МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Технологии металлов»

КИНЕМАТИКА И ДИНАМИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

Методические рекомендации к практическим занятиям для студентов специальности 1-36 01 04 «Оборудование и технологии высокоэффективных процессов обработки материалов» дневной и заочной форм обучения

Могилев 2021

УДК 531
ББК 22.21
К33

Рекомендовано к изданию
учебно-методическим отделом
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Технологии металлов» «26» января 2021 г., протокол № 7

Составители: канд. техн. наук, доц. И. В. Трусов;
ассист. А. Н. Елисеева

Рецензент А. П. Прудников

Методические рекомендации составлены в соответствии с рабочей программой дисциплины «Кинематика и динамика твердого тела» для студентов специальности 1-36 01 04 «Оборудование и технологии высокоэффективных процессов обработки материалов» дневной и заочной формы обучения. Содержат материал для аудиторной работы студентов.

Учебно-методическое издание

КИНЕМАТИКА И ДИНАМИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

Ответственный за выпуск Д. И. Якубович

Корректор Е. А. Галковская

Компьютерная верстка Е. В. Ковалевская

Подписано в печать . Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Печать трафаретная. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 26 экз. Заказ №

Издатель и полиграфическое исполнение:
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования
«Белорусско-Российский университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/156 от 07.03.2019.
Пр-т Мира, 43, 212022, г. Могилев.

Содержание

1 Указания по подготовке к практическим занятиям

Кинематика и динамика твердого тела – фундаментальная дисциплина, которая является базовой для ряда общетехнических и специальных дисциплин: механика материалов и конструкций, теория механизмов и машин, детали машин и основы конструирования и др.

Целью дисциплины «Кинематика и динамика твердого тела» является изучение основных понятий, законов и методов теоретической и аналитической механики и их применение для изучения динамики машин и методов их расчета, а также для построения математических моделей машин, применяемых при автоматизированном проектировании и прогнозировании.

Студенты 1-36 01 04 «Оборудование и технологии высокоэффективных процессов обработки материалов» изучают кинематику и динамику твердого тела на протяжении 3-го семестра. Объемы часов лекций, практических занятий и самостоятельной работы, а также формы контроля приведены в таблице 1.

Таблица 1 – Распределение часов в семестрах по кинематике и динамике твердого тела

Курс	Семестр	Лекция, ч	Практическое занятие, ч	Самостоятельная работа, ч	Форма контроля	Всего часов/ зач. ед.
1	3 (осенний)	50	68	134	Экзамен	252/7

Рейтинг-контроль знаний студентов при изучении курса теоретической механики осуществляется по следующим видам работ:

– опрос по разделам лекционного курса;

– выполнение и защита индивидуальных заданий;

– выполнение восьми контрольных работ;

– на практических занятиях ведется учет активности студентов.

К каждому практическому занятию студент должен:

– проработать по конспекту лекций или учебнику теоретический материал;

– ответить на контрольные вопросы, приведенные в методических рекомендациях;

– составить соответствующие расчетные схемы, вычислить заданные параметры.

На практических занятиях студенты решают задачи из [4; 5].

Индивидуальные задания выполняются и сдаются в сроки, предусмотренные графиком учебного процесса. Студенты защищают индивидуальные задания во внеучебное время; защита проходит в виде собеседования по заданию.

Студенты, не сдавшие индивидуальные задания, не допускаются к экзамену или зачету по теоретической механике как не выполнившие график учебного процесса по данной дисциплине.

2 Кинематика

2.1 Простое движение точки

1 Что изучает раздел «Кинематика»?

2 Что означает задать движение точки векторным способом?

3 Что означает задать движение точки координатным способом?

4 Как по уравнениям движения определить траекторию движущейся точки?

5 Что значит задать движение точки естественным способом?

6 Оси естественного трехгранника.

7 Решить задачи 10.12, 10.14, 12.9, 12.14, 12.18, 12.19, 12.23 из [4], 7.1.5, 7.2.4, 7.3.10, 7.4.12, 7.5.8, 7.6.9, 7.7.14, 7.8.8, 7.8.18 из [5].

2.2 Определение скорости и ускорения точки по заданным уравнениям движения

1 Формулы для определения скорости и ускорения при векторном и координатном способах задания движения точки.

2 Как определяется скорость точки при естественном способе задания движения?

3 Как определяется ускорение точки при естественном способе задания движения?

4 Частные случаи движения точки.

5 Выполнить индивидуальное задание № 1 «Определение скорости и ускорения точки по заданным уравнениям движения».

2.3 Поступательное движение твердого тела

1 Какое движение тела называется поступательным?

2 Какие траектории описывают точки поступательно движущегося тела.

3 Что можно сказать о скоростях и ускорениях точек тела, движущегося поступательно?

4 Решить задачи 8.1.2, 8.1.8, 8.1.11, 8.1.14 из [5].

Задача 1. Точка A шарнирного четырехзвенника $OABO_1$ движется по закону $S = 0{,}5\pi t^2$ (рисунок 1). Определить скорость и ускорение точки C стержня AB, если $AC = BC$, $O_1B = OA = 0{,}4$ м, $t = 2$ с.

Решение

Стержень AB совершает поступательное движение, т. к. в любой момент времени прямая AB остается параллельной самой себе.

Следовательно, скорости и ускорения точек A, B, C будут одинаковы:

$$V_C = V_A = \dot{S}\,; \tag{1}$$

$$V_C = V_A = \pi t\,;$$

$$a_A^{\tau} = \dot{V}_A; \tag{2}$$

$$a_A^{\tau} = \pi = 3{,}14 \text{ м/с}^2;$$

$$a_A^{n} = \frac{V_A^2}{AO}; \tag{3}$$

$$a_A^{n} = \frac{4\pi^2}{0{,}4} = 10\pi^2 = 98{,}6 \text{ м/с}^2;$$

$$a_C = a_A = \sqrt{\left(a_A^{\tau}\right)^2 + \left(a_A^{n}\right)^2}\,; \tag{4}$$

$$a_C = a_A = \sqrt{3{,}14^2 + 98{,}6^2} = 98{,}65 \text{ м/с}^2.$$

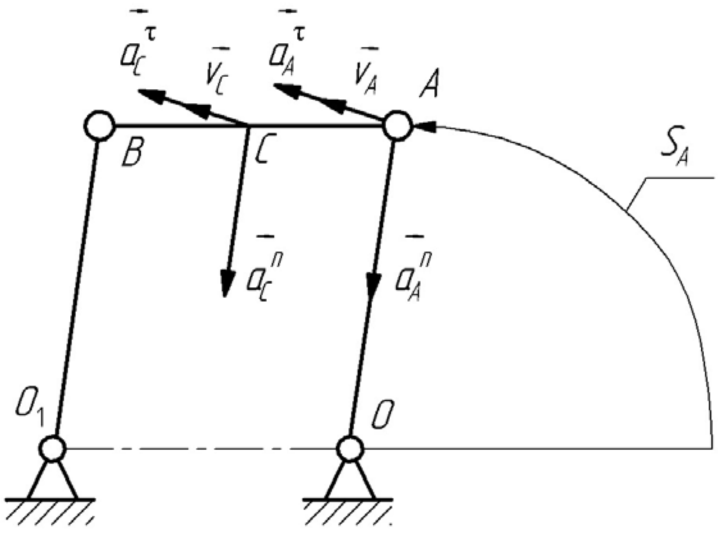

Рисунок 1 – Условие задачи 1

Ответ: $V_C = 2\pi$ м/с; $a_C = 98{,}65$ м/с^2.

2.4 Вращательное движения твердого тела

1 Какое движение тела называется вращательным?
2 Как определить кинематические характеристики вращающегося тела:
   а) угловую скорость (направление вектора, величину);
   б) угловое ускорение (направление вектора, величину)?

3 Как определить кинематические характеристики точек тела, совершающего вращательное движение:

а) скорость точки (направление вектора, величину);

б) ускорение точки (направление вектора, величину)?

