

МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Технологии металлов»

# МЕХАНИКА МАТЕРИАЛОВ И КОНСТРУКЦИЙ

*Методические рекомендации к практическим занятиям  
для студентов специальности 1-36 07 02  
«Производство изделий на основе трехмерных технологий»  
очной и заочной форм обучения*

Часть 1



Могилев 2021

УДК 539.3/6  
ББК 305.1212  
М55(64)

Рекомендовано к изданию  
учебно-методическим отделом  
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Технологии металлов» «12» апреля 2021 г.,  
протокол № 9

Составители: канд. техн. наук, доц. А. А. Катькало;  
канд. техн. наук, доц. И. А. Леонович

Рецензент канд. техн. наук, доц. А. Е. Науменко

Методические рекомендации составлены в соответствии с рабочей программой дисциплины «Механика материалов и конструкций» для студентов специальности 1-36 07 02 «Производство изделий на основе трехмерных технологий». Содержат материал для проведения практических занятий в осеннем семестре.

Учебно-методическое издание

## МЕХАНИКА МАТЕРИАЛОВ И КОНСТРУКЦИЙ

### Часть 1

Ответственный за выпуск	Д. И. Якубович
Корректор	И. В. Голубцова
Компьютерная верстка	Н. П. Полевничая

Подписано в печать . Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.  
Печать трафаретная. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 36 экз. Заказ № .

Издатель и полиграфическое исполнение:  
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования  
«Белорусско-Российский университет».

Свидетельство о государственной регистрации издателя,  
изготовителя, распространителя печатных изданий  
№ 1/156 от 07.03.2019.

Пр-т Мира, 43, 212022, г. Могилев.

© Белорусско-Российский  
университет, 2021

## Содержание

Введение.....	4
1 Геометрические характеристики поперечных сечений. Определение центра тяжести составного сечения.....	5
2 Моменты инерции простых сечений относительно центральных осей. Использование таблиц сортамента.....	6
3 Определение моментов инерции простых сечений при параллельном переносе и повороте осей. Главные центральные оси и моменты инерции поперечного сечения.....	7
4 Определение геометрических характеристик в составных сечениях и сечениях сложной формы.....	9
5 Определение внутренних сил в статически определимых системах. Метод сечений.....	11
6 Построение эпюр внутренних силовых факторов в прямолинейном брус.....	13
7 Определение внутренних сил в статически определимых балках при поперечном изгибе.....	14
8 Определение внутренних сил при кручении. Построение эпюр крутящих моментов.....	17
9 Расчеты на прочность и жесткость при растяжении-сжатии статически определимых брусев.....	18
10 Определение главных напряжений и расчеты по теориям прочности.....	22
11 Расчет статически определимых балок на прочность при плоском поперечном изгибе (проверочный расчет).....	25
12 Расчет статически определимых балок на прочность при плоском поперечном изгибе (проектировочный расчет).....	26
13 Расчет статически определимых балок на прочность при плоском поперечном изгибе (определение допускаемой нагрузки).....	28
14 Расчет линейных и угловых перемещений при прямом поперечном изгибе.....	29
15 Расчеты на прочность и жесткость при растяжении-сжатии в статически неопределимых системах.....	32
Список литературы.....	38

## Введение

Цель преподавания дисциплины – сформировать у студентов основные знания и умения по расчету типового элемента конструкций (бруса) на прочность, жесткость и устойчивость, по выбору конструкционных материалов и форм поперечных сечений, обеспечивающих требуемые показатели надежности, безопасности и экономичности сооружений.

Студенты специальности 1-36 07 02 «Производство изделий на основе трехмерных технологий» изучают дисциплину «Механика материалов и конструкций» на протяжении 3-го и 4-го семестров. Методические рекомендации (Часть 1) выполнены в объеме практических занятий 3-го семестра.

По каждой теме практических занятий в методических рекомендациях приводится один или более примеров с подробным решением. Далее следуют вопросы для самопроверки в форме тестовых заданий.

Методические рекомендации помогут сформировать у студентов компетенцию: БПК-6. Быть способным выбрать конструктивную часть и форму элементов конструкций, расчетные схемы технических конструкций, производить расчеты технических конструкций и их элементов на прочность, устойчивость и жесткость.

Перед практическим занятием студентам предлагается изучить материал темы по конспекту лекций и рекомендуемой литературе [1–11], разобрать решение приведенных типовых примеров и проработать материал для самопроверки.

# 1 Геометрические характеристики поперечных сечений.

## Определение центра тяжести составного сечения

**Пример** – Определить координату центра тяжести составного сечения относительно оси  $y$ . Размеры сечения на рисунке 1.1 даны в миллиметрах.

**Решение**

Положение центров тяжести прямоугольника и круга с координатами относительно оси  $y$  указано на рисунке 1.1. Площади отдельных фигур

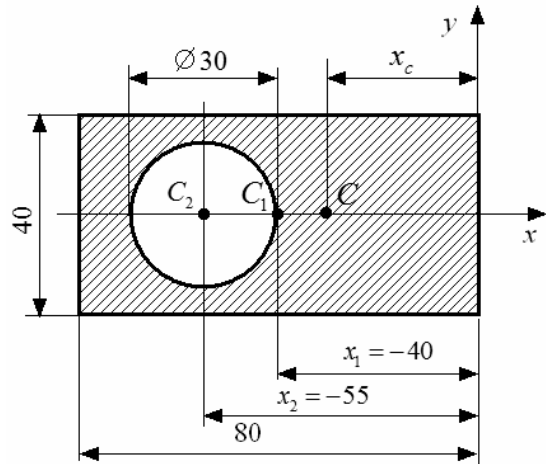


Рисунок 1.1

$$A_1 = 4 \cdot 8 = 32 \text{ см}^2;$$

$$A_2 = 3,14 \cdot 1,5^2 = 7,065 \text{ см}^2.$$

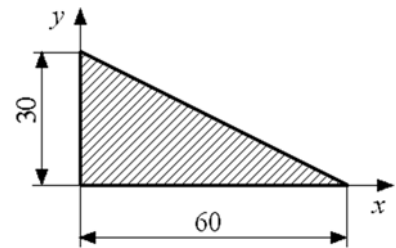
Координата  $x_c$  определяется по формуле

$$x_c = \frac{\sum S_y}{\sum A} = \frac{x_1 \cdot A_1 - x_2 \cdot A_2}{A_1 - A_2} = \frac{(-4) \cdot 32 - (-5,5) \cdot 7,065}{32 - 7,065} = -3,57 \text{ см.}$$

### Тестовые вопросы и задачи для самопроверки

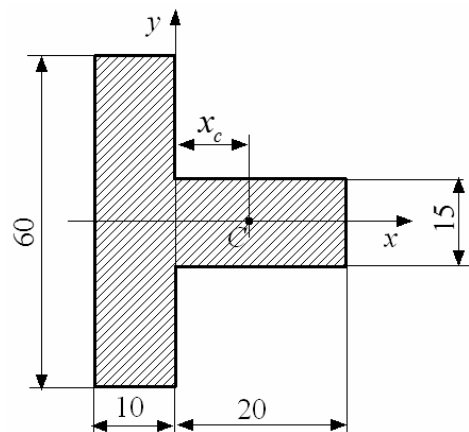
1 Координата центра тяжести треугольника относительно указанных осей:

- а)  $x_c = 1$  см;
- б)  $x_c = 2$  см;
- в)  $x_c = -2$  см;
- г)  $x_c = 3$  см.



2 В каком ответе дано правильное значение координаты центра тяжести сечения  $x_c$ ?

- а)  $x_c = 0$  см;
- б)  $x_c = -1/3$  см;
- в)  $x_c = 1/3$  см;
- г)  $x_c = 2/3$  см.



3 По какой формуле определяется статический момент простого сечения площадью  $A$  относительно произвольной оси  $y$ ?

- а)  $S_y = x_c \cdot A$ ;  
 б)  $S_y = y_c \cdot A$ ;  
 в)  $S_y = x_c / A$ ;  
 г)  $S_y = y_c / A$ .

4 По какой формуле определяется координата центра тяжести составного поперечного сечения относительно оси  $x$ ?

- а)  $x_c = \frac{\sum S_y}{\sum A}$ ;      в)  $x_c = \frac{\sum S_x}{\sum A}$ ;  
 б)  $y_c = \frac{\sum S_y}{\sum A}$ ;      г)  $y_c = \frac{\sum S_x}{\sum A}$ .

## 2 Моменты инерции простых сечений относительно центральных осей. Использование таблиц сортамента

**Пример 1** – Определить осевые моменты инерции сечения относительно центральных осей  $x$  и  $y$ . Размеры сечения на рисунке 2.1 даны в миллиметрах.

*Решение*

Определим осевые моменты инерции сечения относительно центральных осей:

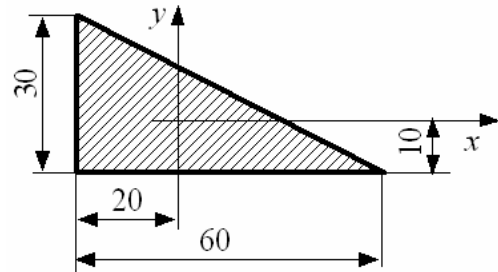


Рисунок 2.1

$$I_x = \frac{6 \cdot 3^3}{36} = 4,5 \text{ см}^4;$$

$$I_y = \frac{3 \cdot 6^3}{36} = 18 \text{ см}^4.$$

**Пример 2** – Определить осевые и полярный моменты инерции сечения относительно центральных осей  $x$  и  $y$ . Размеры сечения на рисунке 2.2 даны в миллиметрах.

*Решение*

Определим осевые моменты инерции сечения относительно центральных осей:

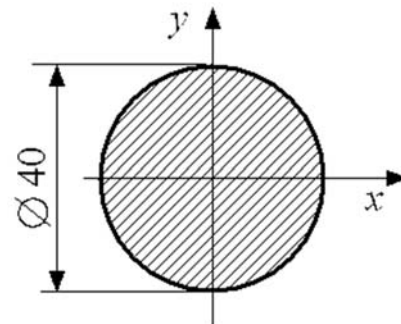


Рисунок 2.2

$$I_x = I_y = \frac{3,14 \cdot 4^4}{64} = 12,56 \text{ см}^4.$$

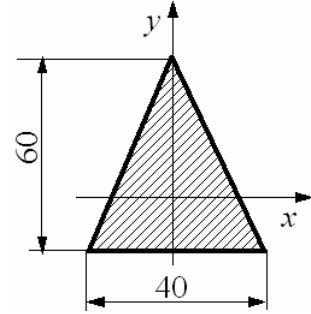
Определим полярный момент инерции:

$$I_p = \frac{3,14 \cdot 4^4}{32} = 25,12 \text{ см}^4.$$

### Тестовые вопросы и задачи для самопроверки

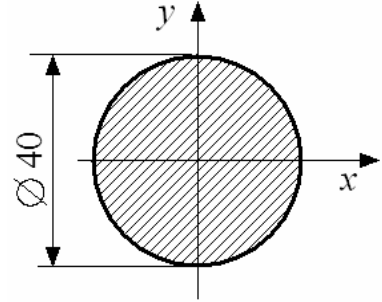
1 В каком ответе дано правильное значение осевого момента инерции сечения относительно оси  $y$ ?

- а)  $I_y = 24 \text{ см}^4$ ;
- б)  $I_y = 8 \text{ см}^4$ ;
- в)  $I_y = 10,7 \text{ см}^4$ ;
- г)  $I_y = 18 \text{ см}^4$ .



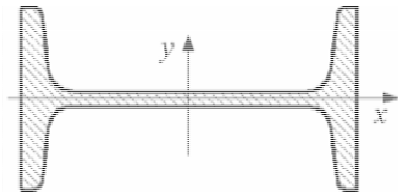
2 Укажите правильное значение центробежного момента инерции круглого поперечного сечения относительно указанных осей:

- а)  $I_{xy} = 0 \text{ см}^4$ ;
- б)  $I_{xy} = -8 \cdot \pi \text{ см}^4$ ;
- в)  $I_{xy} = -24 \cdot \pi \text{ см}^4$ ;
- г)  $I_{xy} = 24 \cdot \pi \text{ см}^4$ .



3 В каком ответе дано правильное значение осевого момента инерции двутавра № 10 относительно оси  $x$ ?

- а)  $I_x = 198 \text{ см}^4$ ;
- б)  $I_x = 39,7 \text{ см}^4$ ;
- в)  $I_x = 17,9 \text{ см}^4$ ;
- г)  $I_x = 6,49 \text{ см}^4$ .



