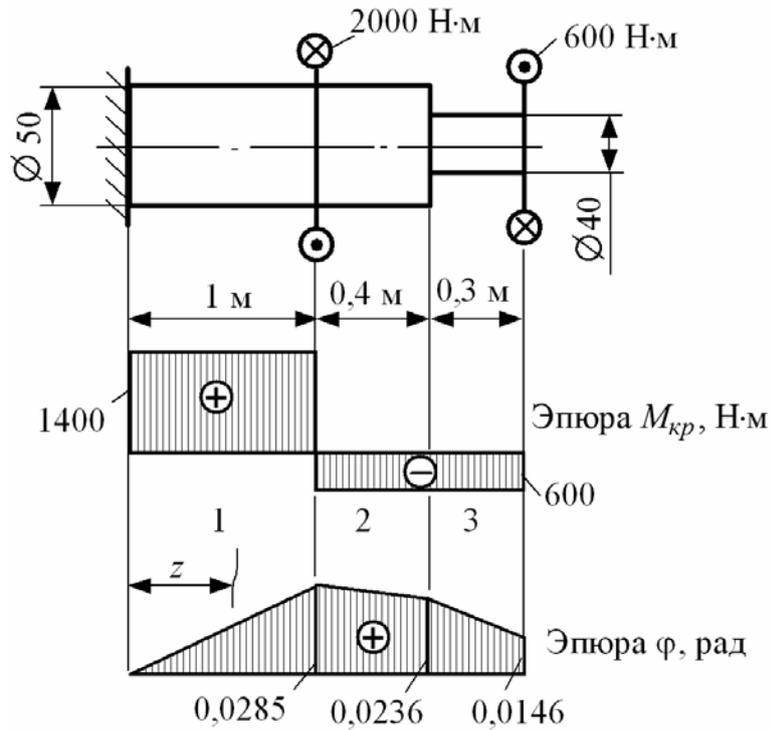


Рисунок 1.1

Геометрические характеристики вала следующие:

$$I_{\rho 1} = I_{\rho 2} = \frac{3,14 \cdot 5^4}{32} = 61,33 \text{ см}^4 = 61,33 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4;$$

$$I_{\rho 3} = \frac{3,14 \cdot 4^4}{32} = 25,12 \text{ см}^4 = 25,12 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4;$$

$$W_{\rho 1} = W_{\rho 2} = \frac{3,14 \cdot 5^3}{16} = 24,53 \text{ см}^3 = 24,53 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3;$$

$$W_{\rho 3} = \frac{3,14 \cdot 4^3}{16} = 12,56 \text{ см}^3 = 12,56 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

Строим эпюру крутящих моментов $M_{кр}$ (см. рисунок 1.1).

Проверка прочности вала:

$$\tau_1 = \frac{M_{кр}}{W_{\rho 1}} = \frac{1400}{24,53 \cdot 10^{-6}} = 57,1 \cdot 10^6 \text{ Па} = 57,1 \text{ МПа};$$

$$\tau_2 = \frac{M_{кр}}{W_{\rho 2}} = \frac{600}{24,53 \cdot 10^{-6}} = 24,5 \cdot 10^6 \text{ Па} = 24,5 \text{ МПа};$$

$$\tau_3 = \frac{M_{кр}}{W_{\rho 3}} = \frac{600}{12,56 \cdot 10^{-6}} = 47,8 \cdot 10^6 \text{ Па} = 47,8 \text{ МПа};$$

$$\tau_{\max} = 57,1 \text{ МПа} < [\tau] = 60 \text{ МПа}.$$

Построение эпюры углов закручивания и проверка жесткости вала:

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi_i = \sum_{i=1}^n \frac{M_{кр i} \cdot \ell_i}{G_i \cdot I_{\rho i}};$$

$$z = 0 \text{ м}; \quad \varphi = 0 \text{ рад};$$

$$z = 1 \text{ м}; \quad \varphi = \varphi_1 = \frac{1400 \cdot 1}{8 \cdot 10^{10} \cdot 61,33 \cdot 10^{-8}} = 0,0285 \text{ рад};$$

$$z = 1,4 \text{ м}; \quad \varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = 0,0285 - \frac{600 \cdot 0,4}{8 \cdot 10^{10} \cdot 61,33 \cdot 10^{-8}} = 0,0236 \text{ рад};$$

$$z = 1,7 \text{ м}; \quad \varphi = \varphi_2 + \varphi_3 = 0,0236 - \frac{600 \cdot 0,3}{8 \cdot 10^{10} \cdot 25,12 \cdot 10^{-8}} = 0,0146 \text{ рад};$$

$$\varphi_{\max} = 0,0285 \text{ рад} < [\varphi] = 0,03 \text{ рад}.$$

Пример 2 – Определить минимальный диаметр стального вала (рисунок 1.2), если $[\tau] = 90 \text{ МПа}$, $G = 0,8 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, $[\Theta] = 0,03 \text{ рад/м}$.

Решение

По эпюре $M_{кр}$ определим опасный участок, на котором действует максимальный крутящий момент 5 кН·м.

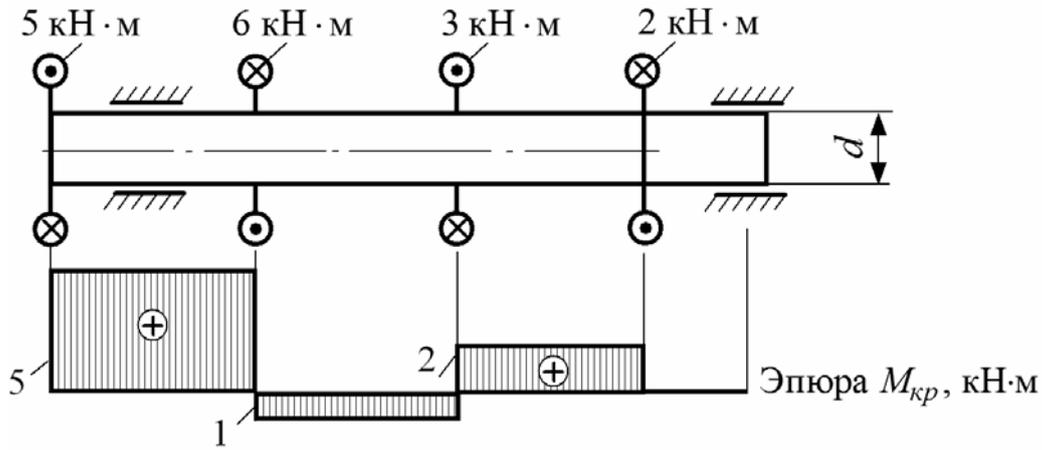


Рисунок 1.2

Из условия прочности

$$d = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_{кр}^{\max}}{\pi \cdot [\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 5 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 90 \cdot 10^6}} = 0,0657 \text{ м.}$$

Из условия жесткости

$$d = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot M_{кр}^{\max}}{\pi \cdot G \cdot [\theta]}} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 5 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 0,8 \cdot 10^{11} \cdot 0,03}} = 0,0679 \text{ м.}$$

В качестве минимального диаметра вала выбираем значение

$$d = 0,0679 \text{ м} = 67,9 \text{ мм.}$$

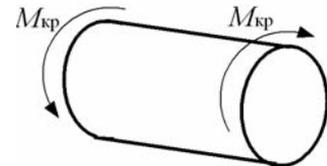
Тестовые вопросы и задачи для самопроверки

1 Укажите формулу для расчета максимальных касательных напряжений при кручении:

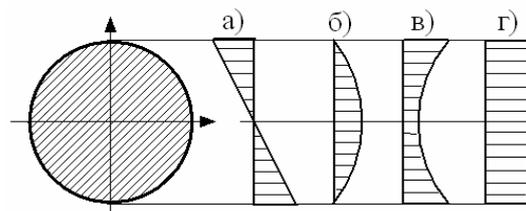
а) $\tau_{\max} = \frac{M_{кр} \cdot \ell}{W_{\rho}}$; б) $\tau_{\max} = \frac{M_{кр}}{GI_{\rho}}$; в) $\tau_{\max} = \frac{M_{кр}}{I_{\rho}}$; г) $\tau_{\max} = \frac{M_{кр}}{W_{\rho}}$.

2 Определите из расчета на прочность допустимое значение момента $[M_{кр}]$, если диаметр вала 2 см, а допустимое напряжение $[\tau] = 80 \text{ МПа}$:

- а) $50 \cdot \pi \text{ Н} \cdot \text{м}$;
 б) $60 \cdot \pi \text{ Н} \cdot \text{м}$;
 в) $40 \cdot \pi \text{ Н} \cdot \text{м}$;
 г) $30 \cdot \pi \text{ Н} \cdot \text{м}$.



3 Как распределяются касательные напряжения в поперечном сечении бруса при кручении?



Пример 3 – Проверить прочность и жесткость прямолинейного стального бруса для двух вариантов прямоугольного поперечного сечения (рисунок 1.3), если $[\tau] = 90 \text{ МПа}$, $G = 0,8 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, $[\Theta] = 0,02 \text{ рад/м}$.

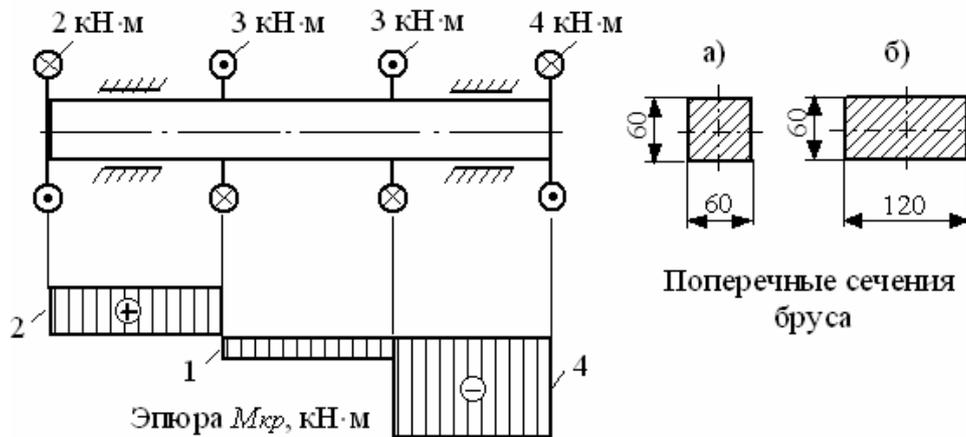


Рисунок 1.3

Решение

Определение моментов сопротивления при кручении:

$$\text{а) } W_{кр} = 0,208 \cdot h^3 = 0,208 \cdot 6^3 = 44,93 \text{ см}^3 = 44,93 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3;$$

$$\text{б) } W_{кр} = 0,246 \cdot h \cdot b^2 = 0,246 \cdot 12 \cdot 6^2 = 106,3 \text{ см}^3 = 106,3 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

Проверка прочности вала:

$$\text{а) } \tau_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_{кр}} = \frac{4 \cdot 10^3}{44,93 \cdot 10^{-6}} = 89 \cdot 10^6 \text{ Па} = 89 \text{ МПа} < [\tau] = 90 \text{ МПа};$$

$$\text{б) } \tau_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_{кр}} = \frac{4 \cdot 10^3}{106,3 \cdot 10^{-6}} = 37,63 \cdot 10^6 \text{ Па} = 37,63 \text{ МПа} < [\tau] = 90 \text{ МПа}.$$

Определение моментов инерции при кручении:

$$\text{а) } I_{кр} = 0,141 \cdot h^4 = 0,141 \cdot 6^4 = 182,7 \text{ см}^4 = 182,7 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4;$$

$$\text{б) } I_{кр} = 0,229 \cdot h \cdot b^3 = 0,229 \cdot 12 \cdot 6^3 = 593,6 \text{ см}^4 = 593,6 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4.$$

Проверка жесткости вала по относительному углу закручивания:

$$\text{а) } \theta_{\max} = \frac{M_{\max}}{GI_{кр}} = \frac{4 \cdot 10^3}{0,8 \cdot 10^{11} \cdot 182,7 \cdot 10^{-8}} = 0,0274 \text{ рад/м} > [\theta] = 0,002 \text{ рад/м};$$

$$\text{б) } \theta_{\max} = \frac{M_{\max}}{GI_{кр}} = \frac{4 \cdot 10^3}{0,8 \cdot 10^{11} \cdot 593,6 \cdot 10^{-8}} = 0,0084 \text{ рад/м} > [\theta] = 0,002 \text{ рад/м}.$$

Тестовые вопросы и задачи для самопроверки

1 Укажите условие прочности при кручении бруса прямоугольного поперечного сечения:

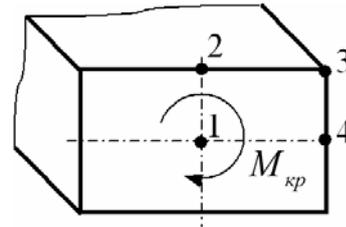
$$\text{а) } \tau_{\max} = \frac{M_{кр}}{W_{кр}} \leq [\tau];$$

$$\text{в) } \tau_{\max} = \frac{M_{кр}}{GI_{кр}} \leq [\tau];$$

$$\text{б) } \tau_{\max} = \frac{M_{кр}}{I_{кр}} \leq [\tau];$$

$$\text{г) } \tau_{\max} = \frac{M_{кр} \ell}{W_{кр}} \leq [\tau].$$

2 В какой точке поперечного сечения касательные напряжения при кручении максимальны?



3 В каких точках прямоугольного поперечного сечения касательные напряжения при кручении равны нулю?

- а) по внешнему контуру сечения;
- б) только в центре тяжести;
- в) в угловых точках и в центре тяжести;
- г) нет таких точек.

4 Какая гипотеза не применима в теории кручения брусьев некруглого поперечного сечения?

- а) гипотеза плоских сечений;
- б) гипотеза об идеальной упругости материала;
- в) гипотеза о малости деформаций;
- г) гипотеза Сен-Венана.

2 Расчет вала круглого поперечного сечения на прочность при совместном действии изгиба и кручения

Пример – На вал круглого сплошного сечения диаметром $d = 68$ мм насажены шестерня средним диаметром $D_1 = 0,23$ м и шкив ременной передачи диаметром $D_2 = 0,39$ м и весом $G = 600$ Н (рисунок 2.1, а). Вал делает 660 об/мин и передает мощность 40 кВт. Допускаемое напряжение материала вала $[\tau] = 80$ МПа. Проверить прочность вала в опасном сечении по четвертой

теории прочности.