4 Записать формулы для определения угловой скорости, угловой координаты при равнопеременном вращении тела относительно неподвижной оси.

5 Дать определение передаточного механизма (фрикционная, зубчатая, ременная передачи).

6 Что называется передаточным отношением?

7 Решить задачи 13.6, 13.14, 13.15, 13.18, 14.2, 14.5 из [4], 8.2.4, 8.2.13, 8.3.3, 8.3.15 из [5].

Задача 2. Угол поворота тела изменяется по закону $\varphi = 4t^2 + 3t$. Определить полное ускорение точки тела на расстоянии r = 0,25м от оси вращения, в момент времени t_1 = 3с.

Решение

Так как точка движется по окружности, то ее ускорение можно разложить на составляющие: a_τ – касательное; a_n – нормальное.

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = r \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \, . \tag{5}$$

Определим угловую скорость и угловое ускорение точки:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = 4 \cdot t \cdot 2 + 3 \cdot 1; \tag{6}$$

$$\omega_1 = 4 \cdot t \cdot 2 + 3 \cdot 1 \Big|_{t_1 = 3c} = 4 \cdot 3 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 27 \text{ рад/с};$$

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = 8 \cdot 1 = 8 \text{рад/с}^2.$$

Тогда

$$a_1 = 0{,}25 \cdot \sqrt{8^2 + 27^4} = 182{,}26 \text{ м/с}^2.$$

Ответ: $a_1 = 182{,}26 \text{ м/с}^2$.

2.5 Контрольная работа № 1. Кинематика точки, поступательное и вращательное движения тела

2.6 Сложное движение. Скорости точек

1 Дать определения абсолютного, переносного, относительного движений и их обозначения.

2 Дать определения абсолютной, переносной, относительной скоростей точки и их обозначения.

3 Сформулировать теорему о сложении скоростей при сложном движении точки.

4 Решить задачи 22.15, 22.17, 22.18, 22.25 из [4], 11.2.9, 11.2.12, 11.2.17, 11.2.20, 11.2.23 из [5].

2.7 Сложное движение. Ускорения точек

1 Дать определения абсолютного, переносного, относительного движений и их обозначения.

2 Дать определения абсолютного, переносного, относительного ускорений точки и их обозначение.

3 Сформулировать теорему о сложении ускорений для случая поступательного переносного движения.

4 Сформулировать теорему о сложении ускорений для случая вращательного переносного движения.

5 Как определить ускорение Кориолиса (модуль, направление)?

6 В каких случаях ускорение Кориолиса равно нулю?

7 Решить задачи 23.8, 23.14, 23.18, 23.36 из [4], 11.3.3, 11.3.14, 11.4.4, 11.5.3, 11.5.5 из [5].

Задача 3. Диск радиуса R = 50 см вращается вокруг неподвижной оси по закону $\varphi = 3t^3 - 6t^2$, рад. По ободу движется точка M по закону $OM = S = \dfrac{\pi}{2} R \cdot (2t^2 - t^3)$, см (рисунок 2). Определить абсолютную скорость точки в момент времени t_1 = 1 с.

Решение

Точка M совершает сложное движение. Движение точки M по ободу диска будет относительным, а движение диска – переносным. Абсолютную скорость точки M находим по формуле

$$\vec{V}_a = \vec{V}_e + \vec{V}_r. \tag{7}$$

Определим положение точки M на траектории относительного движения.

При t_1= 1 с

$$OM = S = \frac{\pi}{2} R \cdot (2t^2 - t^3) = \frac{\pi \cdot R}{2}.$$

Находим угол $\angle OCM_1$:

$$\angle OCM_1 = \frac{OM_1}{R} = \frac{\pi}{2}.$$

Находим скорость относительного движения:

$$V_r = \dot{S} = \frac{\pi}{2} R \cdot (4t - 3t^2).$$

При $t_1 = 1$ с

$$V_r = \dot{S} = \frac{50\pi}{2} \cdot (4 - 3) = 25\pi = 78{,}5 \text{ см/с.}$$

Так как $V_r > 0$, то вектор $\vec{V}_r$ направлен по касательной к окружности в точке M_1 в сторону увеличения дуги OM (рисунок 2).

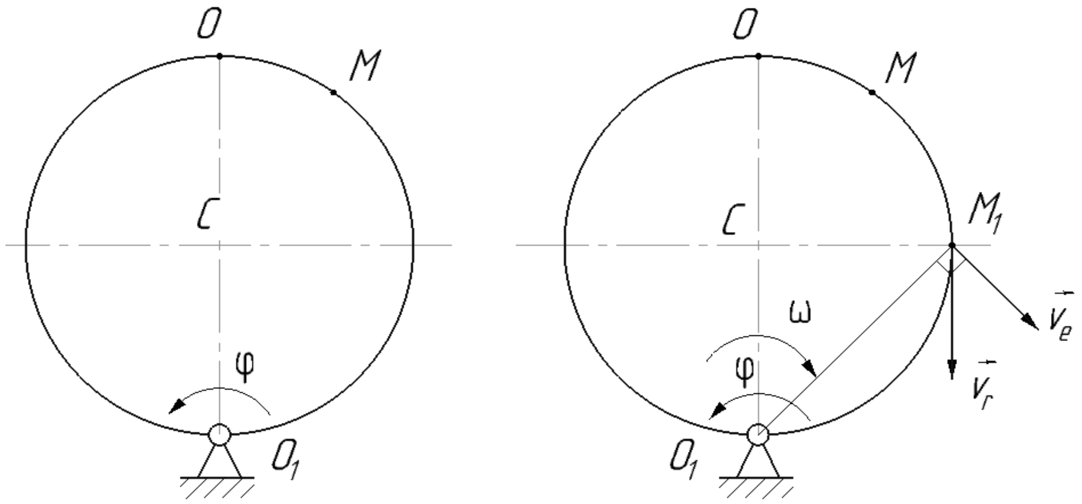

Рисунок 2 – Условие задачи 2

Находим скорость переносного движения:

$$V_e = |\omega| \cdot h, \qquad (8)$$

где $\omega = \dot{\varphi} = 9t^2 - 12t$.

При $t_1 = 1$ с $\omega = -3$ рад/с. Знак «минус» показывает, что направление ω противоположно направлению положительного отсчета угла φ.

Так как

$$h = O_1M_1 = R\sqrt{2} = 50\sqrt{2} = 70{,}5 \text{ см,}$$

то

$$V_e = |-3| \cdot 70{,}5 = 211{,}5 \text{ см/с.}$$

Вектор $\vec{V}_e$ перпендикулярен вектору $\overrightarrow{M_1O_1}$ и направлен в соответствии с угловой скоростью (рисунок 2). Так как $\angle \vec{V}_e, \vec{V}_r = 45^\circ$, то

$$V_a = \sqrt{V_e^2 + V_r^2 + 2 \times V_r \times V_e \times \cos 45^\circ}\,, \qquad (9)$$

$$V_a = \sqrt{211{,}5^2 + 78{,}5^2 + 2 \cdot 211{,}5 \cdot 78{,}5 \cdot 0{,}71} = 272{,}89 \text{ см/с.}$$

Ответ: $V_a = 272{,}89$ см/с.

2.8 Сложное движение твердого тела

1 Абсолютное, переносное и относительное движения.
2 Теорема о сложении скоростей.
3 Теорема о сложении ускорений.
4 Ускорение Кориолиса (модуль, направление).
5 Выполнить индивидуальное задание № 2 «Определение скоростей и ускорений при сложном движении точки».

2.9 Плоское движение твердого тела. Определение скоростей точек

1 Дать определение плоского движения твердого тела.
2 Из каких простейших движений состоит плоское движение?
3 Записать кинематические уравнения плоского движения.
4 Теорема о скоростях точек плоской фигуры и следствия из нее.
5 Мгновенный центр скоростей и способы его определения.
6 Определение скоростей точек плоской фигуры с помощью МЦС.
7 Решить задачи 16.10, 16.18, 16.33, 16.34 из [4], 9.2.7, 9.2.8, 9.4.5, 9.5.3, 9.6.7, 9.6.9 из [5].