### 3 Определение моментов инерции простых сечений при параллельном переносе и повороте осей. Главные центральные оси и моменты инерции поперечного сечения

**Пример** – Определить осевые моменты инерции поперечного сечения (рисунок 3.1) относительно указанных осей  $x$  и  $y$ . Размеры сечения на рисунке 3.1 даны в миллиметрах.

*Решение*

По рисунку видно, что заданная ось  $x$  и центральная ось  $x_c$  совпадают, а между вертикальными осями  $y$  и  $y_c$  есть межосевое расстояние  $b$ .

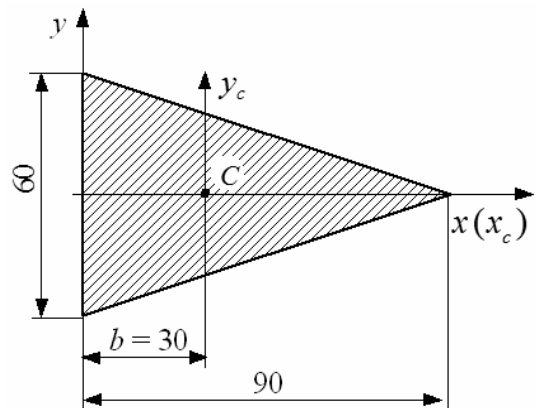


Рисунок 3.1

## Моменты инерции

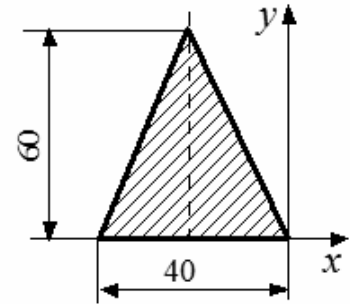
$$I_x = I_{x_c} = \frac{9 \cdot 6^3}{48} = 40,5 \text{ см}^4;$$

$$I_y = I_{y_c} + b^2 \cdot A = \frac{6 \cdot 9^3}{36} + 3^2 \cdot \frac{6 \cdot 9}{2} = 354,5 \text{ см}^4.$$

**Тестовые вопросы и задачи для самопроверки**

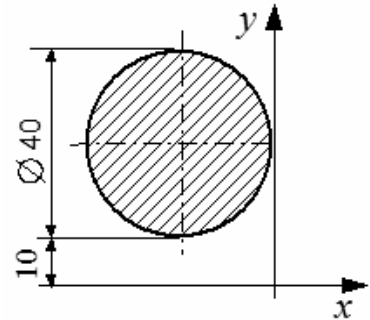
1 В каком ответе дано правильное значение осевого момента инерции сечения относительно оси  $y$  ?

- а)  $I_y = 32 \text{ см}^4$ ;
- б)  $I_y = 58 \text{ см}^4$ ;
- в)  $I_y = 56 \text{ см}^4$ ;
- г)  $I_y = 54 \text{ см}^4$ .



2 Укажите правильное значение центробежного момента инерции круглого поперечного сечения относительно указанных осей:

- а)  $I_{xy} = 0 \text{ см}^4$ ;
- б)  $I_{xy} = -8 \cdot \pi \text{ см}^4$ ;
- в)  $I_{xy} = -24 \cdot \pi \text{ см}^4$ ;
- г)  $I_{xy} = 24 \cdot \pi \text{ см}^4$ .



3 Какое утверждение может быть верно для главных центральных осей  $x$  и  $y$ ?

- а)  $I_x > 0, I_y < 0$ ;
- б)  $I_x = I_{\max}, I_y = I_{\min}$ ;
- в)  $I_x = 0, I_y = 0$ ;
- г)  $I_x + I_y = 0$ .

4 Оси  $x$  и  $y$  являются главными центральными, если ...:

- а)  $I_{xy} = 0, S_x = 0, S_y = 0$ ;
- б)  $I_{xy} = 0$ ;
- в)  $S_x = 0, S_y = 0$ ;
- г)  $S_x = S_y$ .

5 Ось симметрии поперечного сечения является ...:

- а) всегда главной, но не всегда центральной осью;
- б) всегда центральной, но не всегда главной осью;
- в) всегда главной центральной осью;
- г) не всегда центральной осью.



6 Угол для определения положения главных центральных осей инерции определяется по формуле ...:

$$\text{а) } \alpha_o = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{arctg} \frac{2 \cdot I_{xy}}{I_x - I_y};$$

$$\text{б) } \alpha_o = -\frac{1}{2} \cdot \operatorname{arctg} \frac{2 \cdot I_{xy}}{I_x - I_y};$$

$$\text{в) } \alpha_o = \operatorname{arctg} \frac{I_{xy}}{I_x - I_y};$$

$$\text{г) } \alpha_o = -\frac{1}{2} \cdot \operatorname{arctg} \frac{2 \cdot I_{xy}}{I_y - I_x}.$$

#### 4 Определение геометрических характеристик в составных сечениях и сечениях сложной формы

*Пример* – Для заданного сечения (рисунок 4.1) определить положение главных центральных осей и вычислить значения главных центральных моментов инерции. Размеры сечения даны в миллиметрах.

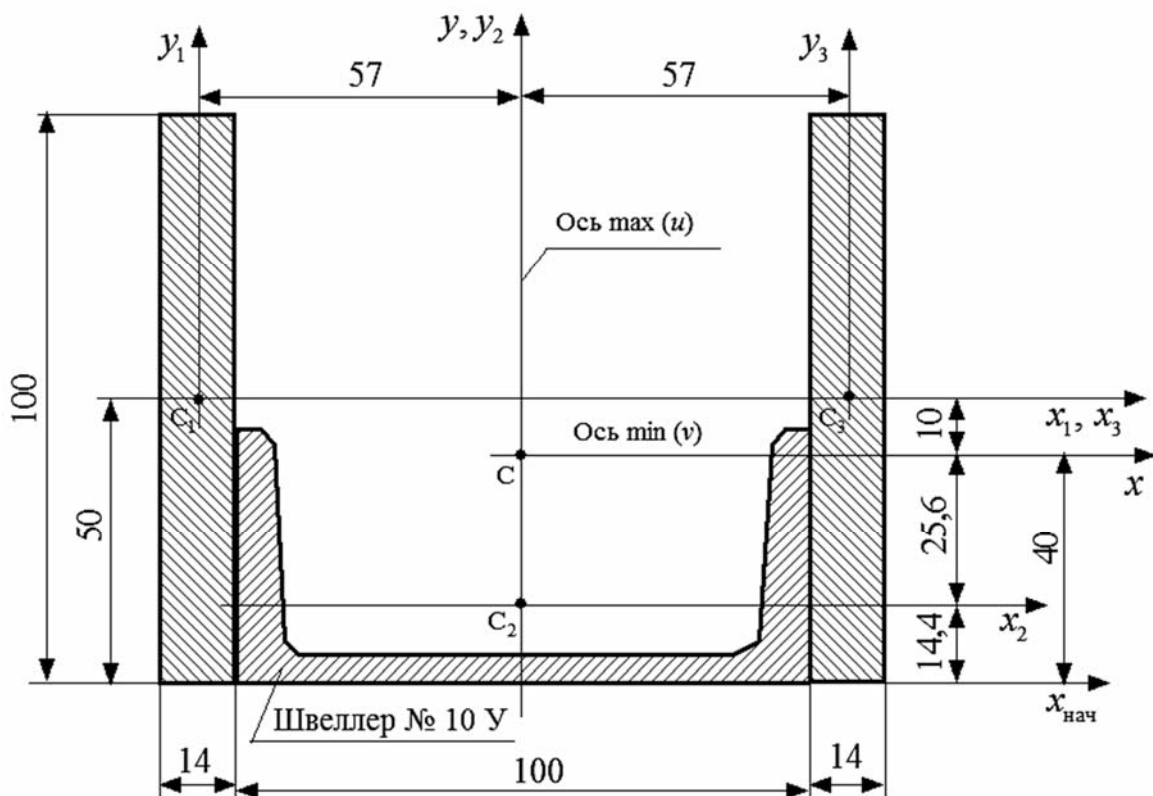


Рисунок 4.1

*Решение*

Определим собственные геометрические характеристики фигур.

Прямоугольники:  $A_1 = A_3 = 10 \cdot 1,4 = 14 \text{ см}^2$ ;

$$I_{x_1} = I_{x_3} = \frac{1,4 \cdot 10^3}{12} = 116,7 \text{ см}^4; \quad I_{y_1} = I_{y_3} = \frac{10 \cdot 1,4^3}{12} = 2,3 \text{ см}^4.$$

Для швеллера из таблиц ГОСТ 8240–97, с учетом горизонтального расположения фигуры,

$$A_2 = 10,9 \text{ см}^2; \quad I_{x_2} = 20,4 \text{ см}^4; \quad I_{y_2} = 174 \text{ см}^4; \quad h = 10 \text{ см}; \quad z_0 = 1,44 \text{ см}.$$

В данном сечении ось  $y$  является осью симметрии (главной центральной осью инерции), поэтому центр тяжести всего сечения расположен на этой оси. Определим его координату  $y_c$  относительно оси  $x_{нач}$ :

$$y_c = \frac{y_1 \cdot A_1 + y_2 \cdot A_2 + y_3 \cdot A_3}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{5 \cdot 14 + 1,44 \cdot 10,9 + 5 \cdot 14}{14 + 10,9 + 14} = 4 \text{ см},$$

где  $y_1, y_2, y_3$  – координаты центров тяжести прямоугольников и швеллера относительно начальной оси  $x_{нач}$  (см. рисунок 4.1).

Через найденный центр тяжести проводим вторую главную центральную ось инерции сечения –  $x$ .

Расстояния между главными центральными осями всего сечения и центральными осями отдельных фигур

$$c_1 = c_3 = y_1 - y_c = 5 - 4 = 1 \text{ см}; \quad c_2 = y_c - y_2 = 4 - 1,44 = 2,56 \text{ см};$$

$$d_1 = d_3 = \frac{1,4}{2} + \frac{10}{2} = 5,7 \text{ см}; \quad d_2 = 0.$$

Определим главные центральные моменты инерции сечения относительно осей  $xu$  по следующим формулам:

$$\begin{aligned} I_x &= (I_{x_1} + c_1^2 \cdot A_1) \cdot 2 + (I_{x_2} + c_2^2 \cdot A_2) = \\ &= (116,7 + 1^2 \cdot 14) \cdot 2 + (20,4 + 2,56^2 \cdot 10,9) = 353,2 \text{ см}^4; \end{aligned}$$

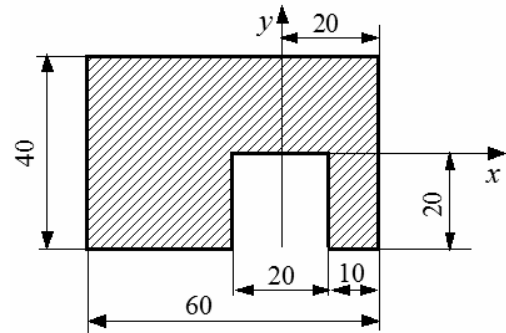
$$\begin{aligned} I_y &= (I_{y_1} + d_1^2 \cdot A_1) \cdot 2 + (I_{y_2} + d_2^2 \cdot A_2) = \\ &= (2,3 + 5,7^2 \cdot 14) \cdot 2 + (174 + 0 \cdot 10,9) = 1088,3 \text{ см}^4. \end{aligned}$$

Так как  $I_x = I_{\min}$ , а  $I_y = I_{\max}$ , то ось  $y$  проходит через плоскость максимальной жесткости сечения, а ось  $x$  – минимальной.

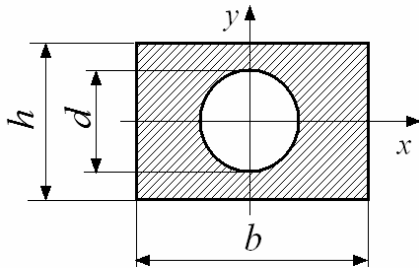
### Тестовые вопросы и задачи для самопроверки

1 В каком ответе дано правильное значение статического момента сечения относительно оси  $x$  ?

- а)  $S_x = 0 \text{ см}^3$ ;      в)  $S_x = 4 \text{ см}^3$ ;  
 б)  $S_x = 44 \text{ см}^3$ ;      г)  $S_x = 52 \text{ см}^3$ .



2 По какой формуле определяется момент инерции  $I_x$  указанного поперечного сечения?



- а)  $I_x = \frac{hb^3}{12} - \frac{\pi d^4}{64}$ ;  
 б)  $I_x = \frac{bh^3}{12} + \frac{\pi d^4}{64}$ ;  
 в)  $I_x = \frac{bh^3}{12} - \frac{\pi d^4}{64}$ ;  
 г)  $I_x = \frac{bh^3}{36} - \frac{\pi d^4}{64}$ .