Решение

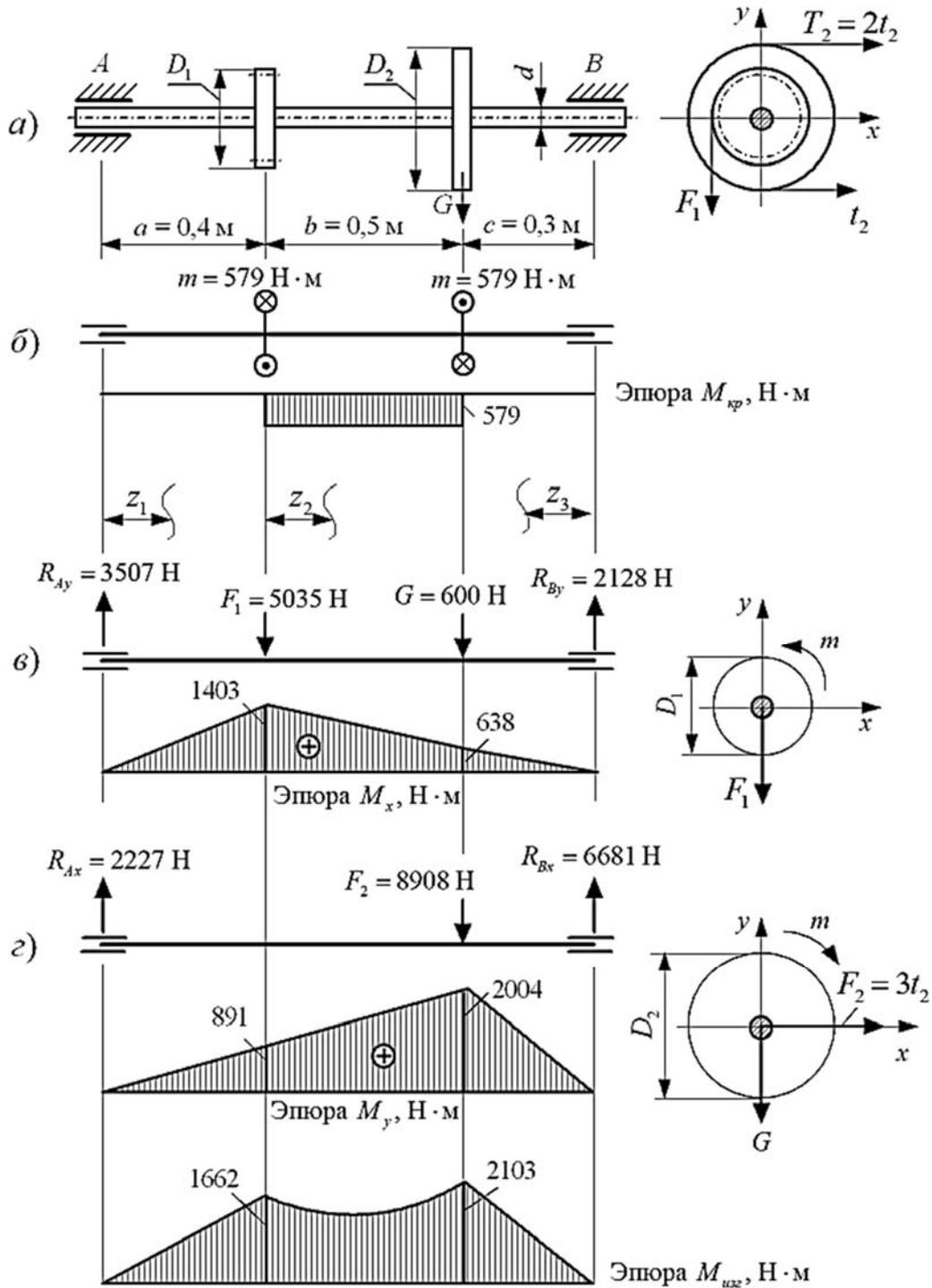


Рисунок 2.1

Внешние крутящие моменты, передаваемые валом через шестерню и шкив,

$$m = \frac{N \cdot 30}{\pi \cdot n} = \frac{40000 \cdot 30}{3,14 \cdot 660} = 579 \text{ H} \cdot \text{m} .$$

Схема действия крутящих моментов и эпюра $M_{кр}$ показаны на ри-

сунке 2.1, б.

Окружное усилие F_1 , действующее на шестерню и вал в вертикальной плоскости,

$$F_1 = \frac{2 \cdot m}{D_1} = \frac{2 \cdot 579}{0,23} = 5035 \text{ Н}.$$

Изгибающая сила F_2 от ременной передачи на шкиве, действующая на вал в горизонтальной плоскости,

$$F_2 = 3 \cdot \frac{2 \cdot m}{D_2} = 3 \cdot \frac{2 \cdot 579}{0,39} = 8908 \text{ Н}.$$

Схема действия изгибающих сил в вертикальной плоскости показана на рисунке 2.1, в. Опорные реакции R_{Ay} и R_{By} определены из уравнений статического равновесия вала. Ниже схемы показана эпюра изгибающих моментов M_x .

Схема действия изгибающих сил в горизонтальной плоскости показана на рисунке 2.1, г. Опорные реакции R_{Ax} и R_{Bx} определены из уравнений статического равновесия вала. Ниже схемы показана эпюра изгибающих моментов M_y .

Значения суммарных изгибающих моментов $M_{изг}$ в характерных сечениях вала определим по формуле

$$M_{изг} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}.$$

$$M_A = 0; \quad M_B = 0.$$

$$M_{D_1} = \sqrt{1403^2 + 891^2} = 1662 \text{ Н} \cdot \text{м};$$

$$M_{D_2} = \sqrt{638^2 + 2004^2} = 2103 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

По эпюре полных изгибающих моментов $M_{изг}$ и эпюре крутящих моментов $M_{кр}$ определим опасное сечение вала, в котором действуют наибольший изгиб изгибающий момент $M_{изг} = 2103 \text{ Н} \cdot \text{м}$ и крутящий момент $M_{кр} = 579 \text{ Н} \cdot \text{м}$.

Значение эквивалентного момента в опасном сечении, согласно четвертой теории прочности,

$$M_{экв}^{IV} = \sqrt{M_{изг}^2 + 0,75 \cdot M_{кр}^2} = \sqrt{2103^2 + 0,75 \cdot 579^2} = 2162 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Осевой момент сопротивления вала

$$W_x = \frac{\pi \cdot d^3}{32} = \frac{3,14 \cdot 6,8^3}{32} = 30,85 \text{ см}^3.$$

Проверка прочности:

$$\sigma_{\text{экв}} = \frac{M_{\text{экв}}^{\text{IV}}}{W_x} = \frac{2162}{30,85 \cdot 10^{-6}} = 70,1 \cdot 10^6 \text{ Па} = 70,1 \text{ МПа} < [\tau] = 80 \text{ МПа}.$$

Условие прочности выполняется.

Тестовые вопросы и задачи для самопроверки

1 Какая теория прочности применяется для расчета стальных валов на совместное действие изгиба и кручения?

- а) $\sigma_{\text{экв}} = \sigma_1 - \mu \cdot (\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\tau]$; в) $\sigma_{\text{экв}} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\tau]$;
 б) $\sigma_{\text{экв}} = \sigma_1 - \kappa \cdot \sigma_3 \leq [\tau]$; г) $\sigma_{\text{экв}} = \sigma_1 \leq [\tau]$.

2 Как определить эквивалентный момент по третьей теории прочности?

- а) $M_{\text{экв}} = \sqrt{M_{\text{изг}}^2 + M_{\text{кр}}^2}$; в) $M_{\text{экв}} = \sqrt{M_{\text{изг}}^2 + 0,75 \cdot M_{\text{кр}}^2}$;
 б) $M_{\text{экв}} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}$; г) $M_{\text{экв}} = \sqrt{M_{\text{кр}}^2 + 0,75 \cdot M_{\text{изг}}^2}$.

3 Как определить суммарный изгибающий момент?

- а) $M_{\text{изг}} = \sqrt{M_x + M_y}$; в) $M_{\text{изг}} = \sqrt{M_x \cdot M_y}$;
 б) $M_{\text{изг}} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}$; г) $M_{\text{изг}} = M_x + M_y$.

3 Расчеты при сложном изгибе

Пример 1 – Стальная балка двутаврового поперечного сечения находится под действием нагрузки, приложенной в вертикальной и горизонтальной плоскостях (рисунок 3.1). Проверить прочность балки.

Дано: двутавр № 30 ($W_x = 472 \text{ см}^3$; $W_y = 49,9 \text{ см}^3$); $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$.

Решение

Составим расчетные схемы для построения эпюр изгибающих моментов. Вертикальные силы изгибают балку в вертикальной плоскости, создавая момент M_x . Горизонтальные силы изгибают балку в горизонтальной плоскости, создавая момент M_y . Промежуточные расчетные схемы и эпюры изгибающих моментов показаны на рисунке 3.2.

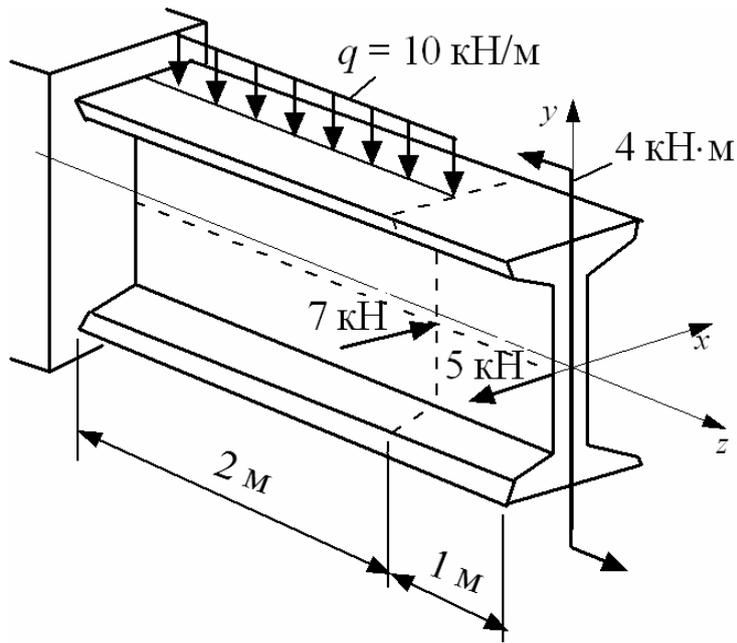


Рисунок 3.1

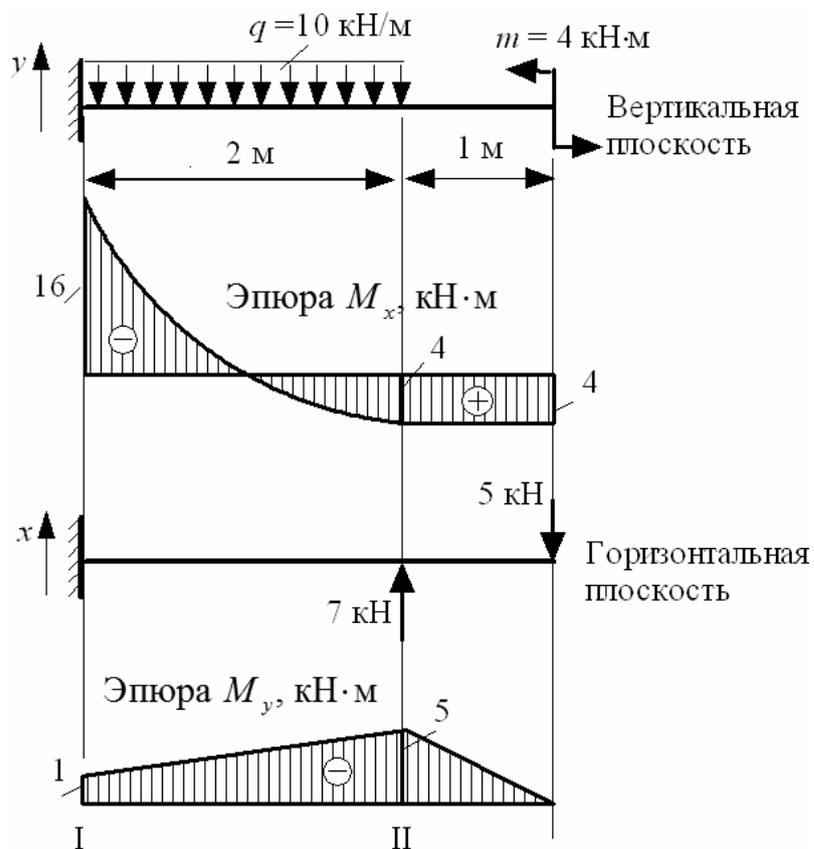


Рисунок 3.2

Выполним проверку прочности в предполагаемых опасных сечениях по условию

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} \leq [\sigma].$$

Напряжение в сечении I

$$\sigma_I = \frac{16 \cdot 10^3}{472 \cdot 10^{-6}} + \frac{1 \cdot 10^3}{49,9 \cdot 10^{-6}} = 54 \cdot 10^6 \text{ Па}.$$

Напряжение в сечении II

$$\sigma_{II} = \frac{4 \cdot 10^3}{472 \cdot 10^{-6}} + \frac{5 \cdot 10^3}{49,9 \cdot 10^{-6}} = 109 \cdot 10^6 \text{ Па}.$$

Наиболее опасным оказалось сечение II. Условие прочности выполняется:

$$\sigma_{\max} = 109 \text{ МПа} < [\sigma] = 160 \text{ МПа}.$$

Пример 2 – Деревянная балка прямоугольного поперечного сечения находится под действием нагрузки, приложенной в вертикальной и горизонтальной плоскостях (рисунок 3.3). Определить минимальные размеры поперечного сечения (b_{\min}), если $[\sigma] = 10 \text{ МПа}$.

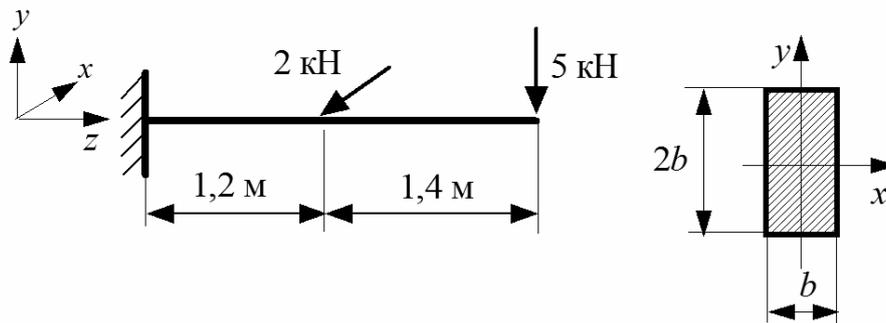


Рисунок 3.3

Решение

Составим расчетные схемы для построения эпюр изгибающих моментов. От силы, действующей в вертикальной плоскости, строим эпюру изгибающих моментов M_x . От силы, действующей в горизонтальной плоскости, строим эпюру изгибающих моментов M_y (рисунок 3.4).

Осевые моменты сопротивления прямоугольного сечения выразим через размер b :

$$W_x = \frac{b \cdot (2b)^2}{6} = \frac{2 \cdot b^3}{3}; \quad W_y = \frac{2b \cdot b^2}{6} = \frac{b^3}{3}.$$

Условие прочности для опасного сечения

$$\sigma_{\max} = \frac{13 \cdot 10^3 \cdot 3}{2 \cdot b^3} + \frac{2,4 \cdot 10^3 \cdot 3}{b^3} = \frac{26,7 \cdot 10^3}{b^3} = [\sigma] = 10 \cdot 10^6 \text{ Па}.$$

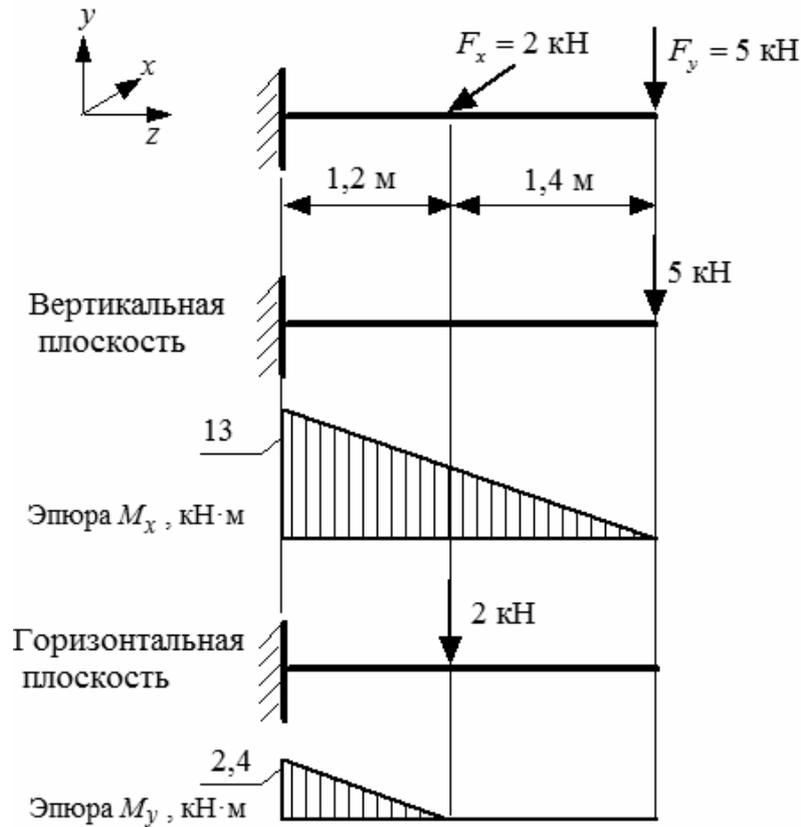


Рисунок 3.4

Определим размер b_{\min} :

$$b_{\min} = \sqrt[3]{\frac{26,7 \cdot 10^3}{10 \cdot 10^6}} = 0,1387 \text{ м} \approx 140 \text{ мм}.$$

Вывод: для заданной балки следует использовать деревянный брус с минимальными размерами 140×280 мм.

