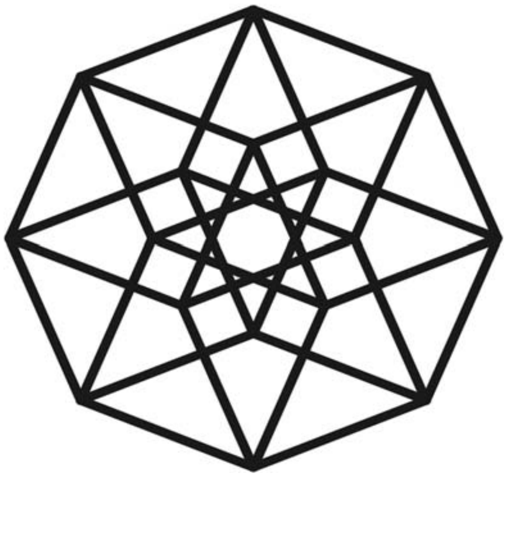
МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Высшая математика»

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Методические рекомендации к практическим занятиям для студентов направления подготовки 01.03.04 «Прикладная математика» очной формы обучения



Могилев 2021

УДК 519.21
ББК 22.171
Т33

Рекомендовано к изданию
учебно-методическим отделом
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Высшая математика» «24» декабря 2020 г., протокол № 4

Составитель В. Г. Замураев

Рецензент И. И. Маковецкий

Методические рекомендации содержат краткие теоретические сведения по дисциплине «Теория вероятностей и случайные процессы», основные формулы, задачи для самостоятельного решения и домашние задания. Большинство задач снабжены ответами.

Учебно-методическое издание

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Ответственный за выпуск В. Г. Замураев

Корректор А. А. Подошевко

Компьютерная верстка Е. В. Ковалевская

Подписано в печать . Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Печать трафаретная. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 56 экз. Заказ №

Издатель и полиграфическое исполнение:
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования
«Белорусско-Российский университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/156 от 07.03.2019.
Пр-т Мира, 43, 212022, г. Могилев.

Содержание

1 Практическое занятие № 1. Случайный эксперимент и случайные события.. 4
2 Практическое занятие № 2. Классическое определение вероятности........ 7
3 Практическое занятие № 3. Геометрическое определение вероятности.... 9
4 Практическое занятие № 4. Теоремы сложения и умножения вероятностей 11
5 Практическое занятие № 5. Формула полной вероятности. Формула Байеса.. 14
6 Практическое занятие № 6. Последовательность независимых испытаний.. 16
7 Практическое занятие № 7. Предельные теоремы в схеме Бернулли 19
8 Практическое занятие № 8. Цепи Маркова 21
9 Практическое занятие № 9. Дискретные случайные величины 25
10 Практическое занятие № 10. Непрерывные случайные величины 27
11 Практическое занятие № 11. Законы распределения вероятностей некоторых случайных величин. 30
12 Практическое занятие № 12. Дискретные векторные случайные величины 33
13 Практическое занятие № 13. Непрерывные векторные случайные величины 36
14 Практическое занятие № 14. Неравенство Чебышева. Закон больших чисел 38
15 Практическое занятие № 15. Характеристические и производящие функции 41
16 Практическое занятие № 16. Центральная предельная теорема 44
17 Практическое занятие № 17. Основные понятия теории случайных процессов 46
Список литературы 48

1 Практическое занятие № 1. Случайный эксперимент и случайные события

Математические модели случайных явлений, рассматриваемые в теории вероятностей, основываются на понятии *вероятностного пространства*, т. е. тройки $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$, где $\Omega = \{\omega\}$ – непустое множество, элементы ω которого интерпретируются как взаимно исключающие исходы изучаемого случайного явления; $\mathfrak{A}$ – набор подмножеств множества Ω, называемых событиями (предполагается, что множество $\mathfrak{A}$ содержит Ω и замкнуто относительно взятия противоположного события и суммы событий в не более чем счётном числе, т. е. является σ-алгеброй); вероятность P – функция, определённая на событиях $A \in \mathfrak{A}$ и удовлетворяющая следующим условиям:

1) $P(A) \geq 0$ при любом $A \in \mathfrak{A}$;

2) $P(\Omega) = 1$;

3) $P\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n)$, если $A_i A_j = \varnothing$ при любых $i \neq j$. Здесь символ $\varnothing$ обозначает пустое множество (или невозможное событие).

Задачи для самостоятельной работы

1.1 В урне лежат три серебряных и один золотой шар. Случайный эксперимент состоит в извлечении из урны наугад двух шаров. Задайте перечислением всех элементов множество Ω элементарных исходов данного случайного эксперимента. Какие из исходов благоприятствуют извлечению из урны золотого шара? Сколько случайных событий может произойти в данном эксперименте?

1.2 Случайный эксперимент состоит в одновременном подбрасывании пяти монет. Какой вид имеют элементарные исходы данного эксперимента? Сколько всего элементарных исходов?

1.3 Случайный эксперимент состоит в бросании игральной кости до выпадения шестёрки. Какой вид имеют элементарные исходы данного эксперимента? Будет ли их конечное число или бесконечно много?

1.4 Отрезок длины l случайным образом разбит на три части. Что представляет собой множество элементарных исходов данного случайного эксперимента?

1.5 На игральной кости неразличимы грани, содержавшие единицу и шестёрку. Сколько событий может произойти при бросании этой кости?

1.6 Является ли алгеброй следующая система $\mathfrak{S}$ подмножеств множества $\{1,2,3,4,5,6\}$: $\mathfrak{S} = \{\{1,2,3\},\{4,5,6\}\}$? Какова минимальная алгебра, содержащая данную систему?

1.7 Множество Ω элементарных исходов некоторого случайного эксперимента имеет вид: $\Omega = \{0,1\}$. Алгебра событий $\mathfrak{A} = 2^{\Omega}$. Являются ли следующая функция $f = f(\omega)$ вероятностной мерой на алгебре $\mathfrak{A}$:

а) $f(\varnothing) = 0$, $f(\Omega) = 1$, $f(\{0\}) = 0{,}1$, $f(\{1\}) = 0{,}9$;

б) $f(\varnothing)=0$, $f(\Omega)=1$, $f(\{0\})=0{,}5$, $f(\{1\})=0{,}5$;

в) $f(\varnothing)=f(\Omega)=f(\{0\})=f(\{1\})=0{,}25$?

1.8 Пусть A, B и C – некоторые события в данном случайном эксперименте. Доказать следующие тождества:

а) $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$;

б) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

Проиллюстрировать данные равенства конкретными примерами.

1.9 Среди студентов, собравшихся на лекцию по теории вероятностей, выбирают наудачу одного. Пусть событие A заключается в том, что выбранный окажется юношей. Событие B – в том, что он не курит, а событие C – в том, что он живёт в общежитии.

а) Описать событие $A\cap B\cap\overline{C}$.