## 5 Определение внутренних сил в статически определимых системах. Метод сечений

**Пример** – Определить величину внутренних силовых факторов в сечении  $C$  прямолинейного бруса (рисунок 5.1).

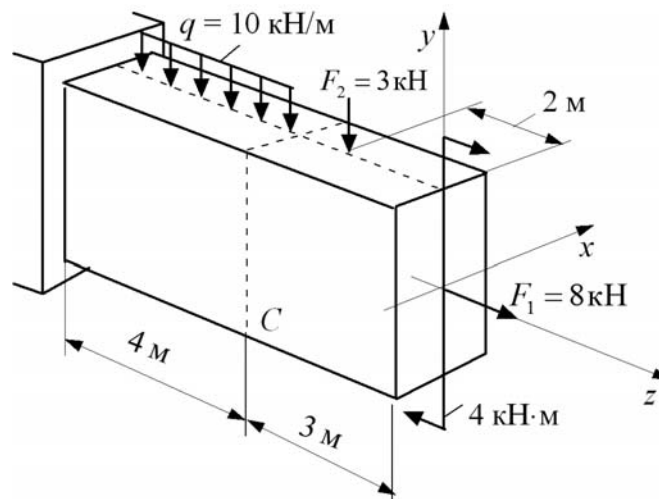


Рисунок 5.1

*Решение*

Покажем расчетную схему (рисунок 5.2, а).

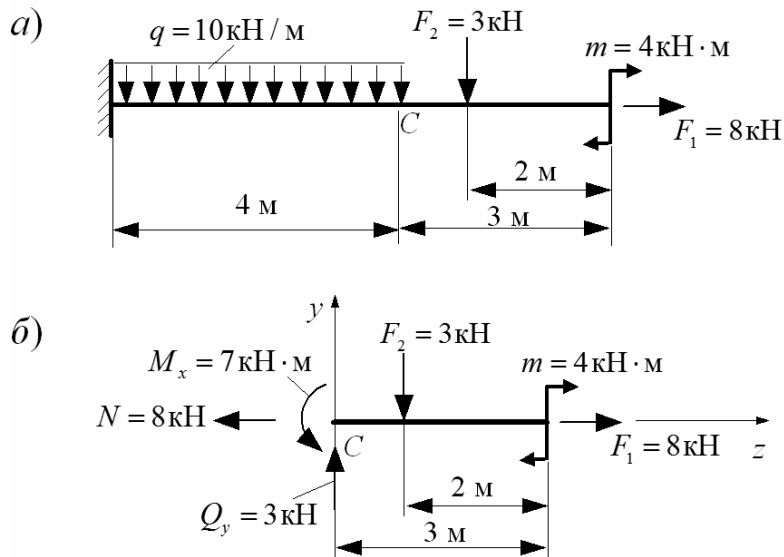


Рисунок 5.2

Для решения задачи используем *метод сечений*: мысленно рассечем брус по искомому сечению  $C$  и рассмотрим равновесие его правой части (рисунок 5.2, б). Для определения всех внутренних усилий составим шесть уравнений статического равновесия:

$$\sum X = 0; \quad Q_x = 0;$$

$$\sum Y = 0; \quad Q_y - F_2 = 0; \quad Q_y = F_2 = 3 \text{ кН};$$

$$\sum Z = 0; \quad -N + F_1 = 0; \quad N = F_1 = 8 \text{ кН};$$

$$\sum M_x^C = 0; \quad M_x - F_2 \cdot 1 - m = 0; \quad M_x = F_2 \cdot 1 + m = 3 + 4 = 7 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$\sum M_y^C = 0; \quad M_y = 0;$$

$$\sum M_z^C = 0; \quad M_z = M_{\text{кр}} = 0.$$

### ***Тестовые вопросы и задачи для самопроверки***

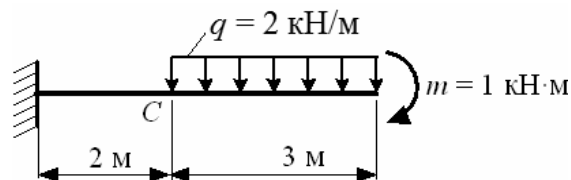
- 1 Метод, позволяющий определить внутренние усилия в сечении стержня:
- а) метод сил;
  - б) метод начальных параметров;
  - в) метод независимости действия сил;
  - г) метод сечений.

2 Сколько всего существует внутренних силовых факторов?

- а) три;
- б) четыре;
- в) пять;
- г) шесть.

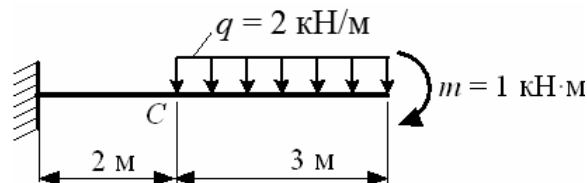
3 Чему равна поперечная сила  $Q_y$  в сечении  $C$ ?

- а)  $Q_y = 3$  кН;
- б)  $Q_y = 2$  кН;
- в)  $Q_y = 6$  кН;
- г)  $Q_y = 7$  кН.



4 Чему равен изгибающий момент  $M_x$  в сечении  $C$ ?

- а)  $M_x = 3$  кН·м;
- б)  $M_x = 10$  кН·м;
- в)  $M_x = 7$  кН·м;
- г)  $M_x = 1$  кН·м.



## 6 Построение эпюр внутренних силовых факторов в прямолинейном брус

**Пример** – Стальной брус (рисунок 6.1) площадью поперечного сечения  $A = 50$  см<sup>2</sup> сжимается силой  $F = 300$  Н. Удельный вес материала  $\gamma = 78$  кН/м<sup>3</sup>. Построить эпюру продольных сил  $N$  с учетом собственного веса бруса.

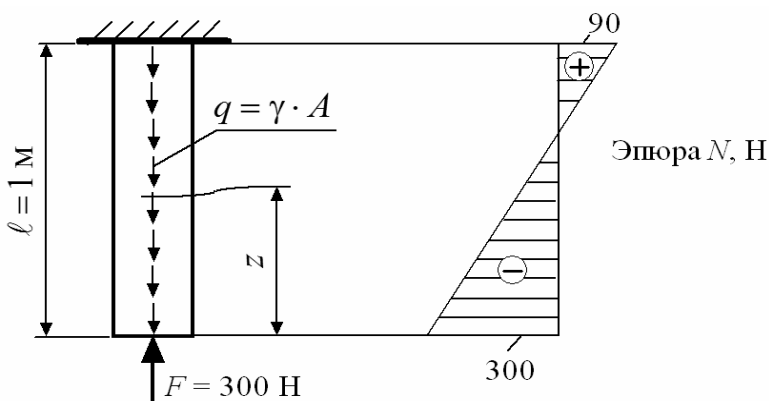


Рисунок 6.1

*Решение*

Построение эпюры продольных сил  $N$ :

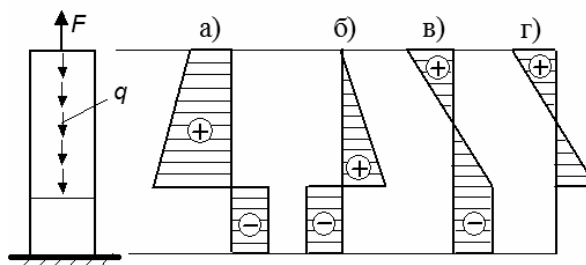
$$N = -F + \gamma \cdot A \cdot z = -300 + 78 \cdot 10^3 \cdot 50 \cdot 10^{-4} \cdot z = -300 + 390 \cdot z;$$

$$z = 0; \quad N = -300 \text{ Н};$$

$$z = 1 \text{ м}; \quad N = 90 \text{ Н}.$$

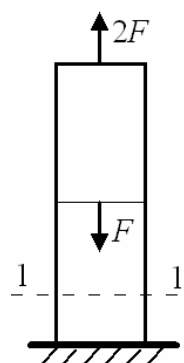
### Тестовые вопросы и задачи для самопроверки

1 Для стержня, изображенного на рисунке, эпюра продольных сил  $N$  будет иметь вид:

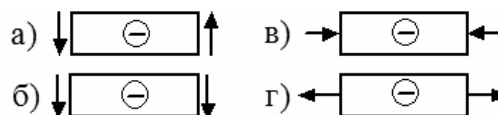


2 Для стержня, схема которого изображена на рисунке, продольная сила, действующая в сечении 1–1, будет:

- а) растягивающей;
- б) сжимающей;
- в) сдвигающей;
- г) равна нулю.



3 Укажите верное правило знаков для продольной силы  $N$ :



4 Если  $N > 0$ , то участок стержня:

- а) сжат;
- б) изогнут;
- в) растянут;
- г) испытывает сдвиг.

## 7 Определение внутренних сил в статически определимых балках при поперечном изгибе

**Пример** – Для балки, изображенной на рисунке 7.1, построить эпюры поперечных сил  $Q$  и изгибающих моментов  $M$ .

*Решение*

Определение реакций на опорах:

$$\sum M_A = q \cdot 3 \cdot 1,5 + q \cdot 2 \cdot 6 - R_B \cdot 5 = 0; R_B = \frac{(10 \cdot 3 \cdot 1,5 + 10 \cdot 2 \cdot 6)}{5} = 33 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = R_A \cdot 5 - q \cdot 3 \cdot 3,5 + q \cdot 2 \cdot 1 = 0; R_A = \frac{(10 \cdot 3 \cdot 3,5 - 10 \cdot 2 \cdot 1)}{5} = 17 \text{ кН}.$$

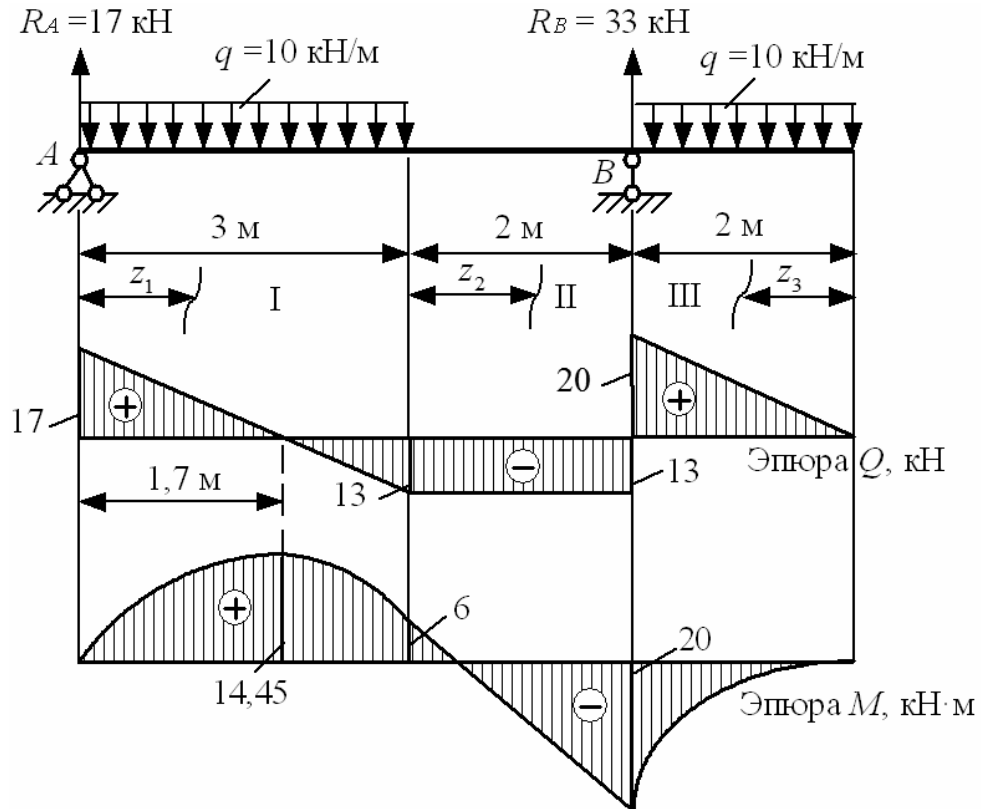


Рисунок 7.1

Построение эюр поперечных сил и изгибающих моментов.  
Участок I:  $0 \leq z_1 \leq 3 \text{ м}$ .

$$Q = R_A - q \cdot z_1 = 17 - 10 \cdot z_1; M = R_A \cdot z_1 - q \frac{z_1^2}{2} = 17 \cdot z_1 - 5 \cdot z_1^2;$$

$$z_1 = 0; Q = 17 \text{ кН}; M = 0;$$

$$z_1 = 3 \text{ м}; Q = -13 \text{ кН}; M = 17 \cdot 3 - 5 \cdot 3^2 = 6 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Исследование на экстремум:

$$Q = 17 - 10 \cdot z_1 = 0; z_1 = 1,7 \text{ м};$$

$$M_{\text{экстр}} = 17 \cdot 1,7 - 5 \cdot 1,7^2 = 14,45 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Участок II:  $0 \leq z_2 \leq 2 \text{ м}$ .

$$Q = R_A - q \cdot 3 = 17 - 10 \cdot 3 = -13 \text{ кН};$$

$$M = R_A \cdot (3 + z_2) - q \cdot 3 \cdot (1,5 + z_2) = 17 \cdot (3 + z_2) - 10 \cdot 3 \cdot (1,5 + z_2);$$

$$z_2 = 0; M = 17 \cdot 3 - 30 \cdot 1,5 = 6 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$z_2 = 2 \text{ м}; M = 17 \cdot 5 - 30 \cdot 3,5 = -20 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Участок III:  $0 \leq z_3 \leq 2 \text{ м}$ .