Тестовые вопросы и задачи для самопроверки

1 При косом изгибе нулевая линия:

- а) перпендикулярна плоскости суммарного изгибающего момента;
- б) перпендикулярна плоскости суммарного прогиба;
- в) совпадает с плоскостью суммарного изгибающего момента;
- г) совпадает с плоскостью суммарного прогиба.

2 По какой формуле определяются максимальные напряжения при косом изгибе для сечений, которые вписываются в прямоугольник?

а) $\sigma_{\max} = \frac{M_x}{I_x} + \frac{M_y}{I_y}$; б) $\tau_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x}$; в) $\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y}$; г) $\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x}$.

3 Для каких поперечных сечений кривой изгиб невозможен?

- а) двутавр и прямоугольник;
- б) квадрат и равносторонний треугольник;
- в) швеллер и равнобедренный треугольник;
- г) равнополочный уголок.

4 Расчет стержней большой жесткости на внецентренное растяжение-сжатие: проверочный и проектировочный

Пример 1 – Проверить прочность бетонной колонны, если $F = 7$ кН, $[\sigma]_{\text{раст}} = 0,6$ МПа, $[\sigma]_{\text{сж}} = 6$ МПа (рисунок 4.1).

Решение

Условие прочности для сжимающей силы

$$\sigma_{\max} = -\frac{F}{A} \cdot \left(1 + \frac{x_F \cdot x_{on}}{i_y^2} + \frac{y_F \cdot y_{on}}{i_x^2} \right) \leq [\sigma].$$

Чтобы им воспользоваться, нужно определить положение нейтральной оси и опасные точки в сечении.

Определим геометрические характеристики поперечного сечения колонны.

Площадь $A = 20 \cdot 18 = 360$ см².

Координаты точки приложения силы следующие: $x_F = 15$ см; $y_F = 0$.

Положение нейтральной оси определяется по величине отрезков, которые она отсекает на осях координат (рисунок 4.2):

$$X_0 = -\frac{i_y^2}{x_F} = -\frac{33,3}{15} = -2,2 \text{ см};$$

$$Y_0 = -\frac{i_x^2}{y_F} = -\frac{27}{0} = -\infty.$$

Нейтральная ось разделила колонну на две части. Определим координаты опасных точек.

В *растянутой области* из самых дальних от нейтральной оси точек на ребре выделим любую, например точку 1: $x_1 = -10$ см; $y_1 = 0$.

В *сжатой области* из самых дальних от нейтральной оси точек на ребре выделим любую, например точку 2: $x_2 = 10$ см; $y_2 = 0$.

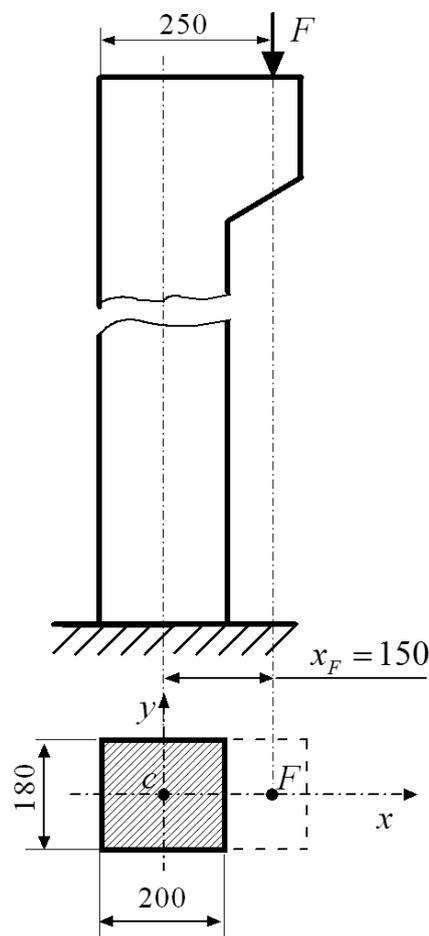


Рисунок 4.1

Проверка прочности в *сжатой области*:

$$\sigma_{\max}^{сж} = \sigma_2 = -\frac{7 \cdot 10^3}{360 \cdot 10^{-4}} \cdot \left(1 + \frac{15 \cdot 10}{33,3} + 0\right) =$$

$$= -1,07 \cdot 10^6 \text{ Па} = -1,07 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{\max}^{сж} = 1,07 \text{ МПа} < [\sigma]_{сж} = 6 \text{ МПа}.$$

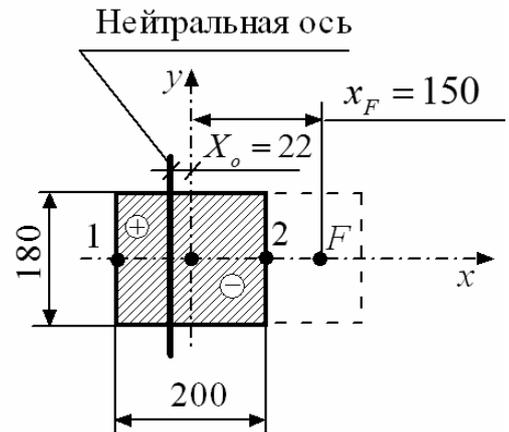


Рисунок 4.2

Проверка прочности в *растянутой области*:

$$\sigma_{\max}^{раст} = \sigma_1 = -\frac{7 \cdot 10^3}{360 \cdot 10^{-4}} \cdot \left(1 + \frac{15 \cdot (-10)}{33,3} + 0\right) = 0,68 \cdot 10^6 \text{ Па} = 0,68 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{\max}^{раст} = 0,68 \text{ МПа} > [\sigma]_{раст} = 0,6 \text{ МПа}.$$

Перегрузка составила:

$$\delta = \frac{\sigma_{\max} - [\sigma]}{[\sigma]} \cdot 100 \% = \frac{0,68 - 0,6}{0,6} \cdot 100 \% = 13,3 \% > 5 \%,$$

что недопустимо.

Вывод: так как условие прочности на растяжение не выполняется, то прочность колонны не обеспечена.

Пример 2 – Определить минимальный диаметр стального стержня, к которому приложена растягивающая сила $F = 30 \text{ кН}$ (рисунок 4.3), если допустимое напряжение материала $[\sigma] = 180 \text{ МПа}$.

Решение

Площадь поперечного сечения стержня $A = \frac{\pi \cdot d^2}{4} = 0,785 \cdot d^2.$

Квадрат радиуса инерции $i_x^2 = i_y^2 = d^2/16.$

Координаты точки приложения силы следующие: $x_F = 0; y_F = -d/4.$

Отрезки, которые отсекает нейтральная линия на осях координат,

$$X_0 = -\frac{i_y^2}{x_F} = -\frac{d^2/16}{0} = -\infty;$$

$$y_0 = -\frac{i_x^2}{y_F} = -\frac{d^2/16}{-d/4} = \frac{d}{4}.$$

Опасной является точка A как самая удаленная точка от нейтральной оси. Ее координаты следующие: $x_A = 0$; $y_A = -d/2$.

Определим минимальный диаметр стержня из условия прочности:

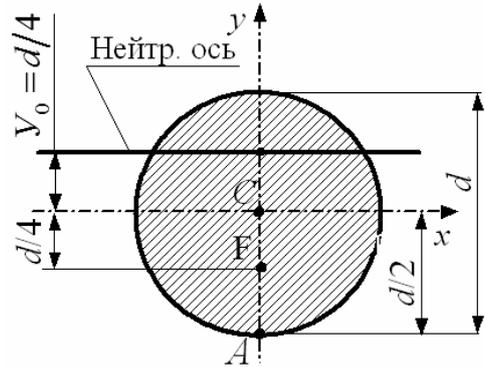


Рисунок 4.3

$$\sigma_{\max} = \frac{F}{A} \cdot \left(1 + \frac{x_F \cdot x_A}{i_y^2} + \frac{y_F \cdot y_A}{i_x^2} \right) \leq [\sigma];$$

$$\sigma_{\max} = \frac{F}{A} \cdot \left(1 + \frac{0 \cdot 0}{d^2/16} + \frac{(-d/4) \cdot (-d/2)}{d^2/16} \right) = \frac{F}{0,785 \cdot d^2} \cdot 3 = [\sigma];$$

$$d \geq \sqrt{\frac{F \cdot 3}{[\sigma] \cdot 0,785}} = \sqrt{\frac{30 \cdot 10^3 \cdot 3}{180 \cdot 10^6 \cdot 0,785}} = 0,025 \text{ м} = 25 \text{ мм}.$$

5 Расчет стержней большой жесткости на внецентренное растяжение-сжатие: определение несущей способности

Пример – Определить допустимую сжимающую силу для чугунного стержня коробчатого поперечного сечения (рисунок 5.1), если допустимое напряжение материала $[\sigma]_{\text{раст}} = 60 \text{ МПа}$, $[\sigma]_{\text{сж}} = 150 \text{ МПа}$.

Размеры на рисунке 5.1 показаны в миллиметрах.

Решение

Площадь поперечного сечения $A = 12 \cdot 9 - 6 \cdot 9 = 54 \text{ см}^2$.

Осевые моменты инерции

$$I_x = \frac{12 \cdot 9^3}{12} - \frac{9 \cdot 6^3}{12} = 567 \text{ см}^4; \quad I_y = \frac{9 \cdot 12^3}{12} - \frac{6 \cdot 9^3}{12} = 931,5 \text{ см}^4.$$

Квадраты радиусов инерции

$$i_x^2 = \frac{I_x}{A} = \frac{567}{54} = 10,5 \text{ см}^2; \quad i_y^2 = \frac{I_y}{A} = \frac{931,5}{54} = 17,25 \text{ см}^2.$$

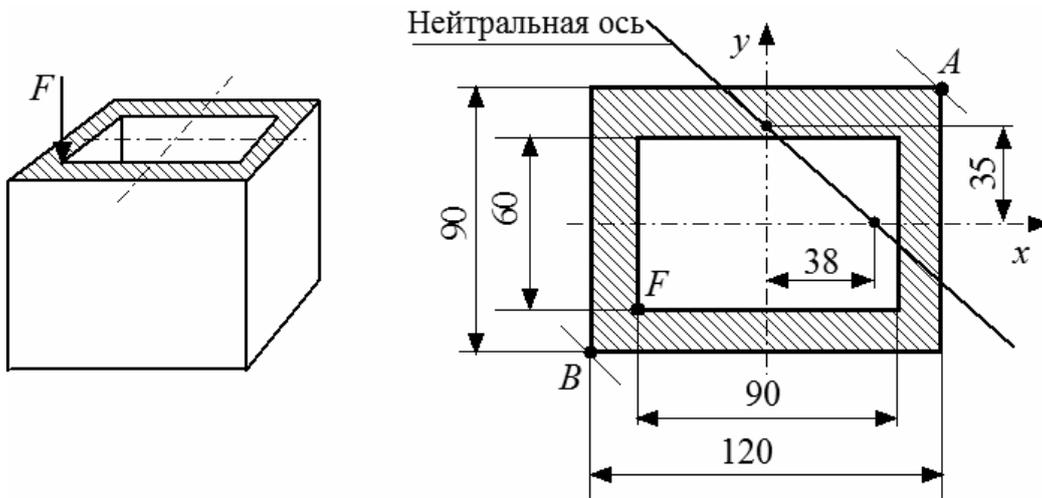


Рисунок 5.1

Координаты точки приложения силы следующие: $x_F = -4,5$ см;
 $y_F = -3$ см.

Положение нейтральной оси определим по величине отрезков, которые она отсекает на осях координат (см. рисунок 3.4):

$$X_0 = -\frac{i_y^2}{x_F} = -\frac{17,25}{-4,5} = 3,8 \text{ см};$$

$$Y_0 = -\frac{i_x^2}{y_F} = -\frac{10,5}{-3} = 3,5 \text{ см}.$$

Нейтральная ось разделила колонну на две части.

В *растянутой области* составим условие прочности для опасной точки A с координатами $x_A = 6$ см и $y_A = 4,5$ см:

$$\sigma_{\max}^{раст} = \sigma_A = -\frac{F}{A} \cdot \left(1 + \frac{(-4,5) \cdot 6}{17,25} + \frac{(-3) \cdot 4,5}{10,5} \right) = -\frac{F \cdot (-1,85)}{A} \leq [\sigma]_{раст} = 60 \text{ МПа}.$$

Откуда допустимая сила

$$F \leq \frac{A \cdot [\sigma]_{раст}}{1,85} = \frac{54 \cdot 10^{-4} \cdot 60 \cdot 10^6}{1,85} = 175 \cdot 10^3 \text{ Н} = 175 \text{ кН}.$$

В *сжатой области* составим условие прочности для опасной точки B с координатами $x_B = -6$ см и $y_B = -4,5$ см:

$$\sigma_{\max}^{сж} = \sigma_B = -\frac{F}{A} \cdot \left(1 + \frac{(-4,5) \cdot (-6)}{17,25} + \frac{(-3) \cdot (-4,5)}{10,5} \right) = -\frac{F \cdot 3,85}{A} \leq [\sigma]_{сж} = -150 \text{ МПа}.$$

Откуда допустимая сила

$$F \leq \frac{A \cdot [\sigma]_{\text{сжк}}}{3,85} = \frac{54 \cdot 10^{-4} \cdot 150 \cdot 10^6}{3,85} = 210 \cdot 10^3 \text{ Н} = 210 \text{ кН}.$$

Допустимой для всего стержня будет меньшая из рассчитанных сил: $[F] = 175 \text{ кН}$.

6 Построение ядра сечения при внецентренном приложении продольной силы

Пример – Для чугунного стержня, показанного на рисунке 5.1, построить ядро сечения.