б) При каком условии будет иметь место тождество $A\cap B\cap C=A$?

в) Когда будет справедливо соотношение $\overline{C}\subseteq B$?

г) Когда будет равенство $\overline{A}=B$? Будет ли оно иметь место, если все юноши курят?

1.10 Рабочий изготовил n деталей. Пусть событие A_i $(i=\overline{1,n})$ заключается в том, что i-я изготовленная им деталь имеет дефект. Записать событие, заключающееся в том, что:

а) ни одна из деталей не имеет дефектов;

б) хотя бы одна деталь имеет дефект;

в) только одна деталь имеет дефект;

г) по крайней мере две детали не имеют дефектов.

1.11 Являются ли несовместными следующие события:

а) опыт – бросание монеты, события: A_1 – выпадение герба, A_2 – выпадение цифры;

б) опыт – бросание двух монет, события: B_1 – выпадение герба на первой монете, B_2 – выпадение цифры на второй монете;

в) опыт – два выстрела по мишени, события: C_0 – ни одного попадания, C_1 – одно попадание, C_2 – два попадания;

г) опыт – два выстрела по мишени, события: D_1 – хотя бы одно попадание, D_2 – хотя бы один промах;

д) опыт – вынимание двух карт из колоды, события: E_1 – появление двух чёрных карт, E_2 – появление туза; E_3 – появление дамы?

1.12 События A_1, A_2, …, A_n образуют полную группу, если в результате эксперимента непременно должно произойти хотя бы одно из них. Несколько событий в данном эксперименте называются равновозможными, если по условиями симметрии опыта нет оснований считать какое-либо из них более возможным, чем какое-либо другое. Если несколько событий образуют полную группу, несовместны и равновозможны, то они называются случаями. Приведите примеры:

а) трёх событий, образующих группу случаев;

б) трёх событий, равновозможных и несовместных, но не образующих полной группы;

в) двух событий, несовместных и образующих полную группу, но не равновозможных;

г) двух событий, равновозможных и образующих полную группу, но совместных.

Домашнее задание

1.13 Доказать, что $\overline{(A \cup B)} \cap C = \left(\overline{A} \cap C\right) \cup \left(\overline{B} \cap C\right)$ имеет место тогда, и только тогда, когда $A \cap C = B \cap C$.

1.14 Монета бросается до тех пор, пока 2 раза подряд она не выпадет одной и той же стороной. Каждому возможному исходу, требующему n бросаний, припишем вероятность $\frac{1}{2^n}$. Описать множество элементарных исходов.

Найти вероятности следующих событий:

а) эксперимент окончится до шестого бросания;

б) потребуется чётное число бросаний.

1.15 Известно, что совместное наступление событий A_1 и A_2 необходимо влечёт наступление события A. Доказать, что $P(A) \geq P(A_1) + P(A_2)$.

Ответы

1.1 $\Omega = \{\{c_1, c_2\}, \{c_1, c_3\}, \{c_2, c_3\}, \{c_1, з\}, \{c_2, з\}, \{c_3, з\}\}$, $\left|2^\Omega\right| = 64$. **1.2** Пятиэлементные последовательности гербов и цифр, $|\Omega| = 32$. **1.3** Конечные последовательности цифр, содержащие одну шестёрку на последнем месте. исходов бесконечно много. **1.4** $\Omega = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \middle| 0 \leq x \leq l, 0 \leq y \leq l, 0 \leq x + y \leq l\right\}$. **1.5** 32. **1.6** Не является, нужно добавить невозможное и достоверное события. **1.7** а) является; б) является; в) не является. **1.9** а) выбран юноша, который не живёт в общежитии и не курит; б) когда все юноши живут в общежитии и не курят; в) когда курящие живут только в общежитии; г) когда ни одна девушка не курит, а все юноши курят; нет, т. к. могут курить и девушки. **1.11** а) да; б) нет; в) да; г) нет; д) нет. **1.12** а) опыт – бросание игральной кости, события: A_1 – выпадение не более двух очков, A_2 – выпадение трёх или четырёх очков, A_3 – выпадение не менее пяти очков; б) опыт – вынимание одной карты из колоды, события: B_1 – появление карты червонной масти, B_2 – появление карты бубновой масти, B_3 – появление карты трефовой масти; в) опыт – выстрел по мишени, события: C_1 – попадание, C_2 – промах; г) опыт – бросание игральной кости, события: D_1 – выпадение не менее трёх очков, D_2 – выпадение не более четырёх очков. **1.14** Ω состоит из последовательностей гербов и цифр, оканчивающихся на двух гербах либо двух цифрах; а) $\frac{15}{16}$; б) $\frac{2}{3}$.

2 Практическое занятие № 2. Классическое определение вероятности

Рассмотрим простейший класс вероятностных пространств. Пусть $\Omega = \{ \omega_1, \omega_2, ..., \omega_n \}$. В σ-алгебру событий $\mathfrak{A}$ включаются все 2^n подмножеств $A = \{ \omega_{i_1}, \omega_{i_2}, ..., \omega_{i_m} \}$ множества Ω. В классическом определении вероятности полагают все $P(\omega_i) = \frac{1}{n}$, поэтому вероятность $P(A)$ события $A = \{ \omega_{i_1}, \omega_{i_2}, ..., \omega_{i_m} \}$ равна отношению числа элементарных событий ω_i, входящих в A, к общему числу элементарных событий в Ω:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{m}{n}. \tag{2.1}$$

Классическое определение вероятности является хорошей математической моделью тех случайных явлений, для которых исходы опыта в каком-либо смысле симметричны, и поэтому представляется естественным предположение об их равновозможности.

Дадим описание двух часто встречающихся вероятностных схем, в которых детализируется общее классическое определение. Обозначим через N множество из n чисел: $N = \{1, 2, ..., n\}$; пусть $\omega = (i_1, i_2, ..., i_m)$ – упорядоченный набор из m элементов множества N. Вероятностную схему, в которой

$$\Omega = \{ \omega = (i_1, i_2, ..., i_m) | i_k \in N,\ k = 1, 2, ..., m \}$$

и все элементарные события ω равновероятны, называют схемой *случайного выбора с возвращением*.

Схемой *случайного выбора без возвращения* называют вероятностную схему, в которой

$$\Omega = \{ \omega = (i_1, i_2, ..., i_m) | i_k \in N,\ k = 1, 2, ..., m,\ \text{среди } i_1, i_2, ..., i_m \text{ нет одинаковых} \}$$

и элементарные события ω равновероятны.

При вычислении вероятности по формуле (2.1) часто оказываются полезными различные комбинаторные формулы. Приведём основные из них. Пусть дано множество N из n элементов: $N = \{ a_1, a_2, ..., a_n \}$. Подмножества множества N называют *сочетаниями*. Число сочетаний, которые можно образовать из n элементов N, выбирая различными способами подмножества по m элементов, обозначают C_n^m или $\binom{n}{m}$. Справедливы формулы

$$C_n^m = \frac{n^{[m]}}{m!},\ C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!},\ C_n^m = C_n^{n-m},$$

где $n! = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n$ и $n^{[m]} = n(n-1)...(n-m+1)$.