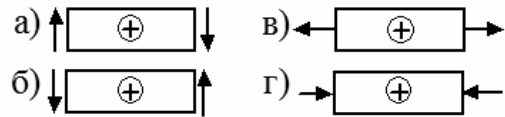
$$Q = q \cdot z_3 = 10 \cdot z_3; M = -0,5 \cdot q \cdot z_3^2 = -5 \cdot z_3^2;$$

$$z_3 = 0; Q = 0; M = 0;$$

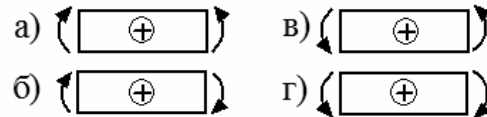
$$z_3 = 2 \text{ м}; Q = 20 \text{ кН}; M = -20 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

### Тестовые вопросы и задачи для самопроверки

1 Укажите верное правило знаков для поперечной силы  $Q$ :



2 Укажите верное правило знаков для изгибающего момента  $M$ :

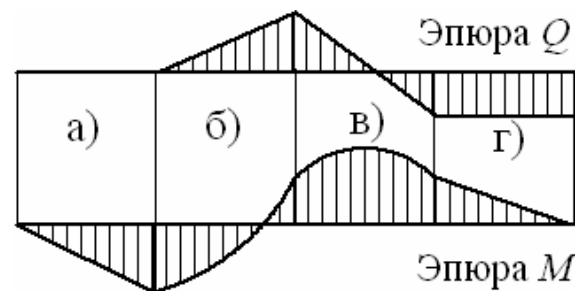


3 Укажите правильную дифференциальную зависимость:

а)  $M = \frac{dq}{dz}$ ;      в)  $q = \frac{dM}{dz}$ ;

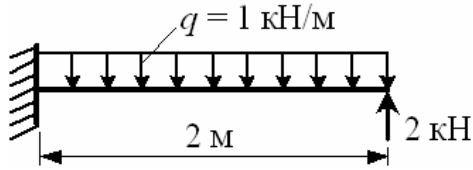
б)  $Q = \frac{dM}{dz}$ ;      г)  $M = \frac{dQ}{dz}$ .

4 На каком участке не соблюдаются дифференциальные зависимости между  $Q$  и  $M$ ?



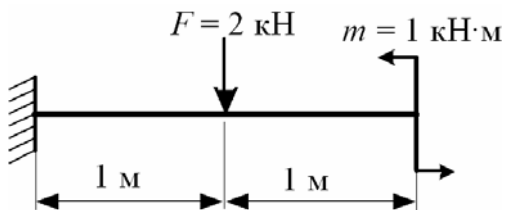


5 Какая эпюра поперечных сил верна для указанной балки?



- а) 4  
 б) 2  
 в) 4 2  
 г) 2

6 Какая эпюра изгибающих моментов верна для указанной балки?



- а) 1  
 б) 1  
 в) 1  
 г) 1

## 8 Определение внутренних сил при кручении. Построение эпюр крутящих моментов

*Пример* – Для заданного ступенчатого вала (рисунок 8.1) построить эпюру крутящих моментов. Предварительно вал уравновесить.

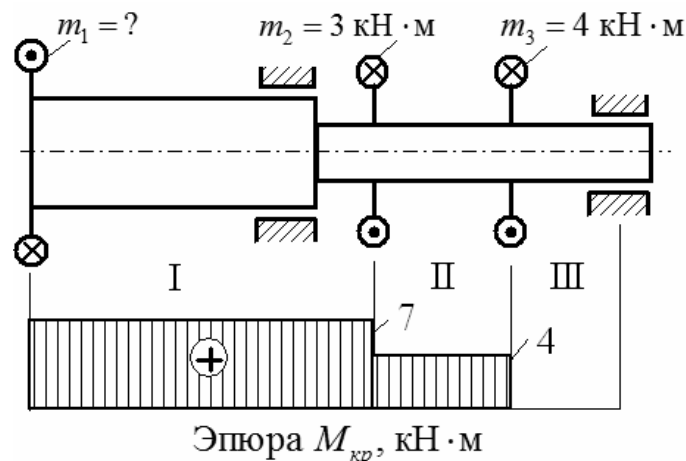


Рисунок 8.1

*Решение*

Для определения скручивающего момента  $m_1$  составим уравнение статики:

$$\sum m = m_2 + m_3 - m_1 = 0,$$

откуда

$$m_1 = m_2 + m_3 = 3 + 4 = 7 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Построение эпюры  $M_{кр}$ :

$$M_1 = m_1 = 7 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_2 = m_1 - m_2 = 7 - 3 = 4 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_3 = m_1 - m_2 - m_3 = 7 - 3 - 4 = 0.$$

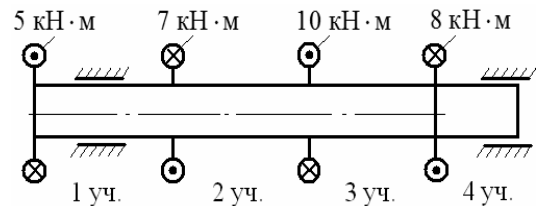
### Тестовые вопросы и задачи для самопроверки

1 При кручении стержня в поперечном сечении бруса возникает ...:

- а) продольная сила  $N$ ;
- б) крутящий момент  $M_{кр}$ ;
- в) изгибающий момент  $M$ ;
- г) поперечная сила  $Q$ .

2 Определите величину крутящего момента  $M_{кр}$  на участке 3 (по модулю):

- а)  $M_{кр} = 22 \text{ кН} \cdot \text{м}$ ;
- б)  $M_{кр} = 10 \text{ кН} \cdot \text{м}$ ;
- в)  $M_{кр} = 8 \text{ кН} \cdot \text{м}$ ;
- г)  $M_{кр} = 2 \text{ кН} \cdot \text{м}$ .



## 9 Расчеты на прочность и жесткость при растяжении-сжатии статически определимых брусьев

**Пример 1** – Произвести проверку прочности и жесткости стального ступенчатого бруса, показанного на рисунке 9.1.

Исходные данные:  $A_1 = 3 \text{ см}^2$ ;  $A_2 = 5 \text{ см}^2$ ;  $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$ ;  $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ ;  $[\Delta \ell] = 1 \text{ мм}$ .

*Решение*

Проверку прочности производим по условию

$$\sigma_{\max} = \left( \frac{N}{A} \right)_{\max} \leq [\sigma].$$

По эпюре продольных сил и конфигурации стержня определяем опасный участок:

$$\sigma_{\max} = \frac{70 \cdot 10^3}{5 \cdot 10^{-4}} = 140 \cdot 10^6 \text{ Па} = 140 \text{ МПа} < [\sigma] = 160 \text{ МПа}.$$

Прочность бруса обеспечена.

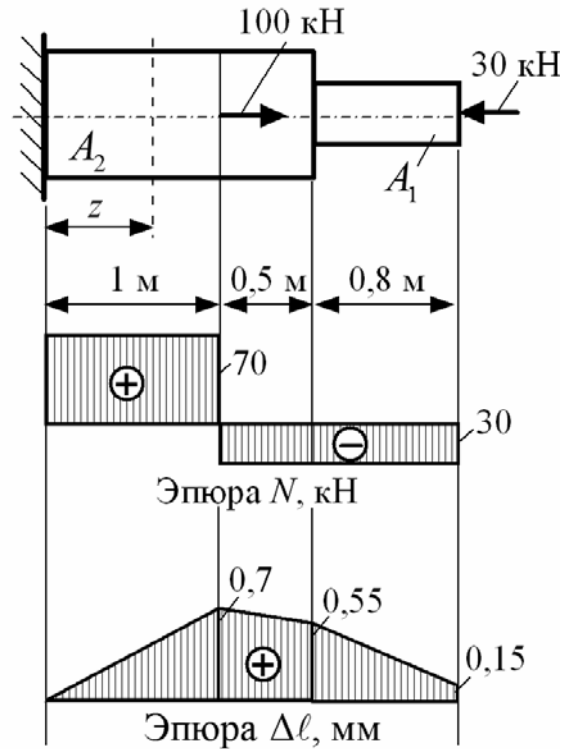


Рисунок 9.1

Для проверки жесткости стержня строим эпюру  $\Delta l$ , определяя деформацию каждого участка по формуле

$$\Delta l = \frac{N \cdot \ell}{E \cdot A}.$$

Начало расчета находится в сечении, примыкающем к жесткой заделке, перемещение которого равно нулю:  $z = 0$ ;  $\Delta l = 0$ .

$$z = 1 \text{ м}; \quad \Delta l = \frac{70 \cdot 10^3 \cdot 1}{2 \cdot 10^{11} \cdot 5 \cdot 10^{-4}} = 0,7 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 0,7 \text{ мм};$$

$$z = 1,5 \text{ м}; \quad \Delta l = 0,7 \cdot 10^{-3} + \frac{-30 \cdot 10^3 \cdot 0,5}{2 \cdot 10^{11} \cdot 5 \cdot 10^{-4}} = 0,55 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 0,55 \text{ мм};$$

$$z = 2,3 \text{ м}; \quad \Delta l = 0,55 \cdot 10^{-3} + \frac{-30 \cdot 10^3 \cdot 0,8}{2 \cdot 10^{11} \cdot 3 \cdot 10^{-4}} = 0,15 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 0,15 \text{ мм}.$$

$$\Delta l_{\max} = 0,7 \text{ мм} < [\Delta l] = 1 \text{ мм}.$$

Жесткость бруса обеспечена.

**Пример 2** – Бетонная колонна (рисунок 9.2) круглого поперечного сечения длиной  $\ell = 5$  м сжимается силой  $F = 500$  кН.

Определить диаметр колонны, если допустимое напряжение на сжатие  $[\sigma] = 5$  МПа, а удельный вес бетона  $\gamma = 20 \cdot 10^3$  Н/м<sup>3</sup>.

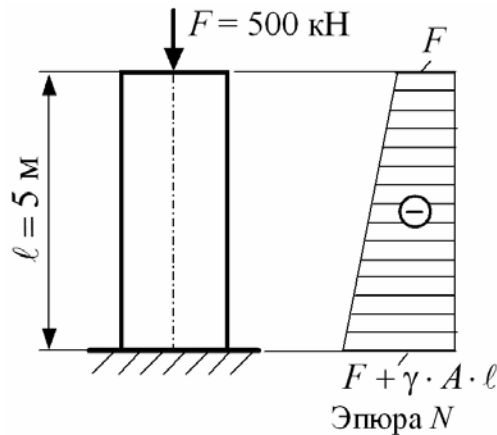


Рисунок 9.2

*Решение*

При постоянной площади поперечного сечения  $A$  полный вес колонны  $G = \gamma \cdot A \cdot \ell$ . Эпюра продольных сил  $N$  показана на рисунке 9.2.

В опасном сечении  $N_{\max} = F + \gamma A \ell$ . Условие прочности имеет вид:

$$\sigma_{\max} = \frac{N_{\max}}{A} = \frac{F}{A} + \gamma \ell \leq [\sigma].$$

$$A \geq \frac{F}{[\sigma] - \gamma \cdot \ell} = \frac{500 \cdot 10^3}{5 \cdot 10^6 - 20 \cdot 10^3 \cdot 5} = 0,102 \text{ м}^2.$$

$$d \geq \sqrt{\frac{4 \cdot A}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 0,102}{\pi}} = 0,36 \text{ м} = 360 \text{ мм}.$$

**Пример 3** – Определить наибольшее значение допустимой силы  $F$  для ступенчатого чугунного бруса (рисунок 9.3), если  $A = 10$  см<sup>2</sup>,  $[\sigma]_{\text{раст}} = 60$  МПа,  $[\sigma]_{\text{сж}} = 120$  МПа.

*Решение*

Эпюра продольных сил  $N$ , выраженная в долях от силы  $F$ , показана на рисунке 9.3.