Для построения ядра сечения нужно провести касательные линии к контуру сечения (рисунок 6.1) и определить координаты угловых точек ядра по следующим формулам:

$$x_{\text{я}} = -\frac{i_y^2}{X_0}; \quad y_{\text{я}} = -\frac{i_x^2}{Y_0}.$$

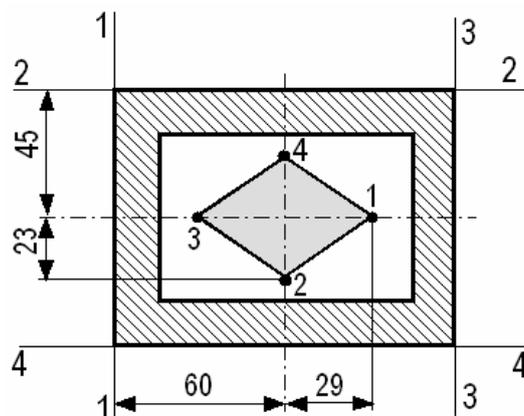


Рисунок 6.1

Касательная 1–1: $X_0 = -6 \text{ см}; Y_0 = \infty$.

$$\text{Точка 1: } x_1 = -\frac{i_y^2}{X_0} = -\frac{17,25}{-6} = 2,9 \text{ см}; \quad y_1 = -\frac{i_x^2}{Y_0} = -\frac{10,5}{\infty} = 0.$$

Касательная 2–2: $X_0 = \infty; Y_0 = 4,5 \text{ см}$.

$$\text{Точка 2: } x_2 = -\frac{i_y^2}{X_0} = -\frac{17,25}{\infty} = 0; \quad y_2 = -\frac{i_x^2}{Y_0} = -\frac{10,5}{4,5} = -2,3 \text{ см}.$$

Касательная 3–3: $X_0 = 6 \text{ см}; Y_0 = \infty$.

$$\text{Точка 3: } x_3 = -\frac{i_y^2}{X_0} = -\frac{17,25}{6} = -2,9 \text{ см}; \quad y_3 = -\frac{i_x^2}{Y_0} = -\frac{10,5}{\infty} = 0.$$

Касательная 4–4: $X_0 = \infty; Y_0 = -4,5 \text{ см}$.

$$\text{Точка 4: } x_4 = -\frac{i_y^2}{X_0} = -\frac{17,25}{\infty} = 0; \quad y_4 = -\frac{i_x^2}{Y_0} = -\frac{10,5}{-4,5} = 2,3 \text{ см.}$$

Найденные точки соединяются прямыми линиями (см. рисунок 6.1).

Тестовые вопросы и задачи для самопроверки

1 Какие внутренние силовые факторы возникают в поперечных сечениях бруса при внецентренном растяжении или сжатии?

- а) продольная сила и поперечная сила;
- б) только продольная сила;
- в) только изгибающие моменты;
- г) изгибающие моменты и продольная сила.

2 По какой формуле определяются напряжения при внецентренном растяжении-сжатии?

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \sigma = \pm \frac{M_x \cdot y}{I_x} \pm \frac{M_y \cdot x}{I_y}; & \text{в) } \sigma = \pm \frac{F}{A} \cdot \left(1 + \frac{x_F \cdot x}{i_x^2} + \frac{y_F \cdot y}{i_y^2} \right); \\ \text{б) } \sigma = \pm \frac{M_x \cdot x}{I_x} \pm \frac{M_y \cdot y}{I_y}; & \text{г) } \sigma = \pm \frac{F}{A} \cdot \left(1 + \frac{x_F \cdot x}{i_y^2} + \frac{y_F \cdot y}{i_x^2} \right). \end{array}$$

3 При внецентренном растяжении-сжатии нулевая линия:

- а) проходит через центр тяжести поперечного сечения;
- б) проходит через точку приложения силы;
- в) находится за центром тяжести поперечного сечения напротив силы;
- г) находится между центром тяжести и точкой приложения силы.

4 При внецентренном растяжении-сжатии нормальные напряжения максимальны:

- а) в точке, наиболее удаленной от приложенной силы;
- б) в точке, наиболее удаленной от нулевой линии;
- в) в точке приложения силы;
- г) в центре поперечного сечения.

5 Какой закон распределения нормальных напряжений в поперечном сечении бруса при внецентренном растяжении-сжатии?

- а) постоянный;
- б) гиперболический;
- в) параболический;
- г) линейный.

7 Расчеты сжатых стержней на устойчивость: проверочный, проектировочный

Пример 1 (проверочный расчет) – Проверить устойчивость стального стержня (рисунок 7.1), определить его критическую силу $F_{кр}$ и коэффициент запаса устойчивости n_y .

Исходные данные: $[\sigma] = 160$ МПа (Ст 3); коэффициент приведения длины $\mu = 0,7$; коэффициенты $a = 310$ МПа, $b = 1,14$ МПа.

Решение

Площадь сечения $A = 6 \cdot 9 = 54$ см².

Минимальный осевой момент инерции

$$I_y = I_{\min} = \frac{h \cdot b^3}{12} = \frac{9 \cdot 6^3}{12} = 162 \text{ см}^4.$$

Минимальный радиус инерции

$$i_y = i_{\min} = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{162}{54}} = 1,73 \text{ см}.$$

Максимальная гибкость стержня

$$\lambda_{\max} = \frac{\mu \cdot \ell}{i_{\min}} = \frac{0,7 \cdot 2,4}{1,73 \cdot 10^{-2}} = 97,1.$$

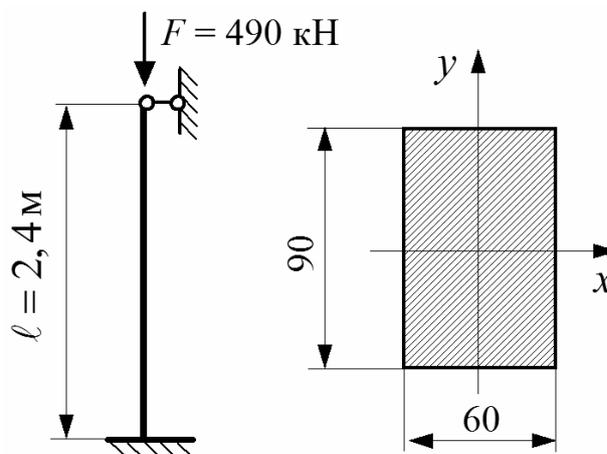


Рисунок 7.1

Определяем коэффициент продольного изгиба φ методом линейной интерполяции, используя данные [2, таблица А.3, Ст 3]: при $\lambda = 90$ $\varphi = 0,69$; при $\lambda = 100$ $\varphi = 0,6$.

$$\varphi = 0,69 - \frac{0,69 - 0,6}{100 - 90} \cdot (97,1 - 90) = 0,626.$$

Проверяем устойчивость стержня по формуле

$$\sigma = \frac{F}{A} \leq \varphi[\sigma];$$

$$\sigma = \frac{490 \cdot 10^3}{54 \cdot 10^{-4}} = 90,74 \cdot 10^6 \text{ Па} = 90,74 \text{ МПа} < \varphi[\sigma] = 0,626 \cdot 160 = 100,2 \text{ МПа}.$$

Критическую силу определяем по формуле Ясинского, т. к. гибкость стержня меньше предельной гибкости для стали ($97,1 < 100$):

$$F_{кр} = (a - b \cdot \lambda) \cdot A = (310 \cdot 10^6 - 1,14 \cdot 10^6 \cdot 97,1) \cdot 54 \cdot 10^{-4} = 1076 \cdot 10^3 \text{ Н}.$$

Коэффициент запаса устойчивости найдем по формуле

$$n_y = \frac{F_{кр}}{F} = \frac{1076}{490} = 2,2.$$

Пример 2 (проектировочный расчет) – Подобрать размеры поперечного сечения стального стержня (рисунок 7.2).

Исходные данные: $[\sigma] = 200 \text{ МПа}$ (сталь 14Г2); коэффициент приведения длины стержня, закрепленного жестко с одной стороны, $\mu = 2$.

Решение

Расчет ведется методом последовательного приближения.

Первое приближение.

Задаёмся начальным коэффициентом продольного изгиба $\varphi_1 = 0,5$.

Из условия устойчивости вычисляем площадь поперечного сечения:

$$A_1 = \frac{F}{\varphi_1 [\sigma]} = \frac{400 \cdot 10^3}{0,5 \cdot 200 \cdot 10^6} = 40 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

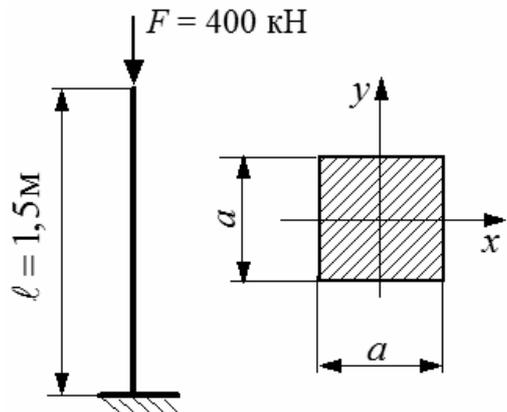


Рисунок 7.2

По найденной площади определяем размеры квадратного поперечного сечения:

$$a_1 = \sqrt{A_1} = \sqrt{40 \cdot 10^{-4}} = 0,063 \text{ м}.$$

Вычисляем минимальный радиус инерции этого поперечного сечения:

$$i_y = i_x = i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{a^4}{12 \cdot a^2}} = \frac{a}{3,46} = \frac{0,063}{3,46} = 0,0182 \text{ м}.$$

Определяем гибкость стержня найденного поперечного сечения:

$$\lambda_1 = \frac{\mu \cdot \ell}{i_{\min}} = \frac{2 \cdot 1,5}{0,0182} = 164,8.$$

Находим коэффициент продольного изгиба методом линейной интерполяции, используя данные [2, таблица А.3, сталь 14Г2]: при $\lambda = 160$ $\varphi = 0,21$; при $\lambda = 170$ $\varphi = 0,19$.

$$\varphi'_1 = 0,21 - \frac{0,21 - 0,19}{170 - 160} \cdot (164,8 - 160) = 0,2.$$

Сравниваем начальный и конечный коэффициенты продольного изгиба первого приближения: $\varphi'_1 \neq \varphi_1$.

Второе приближение.

Определяем начальный коэффициент продольного изгиба:

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi'_1}{2} = \frac{0,5 + 0,2}{2} = 0,35.$$

Из условия устойчивости вычисляем площадь поперечного сечения:

$$A_2 = \frac{F}{\varphi_2 [\sigma]} = \frac{400 \cdot 10^3}{0,35 \cdot 200 \cdot 10^6} = 57,14 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

По найденной площади определяем размеры квадратного поперечного сечения:

$$a_2 = \sqrt{A_2} = \sqrt{57,14 \cdot 10^{-4}} = 0,076 \text{ м}.$$

Вычисляем минимальный радиус инерции этого поперечного сечения:

$$i_{\min} = \frac{a_2}{3,46} = \frac{0,076}{3,46} = 0,022 \text{ м}.$$

Определяем гибкость стержня найденного поперечного сечения:

$$\lambda_2 = \frac{\mu \cdot \ell}{i_{\min}} = \frac{2 \cdot 1,5}{0,022} = 136,4.$$

Находим коэффициент продольного изгиба методом линейной интерполяции, используя данные [2, таблица А.3, сталь 14Г2]: при $\lambda = 130$ $\varphi = 0,29$; при $\lambda = 140$ $\varphi = 0,25$.

$$\varphi'_2 = 0,29 - \frac{0,29 - 0,25}{140 - 130} \cdot (136,4 - 130) = 0,264.$$

Сравниваем начальный и конечный коэффициенты продольного изгиба второго приближения: $\varphi_2' \neq \varphi_2$.

Третье приближение.

Определяем начальный коэффициент продольного изгиба:

$$\varphi_3 = \frac{\varphi_2 + \varphi_2'}{2} = \frac{0,35 + 0,264}{2} = 0,307.$$

Из условия устойчивости вычисляем площадь поперечного сечения:

$$A_3 = \frac{F}{\varphi_3 [\sigma]} = \frac{400 \cdot 10^3}{0,307 \cdot 200 \cdot 10^6} = 65 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

По найденной площади определяем размеры квадратного поперечного сечения:

$$a_3 = \sqrt{A_3} = \sqrt{56,4 \cdot 10^{-4}} = 0,081 \text{ м.}$$

Вычисляем минимальный радиус инерции этого поперечного сечения:

$$i_{\min} = \frac{a_3}{3,46} = \frac{0,081}{3,46} = 0,0234 \text{ м.}$$

Определяем гибкость стержня найденного поперечного сечения:

$$\lambda_3 = \frac{\mu \cdot \ell}{i_{\min}} = \frac{2 \cdot 1,5}{0,0234} = 128,2.$$

Находим коэффициент продольного изгиба методом линейной интерполяции, используя данные [2, таблица А.3, сталь 14Г2]: при $\lambda = 120$ $\varphi = 0,33$; при $\lambda = 130$ $\varphi = 0,29$.

$$\varphi_3' = 0,33 - \frac{0,33 - 0,29}{130 - 120} \cdot (128,2 - 120) = 0,3.$$

Сравниваем начальный и конечный коэффициенты продольного изгиба третьего приближения: $\varphi_3' \approx \varphi_3$.

Принимаем квадратное поперечное сечение стержня со стороной 81 мм.

8 Расчеты сжатых стержней на устойчивость: определение несущей способности

Пример (определение несущей способности) – Определить допустимое значение сжимающей силы $[F]$ стального стержня двутаврового поперечного сечения (рисунок 8.1), его критическую силу $F_{кр}$ и коэффициент запаса устойчивости n_y .

Исходные данные: коэффициент приведения длины $\mu = 0,5$; допустимое напряжение на сжатие $[\sigma] = 160$ МПа (Ст 3); модуль упругости $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

Решение

Площадь и минимальный радиус инерции двутавра № 10 следующие: $A = 12 \text{ см}^2$; $i_y = i_{\min} = 1,22 \text{ см}$.

Максимальная гибкость стержня

$$\lambda_{\max} = \frac{\mu \cdot \ell}{i_{\min}} = \frac{0,5 \cdot 4}{1,22 \cdot 10^{-2}} = 163,9.$$

Определим коэффициент продольного изгиба φ методом линейной интерполяции, используя данные [2, таблица А.3, Ст 3]: при $\lambda = 160$ $\varphi = 0,29$; при $\lambda = 170$ $\varphi = 0,26$.

$$\varphi = 0,29 - \frac{0,29 - 0,26}{170 - 160} \cdot (163,9 - 160) = 0,278.$$

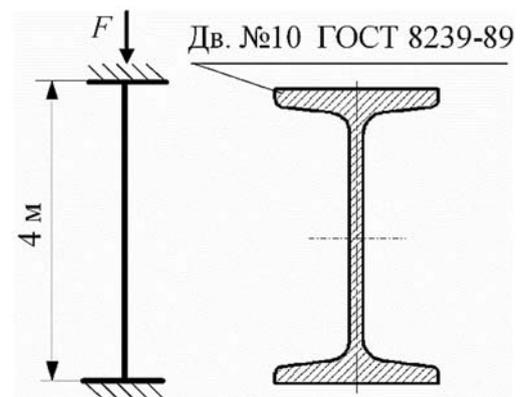


Рисунок 8.1

Из условия устойчивости найдем допустимое значение сжимающей силы:

$$[F] = A\varphi[\sigma] = 12 \cdot 10^{-4} \cdot 0,278 \cdot 160 \cdot 10^6 = 53,4 \cdot 10^3 \text{ Н} = 53,4 \text{ кН}.$$

Критическую силу определяем по формуле Эйлера, т. к. гибкость стержня больше предельной гибкости для стали ($163,9 > 100$):

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2} \cdot A = \frac{3,14^2 \cdot 2 \cdot 10^{11}}{163,9^2} \cdot 12 \cdot 10^{-4} = 88,1 \cdot 10^3 \text{ Н} = 88,1 \text{ кН}.$$

Коэффициент запаса устойчивости найдем по формуле

$$n_y = \frac{F_{кр}}{[F]} = \frac{88,1}{53,4} = 1,65.$$

9 Расчет составного сечения продольно сжатого стержня

Пример – Определить максимальную гибкость составного сечения колонны, состоящего из двух швеллеров № 18, показанного на рисунке 9.1, а. Условия закрепления колонны показаны на рисунке 9.1, б.

Исходные данные: коэффициент приведения длины $\mu = 0,5$.

Решение

Геометрические характеристики швеллера № 18 следующие:
 $A = 20,7 \text{ см}^2$; $I_{x_1} = 1090 \text{ см}^4$; $I_{y_1} = 86 \text{ см}^4$; $z_0 = 1,94 \text{ см}$.