Задача 4. Колесо радиусом *R* = 0,4 м катится по прямолинейному горизонтальному рельсу с постоянной угловой скоростью $\omega = 2$ рад/с (рисунок 3). Центр колеса имеет постоянную скорость: $V_C = 0{,}8$ м/с.

Определить скорость точки *M* обода колеса.

Решение

Скорость любой точки тела в плоском движении равна геометрической сумме скорости полюса и скорости этой точки во вращательном движении вместе с телом вокруг полюса:

$$\vec{V}_M = \vec{V}_C + \vec{V}_{MC}\,. \qquad (10)$$

Примем за полюс точку *C*, скорость которой известна. Тогда вращательная скорость точки *M* относительно полюса *C*

$$V_{MC} = \omega \cdot MC = 2 \cdot 0,4 = 0,8 \text{ м/с.}$$

Вектор $\vec{V}_{MC}$ перпендикулярен отрезку MC и направлен в соответствии с угловой скоростью. Поэтому вектор $\vec{V}_{MC}$ относительно полюса C должен показывать направление угловой скорости (рисунок 3).

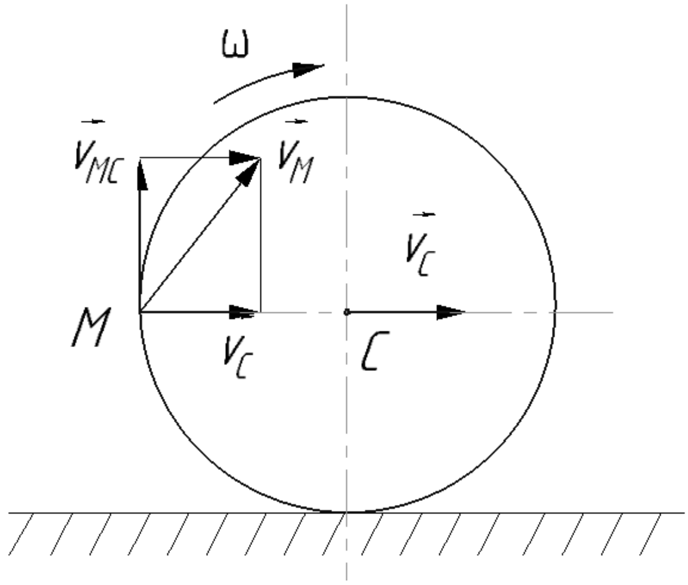

Рисунок 3 – Условие задачи 4

Так как $\vec{V}_{MC} \perp \vec{V}_C$, то

$$V_M = \sqrt{V_C^2 + V_{MC}^2}; \tag{11}$$

$$V_M = \sqrt{0,8^2 + 0,8^2} = 1,13 \text{ м/с.}$$

Ответ: $V_M = 1,13$ м/с.

2.10 Плоское движение твердого тела. Определение ускорений точек

1 Дать определение плоского движения твердого тела.
2 Из каких простейших движений состоит плоское движение?
3 Сформулировать теорему о сложении ускорений при плоском движении тела.
4 Решить задачи 18.11, 18.22, 18.28, 18.37 из [4], 9.7.9, 9.7.16, 9.7.21 из [5].

2.11 Плоское движение твердого тела

1 Уравнения плоского движения твердого тела.
2 Мгновенный центр скоростей.
3 Теорема о проекции скоростей точек тела.

4 Теорема о сложении ускорений при плоском движении тела.

5 Выполнить индивидуальное задание № 2 «Плоское движение твердого тела».

2.12 Контрольная работа № 2. Сложное движение точки, плоское движение тела

3 Динамика

3.1 Первая задача динамики точки

1 Основные понятия динамики.

2 Основное уравнение динамики для свободной и несвободной материальных точек.

3 Записать основное уравнение динамики материальной точки в проекциях на естественные и координатные оси.

4 Будет ли изолированная материальная точка сохранять состояние покоя или равномерного прямолинейного движения?

5 Что можно определить при решении первой задачи динамики материальной точки по заданным массе и уравнениям движения?

6 Охарактеризовать первую задачу динамики и методику ее решения.

7 Решить задачи 26.9, 26.10, 26.13, 26.15, 26.19 из [4], 13.1.16, 13.1.24, 13.2.11, 13.2.18 из [5].

Задача 1. Материальная точка массой m = 1,4 кг движется прямолинейно по закону $x = 6t^2 + 6t + 3$. Определить модуль равнодействующей сил, приложенных к точке (рисунок 4).

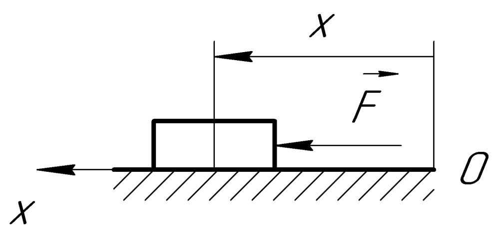

Рисунок 4 – Условие задачи 1

Решение

Запишем основное уравнение динамики:

$$m\vec{a} = \sum \vec{F}_i . \tag{12}$$

Спроецируем это уравнение на ось X:

$$ma_X = \sum F_{kx} . \tag{13}$$

Определим значение проекции ускорения на ось X, для чего 2 раза продифференцируем по времени закон движения. Получим

$$V_X = \frac{dx}{dt} = 12t + 6 \text{ м/с};$$

$$a_X = \frac{dVx}{dt} = 12 \text{ м/с}^2;$$

$$F = 1{,}4 \cdot 12 = 16{,}8 \text{ Н}.$$

Ответ: $F = 16{,}8$ Н.

3.2 Вторая задача динамики точки

1 Что можно определить, зная массу точки и силы на нее действующие.

2 Назвать основные виды сил, действующих на материальную точку, приведите примеры переменных сил.

3 Дать постановку второй основной задачи динамики материальной точки и методику ее решения.

4 Последовательность решения второй задачи динамики.

5 Решить задачи 27.2, 27.7, 27.30, 27.39 из [4], 13.3.5, 13.3.13, 3.3.25 из [5].

Задача 2. На материальную точку массой *m* = 200 кг, которая находится на горизонтальной поверхности, действует вертикальная подъемная сила $F = 10t^2$ (рисунок 5). Определить время *t,* при котором начнется движение точки.

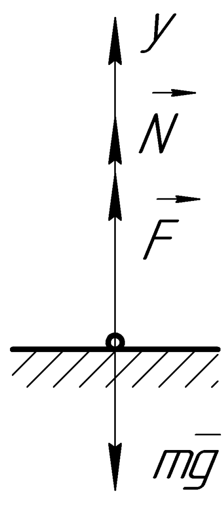

Рисунок 5 – Условие задачи 2

Решение

Запишем основное уравнение динамики для условия данной задачи:

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{N} + m\vec{g}\ . \tag{14}$$

Спроецируем это уравнение на ось Y:

$$ma_Y = F - mg + N. \qquad (15)$$

С учетом того, что в момент отрыва $N = 0$ и $a_Y = 0$,
Получим

$$0 = F - mg \;\Rightarrow\; F = mg.$$

С учетом исходных данных имеем

$$10t^2 = 200 \cdot 9{,}81 \;\Rightarrow\; t = \sqrt{\frac{200 \cdot 9{,}81}{10}} = 14 \text{ с.}$$

Ответ: $t = 14$ с.

3.3 Свободные колебания материальной точки

1 Под действием какой силы совершаются свободные колебания?
2 Как называются постоянные A, k, β в выражении $x = A\sin(kt + \beta)$?
3 Как определяется собственная частота свободных колебаний?
4 Записать формулу для нахождения периода свободных колебаний.
5 Решить задачи 32.1, 32.15 – 32.17 из [4], 13.4.4, 13.4.13, 13.4.17,13 из [5].