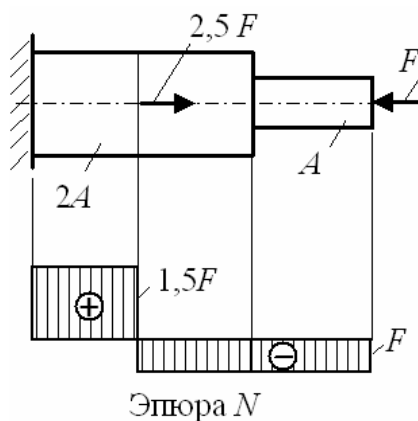


Рисунок 9.3

Расчет допустимой силы по условию прочности в сжатой области:

$$\sigma_{\max} = \left( \frac{N}{A} \right)_{\max}^{\text{сж}} = \frac{F}{A} \leq [\sigma]_{\text{сж}};$$

$$[F]_{\text{сж}} \leq A[\sigma]_{\text{сж}} = 10 \cdot 10^{-4} \cdot 120 \cdot 10^6 = 120 \cdot 10^3 \text{ Н.}$$

Расчет допустимой силы по условию прочности в растянутой области:

$$\sigma_{\max} = \left( \frac{N}{A} \right)_{\max}^{\text{раст}} = \frac{1,5 \cdot F}{2 \cdot A} \leq [\sigma]_{\text{раст}};$$

$$[F]_{\text{раст}} \leq \frac{2A[\sigma]_{\text{раст}}}{1,5} = \frac{2 \cdot 10 \cdot 10^{-4} \cdot 60 \cdot 10^6}{1,5} = 80 \cdot 10^3 \text{ Н.}$$

Допустимой силой для бруса будет меньшая из рассчитанных сил:  $[F] = 80 \text{ кН}$ .

### **Тестовые вопросы и задачи для самопроверки**

1 По какой формуле определяются напряжения в поперечном сечении бруса при растяжении-сжатии?

а)  $\sigma = \frac{M}{W}$ ;    в)  $\sigma = G \cdot \varepsilon$ ;

б)  $\sigma = \frac{N}{A}$ ;    г)  $\sigma = \frac{N}{E \cdot A}$ .

2 По какой формуле определяется абсолютная деформация бруса при растяжении-сжатии?

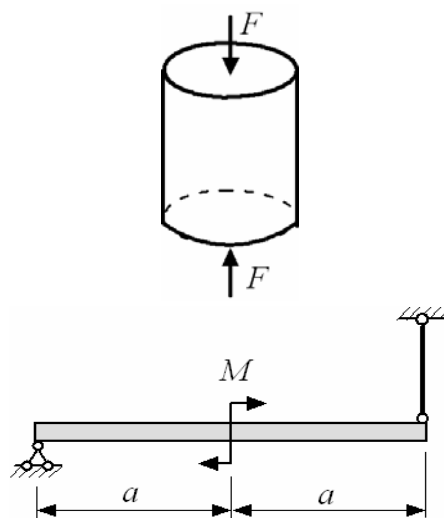
а)  $\Delta l = \frac{N \cdot l}{E \cdot A}$ ;    в)  $\Delta l = \frac{\varepsilon}{l}$ ;

б)  $\Delta l = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon}$ ;    г)  $\Delta l = \frac{N}{A}$ .

3 Образец диаметром 0,02 м разрушился под действием силы  $F = 0,15$  МН. Тогда величина предела прочности материала равна:

- а) 7,5 МПа;      в) 209,3 МПа;  
б) 375 МПа;      г) 477,7 МПа.

4 Жесткий брус, нагруженный моментом  $M$ , поддерживается в горизонтальном положении стальным стержнем площадью поперечного сечения  $A$ . Условие прочности стержня:



- а)  $\frac{M}{2 \cdot a \cdot A} \leq [\sigma]$ ;    б)  $\frac{M \cdot A}{2 \cdot a} \leq [\sigma]$ ;    в)  $\frac{M}{A} \leq [\sigma]$ ;    г)  $\frac{M \cdot a}{A} \leq [\sigma]$ .

## 10 Определение главных напряжений и расчеты по теориям прочности

**Пример 1** – В опасной точке нагруженной детали напряженное состояние оказалось таким, как указано на рисунке 10.1.

Проверить прочность детали по третьей теории прочности, если  $[\sigma] = 160$  МПа.

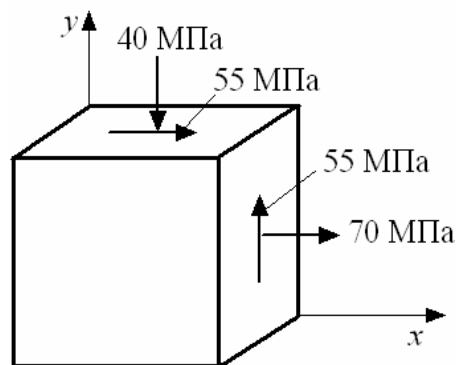


Рисунок 10.1

*Решение*

Напряжения, действующие на указанных площадках:

$$\sigma_x = 70 \text{ МПа}; \quad \sigma_y = -40 \text{ МПа}; \quad \tau_{xy} = 55 \text{ МПа}.$$

Главные напряжения

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{гл}} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \cdot \tau_{xy}^2} = \\ &= \frac{70 - 40}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(70 + 40)^2 + 4 \cdot 55^2} = 15 \pm 78; \end{aligned}$$

$$\sigma_{\max} = 15 + 78 = 93 \text{ МПа} = \sigma_1;$$

$$\sigma_{\min} = 15 - 78 = -63 \text{ МПа} = \sigma_3;$$

$$\sigma_2 = 0.$$

Проверка прочности:

$$\sigma_{\text{экв}}^{\text{III}} = \sigma_1 - \sigma_2 = 93 - (-63) = 156 \text{ МПа} < [\sigma] = 160 \text{ МПа}.$$

Условие прочности выполняется.

**Пример 2** – Для напряженного состояния (см. пример 1) определить положение главных площадок и направление действия главных напряжений.

Определить величину максимальных касательных напряжений и указать площадки, на которых они действуют.

*Решение*

Положение главных площадок определяется углом  $\alpha_0$ :

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2 \cdot 55}{70 - (-40)} = 1;$$

$$\alpha_0 = 22,5^\circ.$$

Так как  $\alpha_0 > 0$ , поворачиваем заданные площадки против часовой стрелки и получаем главные площадки (рисунок 10.2).

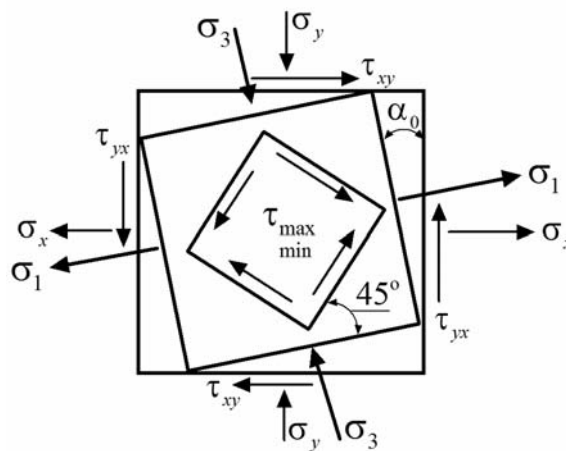


Рисунок 10.2

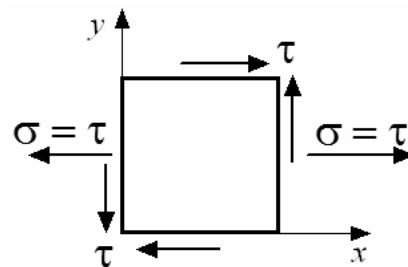
Определяем величину максимальных касательных напряжений, которые действуют на площадках, расположенных под углом  $45^\circ$  по отношению к главным площадкам:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{93 - (-63)}{2} = 78 \text{ МПа.}$$

### *Тестовые вопросы и задачи для самопроверки*

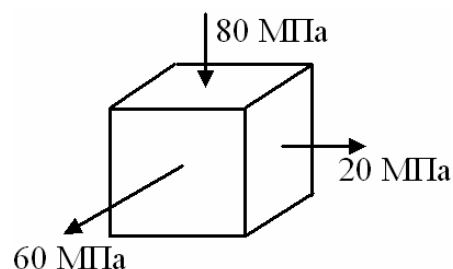
1 Для заданного напряженного состояния максимальное главное напряжение равно ...:

- а)  $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \cdot \tau$ ;      в)  $\left(\frac{2-\sqrt{5}}{2}\right) \cdot \tau$ ;  
 б)  $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \cdot \tau$ ;      г)  $\left(\frac{2+\sqrt{5}}{2}\right) \cdot \tau$ .



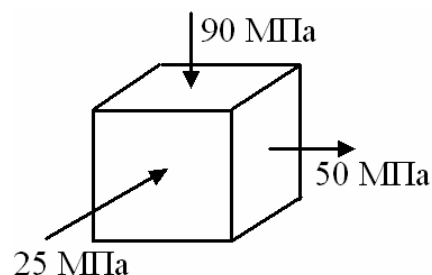
2 Для заданного напряженного состояния главное напряжение  $\sigma_3$  равно:

- а) 80 МПа;      в) 20 МПа;  
 б) 60 МПа;      г) - 80 МПа.



3 Для заданного напряженного состояния определите эквивалентное напряжение по теории максимальных касательных напряжений:

- а) 65 МПа;      в) 165 МПа;  
 б) 140 МПа;      г) 75 МПа.



4 На главных площадках плоского напряженного состояния действуют ...:

- а) только касательные напряжения;  
 б) только нормальные напряжения;  
 в) нет напряжений;  
 г) эквивалентные напряжения.



## 11 Расчет статически определимых балок на прочность при плоском поперечном изгибе (проверочный расчет)

**Пример** – Проверить прочность балки таврового сечения (рисунок 11.1), если  $[\sigma]_{раст} = 30$  МПа и  $[\sigma]_{сжс} = 60$  МПа.

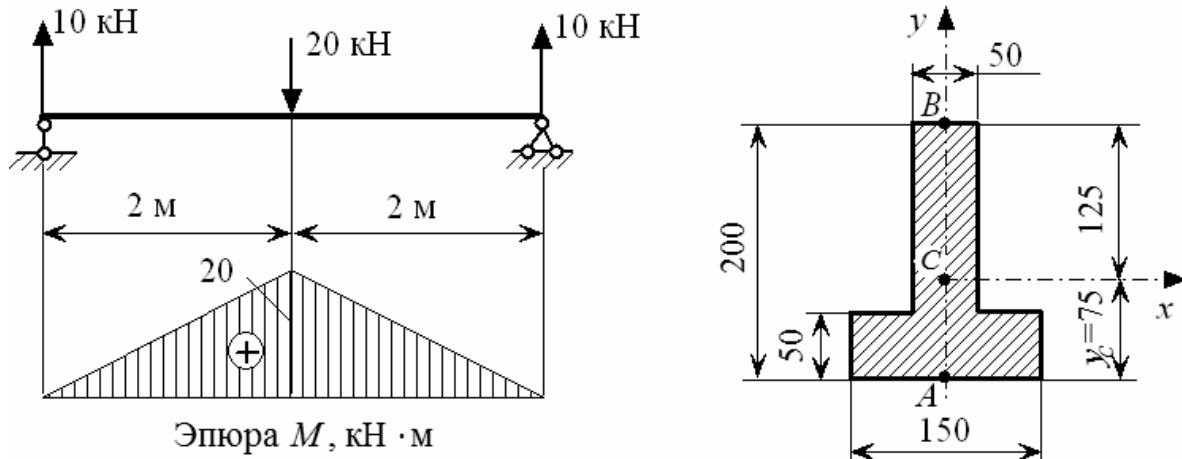


Рисунок 11.1

*Решение*

Определение координаты центра тяжести поперечного сечения:

$$y_C = \frac{15 \cdot 5 \cdot 2,5 + 15 \cdot 5 \cdot 12,5}{15 \cdot 5 + 15 \cdot 5} = 7,5 \text{ см.}$$

Определение главного центрального момента инерции поперечного сечения:

$$I_x = \frac{15 \cdot 5^3}{12} + 5^2 \cdot 15 \cdot 5 + \frac{5 \cdot 15^3}{12} + 5^2 \cdot 15 \cdot 5 = 5312,5 \text{ см}^4 = 5312,5 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4.$$

Определение моментов сопротивления поперечного сечения относительно оси  $x$ :

$$W_A = \frac{I_x}{y_A} = \frac{5312,5 \cdot 10^{-8}}{7,5 \cdot 10^{-2}} = 708 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3;$$

$$W_B = \frac{I_x}{y_B} = \frac{5312,5 \cdot 10^{-8}}{12,5 \cdot 10^{-2}} = 425 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

По эпюре изгибающих моментов определяем опасное сечение, в котором действует максимальный изгибающий момент  $M_{\max} = 20$  кН·м.