Осевые моменты инерции составного сечения

$$I_x = 2 \cdot I_{x_1} = 2 \cdot 1090 = 2180 \text{ см}^4;$$

$$I_y = 2 \cdot (I_{y_1} + b^2 \cdot A) = 2 \cdot (86 + (1,94 + 4)^2 \cdot 20,7) = 1632,7 \text{ см}^4.$$

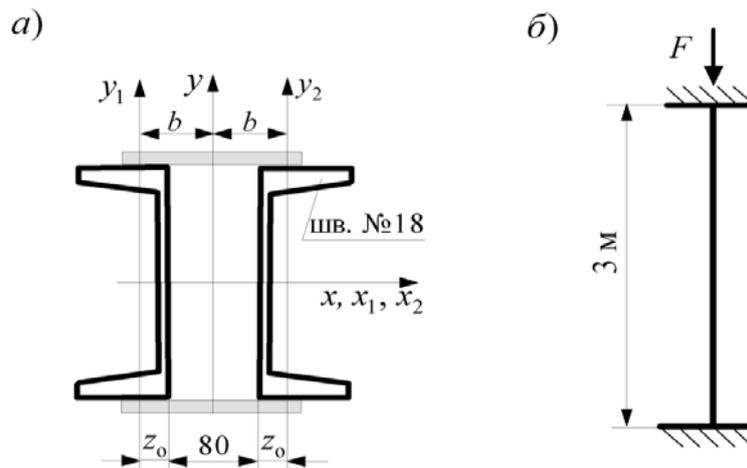


Рисунок 9.1

Определяем радиусы инерции поперечного сечения:

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{2 \cdot A}} = \sqrt{\frac{2180}{2 \cdot 20,7}} = 7,26 \text{ см};$$

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{2 \cdot A}} = \sqrt{\frac{1632,7}{2 \cdot 20,7}} = 6,28 \text{ см}.$$

Вычисляем гибкость относительно материальной оси x :

$$\lambda_{mat} = \lambda_x = \frac{\mu \cdot \ell}{i_x} = \frac{0,5 \cdot 6}{7,26 \cdot 10^{-2}} = 41,3.$$

Находим гибкость относительно свободной оси y :

$$\lambda_{cs} = \lambda_y = \sqrt{40^2 + \left(\frac{\mu \cdot \ell}{i_y}\right)^2} = \sqrt{40^2 + \left(\frac{0,5 \cdot 6}{6,28 \cdot 10^{-2}}\right)^2} = 62,3.$$

Максимальная гибкость $\lambda_{\max} = 62,3$.

Тестовые вопросы и задачи для самопроверки

1 Условие устойчивости:

- а) $\sigma = A/F \leq \varphi[\sigma]$; в) $\sigma = F/A \leq [\sigma]$;
 б) $\sigma = \varphi F/A \leq [\sigma]$; г) $\sigma = F/A \leq \varphi[\sigma]$.

2 Формула Ясинского для стального стержня справедлива при:

- а) $0 < \lambda \leq 40$; в) $40 < \lambda \leq 100$;
 б) $100 < \lambda \leq 140$; г) $\lambda \geq 100$.

3 Формула Эйлера для стального стержня справедлива при:

- а) $0 < \lambda \leq 40$; в) $40 < \lambda \leq 100$;
 б) $80 < \lambda \leq 140$; г) $\lambda \geq 100$.

4 Коэффициент приведения длины μ зависит от:

- а) гибкости стержня; в) величины критической силы;
 б) условий закрепления стержня; г) формы поперечного сечения.

5 Свободная ось составного сечения:

- а) не проходит через центр тяжести поперечного сечения;
 б) является главной центральной осью инерции;
 в) проходит через зазор между отдельными частями составного сечения;
 г) пересекает поперечное сечение по материалу составных частей.

6 Укажите свободные оси для поперечного сечения (рисунок 9.2):

- а) только x ;
 б) только y ;
 в) нет свободных осей;
 г) x и y .

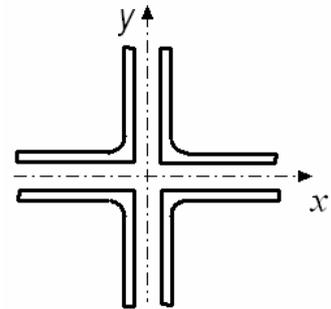


Рисунок 9.2

10 Определение перемещений с использованием интегралов Мора

Пример – Для балки, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой (рисунок 10.1, а), определить интегралом Мора:

- 1) прогиб в точке K (вертикальное перемещение точки EIy_K);
- 2) прогиб в точке C (вертикальное перемещение точки EIy_C);
- 3) угол поворота точки C ($EI\theta_C$).

Решение

Определяем вертикальные реакции в шарнирах A и B для заданной системы (см. рисунок 10.1, а).

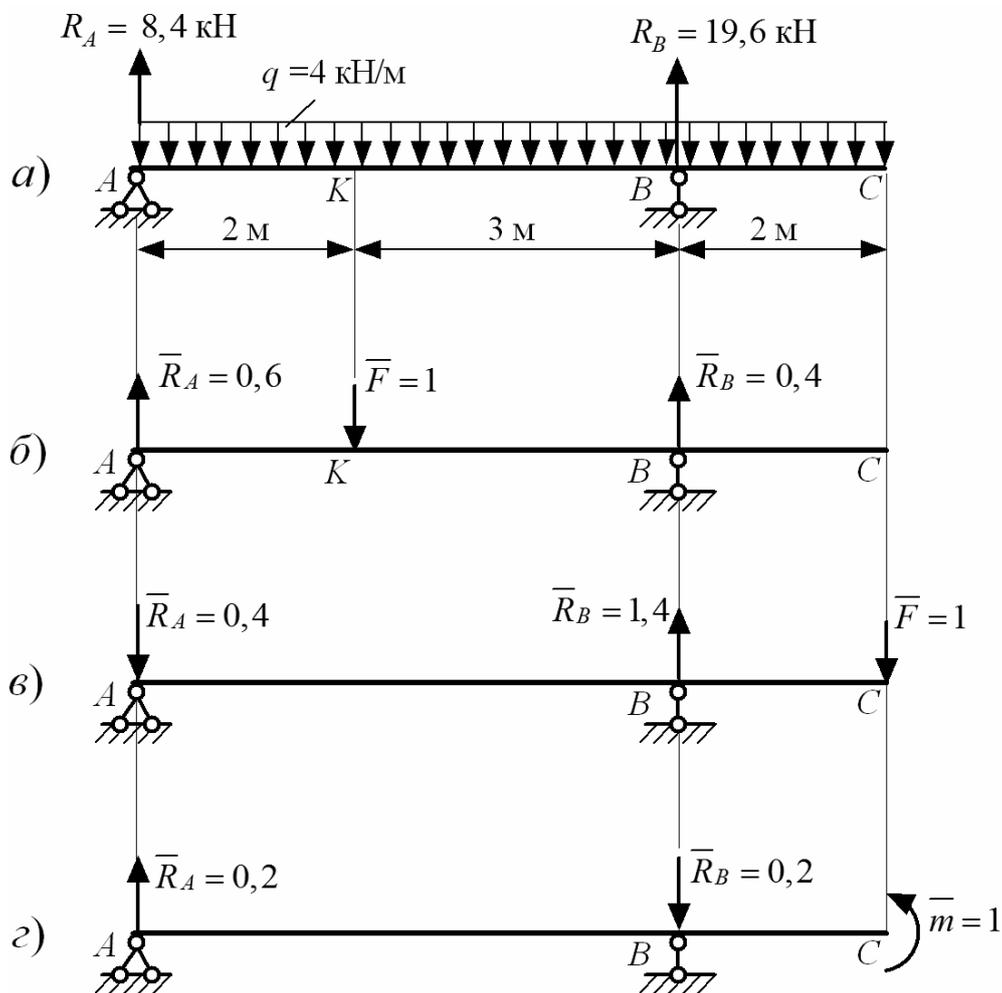


Рисунок 10.1

Составляем уравнение изгибающих моментов относительно точки A :

$$\sum M_A = 4 \cdot 7 \cdot 3,5 - R_B \cdot 5 = 0;$$

$$R_B = \frac{4 \cdot 7 \cdot 3,5}{5} = 19,6 \text{ кН.}$$

Составляем уравнение изгибающих моментов относительно точки B :

$$\sum M_B = 5R_A - 4 \cdot 5 \cdot 2,5 + 4 \cdot 2 \cdot 1 = 0;$$

$$R_A = \frac{4 \cdot 5 \cdot 2,5 - 4 \cdot 2 \cdot 1}{5} = 8,4 \text{ кН.}$$

Для определения заданных перемещений воспользуемся формулой Мора, применяемой для стержней, испытывающих преимущественный изгиб:

$$\Delta_i = \sum_1^n \int_l \frac{M_p(z) \cdot \bar{M}_1(z) \cdot dz}{EI},$$

где $M_p(z)$ – функция изгибающего момента от заданной внешней нагрузки;

$\bar{M}_1(z)$ – функция изгибающего момента от единичной нагрузки;

EI – жесткость балки при изгибе.

Для расчета прогиба в точке K составим вспомогательную систему, в которой приложим в точке K единичную силу и определим реакции на опорах (рисунок 10.1, б). Заданная и вспомогательная системы делятся на три участка, для которых функции изгибающих моментов равны:

1 участок (AK): $0 \leq z_1 \leq 2$ м:

$$M_p(z) = 8,4 \cdot z_1 - 0,5 \cdot 4 \cdot z_1^2; \quad \bar{M}_1(z) = 0,6 \cdot z_1;$$

2 участок (KB): $0 \leq z_2 \leq 3$ м:

$$M_p(z) = 8,4 \cdot (2 + z_2) - 0,5 \cdot 4 \cdot (2 + z_2)^2 = 8,8 + 0,4z_2 - 2z_2^2;$$

$$\bar{M}_1(z) = 0,6 \cdot (2 + z_2) - 1 \cdot z_2 = 1,2 - 0,4z_2;$$

3 участок (CB): $0 \leq z_3 \leq 2$ м:

$$M_p(z) = -0,5 \cdot 4 \cdot z_3^2; \quad \bar{M}_1(z) = 0.$$

Вычисляем:

$$\begin{aligned} EIy_K &= \int_0^2 (8,4 \cdot z_1 - 0,5 \cdot 4 \cdot z_1^2) \cdot 0,6 \cdot z_1 dz_1 + \int_0^3 (8,8 + 0,4z_2 - 2z_2^2)(1,2 - 0,4 \cdot z_2) dz_2 = \\ &= 8,64 + 11,16 = 19,8 \text{ кН} \cdot \text{м}^3. \end{aligned}$$

Для расчета прогиба в точке C составим вспомогательную систему, в которой приложим в точке C единичную силу и определим реакции на опорах (рисунок 10.1, $в$). Заданная и вспомогательная системы делятся на два участка, для которых функции изгибающих моментов равны:

1 участок (AB): $0 \leq z_1 \leq 5$ м:

$$M_p(z) = 8,4 \cdot z_1 - 0,5 \cdot 4 \cdot z_1^2; \quad \overline{M}_1(z) = -0,4 \cdot z_1;$$

2 участок (CB): $0 \leq z_2 \leq 2$ м:

$$M_p(z) = -0,5 \cdot 4 \cdot z_2^2; \quad \overline{M}_1(z) = -1 \cdot z_2.$$

Вычисляем:

$$\begin{aligned} EI\gamma_C &= \int_0^5 (8,4 \cdot z_1 - 0,5 \cdot 4 \cdot z_1^2) \cdot (-0,4 \cdot z_1) dz_1 + \int_0^2 (-0,5 \cdot 4 \cdot z_2^2) \cdot (-1 \cdot z_2) dz_2 = \\ &= -15 + 8 = -7 \text{ кН} \cdot \text{м}^3. \end{aligned}$$

Для расчета угла поворота в точке C составим вспомогательную систему, в которой приложим в точке C единичный изгибающий момент и определим реакции на опорах (рисунок 10.1, $з$). Заданная и вспомогательная системы делятся на два участка, для которых функции изгибающих моментов равны:

1 участок (AB): $0 \leq z_1 \leq 5$ м:

$$M_p(z) = 8,4 \cdot z_1 - 0,5 \cdot 4 \cdot z_1^2; \quad \overline{M}_1(z) = 0,2 \cdot z_1;$$

2 участок (CB): $0 \leq z_2 \leq 2$ м:

$$M_p(z) = -0,5 \cdot 4 \cdot z_2^2; \quad \overline{M}_1(z) = 1.$$

Вычисляем:

$$\begin{aligned} EI\theta_C &= \int_0^5 (8,4 \cdot z_1 - 0,5 \cdot 4 \cdot z_1^2) \cdot 0,2 \cdot z_1 dz_1 + \int_0^2 (-0,5 \cdot 4 \cdot z_2^2) \cdot 1 dz_2 = \\ &= 7,5 - 5,33 = 2,17 \text{ кН} \cdot \text{м}^2. \end{aligned}$$

Тестовые вопросы и задачи для самопроверки

1 Формула Мора для изгиба:

$$\begin{aligned} \text{а) } \Delta_i &= \sum_1^n \int_l \frac{\overline{M}_1(z) \cdot \overline{M}_1(z) \cdot dz}{EI}; & \text{в) } \Delta_i &= \sum_1^n \int_l \frac{M_p(z) \cdot \overline{M}_1(z) \cdot dz}{EI}; \\ \text{б) } \Delta_i &= \sum_1^n \int_l \frac{M_p(z) \cdot M_p(z) \cdot dz}{EI}; & \text{г) } \Delta_i &= \sum_1^n \int_l \frac{M_p(z) \cdot \overline{M}_1(z) \cdot dz}{EA}. \end{aligned}$$

2 Формула Мора справедлива:

- а) для стержней любой жесткости;
- б) только для прямолинейных стержней;
- в) только для изгиба в балках;
- г) только для стержней постоянного поперечного сечения.

3 Формула Мора не применяется:

- а) для стержней малой кривизны;
- б) для стержней большой кривизны;
- в) для стержней, испытывающих кручение;
- г) для стержней переменного поперечного сечения.

11 Определение перемещений способом Верещагина

Пример – Для балки, загруженной равномерно распределенной нагрузкой (рисунок 11.1, а), определить способом Верещагина:

- 1) прогиб в точке К (вертикальное перемещение точки $EI y_K$);
- 2) прогиб в точке С (вертикальное перемещение точки $EI y_C$);
- 3) угол поворота точки С ($EI \theta_C$).

Решение

Перемещение (линейное и угловое) по способу Верещагина определяется по формуле

$$\Delta_i = \sum_{i=1}^n \frac{\omega_p \cdot \overline{y}_C}{EI_x},$$

где n – число участков на балке;

ω_p – площадь грузовой эпюры M_p на участке;

\overline{y}_C – ордината единичной эпюры \overline{M}_1 под центром тяжести грузовой на этом же участке;

EI_x – жесткость поперечного сечения на участке.

Напоминаем правило знаков при перемножении: знак произведения поло-

жильный, если обе координаты эпюр моментов расположены по одну сторону от оси стержня.