Упорядоченные цепочки $a_{i_1}a_{i_2}...a_{i_m}$, образованные из различных элементов N, называют *размещениями*. Число размещений, образованных выбором различных упорядоченных цепочек длины m из n элементов N, обозначают A_n^m. Для A_n^m имеем формулу $A_n^m = n^{[m]}$. Частный случай размещений при $m = n$ называют *перестановками*. Число различных перестановок, образованных из n элементов, равно $n!$

Задачи для самостоятельной работы

2.1 Найти вероятность p_n того, что случайно взятое натуральное число из множества $\{1,2,...,n\}$ делится на фиксированное натуральное число m.

2.2 Колода из 36 карт хорошо перемешана. Найти вероятность того, что четыре туза расположены рядом.

2.3 В партии из n изделий k бракованных. Определить вероятность того, что среди выбранных наудачу для проверки m изделий ровно l окажутся бракованными.

2.4 Из колоды в 36 игральных карт вынимают наудачу три карты. Найти вероятность того, что все эти три карты будут одной масти.

2.5 В урне три золотых, четыре серебряных и пять бронзовых шаров. Шары из урны извлекают наугад по одному. Найти вероятность того, что бронзовый шар появится раньше золотого.

2.6 На карточках написаны буквы «а», «а», «а», «е», «и», «к», «м», «м», «т», «т». Карточки перемешивают и выкладывают в ряд. Найти вероятность того, что образовавшееся слово будет «математика».

2.7 В записанном телефонном номере $135-3*-**$ три последние цифры стёрлись. Найти вероятность того, что:

а) стёрлись различные цифры, отличные от 1, 3, 5;

б) стёрлись одинаковые цифры;

в) две из стёршихся цифр совпадают.

2.8 Пусть $X = \{1,2,...,n\}$, $Y = \{1,2,...,m\}$. Найти вероятность того, что случайно выбранная функция $f : X \to Y$ будет взаимно-однозначной.

2.9 Поток из четырёх частиц поступает в счётчик, состоящий из трёх датчиков. Каждая частица с одинаковой вероятностью может попасть в один и только один из этих датчиков. Поток считается зарегистрированным, если он отмечен хотя бы двумя датчиками. Найти вероятность того, что поток будет зарегистрирован.

2.10 Для уменьшения общего количества игр $2n$ команд спортсменов разбиты на две подгруппы. Определить вероятность того, что две наиболее сильные команды окажутся:

а) в разных подгруппах;

б) в одной подгруппе.

2.11 Имеется m шариков, которые случайным образом разбрасываются по n лункам. Найти вероятность того, что в первую лунку попадёт ровно k_1 шариков, во вторую – k_2 шариков и т. д., в n-ю – k_n шариков, $\sum_{i=1}^{n} k_i = m$.

Домашнее задание

2.12 Куб, все грани которого окрашены, распилен на тысячу кубиков одинакового размера. Полученные кубики тщательно перемешаны. Определить вероятность того, что наудачу извлеченный кубик будет иметь две окрашенные грани.

2.13 На полке в случайном порядке расставлено 40 книг, среди которых находится трёхтомник А. С. Пушкина. Найти вероятность того, что эти тома стоят в порядке возрастания слева направо (но не обязательно рядом).

2.14 Найти вероятность того, что в «Спортлото 5 из 36» будет угадано:

а) три номера;

б) четыре номера;

в) пять номеров.

2.15 Четыре шарика случайным образом разбрасываются по четырём лункам; каждый шарик попадает в ту или другую лунку с одинаковой вероятностью и независимо от других (препятствий к попаданию в одну и ту же лунку нескольких шариков нет). Найти вероятность того, что в одной из лунок окажется три шарика, в другой – один, а в двух остальных лунках шариков не будет.

2.16 Из последовательности чисел $\{1,2,...,n\}$ наудачу выбирают два числа. Какова вероятность, что одно из них меньше k, а другое больше k, где k – целое число, $1<k<n$?

Ответы

2.1 $\frac{1}{n}\cdot\left[\frac{n}{k}\right]$. **2.2** $\frac{1}{1785}$. **2.3** $\frac{C_k^l C_{n-k}^{m-l}}{C_n^m}$. **2.4** $\frac{4}{85}$. **2.5** $\frac{5}{8}$. **2.6** $\frac{3!2!2!}{10!}$. **2.7** а) $0,21$; б) $0,01$; в) $0,27$. **2.8** $\frac{m^{[n]}}{m^n}$. **2.9** $\frac{26}{27}$. **2.10** а) $\frac{n}{2n-1}$; б) $\frac{n-1}{2n-1}$. **2.11** $\frac{m!}{n^m k_1 k_2 ... k_n}$. **2.12** $0,096$. **2.13** $\frac{1}{6}$. **2.14** а) $\frac{4650}{376992}$; б) $\frac{155}{376992}$; в) $\frac{1}{376992}$. **2.15** $\frac{3}{16}$. **2.16** $\frac{2(k-1)(n-k)}{n(n-1)}$.

3 Практическое занятие № 3. Геометрическое определение вероятности

Пусть Ω – ограниченное множество n-мерного евклидова пространства. Будем предполагать, что Ω имеет объём. Рассмотрим систему $\mathfrak{A}$ подмножеств Ω, имеющих объём. Для любого $A\in\mathfrak{A}$ положим

$$P(A)=\frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}, \tag{3.1}$$

где $\mu(C)$ – объём множества C.

Если под объёмом множества понимать его меру Лебега, то система $\mathfrak{A}$ – это σ-алгебра измеримых по Лебегу множеств, и тогда функция $P(A)$, определённая формулой (3.1), является вероятностью. Отметим, что система $\mathfrak{A}$, в частности, содержит все подмножества Ω, измеримые по Жордану, т. е. обычные квадрируемые или кубируемые фигуры, которые изучаются в любом курсе математического анализа. В большинстве задач рассматривается именно этот частный случай. Определение вероятности (3.1) называют *геометрическим определением вероятности*.

Задачи для самостоятельной работы

3.1 В точке C, положение которой на телефонной линии AB длины L равновозможно, произошёл разрыв. Определить вероятность того, что точка C удалена от точки A на расстояние, не меньшее l.

3.2 На плоскости проведены параллельные линии, расстояния между которыми попеременно равны $1{,}5$ и 8 см. Определить вероятность того, что наудачу брошенный на эту плоскость круг радиуса $2{,}5$ см не будет пересечен ни одной линией.