Задача 3. Определить период свободных вертикальных колебаний груза массой m = 80 кг, который прикреплен к пружине с коэффициентом жесткости c = 2 кН/м (рисунок 6).

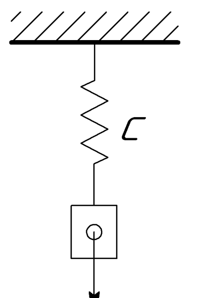

Рисунок 6 – Условие задачи 3

Решение

Период колебаний определим по формуле

$$T = \frac{2\pi}{k}, \qquad (16)$$

где k – угловая частота свободных вертикальных колебаний,

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}}\,; \qquad (17)$$

$$k = \sqrt{\frac{2000}{80}} = 5 \text{ с}^{-1}.$$

Тогда

$$T = \frac{2 \cdot 3{,}14}{5} = 1{,}256 \text{ с}.$$

Ответ: $T = 1{,}256$ с.

3.4 Контрольная работа № 3. Динамика материальной точки

3.5 Динамика относительного движения материальной точки

1 Записать уравнение динамики относительного движения материальной точки.

2 Как определяется переносная сила инерции при неравномерном вращательном движении твердого тела вокруг неподвижной оси?

3 Записать формулу для определения модуля переносной центробежной силы инерции.

4 Записать формулу для определения модуля кориолисовой силы инерции.

5 Записать уравнение относительного покоя материальной точки.

6 Решить задачи 33.4, 33.9, 33.10, 33.22 из [4], 13.7.3, 13.7.5, 13.7.8 из [5].

Задача 4. Шарик M массой m = 0,2 кг движется со скоростью V = 19,62 м/с относительно вертикальной трубки *2*, которая на расстоянии $l = 0{,}5$ м прикреплена к вертикальному валу *1* (рисунок 7). Вал вращается с постоянной угловой скоростью $\omega = 5$ рад/с. Определить переносную силу инерции шарика.

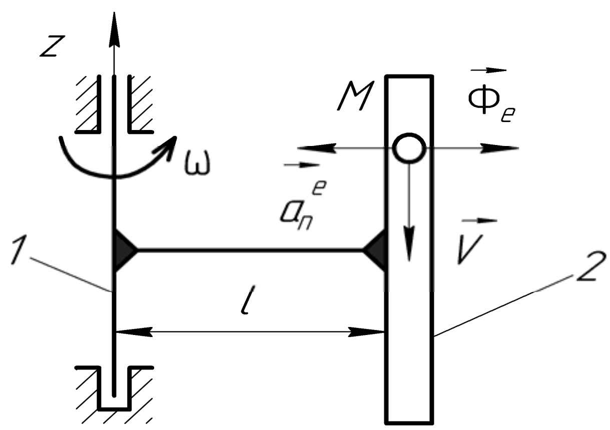

Рисунок 7 – Условие задачи 4

Решение

Переносная сила инерции может быть рассчитана согласно формуле

$$\vec{\Phi}_e = m \cdot \vec{a}_e. \tag{18}$$

Определим переносное ускорение точки. Так как переносным движением является вращение трубки вокруг оси Z, то переносным движением точки является движение по окружности радиуса. При этом ускорение точки можно разложить на два ускорения (a_n и a_τ), т. е.

$$a_{\text{e}} = \sqrt{(a_e^n)^2 + (a_e^\tau)^2}\ ; \tag{19}$$

$$a_e^n = \omega_e^2 \cdot l\,; \tag{20}$$

$$a_e^n = 5^2 \cdot 0{,}5 = 12{,}5 \ \text{м/с}^2;$$

$$a_e^\tau = \varepsilon_e \cdot l\,; \tag{21}$$

$$\varepsilon_e = \frac{d\omega}{dt} = 0 \ \Rightarrow \ a_e^\tau = 0 \cdot 0{,}5 = 0 \ \text{м/с}^2.$$

Тогда

$$a_{\text{e}} = \sqrt{12{,}5^2 + 0^2} = 12{,}5 \ \text{м/с}^2;$$

$$\Phi_e = m \cdot a_e = 0{,}2 \cdot 12{,}5 = 2{,}5 \ \text{Н}.$$

Ответ: $\Phi_e = 2{,}5$ Н.

3.6 Теорема о движении центра масс

1 По какой формуле определяется радиус-вектор центра масс механической системы?

2 По каким формулам определяются координаты центра масс механической системы?

3 Записать теорему о движении центра масс механической системы.

4 При каких условиях центр масс системы находится в состоянии покоя?

5 Может ли главный вектор внешних сил быть отличным от нуля, если центр масс системы движется равномерно и прямолинейно?

6 Какое движение твердого тела можно рассматривать как движение материальной точки, обладающей массой данного тела?

7 Решить задачи 35.7, 35.19, 35.20 из [4], 14.1.10, 14.1.13, 14.1.20 из [5].

Задача 5. Тело массой $m_1 = 4$ кг может двигаться по горизонтальной направляющей (рисунок 8). На какое расстояние переместится тело, когда однородный стержень массой $m_2 = 2$ кг и длиной $l = 0{,}6$ м, опускаясь под действием силы тяжести, займет вертикальное положение? В начальный момент система находилась в покое.

Решение

Выберем начало системы отсчета. Расстояние от оси Oy до центра m$_1$ тела обозначим X_1, а до масс m$_2$ тела – X_2. Предположим, что при перемещении тела 2 в вертикальное положение вся система сместится вправо на расстояние Δ согласно теореме о сохранении положения центра масс. Координата центра масс первого тела будет равна $X_1 + \Delta$, а второго тела – $X_2 - 1/2 + \Delta$.

Запишем уравнения для определения центра масс всей системы для первого и второго положений:

$$X_{C1} = \frac{m_1 X_1 + m_2 X_2}{m_1 + m_2}; \tag{22}$$

$$X_{C2} = \frac{m_1(X_1 + \Delta) + m_2(X_2 - 1/2 + \Delta)}{m_1 + m_2}. \tag{23}$$

Так как $\sum F_{ix}^E = 0$, то $x_{c1} = x_{c2}$,

$$\frac{m_1 X_1 + m_2 X_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1(X_1 + \Delta) + m_2(X_2 - l/2 + \Delta)}{m_1 + m_2};$$

$$m_1 X_1 + m_2 X_2 = m_1(X_1 + \Delta) + m_2(X_2 - l/2 + \Delta);$$

$$m_1 X_1 + m_2 X_2 = m_1 X_1 + m_1\Delta + m_2 X_2 - m_2 \cdot l/2 + m_2\Delta;$$

$$0 = m_1\Delta - m_2 \cdot l/2 + m_2\Delta;$$

$$\Delta = \frac{m_2 \cdot l/2}{m_1 + m_2} = \frac{2 \cdot 0{,}6/2}{4 + 2} = 0{,}1 \text{ м}.$$

Ответ: $\Delta = 0{,}1$ м.

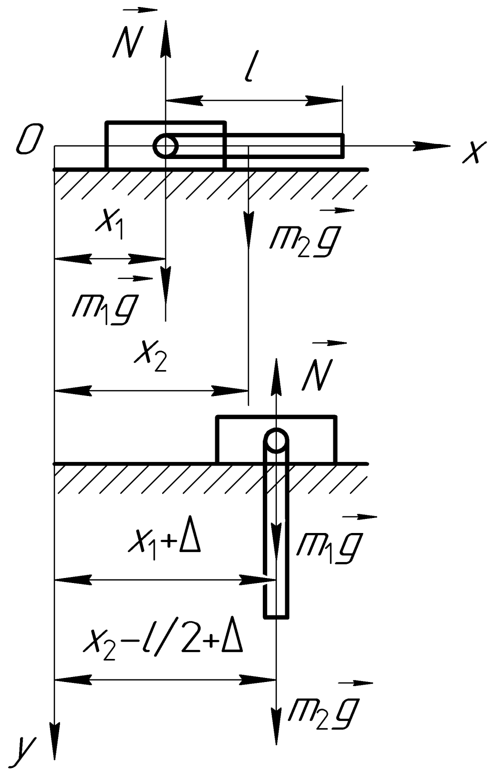

Рисунок 8 – Условие задачи 5

3.7 Теорема об изменении количества движения

1 Записать теорему об изменении количества движения точки и системы в конечном виде.