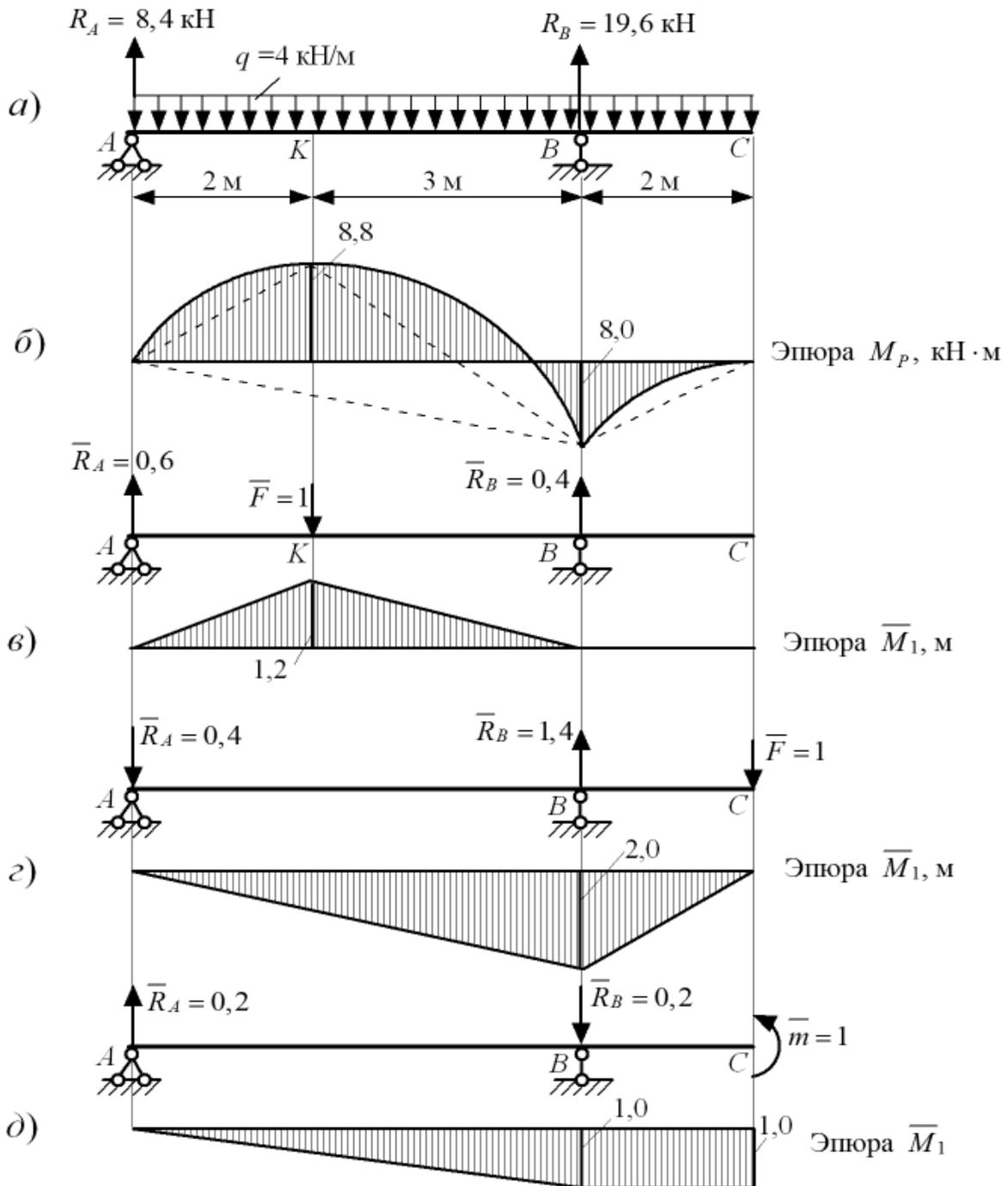


Рисунок 11.1

Вспользуемся вспомогательными системами, построенными для такой же задачи, решенной интегралами Мора (см. рисунок 10.1).

Для заданной и вспомогательных систем построим эпюры изгибающих моментов (рисунок 11.1, б–д).

Для определения EIy_K перемножим эпюры M_P и \bar{M}_1 по трем участкам (AK, KB и BC), мысленно разбив грузовую эпюру на составные части (треугольники и сегменты) (см. рисунок 11.1, б, в).

$$EIy_K = \frac{4 \cdot 2^3}{12} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1,2 + \frac{8,8 \cdot 2}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,2 + \frac{4 \cdot 3^3}{12} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1,2 + \frac{8,8 \cdot 3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,2 - \frac{8 \cdot 3}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1,2 = 19,8 \text{ кН} \cdot \text{м}^3.$$

Для определения EIy_C перемножим эпюры M_P и \overline{M}_1 по двум участкам (AB и BC), мысленно разбив грузовую эпюру на составные части (треугольники и сегменты) (см. рисунок 11.1, б, з).

$$EIy_C = \frac{5 \cdot 8}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 - \frac{4 \cdot 5^3}{12} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{2 \cdot 8}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 - \frac{4 \cdot 2^3}{12} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 = -7 \text{ кН} \cdot \text{м}^3.$$

Знак «минус» указывает, что перемещение точки C не совпало с направлением единичной силы. Балка прогнулась вверх, а не вниз, как предполагалось.

Для определения $EI\theta_C$ перемножим эпюры M_P и \overline{M}_1 по двум участкам (AB и BC), мысленно разбив грузовую эпюру на составные части (треугольники и сегменты) (см. рисунок 11.1, б, д).

$$EI\theta_C = -\frac{5 \cdot 8}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{4 \cdot 5^3}{12} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 - \frac{2 \cdot 8}{2} \cdot 1 + \frac{4 \cdot 2^3}{12} \cdot 1 = 2,17 \text{ кН} \cdot \text{м}^2.$$

Тестовые вопросы и задачи для самопроверки

1 Площадь сегмента равна:

- а) $\omega = q\ell^3/12$; в) $\omega = q\ell^3/6$;
 б) $\omega = q\ell^2/12$; г) $\omega = q\ell^3/2$.

2 Правило Верещагина справедливо:

- а) для стержней большой кривизны;
 б) только для прямолинейных стержней;
 в) для стержней малой кривизны;
 г) только для стержней постоянного поперечного сечения.

3 Для определения угла поворота во вспомогательной системе следует приложить:

- а) единичный крутящий момент;
 б) единичную поперечную силу;
 в) единичную продольную силу;
 г) единичный изгибающий момент.

12 Расчет простейших статически неопределимых стержневых систем методом сил

Пример – Решить статически неопределимую балку (рисунок 12.1) методом сил. Построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов.

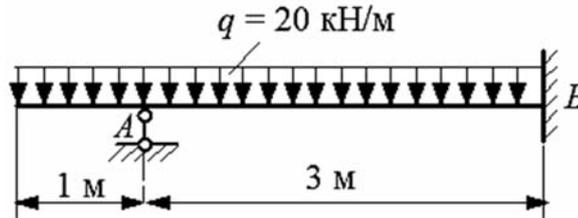


Рисунок 12.1

Решение

Заданная балка один раз статически неопределима, т. е. она имеет одну лишнюю связь. Выбираем основную систему, отбрасывая одну связь, например опору A (рисунок 12.2, a).

Составляем эквивалентную систему (рисунок 12.2, b).

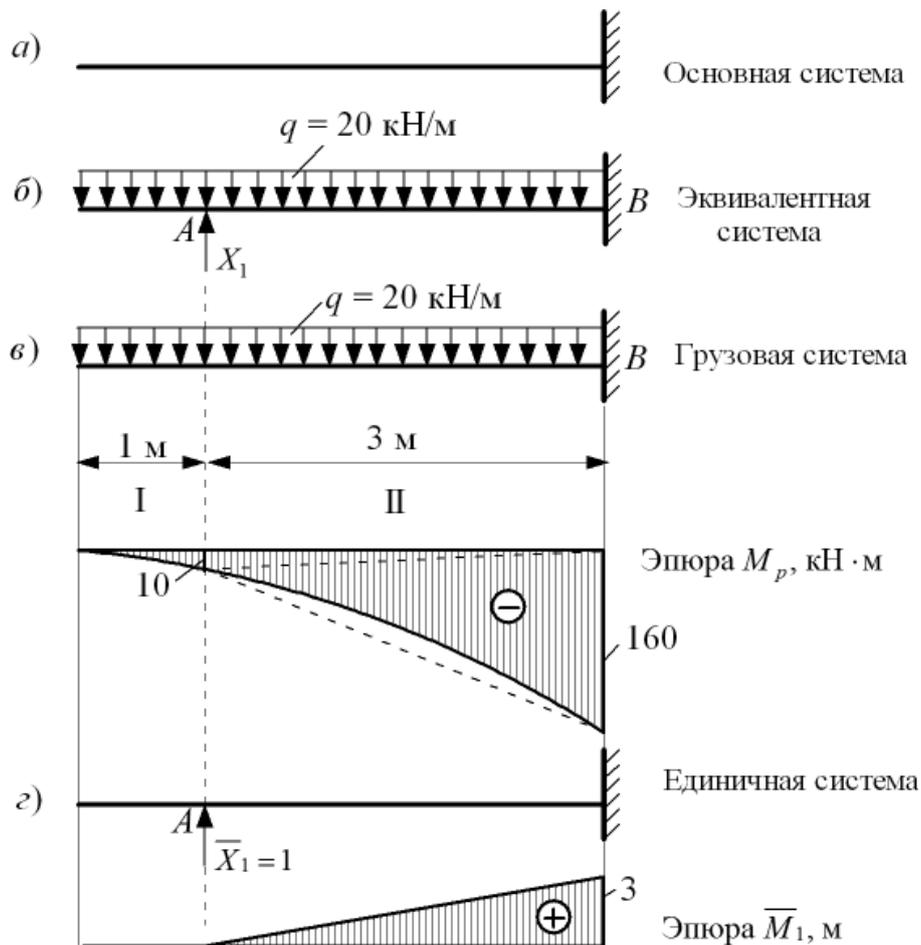


Рисунок 12.2

Каноническое уравнение метода сил один раз статически неопределимой системы имеет вид:

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \Delta_{1p} = 0.$$

Для определения коэффициентов канонического уравнения строим эпюры изгибающих моментов в грузовой (рисунок 12.2, в) и единичной (рисунок 12.2, г) системах.

Определяем коэффициент при неизвестной силе X_1 перемножением эпюры M_1 на M_1 :

$$\delta_{11} = \sum \frac{M_1 y_c}{EI} = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 \right) = \frac{9}{EI} \text{ м}^3.$$

Определяем свободный коэффициент Δ_{1p} перемножением эпюры M_1 на эпюру M_p :

$$\Delta_{1p} = \sum \frac{M_p y_c}{EI} = \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot 160 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 + \frac{20 \cdot 3^3}{12} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \right) = -\frac{427,5}{EI} \text{ кН} \cdot \text{м}^3.$$

Решаем каноническое уравнение:

$$\frac{9}{EI} \cdot X_1 - \frac{427,5}{EI} = 0; \quad X_1 = R_A = 47,5 \text{ кН}.$$

После определения реакции R_A можно построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов обычным образом (рисунок 12.3).

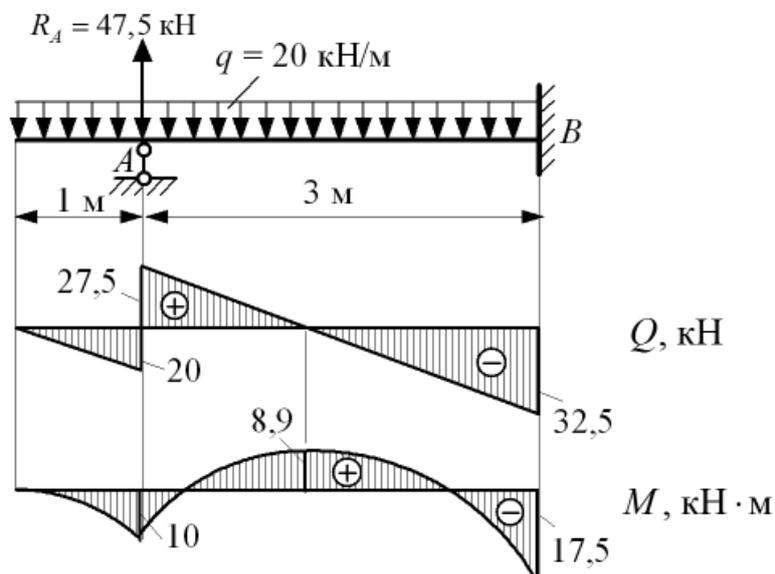
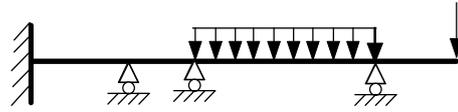


Рисунок 12.3

Тестовые вопросы и задачи для самопроверки

1 Сколько раз статически неопределима балка?

- а) один; в) три;
б) два; г) четыре.



2 Основная система получается из заданной системы:

- а) удалением внешней нагрузки;
б) удалением лишних связей;
в) удалением внешней нагрузки и лишних связей;
г) удалением шарнирных закреплений.

3 Сколько канонических уравнений нужно составить для дважды статически неопределимой системы?

- а) один; б) два; в) три; г) четыре.

13 Расчет при продольном ударе

Пример – Пусть груз $G = 10$ кН падает с высоты $h = 10$ см на двутавровую стойку № 20 длиной $l = 4$ м (рисунок 13.1). Модуль упругости $E = 2 \cdot 10^5$ МПа. Считать, что стойка не теряет устойчивости. Определить:

- 1) максимальное нормальное напряжение;
2) наибольшее укорочение стойки при ударе.

Решение

Расчетными формулами при ударе являются следующие:

$$\sigma_{дин} = k \cdot \sigma_{ст};$$

$$\Delta l_{дин} = k \cdot \Delta l_{ст};$$

$$k = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\delta_{ст}}},$$

где k – динамический коэффициент при ударе.

Определим параметры, соответствующие статическому способу приложения силы веса падающего груза (рисунок 13.2):

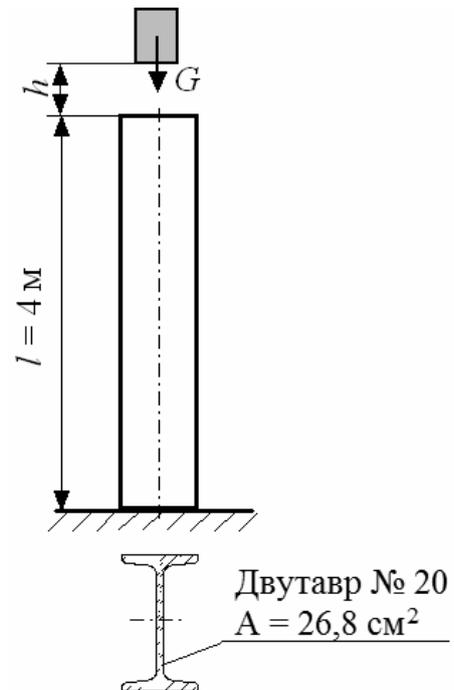


Рисунок 13.1

$$|\sigma_{cm}| = \frac{F}{A} = \frac{10 \cdot 10^3}{26,8 \cdot 10^{-4}} = 3,73 \cdot 10^6 \text{ Па};$$

$$\begin{aligned} \delta_{cm} &= |\Delta l_{cm}| = \frac{Fl}{EA} = \\ &= \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 4}{2 \cdot 10^{11} \cdot 26,8 \cdot 10^{-4}} = 0,746 \cdot 10^{-4} \text{ м.} \end{aligned}$$

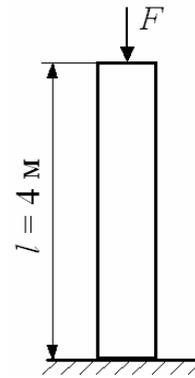


Рисунок 13.2

Динамический коэффициент

$$k = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 0,1}{0,746 \cdot 10^{-4}}} = 1 + 51,8 = 52,8.$$

Динамическое напряжение

$$\sigma_{дин} = k \cdot \sigma_{cm} = 52,8 \cdot 3,73 = 193 \text{ МПа.}$$

Укорочение стойки при ударе

$$|\Delta l_{дин}| = k \cdot \Delta l_{cm} = 52,8 \cdot 0,746 \cdot 10^{-4} = 39,4 \cdot 10^{-4} \text{ м.}$$

14 Расчет при поперечном ударе

Пример – На двутавровую балку № 20 длиной $l = 9$ м, свободно лежащую на двух шарнирных опорах, с высоты $h = 5$ см падает груз $G = 1200$ Н (рисунок 14.1). Модуль упругости материала $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, осевой момент инерции двутавра $I_x = 1840$ см⁴, осевой момент сопротивления $W_x = 184$ см³.