3.3 Прямоугольная решётка состоит из цилиндрических прутьев радиусом r. Расстояния между осями прутьев равны соответственно a и b. Определить вероятность попадания шариком диаметра d в решетку при одном бросании без прицеливания, если траектория полёта шарика перпендикулярна плоскости решётки.

3.4 На отрезке AB длиной l наудачу поставлены две точки C и D. Найти вероятность того, что точка C будет ближе к точке D, чем к точке A.

3.5 К автобусной остановке через каждые 4 мин подходит автобус линии A и через каждые 6 мин – автобус линии B. Интервал времени между моментами прихода автобуса линии A и ближайшего следующего автобуса линии B равновозможен в пределах от 0 до 4 мин. Определить вероятность того, что:

а) первый подошедший автобус окажется автобусом линии A;

б) автобус какой-либо линии подойдёт в течение 2 мин.

3.6 Два парохода должны подойти к одному и тому же причалу. Время прихода обоих пароходов независимо и равновозможно в течение данных суток. Определить вероятность того, что одному из пароходов придётся ожидать освобождения причала, если время стоянки первого парохода 1 ч, а второго – 2 ч.

3.7 В интервале времени $[0,T]$ в случайный момент u появляется сигнал длительности Δ. Приёмник включается в случайный момент $v \in [0,T]$ на время t. Найти вероятность обнаружения сигнала.

3.8 Определить вероятность того, что корни квадратного уравнения $x^2 + 2ax + b = 0$ действительны, если равновозможны значения коэффициентов в прямоугольнике $|a| \le n$, $|b| \le m$?

Домашнее задание

3.9 В круге радиуса R проводятся хорды параллельно заданному направлению. Какова вероятность того, что длина наугад взятой хорды не более R, если равновозможны любые положения точек пересечения хорды с диаметром, перпендикулярным выбранному направлению?

3.10 На бесконечную шахматную доску со стороной квадрата a бросают наугад монету диаметра $2r < a$. Найти вероятность того, что:

а) монета попадёт целиком внутрь одного квадрата;

б) монета пересечёт не более одной стороны квадрата.

3.11 Спутник Земли движется по орбите, которая заключена между $60°$ северной и $60°$ южной широты. Считая падение спутника в любую точку поверхности Земли между указанными параллелями равновозможным, найти вероятность того, что спутник упадёт выше $30°$ северной широты.

Ответы

3.1 $1-\frac{l}{L}$. **3.2** $\frac{6}{19}$. **3.3** $1-\left(1-\frac{2r+d}{a}\right)\left(1-\frac{2r+d}{b}\right)$. **3.4** $\frac{3}{4}$. **3.5** а) $\frac{2}{3}$; б) $\frac{2}{3}$. **3.6** $\frac{139}{1152}$. **3.7** $1-\frac{1}{2}\left(1-\frac{\Delta}{T}\right)^2-\frac{1}{2}\left(1-\frac{t}{T}\right)^2$. **3.8** $\frac{1}{2}+\frac{n^2}{6m}$ при $m \ge n^2$, $1-\frac{\sqrt{m}}{3n}$ при $m \le n^2$. **3.9** $1-\frac{\sqrt{3}}{2}$. **3.10** а) $\frac{1}{a^2}(a-2r)^2$; б) $1-4\left(\frac{r}{a}\right)^2$. **3.11** $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}$.

4 Практическое занятие № 4. Теоремы сложения и умножения вероятностей

Приведём формулы, которые часто используются при решении задач. Для любых событий A_1, A_2, … имеем

$$\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{A_n},\ \overline{\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A_n}.$$

При любых A и B верна формула $P(A+B) = P(A)+P(B)-P(AB)$, в частности, при $AB=\varnothing$ имеем $P(A+B)=P(A)+P(B)$.

Вероятность суммы произвольных n событий находится по формуле

$$P(A_1+A_2+\ldots+A_n) = \sum_{k=1}^{n} A_k - \sum_{1\le k_1<k_2\le n} P(A_{k_1}A_{k_2}) +$$

$$+\sum_{1\le k_1<k_2<k_3\le n} P(A_{k_1}A_{k_2}A_{k_3}) - \ldots + (-1)^{n-1} P(A_1A_2\ldots A_n) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{l-1} \sum_{1\le k_1<k_2<\ldots<k_l\le n} P(A_{k_1}A_{k_2}\ldots A_{k_l}).$$

В построении математической модели последовательности испытаний важную роль играют понятия независимости событий и условной вероятности. *Условная вероятность* $P(B|A)$ события B при условии, что событие A произошло, определяется формулой

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)},\ P(A)>0.$$

Это равенство может быть записано в виде «теоремы умножения»

$$P(AB)=P(A)P(B|A). \tag{4.1}$$

Обобщением (4.1) является формула

$$P(A_1A_2...A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)...P(A_n|A_1A_2...A_{n-1}).$$

Равенство

$$P(B|A)=P(B) \tag{4.2}$$

естественно интерпретировать как *независимость* события B от A. За определение независимости двух событий A и B принимается более симметричное условие

$$P(AB)=P(A)P(B) \tag{4.3}$$

эквивалентное (4.2), если $P(A)>0$. Из (4.3) следует независимость ещё трёх пар событий: $\overline{A}$ и B, A и $\overline{B}$, $\overline{A}$ и $\overline{B}$. События A_1, A_2, …, A_n называются *взаимно независимыми* (или *независимыми в совокупности*, или просто *независимыми*), если для всех комбинаций индексов $1\le i_1<i_2<...<i_k\le n$ $(k=2,...,n)$ имеем

$$P(A_{i_1}A_{i_2}...A_{i_k})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})...P(A_{i_k}). \tag{4.4}$$

Если (4.4) выполняется только при $k=2$, то события A_1, A_2, …, A_n называют *попарно независимыми*.

Задачи для самостоятельной работы

4.1 Работа прибора прекратилась вследствие выхода из строя одного из n блоков. Отыскание этого блока производится путём поочерёдной проверки всех блоков. Определить вероятность того, что придётся проверять $m<n$ блоков, если вероятность выхода из строя каждого блока равна p.

4.2 Какое наименьшее количество чисел нужно взять из таблицы случайных чисел, чтобы с вероятностью не менее $0{,}9$ быть уверенным, что среди них хотя бы одно число чётное?

4.3 Вероятности того, что любая деталь окажется бракованной в результате механической и термической обработки, равны соответственно p_1 и p_2. Вероятности того, что брак является неустранимым, соответственно равны p_3 и p_4. Определить вероятность того, что хотя бы одна из трёх деталей будет иметь неустранимый брак после прохождения сначала механической, а затем термической обработки.

4.4 Абонент забыл последнюю цифру номера телефона и потому набирает её наудачу. Определить вероятность того, что ему придётся звонить не более чем в три места.