Проверка прочности:

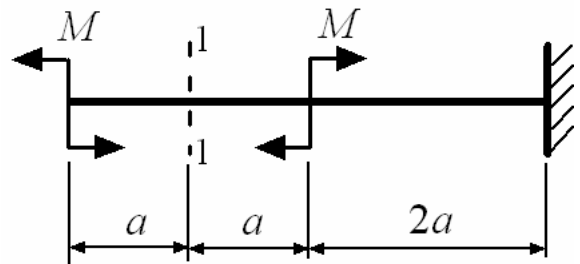
$$\sigma_A = \frac{M_{\max}}{W_A} = \frac{20 \cdot 10^3}{708 \cdot 10^{-6}} = 28,25 \cdot 10^6 \text{ Па} = 28,25 \text{ МПа} < [\sigma]_{\text{расч}} = 30 \text{ МПа};$$

$$\sigma_B = \frac{M_{\max}}{W_B} = \frac{20 \cdot 10^3}{425 \cdot 10^{-6}} = 47 \cdot 10^6 \text{ Па} = 47 \text{ МПа} < [\sigma]_{\text{сж}} = 60 \text{ МПа}.$$

### Тестовые вопросы и задачи для самопроверки

1 В сечении 1–1 возникают внутренние силовые факторы:

- а)  $M \neq 0, Q = 0$ ;
- б)  $M = 0, Q = 0$ ;
- в)  $M \neq 0, Q \neq 0$ ;
- г)  $M = 0, Q \neq 0$ .



2 Условие прочности по нормальным напряжениям при изгибе балки имеет вид:

$$\text{а) } \frac{M}{W} \leq [\sigma]; \quad \text{б) } \frac{M \cdot \ell}{W} \leq [\sigma]; \quad \text{в) } \frac{M}{E \cdot I} \leq [\sigma]; \quad \text{г) } \frac{F}{W} \leq [\sigma].$$

## 12 Расчет статически определимых балок на прочность при плоском поперечном изгибе (проектировочный расчет)

**Пример** – Подобрать двутавровое поперечное сечение стальной балки (рисунок 12.1) и проверить его прочность по нормальным и касательным напряжениям. Исходные данные:  $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$ ;  $[\tau] = 100 \text{ МПа}$ .

*Решение*

Строим эпюры поперечных сил  $Q$  и изгибающих моментов  $M$  (см. рисунок 12.1). По эпюре изгибающих моментов определяем опасное сечение, в котором действует максимальный изгибающий момент  $M_{\max} = 45 \text{ кН} \cdot \text{м}$ .

Поперечное сечение выбираем из условия прочности по нормальным напряжениям:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} \leq [\sigma] = 160 \text{ МПа};$$

$$W_x = \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{45 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 281,25 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 281,25 \text{ см}^3.$$

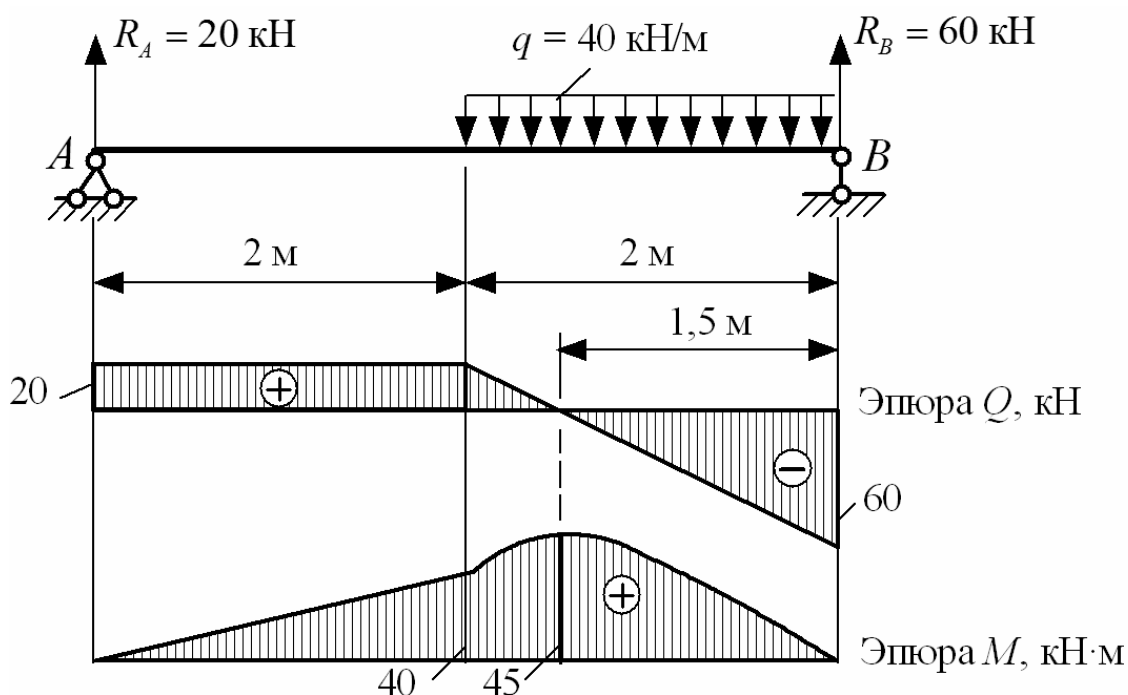


Рисунок 12.1

Рассчитанному моменту сопротивления в наибольшей степени подходит двутавр № 24 ( $W_x = 289 \text{ см}^3$ ;  $I_x = 3460 \text{ см}^4$ ;  $S_x^* = 163 \text{ см}^3$ ;  $b^* = 5,6 \text{ мм}$ ).

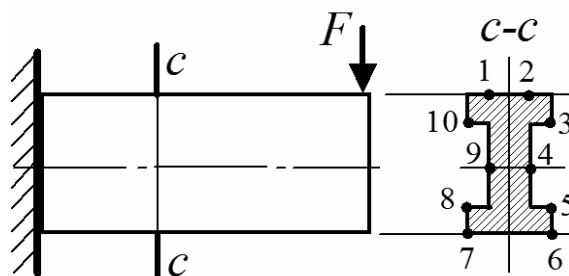
Проверяем прочность двутавра по касательным напряжениям:

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} \cdot S_x^*}{b^* \cdot I_x} = \frac{60 \cdot 10^3 \cdot 163 \cdot 10^{-6}}{5,6 \cdot 10^{-3} \cdot 3460 \cdot 10^{-8}} = 50,5 \cdot 10^6 \text{ Па} = 50,5 \text{ МПа} < [\tau] = 100 \text{ МПа}.$$

### Тестовые вопросы и задачи для самопроверки

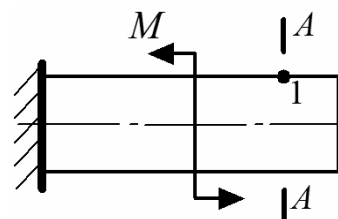
1 Максимальные нормальные напряжения действуют в точках:

- а) 10, 3, 8, 5;
- б) 3, 5, 6;
- в) 1, 2, 7, 6;
- г) 9, 4.



2 Какие напряжения действуют в точке 1?

- а) нет напряжений;
- б) действуют нормальное и касательное напряжения;
- в) действует нормальное напряжение;
- г) действует касательное напряжение.



### 13 Расчет статически определимых балок на прочность при плоском поперечном изгибе (определение допускаемой нагрузки)

**Пример** – Деревянная балка прямоугольного поперечного сечения нагружена силой  $F$  (рисунок 13.1). Определить допустимую величину силы  $[F]$  при  $[\sigma] = 10$  МПа. Проверить прочность балки по касательным напряжениям при  $[\tau] = 1$  МПа.

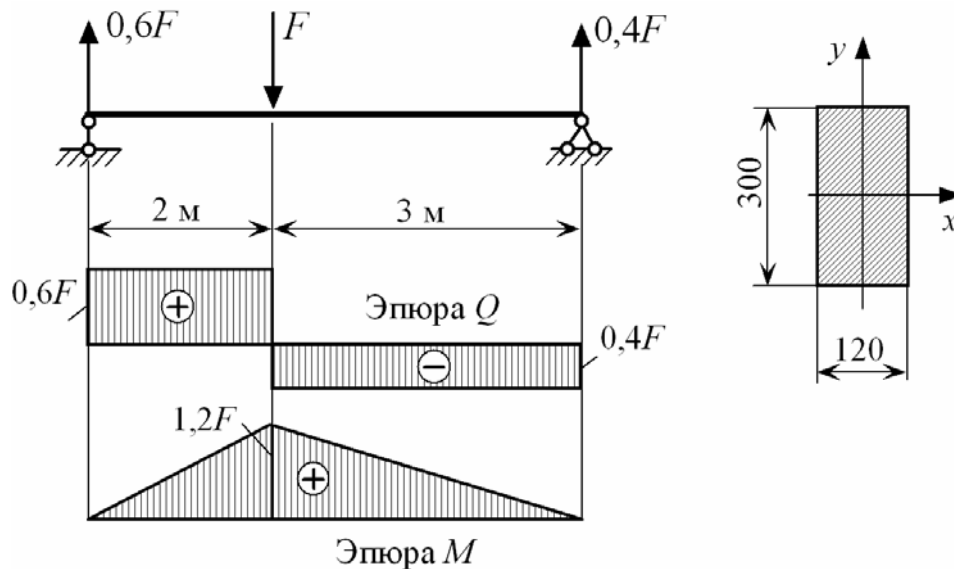


Рисунок 13.1

*Решение*

Осейвой момент сопротивления поперечного сечения

$$W_x = \frac{b \cdot h^2}{6} = \frac{12 \cdot 30^2}{6} = 1800 \text{ см}^3 = 1800 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

Строим эпюры поперечных сил  $Q$  и изгибающих моментов  $M$  (см. рисунок 13.1).

Допустимую силу рассчитаем из условия прочности по нормальным напряжениям:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{1,2 \cdot [F]}{W_x} \leq [\sigma];$$

$$[F] = \frac{W_x \cdot [\sigma]}{1,2} = \frac{1800 \cdot 10^{-6} \cdot 10 \cdot 10^6}{1,2} = 15000 \text{ Н} = 15 \text{ кН}.$$

Проверка прочности по касательным напряжениям:

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q_{\max}}{A} = \frac{3}{2} \cdot \frac{0,6 \cdot 15 \cdot 10^3}{12 \cdot 30 \cdot 10^{-4}} = 0,375 \cdot 10^6 \text{ Па} = 0,375 \text{ МПа} < [\tau] = 1 \text{ МПа}.$$

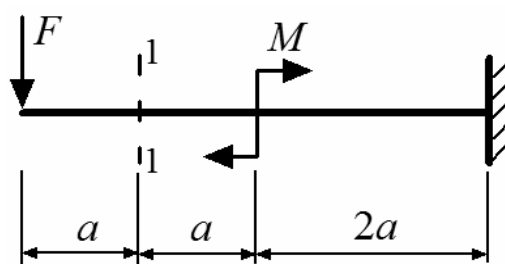
### Тестовые вопросы и задачи для самопроверки

1 Какой закон распределения нормальных напряжений по высоте поперечного сечения балки?

- а) постоянный;
- б) гиперболический;
- в) параболический;
- г) линейный

2 В сечении 1-1 возникают внутренние силовые факторы:

- а)  $M \neq 0, Q = 0$ ;
- б)  $M = 0, Q = 0$ ;
- в)  $M \neq 0, Q \neq 0$ ;
- г)  $M = 0, Q \neq 0$ .



## 14 Расчет линейных и угловых перемещений при прямом поперечном изгибе

**Пример 1** – Проверить жесткость двутавровой балки (рисунок 14.1), если допустимый прогиб  $[y] = 6$  мм.

Исходные данные: двутавр № 20 ( $I_x = 1840 \text{ см}^4$ );  $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ .

*Решение*

Уравнение прогибов для данной балки по методу начальных параметров имеет вид:

$$EI_x y = EI_x y_0 + EI_x \theta_0 \cdot z - 18 \cdot \frac{z^2}{2!} + 13 \cdot \frac{z^3}{3!} - 4 \cdot \frac{z^4}{4!}.$$

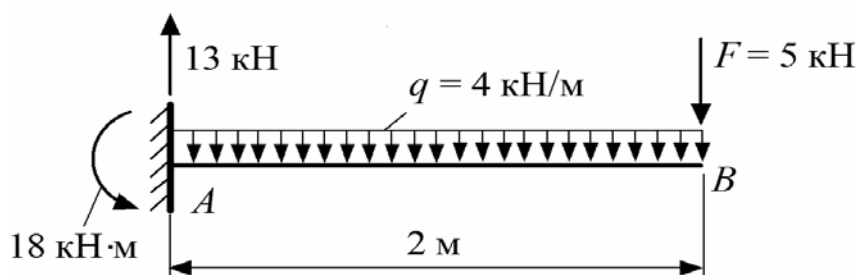


Рисунок 14.1

Начальные параметры следующие:  $y_0 = 0$ ;  $\theta_0 = 0$ .