Определить наибольшее нормальное напряжение в балке и прогиб в месте падения груза.

Решение

Рассчитываем балку на действие статической нагрузки. Прикладываем силу Q и строим эпюру изгибающих моментов M_F . Для этого определяем реакции:

$$\sum M_A = 0; \quad R_B = \frac{G \cdot 3}{9} = 400 \text{ Н};$$

$$\sum M_B = 0; \quad R_A = \frac{G \cdot 6}{9} = 800 \text{ Н.}$$

Максимальный момент $M_{\max} = R_A \cdot 3 = 800 \cdot 3 = 2400 \text{ Н} \cdot \text{м}$.

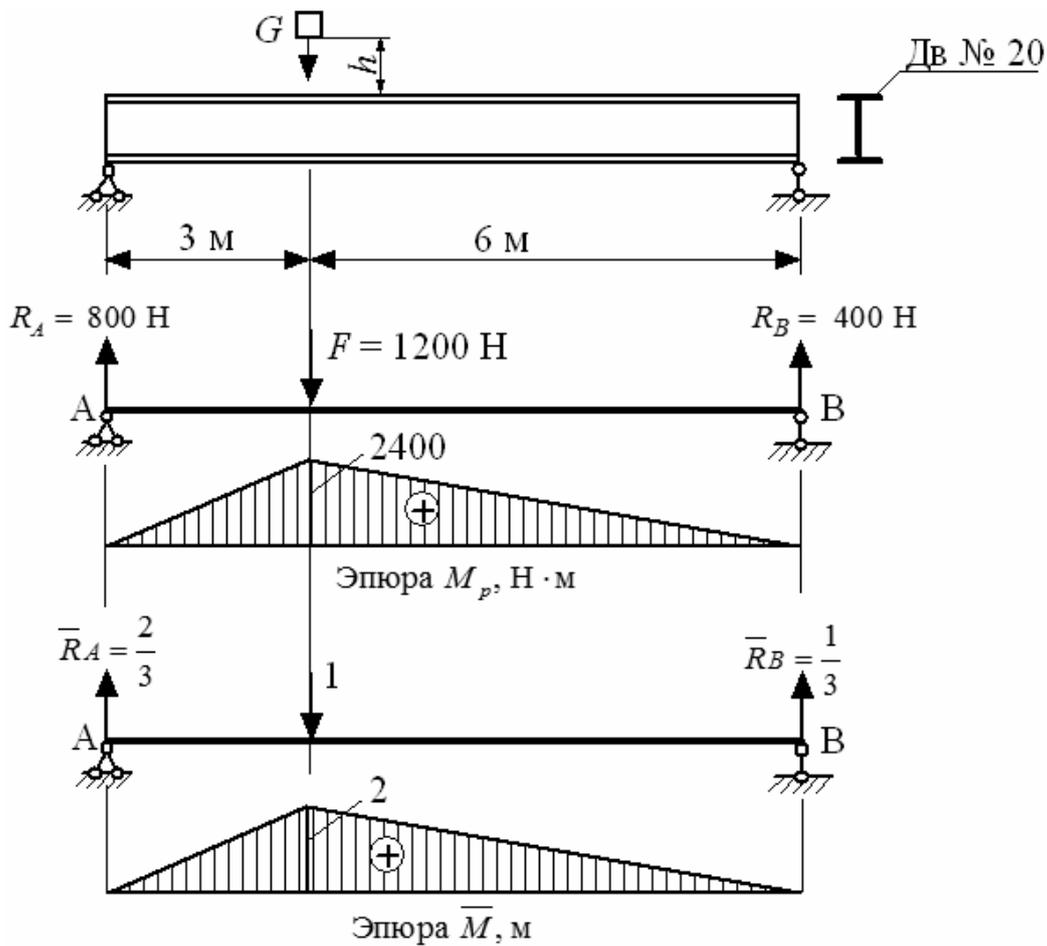


Рисунок 14.1

В место падения груза прикладываем единичную силу и строим единичную эпюру (эпюру моментов от единичной нагрузки):

$$\sum M_A = 0; \quad R'_B = \frac{\bar{F} \cdot 3}{9} = \frac{1}{3};$$

$$\sum M_B = 0; \quad R'_A = \frac{\bar{F} \cdot 6}{9} = \frac{2}{3}.$$

Максимальный момент $M_{\max} = R'_A \cdot 3 = \frac{2}{3} \cdot 3 = 2 \text{ м}$.

Определяем максимальный прогиб балки в месте падения груза при статическом действии нагрузки по любому методу определения перемещений.

Например, по правилу Верещагина

$$\Delta_{cm} = \frac{1}{EI_x} \left(\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2400 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2400 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \right) = \frac{7200}{2 \cdot 10^{11} \cdot 1840 \cdot 10^{-8}} = 1,95 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

Определяем динамический коэффициент:

$$k = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\delta_{cm}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 5 \cdot 10^{-3}}{0,195 \cdot 10^{-3}}} = 8,2.$$

Наибольшее нормальное напряжение в балке при ударе

$$\sigma_{\max}^d = k \cdot \sigma_{\max}^{cm} = k \cdot \frac{M_{\max}}{W_x} = 8,2 \cdot \frac{2400}{184 \cdot 10^{-6}} = 107 \text{ МПа.}$$

Наибольший прогиб при ударе $\Delta_{дин} = k \cdot \Delta_{cm} = 8,2 \cdot 0,195 = 1,6 \text{ см.}$

15 Колебания систем с одной степенью свободы

Пример – На двутавровой балке № 20 установлен электродвигатель весом $G = 6 \text{ кН}$, скорость вращения которого $n = 300 \text{ об/мин}$ (рисунок 15.1, а). Из-за дисбаланса вращающихся частей возникает вертикальная центробежная сила $F(t) = 2 \sin \theta t$, амплитудное значение которой равно 2 кН . Модуль упругости материала $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, осевой момент инерции двутавра $I_x = 1840 \text{ см}^4$, осевой момент сопротивления $W_x = 184 \text{ см}^3$. Определить наибольшие нормальные напряжения и прогиб.

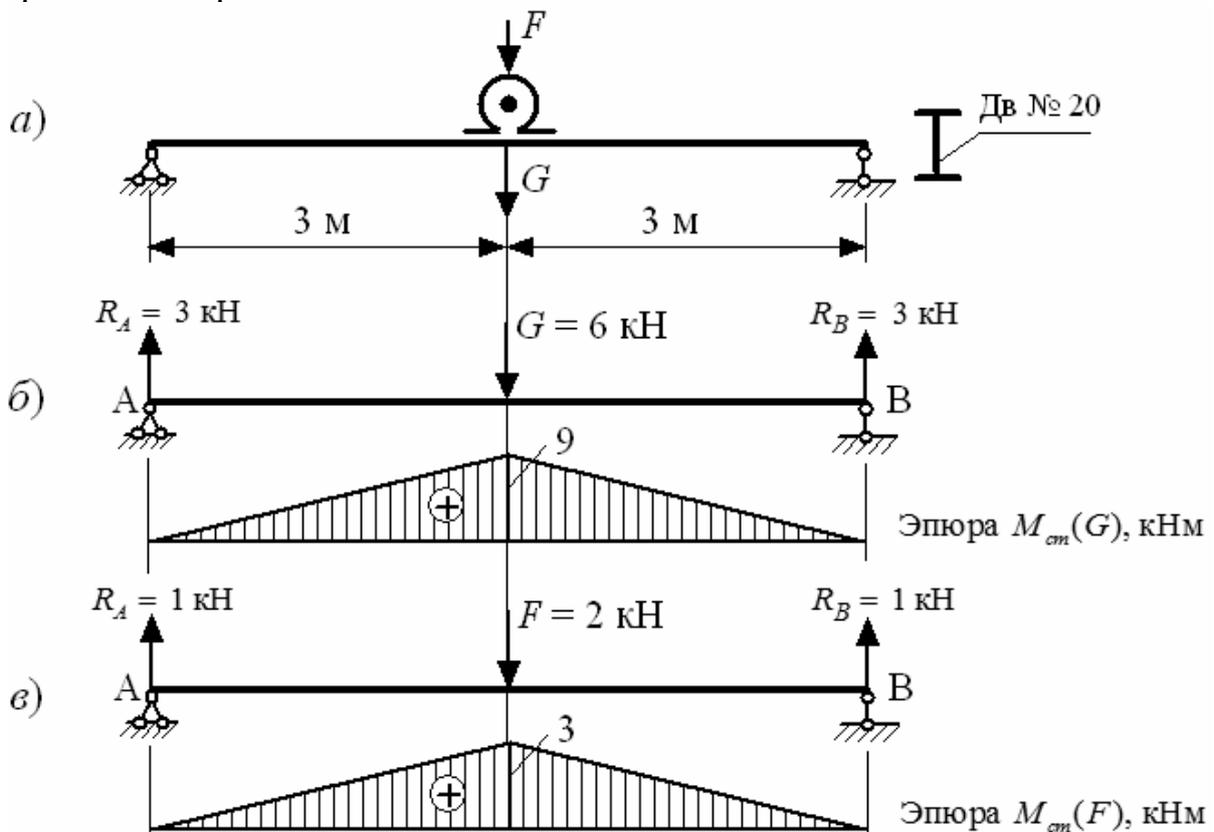


Рисунок 15.1

Решение

Определим наибольшее статическое напряжение от силы G в среднем сечении балки с максимальным изгибающим моментом $9 \text{ кН}\cdot\text{м}$ (рисунок 15.1, б):

$$\sigma_{cm}(G) = \frac{M_{cm\max}(G)}{W_x} = \frac{9 \cdot 10^3}{184 \cdot 10^{-6}} = 48,91 \text{ МПа.}$$

Прогиб середины пролета для балки, лежащей на двух опорах, вычислим и по известной формуле

$$\Delta_{cm}(G) = \frac{G \cdot l^3}{48 \cdot E \cdot I_x} = \frac{6 \cdot 10^3 \cdot 6^3}{48 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 1840 \cdot 10^{-8}} = 0,00734 \text{ м.}$$

Определим круговую частоту собственных (свободных) колебаний системы по формуле

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\Delta_{cm}}} = \sqrt{\frac{9,81}{0,00734}} = 36,56 \text{ с}^{-1},$$

где $g = 9,81 \text{ м/с}^2$ – ускорение свободного падения;

Δ_{cm} – перемещение точки расположения колеблющейся массы (в данном случае двигателя) от собственного веса $\Delta_{cm}(G)$.

Определим динамический коэффициент при действии вибрационной нагрузки по формуле

$$k = \frac{1}{1 - \left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2} = \frac{1}{1 - \left(\frac{31,4}{36,56}\right)^2} = 3,81,$$

где θ – круговая частота действия вибрационной нагрузки,

$$\theta = \frac{\pi \cdot n}{30} = \frac{3,14 \cdot 300}{30} = 31,4 \text{ с}^{-1}.$$

Определим нормальное напряжение от наибольшей величины вибрационной нагрузки $F = 2 \text{ кН}$, приложенной статическим образом, в среднем сечении балки с максимальным изгибающим моментом $3 \text{ кН}\cdot\text{м}$ (рисунок 15.1, в):

$$\sigma_{cm}(F) = \frac{M_{cm}(F)}{W_x} = \frac{3 \cdot 10^3}{184 \cdot 10^{-6}} = 16,30 \text{ МПа.}$$

Прогиб середины пролета двухопорной балки от силы F

$$\Delta_{cm}(F) = \frac{F \cdot l^3}{48 \cdot E \cdot I_x} = \frac{2 \cdot 10^3 \cdot 6^3}{48 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 1840 \cdot 10^{-8}} = 0,00245 \text{ м.}$$

Тогда динамические значения напряжения и прогиба

$$\sigma_{дин}(F) = k \cdot \sigma_{cm}(F) = 3,81 \cdot 16,30 = 62,103 \text{ МПа};$$

$$\Delta_{дин}(F) = k \cdot \Delta_{cm}(F) = 3,81 \cdot 0,00245 = 0,00934 \text{ м.}$$

$\Delta_{дин}(F)$ представляет собой амплитуду колебаний массы (двигателя), т. е. наибольшее отклонение от положения статического равновесия. Поэтому суммарный прогиб в середине пролета балки

$$\Delta_{max} = \Delta_{cm}(G) + \Delta_{дин}(F) = 0,00734 + 0,00934 = 0,01668 \text{ м.}$$

Наибольшее нормальное напряжение

$$\sigma_{max} = \sigma_{cm}(G) + \sigma_{дин}(F) = 48,91 + 62,103 = 111,013 \text{ МПа.}$$

16 Расчет толстостенных труб

Пример – Определить, пользуясь третьей теорией прочности (наибольших касательных напряжений), наружный радиус R_3 составной трубы (рисунок 16.1), подверженной внутреннему давлению $p_{вн} = 80$ МПа, если допускаемое напряжение $[\sigma] = 150$ МПа, $R_1 = 10$ см, $R_2 = 15,5$ см. Построить эпюры радиальных и окружных напряжений по сечению $A-C$.

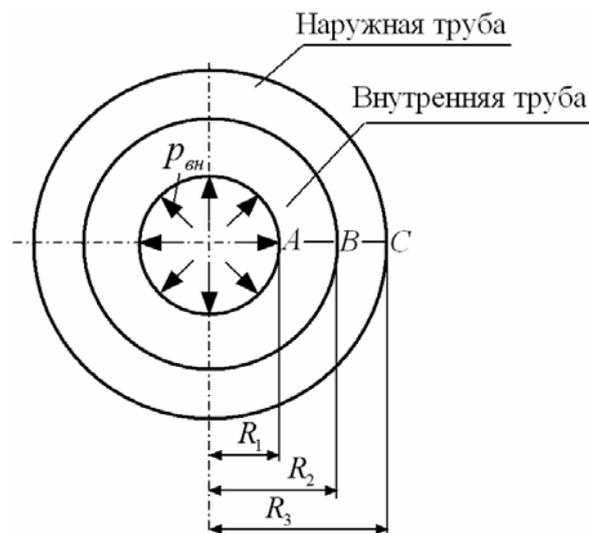


Рисунок 16.1

Решение

Материал трубы испытывает плоскую деформацию. Для внутренней трубы наиболее напряженными являются точки на внутренней поверхности, в которых радиальное и окружное главные напряжения одновременно достигают наибольшей величины (рисунок 16.2). В этих точках окружное напряжение больше, чем радиальное, а радиальное – сжимающее и равно внутреннему давлению $p_{вн}$:

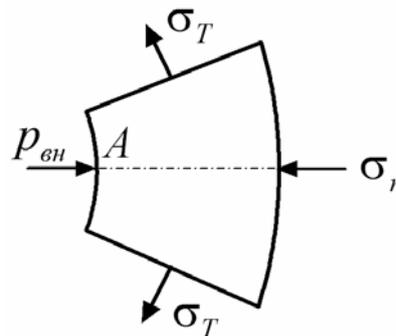


Рисунок 16.2

$$\sigma_1 = \sigma_T, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = \sigma_r = -p_{вн} = -80 \text{ МПа.}$$

Окружное напряжение в точке A на внутренней поверхности

$$\sigma_T = [\sigma] - p_{вн} = 150 - 80 = 70 \text{ МПа.}$$

Полное давление p по поверхности соприкосновения труб, соответствующее при заданном радиусе R_2 допускаемому напряжению $[\sigma]$,

$$p = \frac{[\sigma]}{2R_2^2} \cdot (R_1^2 - R_2^2) + p_{вн} = \frac{150 \cdot (10^2 - 15,5^2)}{2 \cdot 15,5^2} + 80 = 36,2 \text{ МПа.}$$

Наружный радиус

$$R_3 = R_2 \sqrt{\frac{[\sigma]}{[\sigma] - 2p}} = 15,5 \sqrt{\frac{150}{150 - 2 \cdot 36,2}} = 21,5 \text{ см.}$$

Построение эпюр напряжений (рисунок 16.3):

1) для радиальных и окружных рабочих напряжений $(\sigma_r)_{раб}$ и $(\sigma_T)_{раб}$ от внутреннего давления $p_{вн}$ в сплошной трубе, имеющей толщину стенки $R_3 - R_1$ (эпюры 1 и 2);

2) для напряжений $(\sigma_r)_м$ и $(\sigma_T)_м$ от межтрубного сжимающего давления $p_м$, возникающего от насадки: у внутренней трубы – наружного радиального и у наружной трубы – внутреннего радиального (эпюры 3 и 4).