4.5 Из хорошо перемешанной колоды в 36 игральных карт вынимают одну за другой четыре карты. Найти вероятность того, что все вынутые карты будут тузами. Решить данную задачу, пользуясь:

а) теоремой умножения;

б) классическим определением вероятности. Пусть событие A_i – i-я вынутая карта является тузом, $i=\overline{1,4}$. Независимы ли события A_1 и A_2?

4.6 В урне имеются два шара – золотой и серебряный. Производятся извлечения по одному шару до тех пор, пока не появится золотой, причём при извлечении серебряного шара в урну возвращается этот шар и добавляется ещё два серебряных шара. Определить вероятность того, что при первых пяти опытах золотой шар не будет извлечён.

4.7 В квадрат, разделенный на n^2 одинаковых квадратов, брошен шарик. Вероятность попадания шарика в малый квадрат i-й горизонтальной и j-й вертикальной полос равна p_{ij} ($\sum_{i,j=1}^{n} p_{ij}=1$). Определить вероятность попадания шарика в горизонтальную полосу.

4.8 Определить вероятность того, что наудачу выбранное натуральное число не делится:

а) ни на два, ни на три;

б) на два или на три.

4.9 В урне n золотых и m серебряных шаров. Из урны вынимаются $2k$ шаров ($2k<n$, $2k<m$). Найти вероятность того, что среди них будет больше золотых, чем серебряных.

4.10 В урне n золотых и m серебряных шаров. Два игрока последовательно достают по одному шару, возвращая каждый раз извлечённый шар. Игра продолжается до тех пор, пока кто-нибудь из них не достанет золотой шар. Определить вероятность того, что первым вытащит золотой шар игрок, начинающий игру.

Домашнее задание

4.11 События A и B несовместны и их вероятности не равны нулю. Зависимы ли данные события?

4.12 Имеется m радиолокационных станций, каждая из которых за один цикл обзора обнаруживает объект с вероятностью p (независимо от других циклов и от других станций). За время T каждая станция успевает сделать n циклов. Найти вероятность того, что объект будет обнаружен: а) хотя бы одной из станций; б) каждой из станций.

4.13 Из колоды в 36 карт вынимают сразу две карты. Одну из них смотрят – она оказалась тузом; после этого две вынутые карты перемешивают, и одну из них берут наугад. Найти вероятность того, что она тоже окажется тузом.

4.14 В урне имеются n шаров с номерами от 1 до n. Шары извлекаются наудачу по одному без возвращения. Какова вероятность, что при m первых извлечениях номера шаров совпадут с номерами извлечений?

4.15 Двое поочередно бросают монету. Выигрывает тот, у которого раньше появится герб. Определить вероятности выигрыша для каждого из игроков.

Ответы

4.1 $p(1-p)^{m-1}$. **4.2** 4. **4.3** $1-(1-p_1p_3)^3(1-p_2p_4)^3$. **4.4** 0,3. **4.5** $\frac{1}{58905}$, события зависимы. **4.6** $\frac{63}{256}$. **4.7** $\sum_{j=1}^{n} p_{ij}$. **4.8** а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{5}{6}$. **4.9** $\sum_{i=k+1}^{2k} \frac{C_n^i C_m^{2k-i}}{C_{n+m}^{2k}}$. **4.10** $\frac{n+m}{n+2m}$. **4.11** Зависимы. **4.12** а) $1-(1-p)^{mn}$; б) $\left(1-(1-p)^n\right)^m$. **4.13** $\frac{19}{35}$. **4.14** $\frac{(n-m)!}{n!}$. **4.15** $\frac{2}{3}$ и $\frac{1}{3}$.

5 Практическое занятие № 5. Формула полной вероятности. Формула Байеса

Приведём две формулы, полезные в тех случаях, когда заданы или могут быть легко вычислены условные вероятности. Если события B_1, $B_2, \ldots$, B_n попарно несовместны и $B_1 + B_2 + \ldots + B_n = \Omega$, то для любого события A имеем

$$P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(B_k) P(A|B_k)$$

(*формула полной вероятности*) и

$$P(B_m|A) = \frac{P(B_m)P(A|B_m)}{\sum_{k=1}^{n} P(B_k)P(A|B_k)}, \; m = 1,2,\ldots,n$$

(*формула Байеса*).

Задачи для самостоятельной работы

5.1 Прибор может работать в двух режимах: нормальном и с повышенной нагрузкой, причём нормальный режим наблюдается в 99 % всех случаев работы прибора. Вероятность выхода прибора из строя за время t в нормальном режиме равна p_1, а в режиме с повышенной нагрузкой – p_2. Найти полную вероятность выхода прибора из строя за время t.

5.2 Для контроля продукции из трёх партий деталей взята для испытания одна деталь. Как велика вероятность обнаружения бракованной продукции, если в одной партии a % деталей бракованные, а в двух других – все доброкачественные.

5.3 В первой урне три серебряных и два золотых шара, а во второй – три серебряных и один золотой. Из первой урны взяли наугад один шар и переложили во вторую. а) Чему равна вероятность того, что шар, извлеченный после этого из второй урны, будет золотым? б) Шар, извлеченный наугад из второй урны – золотой. Чему равна вероятность того, что из первой урны во вторую переложили серебряный шар?

5.4 В условиях предыдущей задачи, из первой урны взяли наугад не один, а два шара и переложили их во вторую урну. После этого из второй урны извлекли наугад один шар. Он оказался золотым. Чему равна вероятность того, что из первой урны во вторую переложили два серебряных шара?

5.5 Вероятность поступления k вызовов на телефонную станцию за промежуток времени t равна $P_t(k)$. Считая числа вызовов за любые два соседние промежутка времени независимыми, определить вероятность $P_{2t}(m)$ поступления m вызовов за промежуток времени длительностью $2t$.

5.6 Из партии в пять изделий наудачу взято одно изделие, оказавшееся бракованным. Количество бракованных изделий равновозможно любое. Какое предположение о количестве бракованных изделий наиболее вероятно?

5.7 В двух урнах находится соответственно n_1 и n_2 золотых и m_1 и m_2 серебряных шаров. Из каждой урны наудачу извлекают по одному шару, а затем из этих двух шаров наудачу берут один. Какова вероятность, что этот шар золотой?

5.8 В урну, содержащую n шаров, опущен белый шар. Какова вероятность извлечь из этого сосуда белый шар, если все предположения о первоначальном составе шаров по цвету равновозможны?

5.9 Из двух близнецов первый – мальчик. Какова вероятность, что другой тоже мальчик, если среди близнецов вероятность рождения двух мальчиков и двух девочек соответственно равны p_1 и p_2, а для разнополых близнецов вероятность родиться первым для обоих полов одинакова?

5.10 По каналу связи передаётся одна из последовательностей букв $AAAA$, $BBBB$, $CCCC$ с вероятностями p_1, p_2, p_3 ($p_1 + p_2 + p_3 = 1$). Каждая передаваемая буква принимается правильно с вероятностью α и с вероятностями $\frac{1}{2}(1-\alpha)$ и $\frac{1}{2}(1-\alpha)$ принимается за две другие буквы. Предполагается, что буквы искажаются независимо друг от друга. Найти вероятность того, что было передано $AAAA$, если принято $ABCA$.