2 Записать теорему об изменении количества движения материальной точки и системы в проекциях на оси координат.

3 Изменяется ли количество движения механической системы, если главный вектор внешних сил отличен от нуля?

4 Записать условия, при которых количество движения системы не изменяется.

5 Как определяется импульс переменной силы?

6 Будет ли элементарный импульс силы характеризовать действие силы на материальную точку в течение времени dt?

7 Решить задачи 36.3, 36.6, 36.9, 36.11 из [4], 14.2.11, 14.2.27, 14.3.8, 14.3.19 из [5].

Задача 6. Трубка вращается с угловой скоростью $\omega = 10$ рад/с (рисунок 9). Относительно трубки движется шарик M массой m = 0,2 кг со скоростью $V_r = 4$ м/с. Определить модуль количества движения шарика в момент времени, когда расстояние OM = 0,4 м.

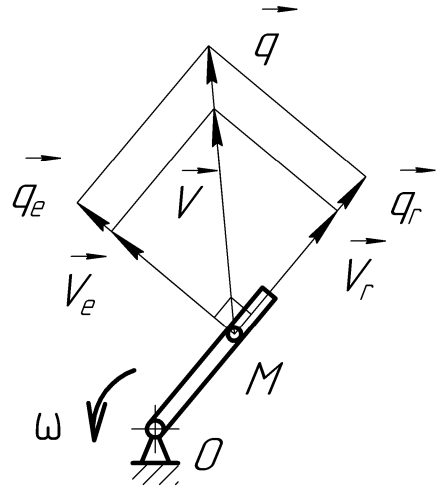

Рисунок 9 – Условие задачи 6

Решение

Количество движения определяется по формуле

$$q = mV\,, \qquad (24)$$

где V – абсолютная скорость точки.

Тогда $V_e = \omega \cdot OM = 10 \cdot 0,4 = 4$ м/с.

$$V = \sqrt{4^2 + 4^2} = 5,657 \text{ м/с};$$

$$q = 0,2 \cdot 5,657 = 1,13\ \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}.$$

Ответ: $q = 1,13\ \dfrac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}$.

3.8 Теорема об изменении кинетического момента

1 Какой формулой определяется вектор момента количества движения материальной точки?

2 Какой формулой выражается теорема об изменении момента количества движения материальной точки относительно центра?

3 При каком условии момент количества материальной точки относительно центра будет сохранять постоянное значение?

4 Чему равен кинетический момент системы относительно центра?

5 Чему равна производная по времени от кинетического момента механической системы относительно центра?

6 При каком условии кинетический момент механической системы относительно центра остается постоянным?

7 Решить задачи 34.19, 37.5, 37.43, 37.48, 37.50 из [4], 14.4.24, 14.5.13, 14.6.8, 16.1.14, 16.1.23, 16.1.29 из [5].

Задача 7. Трубка вращается вокруг вертикальной оси *Oz*, ее момент инерции $I_z = 0{,}075$ кг·м^2 (рисунок 10). По трубке под действием внутренних сил системы движется шарик *M* массой $m = 0{,}1$ кг. Когда шарик находится на оси *Oz*, угловая скорость $\omega_0 = 4$ рад/с. При каком расстоянии *l* угловая скорость будет $\omega_1 = 3$ рад/с?

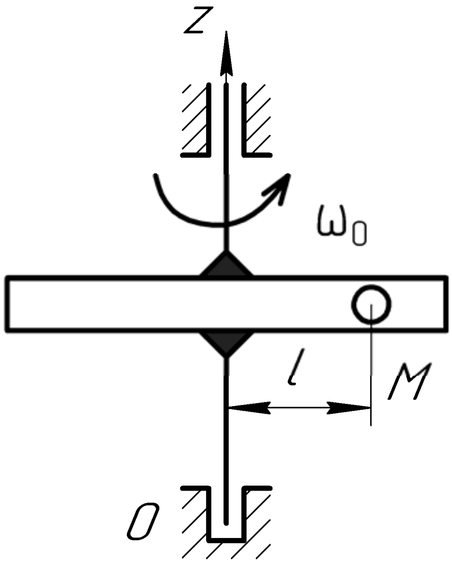

Рисунок 10 – Условие задачи 7

Решение

Согласно теореме об изменении кинетического момента механической системы

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \sum \vec{M}^E_{ГO}. \tag{25}$$

Так как

$$\sum M^E_{Гz} = 0 \Rightarrow \frac{dL_z}{dt} = 0 \Rightarrow L_z = \text{const},$$

то

$$I_0 \cdot \omega_0 = I_1 \cdot \omega_1, \tag{26}$$

где момент инерции системы в *i*-й момент времени, $I_i = I_z + I_{M.T.}$;

$$I_0 = I_z + I_{M.T1}; \tag{27}$$

$$I_1 = I_z + I_{M.T2}; \tag{28}$$

$I_{M.T1}$ – момент инерции материальной точки в момент, когда точка находилась на оси вращения, $I_{M.T1} = m \cdot l^2 = 0{,}1 \cdot 0^2 = 0$;

$I_{M.T2}$ – момент инерции материальной точки в момент, когда точка находилась от оси вращения на расстоянии l:

$$I_{M.T2} = m \cdot l^2; \tag{29}$$

$$I_{M.T2} = 0{,}1 \cdot l^2;$$

$$I_z \cdot \omega_0 = \left(I_z + 0{,}1 \cdot l^2\right) \cdot \omega_1;$$

$$\frac{I_z \cdot \omega_0}{\omega_1} = I_z + 0{,}1 \cdot l^2;$$

$$\frac{I_z \cdot \omega_0}{\omega_1} - I_z = 0{,}1 \cdot l^2;$$

$$\frac{I_z \cdot \omega_0 - I_z \cdot \omega_1}{0{,}1 \cdot \omega_1} = l^2;$$

$$l = \sqrt{\frac{I_z \cdot \omega_0 - I_z \cdot \omega_1}{0{,}1 \cdot \omega_1}};$$

$$l = \sqrt{\frac{0{,}075 \cdot 4 - 0{,}075 \cdot 3}{0{,}1 \cdot 3}} = 0{,}5 \text{ м}.$$

Ответ: $l = 0{,}5$ м.

3.9 Применение теоремы об изменении кинетического момента к исследованию движения системы

1 Дать формулировку теоремы об изменении кинетического момента системы.

2 Что такое момент инерции относительно оси?

3 Что обозначает радиус инерции тела?

4 Дать формулировку теоремы Гюйгенса – Штейнера.

5 Выполнить индивидуальное задание № 3 «Применение теоремы об изменении кинетического момента к исследованию движения системы».

3.10 Работа и мощность силы

1 Записать формулы элементарной работы силы F при различных способах задания движения.

2 Чему равна мощность силы F?

3 Записать формулы работ силы тяжести, силы упругости, силы трения.

4 В каком случае работа силы отрицательная?

5 Решить задачи 38.12 из [4], 15.1.2, 15.1.14, 15.1.16, 15.1.19 из [5].

Задача 8. На тело действует постоянная по направлению сила $F = 4x^3$ (рисунок 11). Определить работу этой силы при перемещении тела из положения с координатой $x_0 = 0$ в положение с координатой $x_1 = 1$ м.