Максимальный прогиб  $y_{\max} = y_B$  при  $z = 2$  м.

$$EI_x y_B = -18 \cdot \frac{2^2}{2} + 13 \cdot \frac{2^3}{6} - 4 \cdot \frac{2^4}{24} = -21,33 \text{ кН} \cdot \text{м}^3.$$

$$y_{\max} = y_B = \frac{21,33}{EI_x} = \frac{21,33 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 1840 \cdot 10^{-8}} = 0,0058 \text{ м} = 5,8 \text{ мм} < [y] = 6 \text{ мм}.$$

**Пример 2** – Методом начальных параметров определить прогиб сечения  $C$  и угол поворота сечения  $D$  деревянной балки прямоугольного поперечного сечения указанных размеров (рисунок 14.2).

Модуль продольной упругости материала  $E = 10^4 \text{ МПа} = 10^{10} \text{ МПа}$ .

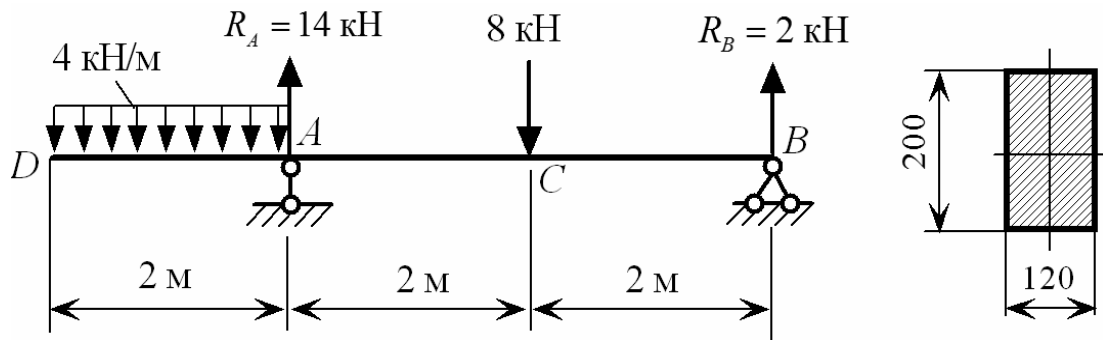


Рисунок 14.2

*Решение*

Определение осевого момента инерции поперечного сечения:

$$I_x = \frac{12 \cdot 20^3}{12} = 8000 \text{ см}^4 = 8 \cdot 10^{-5} \text{ м}^4.$$

Определение начальных параметров:

$$EI_x y_A = EI_x y_0 + EI_x \theta_0 \cdot 2 - 4 \cdot \frac{2^4}{4!} = 0;$$

$$EI_x y_B = EI_x y_0 + EI_x \theta_0 \cdot 6 - 4 \cdot \frac{6^4}{4!} + 4 \cdot \frac{4^4}{4!} + 14 \cdot \frac{4^3}{3!} - 8 \cdot \frac{2^3}{3!} = 0;$$

$$EI_x y_0 = -\frac{40}{3} \text{ кН} \cdot \text{м}^3; \quad EI_x \theta_0 = 8 \text{ кН} \cdot \text{м}^2.$$

Прогиб сечения  $C$

$$\begin{aligned} EI_x y_C &= EI_x y_0 + EI_x \theta_0 \cdot 4 - 4 \cdot \frac{4^4}{4!} + 4 \cdot \frac{2^4}{4!} + 14 \cdot \frac{2^3}{3!} = \\ &= -\frac{40}{3} + 8 \cdot 4 - 4 \cdot \frac{4^4}{24} + 4 \cdot \frac{2^4}{24} + 14 \cdot \frac{2^3}{6} = -\frac{8}{3} \text{ кН} \cdot \text{м}^3; \\ y_C &= -\frac{8}{3 \cdot EI_x} = -\frac{8 \cdot 10^3}{3 \cdot 10^{10} \cdot 8 \cdot 10^{-5}} = -0,33 \cdot 10^{-2} \text{ м} = -3,3 \text{ мм}. \end{aligned}$$

Угол поворота сечения  $D$  равен начальному параметру  $\theta_0$ :

$$\theta_D = \frac{8}{EI_x} = \frac{8 \cdot 10^3}{10^{10} \cdot 8 \cdot 10^{-5}} = 0,01 \text{ рад}.$$

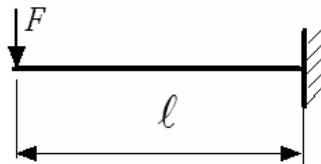
### Тестовые вопросы и задачи для самопроверки

1 Укажите наиболее общее определение «начальные параметры»:

- а) прогиб и угол поворота в опорном сечении;
- б) прогиб и угол поворота в крайнем левом сечении балки;
- в) прогиб и угол поворота в жесткой заделке;
- г) прогиб и угол поворота в крайнем правом сечении балки.

2 Начальные параметры показанной балки

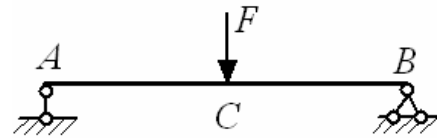
равны:



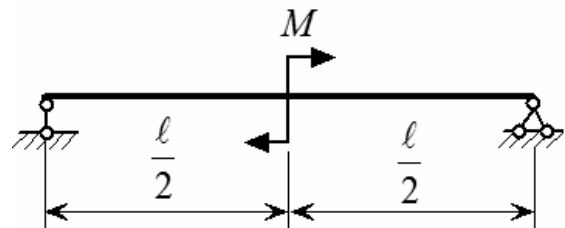
- а)  $y_0 \neq 0, \theta_0 = 0$ ;
- б)  $y_0 \neq 0, \theta_0 \neq 0$ ;
- в)  $y_0 = 0, \theta_0 = 0$ ;
- г)  $y_0 = 0, \theta_0 \neq 0$ .

3 В каком сечении показанной балки прогиб равен нулю?

- а) сечение  $A$ ;
- б) сечение  $C$ ;
- в) сечение  $B$ ;
- г) сечения  $A$  и  $B$ .



4 Балка нагружена сосредоточенным моментом  $M$ . Жесткость поперечного сечения балки равна  $EI_x$ . Начальный параметр  $\theta_0$  равен:



$$\text{а) } \theta_0 = \frac{M \cdot \ell}{8 \cdot EI_x}; \quad \text{б) } \theta_0 = 0; \quad \text{в) } \theta_0 = -\frac{M \cdot \ell}{8 \cdot EI_x}; \quad \text{г) } \theta_0 = \frac{M \cdot \ell}{24 \cdot EI_x}.$$

5 Укажите жесткость поперечного сечения при изгибе:

$$\text{а) } GI_x; \quad \text{б) } EI_\rho; \quad \text{в) } EI_x; \quad \text{г) } EA.$$

## 15 Расчеты на прочность и жесткость при растяжении-сжатии в статически неопределимых системах

**Пример 1** – Проверить прочность ступенчатого стального бруса (рисунок 15.1), если площадь поперечного сечения  $A = 3 \text{ см}^2$ , модуль упругости  $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ , допустимое напряжение  $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$ .

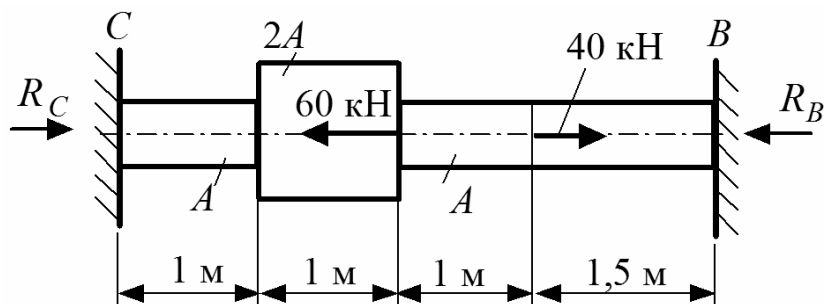


Рисунок 15.1

*Решение*

Составим уравнение статического равновесия:

$$\sum X = R_C - 60 + 40 - R_B = 0.$$

Стержень один раз статически неопределим, т. к. единственное уравнение статики содержит две неизвестные реакции, для определения которых необходимо составить дополнительно одно деформационное уравнение:

$$\Delta l = \Delta l_P + \Delta l_R = 0,$$

где  $\Delta l_P$  и  $\Delta l_R$  – деформации стержня соответственно от внешних сил и реакций на опорах.

Используем принцип независимости действия сил. Мысленно отбросим опору  $C$  и представим заданный стержень под действием внешних сил с построением эпюры  $N_P$  и под действием реакции  $R_C$  с построением эпюры  $N_R$  (рисунок 15.2).



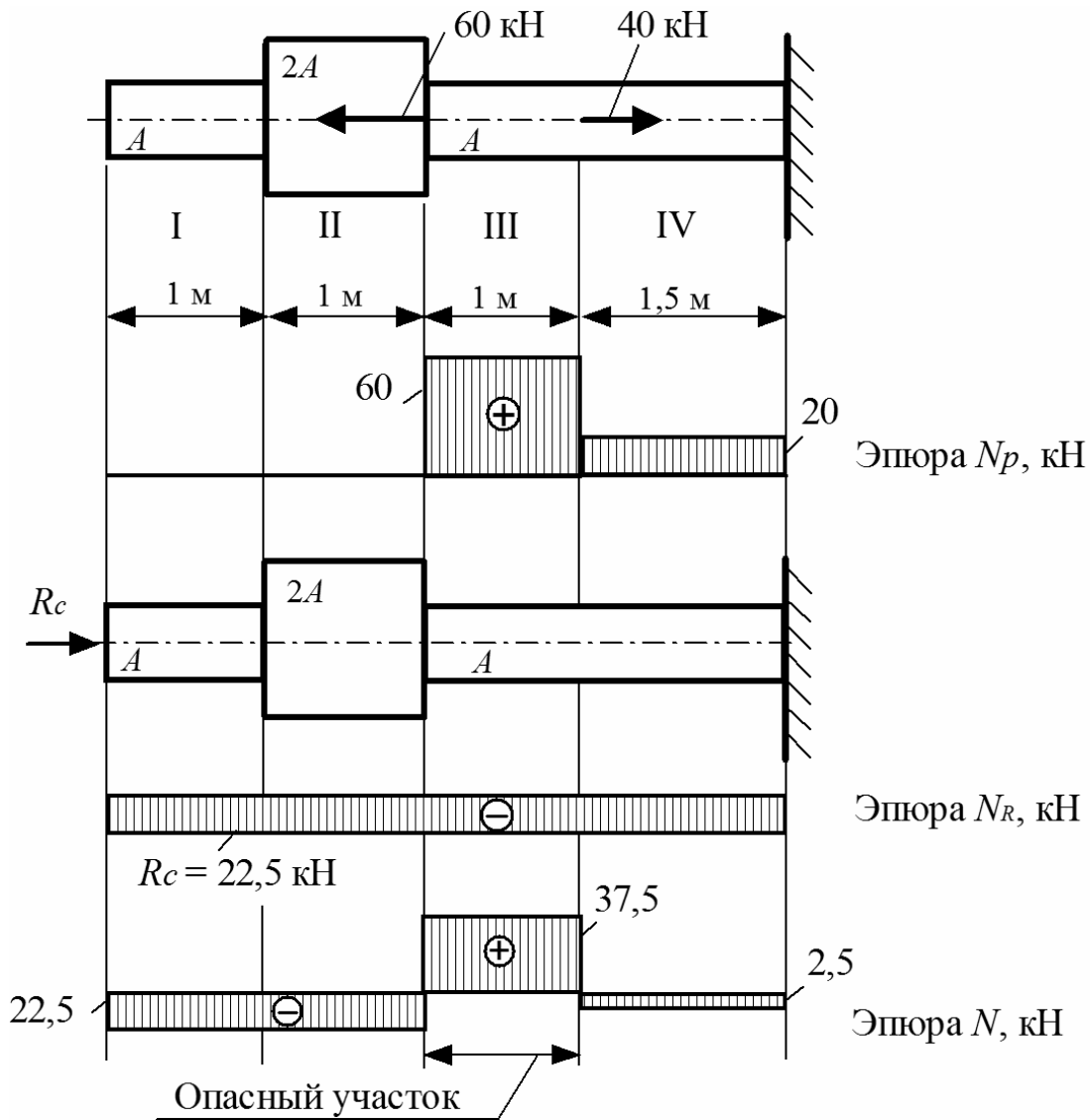


Рисунок 15.2

Выразим абсолютные деформации стержня на каждом участке в долях от жесткости поперечного сечения:

$$\Delta l_P = \sum_{i=1}^4 \frac{N_i \cdot l_i}{E_i \cdot A_i} = 0 + 0 + \frac{60 \cdot 1}{E \cdot A} + \frac{20 \cdot 1,5}{E \cdot A} = \frac{90}{E \cdot A};$$

$$\Delta l_R = \sum_{i=1}^4 \frac{N_i \cdot l_i}{E_i \cdot A_i} = -\frac{R_c \cdot 1}{E \cdot A} - \frac{R_c \cdot 1}{E \cdot 2A} - \frac{R_c \cdot 1}{E \cdot A} - \frac{R_c \cdot 1,5}{E \cdot A} = -\frac{4 \cdot R_c}{E \cdot A}.$$

Решим деформационное уравнение:

$$\Delta l = \frac{90}{E \cdot A} - \frac{4 \cdot R_c}{E \cdot A} = 0,$$

откуда  $R_C = 22,5$  кН.