Домашнее задание

5.11 Из полного набора костей домино наугад берутся две кости. Определить вероятность того, что вторую кость можно приставить к первой.

5.12 Известно, что 99 % выпускаемой продукции удовлетворяют стандарту. Упрощённая схема контроля признаёт пригодной стандартную продукцию с вероятностью p_1 и нестандартную – с вероятностью p_2. Определить вероятность того, что изделие, прошедшее упрощённый контроль, удовлетворяет стандарту.

5.13 В стройотряде 70 % первокурсников и 30 % студентов второго курса. Среди первокурсников 10 % девушек, а среди студентов второго курса –

5 % девушек. Все девушки по очереди дежурят на кухне. Найти вероятность того, что в случайно выбранный день на кухне дежурит первокурсница.

5.14 Вероятности попадания при каждом выстреле для трёх стрелков равны соответственно p_1, p_2 и p_3. При одновременном выстреле всех трёх стрелков имелось два попадания. Определить вероятность того, что промахнулся третий стрелок.

5.15 Имеется k урн, в каждой из которых по n золотых и по m серебряных шаров. Из первой урны наудачу извлекают один шар и перекладывают во вторую. Затем из второй урны наудачу извлекают один шар и перекладывают в третью урну и т. д. Определить вероятность извлечения после такого перекладывания золотого шара из последней урны.

Ответы

5.1 $0{,}99p_1 + 0{,}01p_2$. **5.2** $\dfrac{a}{300}$. **5.3** а) $\dfrac{7}{25}$; б) $\dfrac{3}{7}$. **5.4** $\dfrac{1}{6}$. **5.5** $\sum\limits_{k=0}^{m} P_t(k)P_t(m-k)$. **5.6** Все изделия в партии бракованные. **5.7** $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{n_1}{n_1+m_1}+\dfrac{n_2}{n_2+m_2}\right)$. **5.8** $\dfrac{n+2}{2(n+1)}$. **5.9** $\dfrac{2p_1}{1+p_1-p_2}$. **5.10** $\dfrac{2\alpha p_1}{2\alpha p_1+(1-\alpha)(p_2+p_3)}$. **5.11** $\dfrac{7}{18}$. **5.12** $\dfrac{0{,}99p_1}{0{,}99p_1+0{,}01p_2}$. **5.13** $\dfrac{14}{17}$. **5.14** $\dfrac{p_1p_2-p_1p_2p_3}{p_1p_2+p_2p_3+p_1p_3-3p_1p_2p_3}$. **5.15** $\dfrac{n}{n+m}$.

6 Практическое занятие № 6. Последовательность независимых испытаний

Дадим определение *последовательности испытаний*. Пусть

$$\Omega_n = \{(i_1,i_2,\dots,i_n) \mid i_k \in \{1,2,\dots,N\},\ k=1,2,\dots,n\}. \tag{6.1}$$

Элементарное событие $\omega = \{i_1,i_2,\dots,i_n\}$ интерпретируется как цепочка исходов в n последовательных испытаниях, каждое из которых имеет N несовместных исходов: $1,2,\dots,N$. Если положить

$$P(\omega) = p_{i_1}p_{i_2|i_1}\cdots p_{i_n|i_1,i_2,\dots,i_{n-1}}, \tag{6.2}$$

где $p_{i_s|i_1,i_2,\dots,i_{s-1}} \ge 0$, $\sum\limits_{i_s=1}^{N} p_{i_s|i_1,i_2,\dots,i_{s-1}} = 1$ ($s=1,2,\dots,n$; $i_k\in\{1,2,\dots,N\}$, $1\le k\le s$), то на подмножествах множества Ω_n однозначно определяется вероятность

$$P(A) = \sum_{\omega\in A} P(\omega),\ A\subseteq\Omega_n.$$

Построенное вероятностное пространство является математической моделью последовательности n испытаний.

Последовательностью *независимых однородных испытаний* является частный случай приведённой общей модели, в которой формулу (6.2) надо заменить формулой

$$P(\omega) = p_{i_1} p_{i_2} ... p_{i_n} \ \ (i_k \in \{1,2,...,N\},\ 1 \le k \le n), \tag{6.3}$$

где $p_1 + p_2 + ... + p_N = 1$, $p_l \ge 0$, $l = 1,2,...,N$.

Если в (6.2) положить $p_{i_l | i_1, i_2, ..., i_{l-1}} = p_{i_l}^{(l)} \ge 0$, $p_1^{(l)} + p_2^{(l)} + ... + p_N^{(l)} = 1$, то получится *последовательность независимых (неоднородных) испытаний*, в которых вероятности исходов зависят от номера испытаний (но не от результатов предыдущих испытаний). Вероятностную модель, определённую формулами (6.1), (6.3), называют также *полиномиальной схемой*.

Обозначим через $\xi_{n,i}$ число появлений исхода i в n испытаниях полиномиальной схемы. При решении задач полезна формула

$$P\{\xi_{n,1} = m_1, \xi_{n,2} = m_2, ..., \xi_{n,N} = m_N\} = \frac{n!}{m_1! m_2! ... m_N!} p_1^{m_1} p_2^{m_2} ... p_N^{m_N},$$

если $m_i \ge 0$ $(i = 1,2,...,N)$ целые и $n = m_1 + m_2 + ... + m_N$.

Частный случай полиномиальной схемы с $N = 2$ называют *схемой Бернулли*. Два исхода каждого испытания в схеме Бернулли обозначают символами 1 и 0 и называют *успехом* и *неудачей*, а соответствующие им вероятности – буквами p и $q = 1 - p$. Если μ_n – число успехов (или число единиц) в n испытаниях Бернулли, то

$$P\{\mu_n = m\} = P_n(m, p) = C_n^m p^m q^{n-m},\ m = 0,1,...,n. \tag{6.4}$$

Задачи для самостоятельной работы

6.1 Проведено 10 независимых испытаний, каждое из которых заключается в одновременном подбрасывании трёх монет. Найти вероятность того, что хотя бы в одном испытании выпадут три герба.

6.2 Определить вероятность того, что номер первого встретившегося автомобиля не содержит:

а) цифры пять;

б) двух пятёрок. Известно, что все номера четырёхзначные, неповторяющиеся и равновозможные.

6.3 Вероятность попадания стрелком в десятку равна p_1, а в девятку – p_2. Определить вероятность того, что данный стрелок при трёх выстрелах наберёт не менее 29 очков.

6.4 Испытание заключается в бросании трёх игральных костей. Найти вероятность того, что в пяти независимых испытаниях ровно 2 раза выпадет по три единицы.