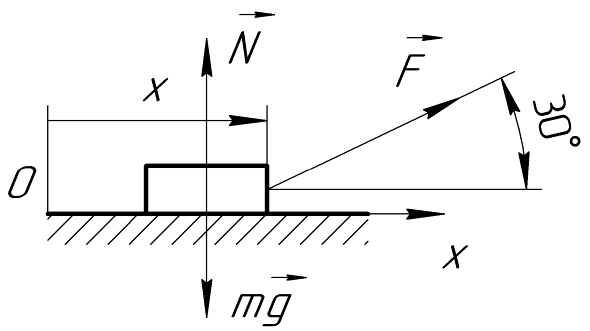

Рисунок 11 – Условие задачи 8

Решение

В общем случае работа силы на конечном перемещении M_1M_2

$$A = \int_{M_1}^{M_2} F ds \cos\alpha . \quad (30)$$

Для данного примера работа силы определяется по формуле

$$A = \int_{x_0}^{x_1} F \cdot dx \cdot \cos 30° ; \quad (31)$$

$$A = \int_0^1 4x^3 \cdot dx \cdot \cos 30° = 4 \cdot \cos 30° \int_0^1 x^3 dx ;$$

$$A = 4 \cdot \cos 30° \left. \frac{x^4}{4} \right|_0^1 = 4 \cdot \cos 30° \frac{1^4}{4} = \cos 30° \cdot 1^4 = = 0{,}866 \, \text{Дж}.$$

Ответ: $A = 0{,}866$ Дж.

Задача 9. Цилиндр, масса которого $m = 1$ кг, радиус $r = 0,173$ м, катится без скольжения (рисунок 12). Определить суммарную работу силы тяжести и силы сопротивления качению, если ось цилиндра переместилась на расстояние $s = 1$ м и коэффициент трения качения $\delta = 0,01$ м.

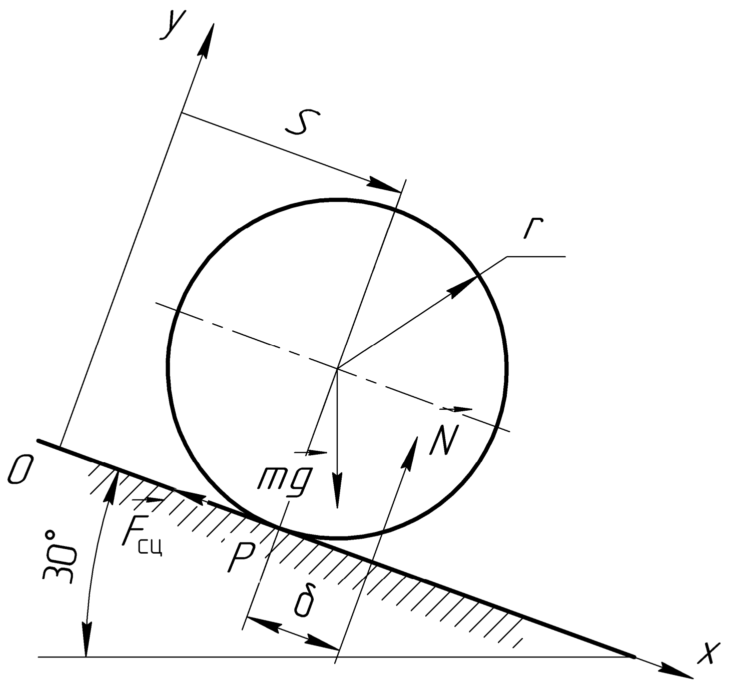

Рисунок 12 – Условие задачи 9

Решение

Работа силы тяжести

$$A = \pm mgh, \tag{32}$$

где h – вертикальное перемещение центра тяжести тела.

$$A_{mg} = mg \cdot S \cdot \cos(90° - 30°).$$

Работа момента силы

$$A = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_z d\varphi. \tag{33}$$

Если момент $M_z = \text{const}$, то последняя формула примет вид:

$$A = M_z(\varphi_2 - \varphi_1). \tag{34}$$

Работа момента силы сопротивления M

$$A_M = -M\varphi = -N\delta\varphi. \tag{35}$$

Спроецируем все силы на ось OY:

$$\sum F_{iy} = 0;\ N - mg \cdot \cos 30° = 0; \qquad (36)$$

$$N = mg \cos 30°;$$

$$S = \varphi \cdot r;\ \varphi = \frac{S}{r};$$

$$A_M = -mg \cos 30° \delta \frac{S}{r};$$

$$\sum A = A_{mg} + A_M = mg \cdot S \cdot \cos(90° - 30°) -$$

$$- mg \cdot \cos 30° \cdot \delta \cdot \frac{S}{r} = 1 \cdot 9{,}81 \cdot 1 \cdot \cos 60° - 1 \cdot 9{,}81 \cdot \cos 30° \cdot 0{,}01 \cdot \frac{1}{0{,}173} = 4{,}41 \text{ Дж}.$$

Ответ: $\sum A = 4{,}41$ Дж.

3.11 Кинетическая энергия тела и механической системы

1 Назвать две меры механического движения.

2 Записать формулы для определения кинетической энергии при поступательном, вращательном и плоском движениях твердого тела.

3 Чему равна кинетическая энергия механической системы?

4 Решить задачи 38.2 – 38.4 из [4], 15.4.5, 15.4.7, 15.5.5, 15.5.7 из [5].

Задача 10. Однородный стержень, масса которого $m = 1$ кг и длина $AB = 1$ м, вращается вокруг оси Oz по закону $\varphi = 2t^3$ (рисунок 13). Определить кинетическую энергию стержня в момент времени $t = 1$ с.

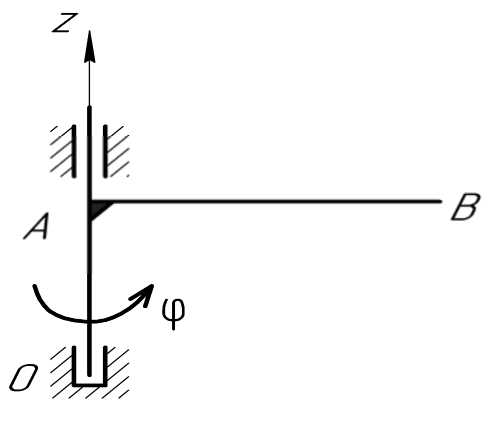

Рисунок 13 – Условие задачи 10

Решение

Кинетическая энергия при вращательном движении

$$T = \frac{I_z \cdot \omega^2}{2}, \qquad (37)$$

где ω – угловая скорость стержня;

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \left(2t^3\right)' = 2 \cdot 3t^2 = 6t^2 = 6 \cdot 1^2 = 6 \text{ рад/с}.$$

Момент инерции стержня, если ось вращении проходит через конец стержня,

$$I_z = \frac{m \cdot l^2}{3}; \tag{38}$$

$$I_z = \frac{m \cdot AB^2}{3} = \frac{3 \cdot 1^2}{3} = 1 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Тогда

$$T = \frac{1 \cdot 6^2}{2} = 18 \text{ Дж}.$$

Ответ: $T = 18$ Дж.

Задача 11. Груз массой $m = 4$ кг, опускаясь вниз, приводит с помощью нити во вращение цилиндр радиуса $R = 0{,}4$ м (рисунок 14). Момент инерции цилиндра относительно оси вращения $I = 0{,}2$ кг$\cdot$м^2. Определить кинетическую энергию системы тел в момент времени, когда скорость груза $V = 2$ м/с.

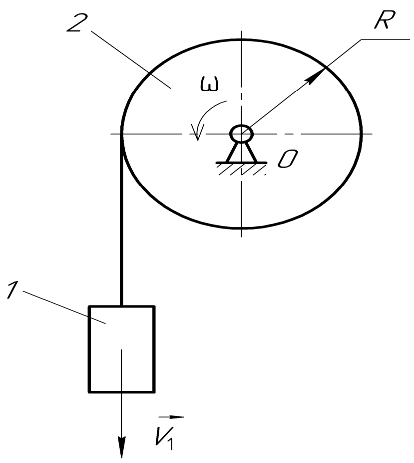

Рисунок 14 – Условие задачи 11

Решение

Кинетическая энергия системы состоит из суммы кинетических энергий двух тел:

$$\sum T = T_1 + T_2. \tag{39}$$

Груз совершает поступательное движение, а кинетическая энергия твердого тела в случае его поступательного движения определяется по формуле

$$T = \frac{Mv_C^2}{2}, \tag{40}$$

где v_C – скорость центра масс твердого тела;

M – масса твердого тела.