Окончательную эпюру продольных сил  $N$  строим суммированием эпюр  $N_P$  и  $N_R$ . Производим проверку прочности на опасном участке III.

$$\sigma_{\max} = \left( \frac{N}{A} \right)_{\max} = \frac{37,5 \cdot 10^3}{3 \cdot 10^{-4}} = 125 \cdot 10^6 \text{ Па} = 125 \text{ МПа} < [\sigma] = 160 \text{ МПа}.$$

**Пример 2** – Определить грузоподъемность стержневой системы, которая состоит из абсолютно жесткого бруса  $BC$  и двух стальных стержней 1 и 2 (рисунок 15.3, а).

Исходные данные:  $l_1 = 1$  м;  $l_2 = 1,5$  м;  $A_1 = 1$  см<sup>2</sup>;  $A_2 = 1,4$  см<sup>2</sup>;  $\alpha = 30^\circ$ ;  $[\sigma] = 160$  МПа;  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа.

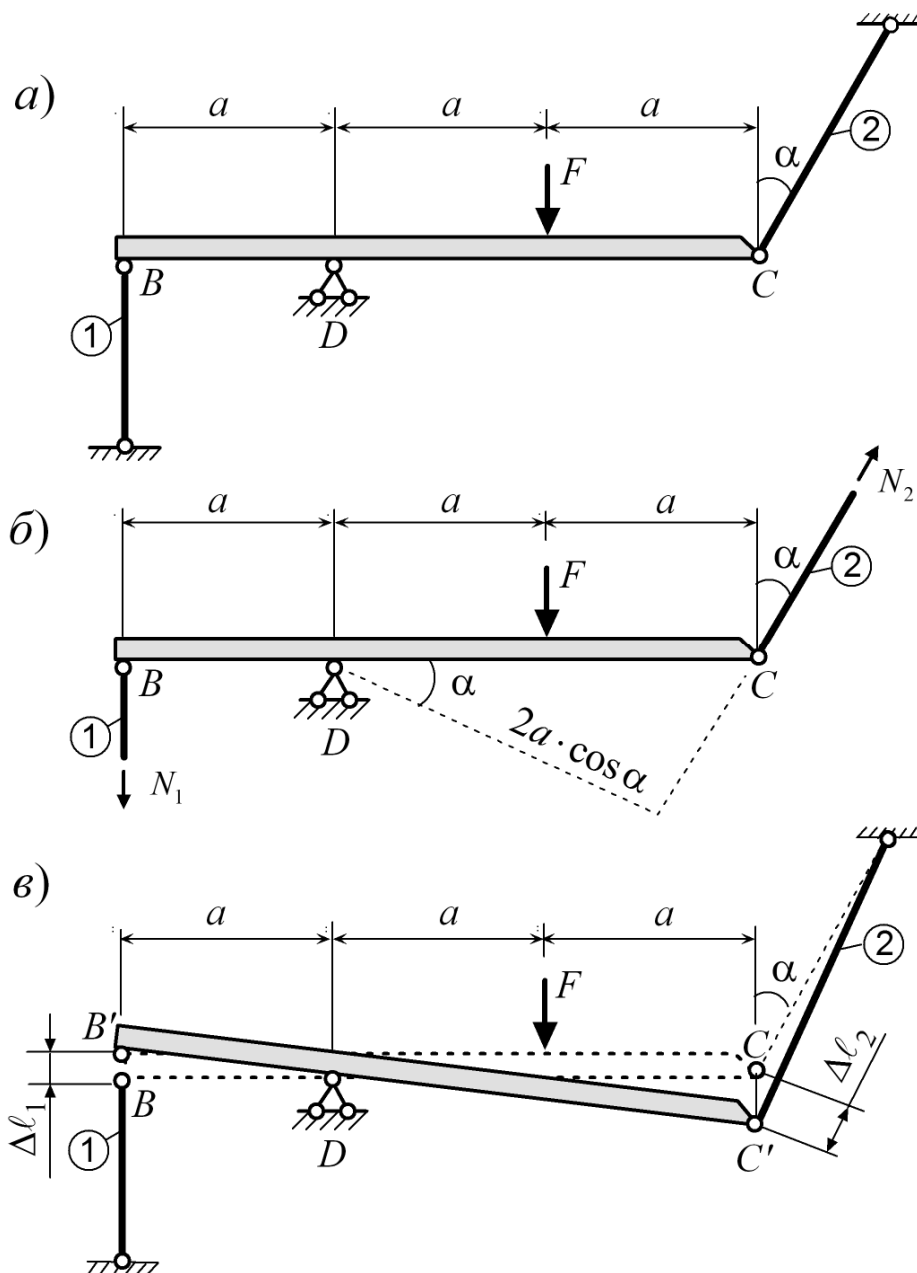


Рисунок 15.3

## Решение

Проведем сечение через оба стержня и рассмотрим внутренние силы  $N_1$  и  $N_2$  (рисунок 15.3, б).

Составим уравнение статического равновесия:

$$\sum M_D = N_1 \cdot a + N_2 \cdot 2a \cdot \cos \alpha - F \cdot a = 0,$$

$$N_1 + N_2 \cdot 2 \cos \alpha = F. \quad (15.1)$$

Составим уравнение совместности деформаций и перемещений, для чего рассмотрим конструкцию в деформированном состоянии (рисунок 15.3, в). В результате удлинения стержней брус  $BC$  повернется вокруг шарнира  $D$ , оставаясь прямым. Перемещение шарнира  $B$  равно удлинению первого стержня:  $BB' = \Delta l_1$ . Перемещение шарнира  $C$  равно:  $CC' = \Delta l_2 / \cos \alpha$ .

Из подобия треугольников  $DBB'$  и  $DCC'$  получаем

$$\frac{\Delta l_1}{a} = \frac{\Delta l_2 / \cos \alpha}{2a}, \quad \text{или} \quad \Delta l_2 = 2 \cos \alpha \cdot \Delta l_1.$$

Выразим деформации стержней через продольные силы:

$$\frac{N_2 \ell_2}{EA_2} = 2 \cos \alpha \frac{N_1 \ell_1}{EA_1};$$

$$N_2 = 2 \cos \alpha \frac{\ell_1 A_2}{\ell_2 A_1} N_1. \quad (15.2)$$

Подставим уравнение (15.2) в уравнение (15.1):

$$\left( 1 + 4 \cos^2 \alpha \frac{\ell_1 A_2}{\ell_2 A_1} \right) N_1 = \left( 1 + 4 \cos 30^\circ \frac{1 \cdot 1,4}{1,5 \cdot 1} \right) N_1 = 3,8 N_1 = F.$$

$$N_1 = 0,263F; \quad N_2 = 2 \cos 30^\circ \frac{1 \cdot 1,4}{1,5 \cdot 1} N_1 = 0,425F.$$

Напряжения в стержнях

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{0,263 \cdot F}{1 \cdot 10^{-4}} = 2630 \cdot F \left( \frac{1}{\text{м}^2} \right);$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{0,425 \cdot F}{1,4 \cdot 10^{-4}} = 3036 \cdot F \left( \frac{1}{\text{м}^2} \right).$$

Более нагруженным оказался стержень 2.

Определим допустимую грузоподъемность из условия прочности:

$$\sigma_{\max} = \sigma_2 = 3036 \cdot F \leq [\sigma].$$

$$[F] = \frac{[\sigma]}{3036} = \frac{160 \cdot 10^6}{3036} = 52,7 \cdot 10^3 \text{ Н} = 52,7 \text{ кН}.$$

### ***Тестовые вопросы и задачи для самопроверки***

1 Сколько независимых уравнений статики можно составить для плоской стержневой системы?

- а) одно;      б) два;      в) три;      г) четыре.

2 Сколько дополнительных деформационных уравнений нужно составить для дважды статически неопределимой стержневой системы?

- а) одно;      б) два;      в) три;      г) четыре.

3 Укажите условие прочности для статически неопределимой системы, работающей на растяжение-сжатие:

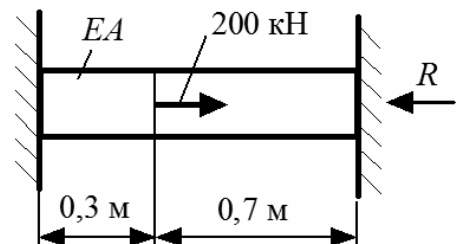
- а)  $\frac{Q}{A} \leq [\sigma]$ ;    б)  $\frac{M}{W} \leq [\sigma]$ ;    в)  $\frac{N}{E} \leq [\sigma]$ ;    г)  $\frac{N}{A} \leq [\sigma]$ .

4 Какое свойство не присуще статически неопределимым системам?

- а) возможность возникновения температурных напряжений;  
 б) возможность возникновения монтажных напряжений;  
 в) возможность свободного деформирования;  
 г) перераспределение внутренних усилий при нарушении одной связи.

5 Определите реакцию на правой опоре  $R$ , если жесткость поперечного сечения  $EA$  постоянна по величине:

- а) 60 кН;  
 б) 200 кН;  
 в) 85,7 кН;  
 г) 140 кН.



## Список литературы

- 1 **Кузменко, И. М.** Механика материалов: учебное пособие: в 2 ч. / И. М. Кузменко. – Могилев: Беларус.-Рос. ун-т, 2020. – Ч. 1. – 289 с.
- 2 **Кузменко, И. М.** Механика материалов: учебное пособие: в 2 ч. / И. М. Кузменко. – Могилев: Беларус.-Рос. ун-т, 2020. – Ч. 2. – 281 с.
- 3 Сопротивление материалов в вопросах-ответах и сборник задач для самостоятельной работы с примерами их решений : учебное пособие / А. Г. Схиртладзе [и др.]. – 3-е изд., стер. – Старый Оскол : ТНТ, 2019. – 324 с.
- 4 **Дарков, А. В.** Сопротивление материалов : учебник / А. В. Дарков, Г. С. Шпиро. – 5-е изд., перераб. и доп., репринт. изд. – Москва : Альянс, 2018. – 624 с.
- 5 **Беляев, Н. М.** Сопротивление материалов: учебное пособие / Н. М. Беляев. – 15-е изд., перераб. и стер. – Москва : Альянс, 2015. – 608 с.
- 6 **Скопинский, В. Н.** Практическое руководство к расчетам по сопротивлению материалов: учебное пособие / В. Н. Скопинский. – Москва: МГИУ, 2007. – 240 с.
- 7 **Писаренко, Г. С.** Справочник по сопротивлению материалов / Г. С. Писаренко, Ф. П. Яковлев, В. В. Матвеев. – 5-е изд., перераб. и доп. – Киев: Дельта, 2008. – 816 с.
- 8 **Подскребко, М. Д.** Сопротивление материалов: учебник для вузов / М. Д. Подскребко. – Минск : Вышэйшая школа, 2007. – 797 с.
- 9 **Старовойтов, Э. И.** Сопротивление материалов: учебник для вузов / Э. И. Старовойтов. – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2008. – 384 с.
- 10 **Степин, П. А.** Сопротивление материалов: учебник / П. А. Степин. – 10-е изд., стер. – Санкт-Петербург: Лань, 2010. – 320 с.
- 11 **Окопный, Ю. А.** Механика материалов и конструкций: учебник для вузов / Ю. А. Окопный, В. П. Радин, В. П. Чирков. – 2-е изд., доп. – Москва : Машиностроение, 2002. – 436 с.