Полные эпюры напряжений σ_r и σ_T (эпюры 5 и 6) получаются сложением ординат указанных двух эпюр с учетом их знаков:

$$\sigma_r = (\sigma_r)_{раб} + (\sigma_r)_м; \quad \sigma_T = (\sigma_T)_{раб} + (\sigma_T)_м.$$

Величина межтрубного давления p_m определяется из условия, что по поверхности соприкосновения труб полное радиальное напряжение σ_r равно сумме межтрубного давления $(\sigma_r)_m$ и рабочего напряжения $(\sigma_r)_{раб}$, возникающего в этом месте сплошной трубы, имеющей толщину стенки R_3-R_1 от внутреннего давления $p_{вн}$. Но так как $(\sigma_r)_m$ в точке B равно p_m , а σ_r равно p , то

$$p = p_m + (\sigma_r)_{раб}, \text{ откуда } p_m = p - (\sigma_r)_{раб}.$$

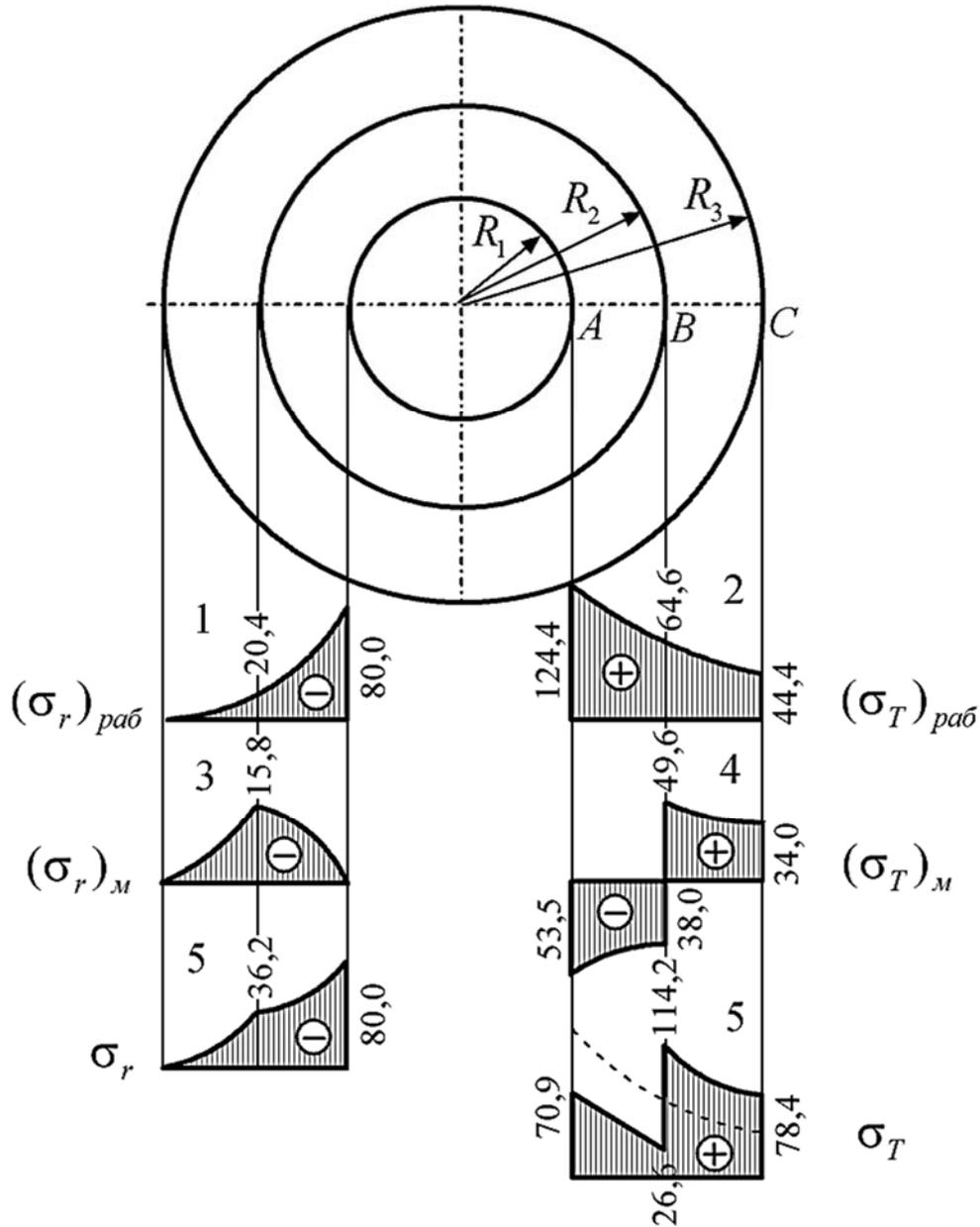


Рисунок 16.3

Напряжение $(\sigma_r)_{раб}$ вычисляется для радиального напряжения по поверхности с радиусом $r = 15,5$ см в сплошной трубе толщиной R_3-R_1 , подверженной одному внутреннему давлению $p_{вн} = 80$ МПа.

$$(\sigma_r)_{pa\delta} = \frac{p_B R_1^2}{R_3^2 - R_1^2} \left(1 - \frac{R_3^2}{r^2} \right) = \frac{80 \cdot 10^2}{21,5^2 - 10^2} \left(1 - \frac{21,5^2}{15,5^2} \right) = -20,4 \text{ МПа.}$$

$$p_m = (\sigma_r)_m = p - (\sigma_r)_{pa\delta} = -36,2 - (-20,4) = -15,8 \text{ МПа.}$$

По этим значениям $(\sigma_r)_{pa\delta}$ и $(\sigma_r)_m$ построены эпюры 1 и 3 на рисунке 16.3. Алгебраическое сложение ординат этих эпюр дает ординаты эпюры 5 полного радиального напряжения.

Определим окружное напряжение $(\sigma_T)_m$ от межтрубного давления p_m по поверхности соприкасания труб. Для наружной трубы, испытывающей внутреннее давление p_m , оно определяется:

– в точке В ($r = R_2$) по формуле

$$(\sigma_r) = \frac{p_m R_2^2}{R_3^2 - R_2^2} \left(1 + \frac{R_3^2}{R_2^2} \right) = \frac{15,8 \cdot 15,5^2}{21,5^2 - 15,5^2} \left(1 + \frac{21,5^2}{15,5^2} \right) = 49,6 \text{ МПа;}$$

– в точке С ($r = R_3$) по формуле

$$(\sigma_r)_m = 2 \frac{p_m R_2^2}{R_3^2 - R_2^2} = 2 \frac{15,8 \cdot 15,5^2}{21,5^2 - 15,5^2} = 34,0 \text{ МПа.}$$

Для внутренней трубы, испытывающей наружное давление p_m , $(\sigma_T)_m$ определяется:

– в точке В ($r = R_2$) по формуле

$$(\sigma_T)_m = -\frac{p_m R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \left(1 + \frac{R_1^2}{R_2^2} \right) = -\frac{15,6 \cdot 15,5^2}{15,5^2 - 10^2} \left(1 + \frac{10^2}{15,5^2} \right) = -38,0 \text{ МПа;}$$

– в точке А ($r = R_1$) по формуле

$$(\sigma_r)_m = -2 \frac{p_m R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} = -2 \frac{15,6 \cdot 15,5^2}{15,5^2 - 10^2} = -53,5 \text{ МПа.}$$

Окружное напряжение $(\sigma_T)_{pa\delta}$ от давления $p_{вн}$ вычисляем, приняв $R_B = R_1$, $R_H = R_3$:

$$(\sigma_T)_{pa\delta} = -\frac{p_m R_1^2}{R_3^2 - R_1^2} \left(1 + \frac{R_3^2}{r^2} \right) = -\frac{80 \cdot 10^2}{21,5^2 - 10^2} \left(1 + \frac{21,5^2}{r^2} \right) = 22,2 \left(1 + \frac{462,2}{r^2} \right) \text{ МПа.}$$

Аналогично вычисляем:

- в точке A при $r = 10$ см $(\sigma_T)_{раб} = 124,4$ МПа;
- в точке B при $r = 15,5$ см $(\sigma_T)_{раб} = 64,4$ МПа;
- в точке C при $r = 21,5$ см $(\sigma_T)_{раб} = 44,4$ МПа.

По значениям $(\sigma_T)_{раб}$ и $(\sigma_T)_м$ построены эпюры 2 и 4. Алгебраическое сложение ординат этих эпюр дает ординаты эпюры 6 полного окружного напряжения σ_T .

17 Расчет тонкостенных оболочек. Формула Ламе

Рассчитать коническую часть тонкостенной оболочки вращения с толщиной стенки $h = 0,03$ м (рисунок 17.1). Давление внутри оболочки $P_{вн} = 0,3$ МПа, удельный вес жидкости $\gamma = 1,5 \cdot 10^4$ Н/м³.

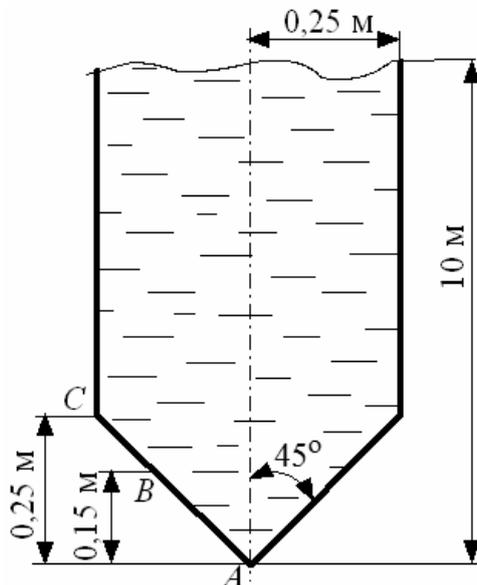


Рисунок 17.1

Решение

Рассмотрим отсеченную часть с действующими на нее силовыми факторами (см. рисунок 17.1).

Проводим первое сечение через точку A .

$$\rho_m = 0; \quad \rho_t = 0; \quad \sigma_m = 0; \quad \sigma_t = 0.$$

Второе сечение проводим через точку B на расстоянии $y = 0,15$ м.

Высота столба жидкости над этим сечением $v = H - y = 10 - 0,15 = 9,85$ м.

Давление

$$p = P_{вн} + v \cdot \gamma = 0,3 \cdot 10^6 + 9,85 \cdot 1,5 \cdot 10^4 = 447750 \text{ Па.}$$

В соответствии с уравнением Лапласа $\frac{\sigma_m}{\rho_m} + \frac{\sigma_t}{\rho_t} = \frac{p}{h}$ для сечения B имеем

$$\rho_m = \frac{R_t}{\cos \alpha} = \frac{0,15}{0,707} = 0,212 \text{ м.}$$

Радиус кривизны R_2 для конуса равен бесконечности, отсюда

$$\frac{\sigma_t}{0,212} = \frac{447750}{0,03}; \quad \sigma_t = \frac{0,212 \cdot 447750}{0,03} = 3,16 \text{ МПа.}$$

Третье сечение проведем через точку C ($y = 0,25$ м).

Высота столба жидкости над сечением $v = 10 - 0,25 = 9,75$ м.

Давление $p = P_{\text{вн}} + v \cdot \gamma = 0,3 \cdot 10^6 + 9,75 \cdot 1,5 \cdot 10^4 = 446250$ Па.

В соответствии с уравнением равновесия нижней отсеченной части оболочки имеем

$$\sigma_m 2\pi \rho_t h \cos \alpha - \gamma \frac{1}{3} \pi R_t^2 y - p \pi \rho_t^2 = 0;$$

$$\sigma_m 2\pi \cdot 0,25 \cdot 0,03 \cdot \cos 45^\circ - 1,5 \cdot 10^4 \cdot \frac{1}{3} \pi \cdot 0,25^3 - 446250 \cdot \pi \cdot 0,25^2 = 0;$$

$$\sigma_m = 2,64 \text{ МПа.}$$

В соответствии с уравнением Лапласа $\frac{\sigma_m}{\rho_m} + \frac{\sigma_t}{\rho_t} = \frac{p}{h}$ для сечения C имеем

$$\rho_{m1} = \frac{R_t}{\cos \alpha} = \frac{0,25}{0,707} = 0,354 \text{ м.}$$

Радиус кривизны R_2 для конуса равен бесконечности, отсюда

$$\frac{\sigma_t}{0,354} = \frac{446250}{0,03}; \quad \sigma_t = 5,27 \text{ МПа.}$$

Список литературы

- 1 **Кузменко, И. М.** Механика материалов: учебное пособие: в 2 ч. / И. М. Кузменко. – Могилев: Беларус.-Рос. ун-т, 2020. – Ч. 1. – 289 с.
- 2 **Кузменко, И. М.** Механика материалов: учебное пособие: в 2 ч. / И. М. Кузменко. – Могилев: Беларус.-Рос. ун-т, 2020. – Ч. 2. – 281 с.
- 3 Сопротивление материалов в вопросах-ответах и сборник задач для самостоятельной работы с примерами их решений : учебное пособие / А. Г. Схиртладзе [и др.]. – 3-е изд., стер. – Старый Оскол : ТНТ, 2019. – 324 с.
- 4 **Дарков, А. В.** Сопротивление материалов : учебник / А. В. Дарков, Г. С. Шпиро. – 5-е изд., перераб. и доп., репринт. изд. – Москва : Альянс, 2018. – 624 с.
- 5 **Беляев, Н. М.** Сопротивление материалов: учебное пособие / Н. М. Беляев. – 15-е изд., перераб. и стер. – Москва : Альянс, 2015. – 608 с.
- 6 **Скопинский, В. Н.** Практическое руководство к расчетам по сопротивлению материалов: учебное пособие / В. Н. Скопинский. – Москва: МГИУ, 2007. – 240 с.
- 7 **Писаренко, Г. С.** Справочник по сопротивлению материалов / Г. С. Писаренко, Ф. П. Яковлев, В. В. Матвеев. – 5-е изд., перераб. и доп. – Киев: Дельта, 2008. – 816 с.
- 8 **Подскребко, М. Д.** Сопротивление материалов: учебник для вузов / М. Д. Подскребко. – Минск : Вышэйшая школа, 2007. – 797 с.
- 9 **Старовойтов, Э. И.** Сопротивление материалов: учебник для вузов / Э. И. Старовойтов. – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2008. – 384 с.
- 10 **Степин, П. А.** Сопротивление материалов: учебник / П. А. Степин. – 10-е изд., стер. – Санкт-Петербург: Лань, 2010. – 320 с.
- 11 **Окопный, Ю. А.** Механика материалов и конструкций: учебник для вузов / Ю. А. Окопный, В. П. Радин, В. П. Чирков. – 2-е изд., доп. – Москва: Машиностроение, 2002. – 436 с.