Тогда кинетическая энергия груза *1* будет

$$T_1 = \frac{4 \cdot 2^2}{2} = 8 \text{ Дж.}$$

Так как груз движется со скоростью V, то и трос движется с такой же скоростью, соответственно, угловая скорость цилиндра

$$\omega = \frac{V}{R} = \frac{2}{0,4} = 5 \text{ рад/с.}$$

Цилиндр совершает вращательное движение, и его кинетическая энергия определится по формуле

$$T_2 = \frac{I \cdot \omega^2}{2} = \frac{0,2 \cdot 5^2}{2} = 2,5 \text{ Дж.}$$

Тогда кинетическая энергия механической системы

$$\sum T = 8 + 2,5 = 10,5 \text{ Дж.}$$

Ответ: $\sum T = 10,5$ Дж.

3.12 Теорема об изменении кинетической энергии

1 Записать формулы элементарной работы силы F при различных способах задания движения.

2 Чему равна мощность силы F?

3 Чему равен дифференциал кинетической энергии материальной точки?

4 Чему равна производная по времени от кинетической энергии механической системы?

5 Записать теорему об изменении кинетической энергии механической системы в интегральном виде для системы с идеальными связями.

6 Решить задачи 38.20, 38.27, 38.30, 38.31, 38.44 из [4], 15.3.4, 15.3.13, 15.6.10, 15.7.7, 15.7.9 из [5].

Задача 12. Определить скорость груза *2* в момент времени, когда он опустился вниз на расстояние $s = 4$ м, если массы грузов $m_1 = 2$ кг, $m_2 = 4$ кг (рисунок 15). Система тел вначале находилась в покое.

Решение

Согласно теореме об изменении кинетической энергии для механической системы с идеальными связями

$$T - T_0 = \sum A^E . \tag{41}$$

Так как система в начальный момент времени находилась в покое, то ее кинетическая энергия в этот момент времени была равна нулю. Определим кинетическую энергию механической системы в конечный момент времени:

$$T = T_1 + T_2 , \tag{42}$$

где T_1 и T_2 – кинетическая энергия первого и второго грузов соответственно.

Так как грузы совершают поступательное движение, то их кинетическая энергия будет определяться по формуле (42).

Скорость первого тела выразим через скорость второго тела:

$$V_1 = \frac{V_2}{2} .$$

Тогда

$$T_1 = \frac{m_1 \frac{V_2^2}{4}}{2} = m_1 \frac{V_2^2}{8} ;$$

$$T_2 = \frac{m_2 \cdot V_2^2}{2} ;$$

$$T = m_1 \frac{V_2^2}{8} + \frac{m_2 \cdot V_2^2}{2} = V_2^2 \cdot \left(\frac{m_1}{8} + \frac{m_2}{2} \right).$$

Определим работу внешних сил, приложенных к системе.

Работа силы тяжести первого тела будет отрицательной, т. к. направление силы не совпадает с направлением его перемещения. Работа силы тяжести второго тела будет положительной, т. к. сила совпадает с направлением перемещения s:

$$A_1 = -m_1 \cdot g \cdot \frac{s}{2} ;\; A_2 = m_2 \cdot g \cdot s ;$$

$$A = A_1 + A_2 = -m_1 \cdot g \cdot \frac{s}{2} + m_2 \cdot g \cdot s = -2 \cdot 9{,}81 \cdot \frac{4}{2} + 4 \cdot 9{,}81 \cdot 4 = 143{,}15\,\text{Дж}.$$

Подставим найденные величины:

$$V_2^2 \left(\frac{m_1}{8} + \frac{m_2}{2} \right) = 143{,}15\,;$$

$$V_2 = \sqrt{\frac{143{,}15}{\left(\frac{m_1}{8} + \frac{m_2}{2} \right)}} = 7{,}56\,\text{м/с}.$$

Ответ: $V_2 = 7{,}56$ м/с.

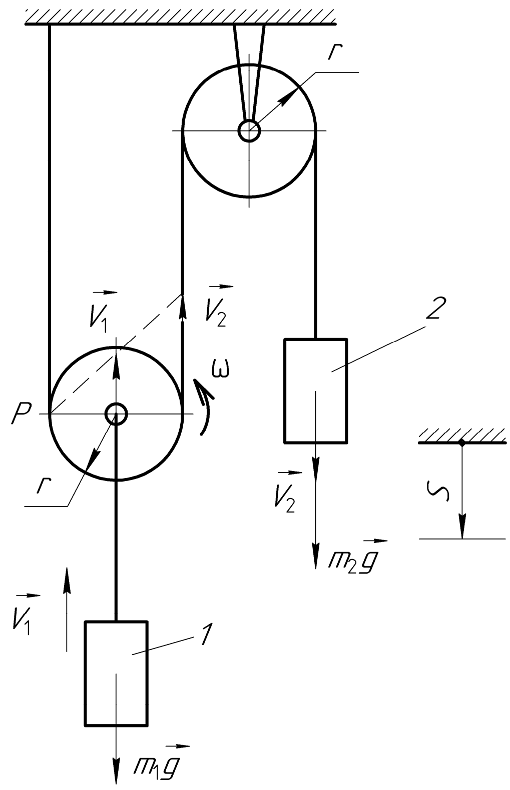

Рисунок 15 – Условие задачи 12

3.13 Применение теоремы об изменении кинетической энергии к изучению движения механической системы

1 Дать формулировку теоремы об изменении кинетической энергии механической системы.

2 Чему равна работа постоянной по модулю и направлению силы?

3 Записать формулы для определения кинетической энергии при поступательном, вращательном и плоском движениях твердого тела.

4 Чему равна кинетическая энергия механической системы?

5 Выполнить индивидуальное задание № 4 «Применение теоремы об изменении кинетической энергии к изучению движения механической системы».

3.14 Контрольная работа № 4. Общие теоремы динамики

3.15 Динамика плоского движения твердого тела

1 Сформулировать теорему об изменении кинетического момента механической системы в ее относительном движении по отношению к центру масс.

2 Записать дифференциальные уравнения плоского движения твердого тела.

3 Какие две основные задачи решаются с помощью этих дифференциальных уравнений?

4 Решить задачи 39.15, 39.19, 39.20 из [4], 16.2.9, 16.2.15, 16.2.16 из [5].

3.16 Принцип Даламбера

1 Записать векторное выражение принципа Даламбера для материальной точки.

2 Как определяется сила инерции материальной точки?

3 Как определяется величина касательной составляющей силы инерции материальной точки?

4 Как определяется величина нормальной составляющей силы инерции материальной точки?

5 Чему равна величина касательной составляющей силы инерции точки твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси?

6 Чему равен главный вектор сил инерции твердого тела при поступательном движении?

7 Чему равен момент силы инерции относительно оси вращения при вращательном движении твердого тела?

8 Решить задачи 41.10, 41.16, 41.17, 41.21 из [4], 17.1.13, 17.1.17, 17.3.7, 17.3.11, 17.3.13, 17.3.25 из [5].

Задача 13. Груз массой m = 60 кг подвешен на нити, которая наматывается на барабан, вращающийся согласно уравнению $\varphi = 0,6t^2$ (рисунок 16). Определить натяжение каната, если радиус r = 0,4 м.