6.5 По каналу связи передаётся пять сообщений. Каждое сообщение независимо от других с вероятностью 0,1 искажается помехами. Найти вероятности событий:

а) из пяти сообщений три искажены;

б) не менее четырёх из пяти сообщений переданы неискажёнными;

в) не более одного из пяти сообщений искажены;

г) все сообщения приняты без искажений; д) хотя бы одно из пяти сообщений искажено.

6.6 В условиях предыдущей задачи найти наиболее вероятное число сообщений, переданных неискажёнными, и соответствующую вероятность.

6.7 Каждую секунду с вероятностью p независимо от других моментов времени по дороге проезжает автомобиль. Пешеходу для перехода дороги необходимо 3 с. Какова вероятность того, что подошедший к дороге пешеход будет ожидать возможности перехода 4 с?

6.8 По мишени, состоящей из внутреннего круга и двух концентрических колец, производится десять выстрелов из спортивного пистолета. Вероятности попадания в указанные области при каждом выстреле равны соответственно p_1, p_2 и p_3. Определить вероятность того, что при этом будет пять попаданий в круг, три – в первое кольцо и два попадания во второе кольцо.

6.9 В электропоезд, состоящий из шести вагонов, садится двенадцать человек, причём выбор каждым пассажиром вагона равновозможен. Определить вероятность того, что в один вагон никто не вошёл, в другой – вошёл один человек, в два вагона – по два человека, а в оставшиеся два вагона соответственно три и четыре человека.

6.10 Пункт A нужно связать с десятью абонентами пункта B. Каждый абонент занимает линию 12 мин/ч. Вызовы любых двух абонентов независимы. Какое минимальное количество каналов необходимо для того, чтобы можно было в любой момент с вероятностью $0,99$ обслужить всех абонентов?

Домашнее задание

6.11 Игра состоит в набрасывании колец на колышек. Игрок получает шесть колец и бросает кольца до первого попадания. Найти вероятность того, что хотя бы одно кольцо останется неизрасходованным, если вероятность попадания при каждом броске равна $0,1$.

6.12 Два равносильных соперника играют в шахматы. Что вероятнее: выиграть две партии из пяти или три партии из шести?

6.13 Наиболее вероятное число выпадений герба при n подбрасываниях монеты равно пяти. Чему равно n?

6.14 Каждый из девяти шаров с одинаковой вероятностью может быть помещён в один из трёх первоначально пустых ящиков. Определить вероятность того, что в один ящик попало четыре шара, в другой – три, а в оставшийся – два шара.

6.15 В урне имеется три шара: золотой, серебряный и бронзовый. Из урны шары по одному извлекались 5 раз, причём после каждого извлечения шар возвращался обратно. Определить вероятность того, что золотой и серебряный шары извлечены не менее чем по 2 раза каждый.

Ответы

6.1 $1-\left(\frac{7}{8}\right)^{10}$. **6.2** а) $0,6561$; б) $0,9477$. **6.3** $p_1^3+3p_1^2p_2$. **6.4** $\approx 0,00021137$. **6.5** а) $0,0081$; б) $0,91854$; в) $0,91854$; г) $0,59049$; д) $0,4051$. **6.6** 5; $0,59049$. **6.7** $\left(1-(1-p)^3\right)p(1-p)^3$. **6.8** $2520p_1^5p_2^3p_3^2$. **6.9** $\approx 0,1375$. **6.10** $0,99\cdot 5^{10}=\sum_{k=0}^{n}C_{10}^k4^{10-k}$, $n=5$. **6.11** $0,40951$. **6.12** Вероятности равны. **6.13** 10 или 11. **6.14** $\frac{7560}{19683}$. **6.15** $\frac{50}{243}$.

7 Практическое занятие № 7. Предельные теоремы в схеме Бернулли

Если в формуле (6.4) положить $p=p_n=\frac{\lambda_n}{n}$, где $\lambda_n\to\lambda$ $(0<\lambda<\infty)$ при $n\to\infty$, то получим следующее утверждение (*теорема Пуассона*):

$$\lim_{n\to\infty}P_n(m,p_n)=\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda},\ m=0,1,2,... \tag{7.1}$$

Правая часть формулы (7.1) используется в приложениях как приближённое значение вероятности $P\{\mu_n=m\}$ при больших значениях n и малых значениях p.

Приведём формулировки двух *теорем Муавра–Лапласа*.

Локальная теорема. Если $n\to\infty$, $p=\text{const}$, $0<p<1$,

$$0<c_1\le x_{n,m}=\frac{m-np}{\sqrt{npq}}\le c_2<\infty,$$

то

$$P\{\mu_n=m\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}e^{-x_{n,m}^2/2}\left(1+O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) \tag{7.2}$$

равномерно по значениям $x_{n,m}\in[c_1,c_2]$.

Интегральная теорема. Если $n\to\infty$, $p=\text{const}$, $0<p<1$, то

$$P\left\{x_1<\frac{\mu_n-np}{\sqrt{npq}}<x_2\right\}\to\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x_1}^{x_2}e^{-u^2/2}du \tag{7.3}$$

равномерно по x_1, x_2 $(-\infty\le x_1\le x_2\le\infty)$.

Правые части формул (7.2) и (7.3) дают хорошее приближение, когда n достаточно велико, а p и q не очень близки к нулю. Часто нормальным приближением пользуются при $npq>20$.

Предельное выражение в (7.3) легко можно выразить через значения одной из функций

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x}e^{-u^2/2}du,\ \Phi_0(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{x}e^{-u^2/2}du.$$

Во многих задачах приходится рассматривать бесконечные последовательности испытаний. В этом случае полагают

$$\Omega_\infty=\{(i_1,i_2,\ldots)|i_k\in\{1,2,\ldots,N\}\},$$

σ-алгебра событий $\mathfrak{A}$ порождается событиями вида

$$A_{j_1j_2\ldots j_n}^{k_1k_2\ldots k_n}=\{(i_1,i_2,\ldots)|i_{k_1}=j_1,i_{k_2}=j_2,\ldots,i_{k_n}=j_n\}.$$

В случае независимых испытаний

$$P\{A_{j_1j_2\ldots j_n}^{k_1k_2\ldots k_n}\}=p_{j_1}\ldots p_{j_n}. \tag{7.4}$$

Равенства (7.4) однозначно определяют вероятность на $\mathfrak{A}$.

Задачи для самостоятельной работы

7.1 Из таблицы случайных чисел наудачу выписаны 200 двузначных случайных чисел (от 00 до 99). Определить вероятность того, что среди них число 99 встретится 3 раза.

7.2 Аппаратура содержит 2000 одинаково надёжных элементов, вероятность отказа для каждого из которых равна 0,0005. Какова вероятность отказа аппаратуры, если он наступает при отказе хотя бы одного из элементов?

7.3 Корректура в 500 страниц содержит 50 опечаток. Оценить вероятность того, что на случайно выбранной странице не меньше трёх опечаток.