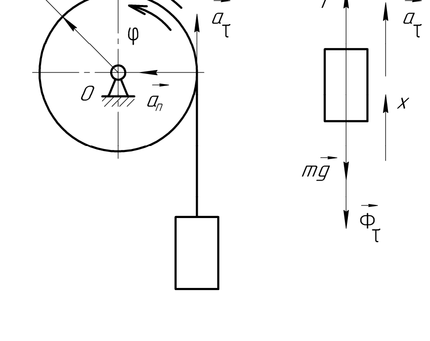

Рисунок 16 – Условие задачи 13

Решение

Согласно принципу Даламбера

$$\vec{F} + \vec{\Phi} + \vec{R} = 0. \tag{43}$$

Спроецируем данное уравнение на ось x:

$$-mg - \Phi_\tau + T = 0 \Rightarrow T = mg + \Phi_\tau.$$

На тело действует только касательное ускорение, поэтому Φ_τ – сила инерции груза, которая определяется как

$$\Phi_\tau = m \cdot a_\tau. \tag{44}$$

$$a_\tau = \varepsilon \cdot r, \tag{45}$$

где ε – угловое ускорение барабана,

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = 1,2 \text{ рад/с}^2;$$

$$a_\tau = 1,2 \cdot 0,4 = 0,48 \text{ м/с}^2;$$

$$T = m \cdot g + m \cdot a_\tau = m(g + a_\tau) = 60(9,81 + 0,48) = 617,4\ H.$$

Ответ: $T = 617,4$ Н.

3.17 Контрольная работа № 5 . Дифференциальные уравнения плоского движения тела и принцип Даламбера

3.18 Принцип возможных перемещений

1 Указать число обобщенных координат свободной материальной точки.
2 Указать число обобщенных координат свободного твердого тела.
3 Как называются связи, наложенные на механическую систему, если сумма элементарных работ реакций этих связей на любом возможном перемещении системы равна нулю?
4 Записать виды уравнений работ, характеризующих принцип возможных перемещений.
5 Решить задачи 46.1, 46.3, 46.10, 46.20, 46.21 из [4], 18.2.4, 18.3.23 из [5].

3.19 Общее уравнение динамики

1 Какой вид имеет общее уравнение динамики механической системы?

2 Записать общее уравнение динамики в векторной и аналитической формах для механической системы с идеальными связями.

3 От размерности какой величины зависит размерность обобщенной силы?

4 Какие принципы объединяет общее уравнение? Записать эти принципы.

5 Чему равна сумма работ всех задаваемых сил и сил инерции точек механической системы на любом возможном ее перемещении.

6 Решить задачи 47.1, 47.5, 47.11, 47.15 из [4], 19.1.4, 19.1.8, 19.2.5, 19.3.7, 19.3.22 из [5].

Задача 14. На клин *3* действует сила $F = 100$ Н (рисунок 17). Определить, с какой силой толкатель *2* прижимает деталь *1* к опорной плоскости в положении равновесия, если угол $\alpha = 11$.

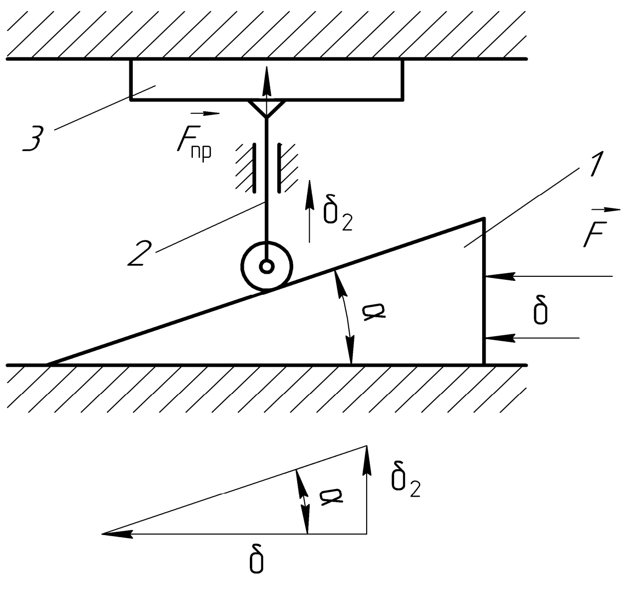

Рисунок 17 – Условие задачи 14

Решение

Предположим, что под действием силы *F* клин *3* переместится на расстояние δ. Тогда толкатель *2* сместится на расстояние δ_2. Эти перемещения связаны между собой зависимостью

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\delta_2}{\delta} \Rightarrow \delta_2 = \mathrm{tg}\alpha \cdot \delta .$$

Для системы с идеальными связями общее уравнение динамики имеет вид:

$$\sum \delta A_i^E + \sum \delta A_i^{\Phi} = 0 . \qquad (46)$$

Запишем общее уравнение динамики применительно к данному случаю:

$$F\delta - F_{ПР}\delta_2 = 0;$$

$$F_{ПР} = \frac{F\delta}{\delta_2} = \frac{F\delta}{\mathrm{tg}\alpha \cdot \delta} = \frac{100}{\mathrm{tg}11^\circ} = 514,45\ \text{Н}.$$

Ответ: $F_{ПР} = 514,45$ Н.

3.20 Уравнения Лагранжа второго рода

1 Что называют обобщенными координатами?

2 Что называется обобщенной силой?

3 Какую размерность имеет обобщенная сила, если за обобщенную координату принять угловое перемещение?

4 Как определяется обобщенная сила, если система имеет несколько обобщенных координат?

5 Для механических систем с какими связями применяется уравнение Лагранжа второго рода?

6 Запишите уравнение Лагранжа второго рода для системы с двумя степенями свободы (обобщенные координаты S, ϕ), пояснить все входящие в запись величины.

7 Решить задачи 48.1, 48.6, 48.26, 48.31 из [4], 20.3.9, 20.3.13, 20.6.17, 20.6.18 из [5].

3.21 Контрольная работа № 6. Принципы аналитической механики

3.22 Малые колебания систем

1 Какие движения механической системы называют колебательными?

2 Какие положения равновесия механических систем вы знаете?

3 Что такое малые колебания механических систем?

4 Дифференциальное уравнение свободных колебаний механических систем и его решение?

5 Затухающие колебания (дифференциальное уравнение и его решение).

6 Параметры характеризующие затухающие колебания механических систем.

7 Решить задачи 21.1.4, 21.1.5, 21.1.10, 21.1.13 из [5]; 54.1, 54.2 из [4].

3.23 Основы теории удара

1 Что называют ударом?

2 Ударная сила и ударный импульс.

3 Теорема об изменении количества движения при ударе.

4 Коэффициент восстановления при ударе.

5 Косой удар.

6 Что называют потерянной скоростью?

7 Решить задачи 44.1, 44.5, 44.10, 44.16 из [4], 22.1.2, 22.1.7, 22.2.9, 22.2.10 из [5].

Список литературы

1 **Цывильский, В. Л.** Теоретическая механика: учебник / В. Л. Цывильский. – 4-е изд., перераб. и доп. – Москва: КУРС; ИНФРА-М, 2016. – 368 с.

2 **Чигарев, А. В.** Теоретическая механика. Решение задач: учебное пособие / А. В. Чигарев, Ю. В. Чигарев, И. С. Крук. – Минск: Минфин, 2016. – 478 с.

3 Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике. Теория. Задания. Подробные примеры решения задач: учебное пособие / Б. Е. Ермаков [и др.]; под общ. ред. Б. Е. Ермакова. – Москва: ЛЕНАНД, 2015. – 464 с.

4 **Мещерский, И. В.** Задачи по теоретической механике: учебное пособие / И. В. Мещерский; под ред. В. А. Пальмова, Д. Р. Меркина. – 46-е изд., стереотип. – Москва: Лань, 2006. – 448 с.

5 Сборник коротких задач по теоретической механике: учебное пособие для вузов / Под ред. О. Э. Кепе. – Санкт-Петербург: Лань, 2009. – 368 с.

6 **Бать, М. И.** Теоретическая механика в примерах и задачах: учебное пособие для втузов / М. И. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон. – Москва: Наука, 1990. – Т. 1–3.

7 **Кирсанов, М. Н.** Теоретическая механика. Сборник задач: учебное пособие / М. Н. Кирсанов. – Москва: ИНФРА-М, 2015. – 430 с.