7.4 Найти вероятность того, что при 1000 подбрасываниях монеты герб выпадет:

а) 500 раз;

б) от 495 до 505 раз;

в) от 475 до 525 раз;

г) меньше 475 раз.

7.5 Сколько раз нужно подбросить монету, чтобы с вероятностью 0,95 можно было бы утверждать, что герб выпадет не менее 400 раз?

7.6 Цех завода выпускает шарики для подшипников. За смену производится 10000 шариков. Вероятность того, что один шарик окажется дефектным, равна 0,05. Причины дефектов для отдельных шариков независимы. Продукция проходит контроль сразу после изготовления, причём дефектные шарики бракуются и ссыпаются в бункер, а небракованные отправляются в цех сборки. Определить, на какое количество шариков должен быть рассчитан бункер, чтобы с вероятностью 0,99 после смены он не оказался переполненным.

7.7 На лекции по теории вероятностей присутствуют 30 человек. Найти вероятность того, что 2 человека из присутствующих родились 1 января. Считать, что вероятность рождения в фиксированный день равна $\frac{1}{365}$.

7.8 Завод отправил в торговую сеть 500 изделий. Вероятность повреждения изделия в пути равна $0,003$. Найти вероятность того, что при транспортировке будет повреждено более трёх изделий.

Домашнее задание

7.9 В новом микрорайоне поставлено 10000 кодовых замков на входных дверях домов. Вероятность выхода из строя одного замка в течение месяца равна $0,0002$. Найти вероятность того, что за месяц откажет ровно один замок.

7.10 В одном из экспериментов по компьютерному моделированию опытов с подбрасыванием правильной монеты из общего числа 24000 «подбрасываний» герб выпал 12012 раз. Какова априорная вероятность получить данный результат?

7.11 Вероятность рождения мальчика равна $0,512$. Найти вероятность того, что среди 100 новорожденных будет:

а) 51 мальчик;

б) больше мальчиков, чем девочек.

Ответы

7.1 $\frac{4}{3}e^{-2}$. **7.2** $1-e^{-1}$. **7.3** $0,00016$. **7.4** а) $0,02523$; б) $0,251$; в) $0,8858$; г) $0,0571$. **7.5** 848. **7.6** ≈ 550. **7.7** $0,003024$. **7.8** $0,0656$. **7.9** $0,2707$. **7.10** $0,005088$. **7.11** а) $0,0797$; б) $0,5160$.

8 Практическое занятие № 8. Цепи Маркова

В общей схеме последовательности зависимых испытаний с исходами $1,\ldots,N$ вероятность появления цепочки исходов $i_1,\ldots,i_k$ в испытаниях с номерами $1,\ldots,k$ представляется по формуле (6.2) в виде

$$P(i_1,\ldots,i_k) = p(i_1)\,p(i_2|i_1)\ldots p(i_k)\,p(i_k|i_1\ldots i_{k-1}), \qquad (8.1)$$

где $p\left(i_j\left|i_1\ldots i_{j-1}\right.\right) \geq 0$ – функции, удовлетворяющие условиям

$$\sum_{i_j=1}^{N} p(i_k|i_1\ldots i_{k-1}) = 1 \qquad (8.2)$$

для любого $j \geq 1$ и любых $i_1,\ldots,i_{j-1} \in \{1,\ldots,N\}$. Ранее мы рассматривали частный случай однородной последовательности независимых испытаний, когда функции $p\left(i_j\left|i_1\ldots i_{j-1}\right.\right) \equiv p\left(i_j\right)$ не зависели ни от j, ни от $i_1,\ldots,i_{j-1}$. Рассмотрим теперь другой важный частный случай общей схемы (8.1), в котором для любого $j \geq 2$ и любых $i_1,\ldots,i_{j-1}$

$$p\left(i_j\left|i_1\ldots i_{j-1}\right.\right) = p_{i_{j-1},i_j}. \qquad (8.3)$$

Если выполнено (8.3), то говорят, что последовательность испытаний образует *однородную цепь Маркова*. Условие (8.3) часто называют *марковским свойством*; оно означает, что если исход какого-то испытания фиксирован, то результаты испытаний, следующих за выбранным, не зависят от результатов испытаний, предшествовавших ему. При построении математических моделей ряда реальных явлений предположение (8.3) оказывается довольно естественным.

Для цепей Маркова начальному испытанию приписывают номер 0 (а не 1, как в (8.1)), исходы $1, \ldots, N$ называют *состояниями* цепи, вектор

$$p^{(0)} = \left(p_1^{(0)}, \ldots, p_N^{(0)} \right) = \left(p(1), \ldots, p(N) \right) -$$

вектором начальных вероятностей, а матрицу

$$P = \left(p_{ij} \right) = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1N} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{N1} & p_{N2} & \cdots & p_{NN} \end{pmatrix} -$$

матрицей вероятностей перехода. В силу (8.2) все элементы матрицы P неотрицательны и сумма элементов каждой строки равна 1; матрицы, обладающие этими свойствами, называют *стохастическими*.

Введенные здесь определения легко распространяются на бесконечные последовательности испытаний (цепи Маркова) с бесконечным множеством исходов (состояний) $\{1, 2, \ldots\}$.

Из определений (8.1), (8.3) следует, что если ξ_t – состояние цепи Маркова в момент времени t и

$$p_{ij}(t) = P\{\xi_t = j \mid \xi_0 = i\} = P\{\xi_{t+s} = j \mid \xi_s = i\},\ s, t \ge 0, -$$

вероятность перехода из состояния i в состояние j на t шагов, то матрица $P(t) = P^t$, а векторы $p^{(t)} = \left(p_1^{(t)}, \ldots, p_N^{(t)} \right)$, где $p_j^{(t)} = P(\xi_t = j)$, удовлетворяют соотношению $p^{(t+s)} = p^{(s)} P^t$; далее для любых $0 \le t_0 < t_1 < \ldots < t_k$, $i_0, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, N\}$

$$P\{\xi_{t_0} = i_0, \xi_{t_1} = i_1, \ldots, \xi_{t_k} = i_k\} = P\{\xi_{t_0} = i_0\} \prod_{j=1}^{k} p_{i_{j-1}, i_j}\left(t_j - t_{j-1} \right).$$

Таким образом, с формальной точки зрения исследование многих свойств цепей Маркова сводится к изучению соответствующих свойств степеней матриц вероятностей перехода.

Важную роль при изучении цепей Маркова играет классификация их состояний. Говорят, что состояние j *следует* за состоянием i ($i \to j$), если $p_{ij}(t) > 0$ для некоторого целого $t > 0$; если $i \to j$ и $j \to i$, то состояния i и j называют *сообщающимися* ($i \leftrightarrow j$). Если для состояния i найдётся такое состояние $j = j(i)$, что $i \to j$, но i не следует за j (т. е. $p_{ij}(t) \equiv 0$), то состояние i называется *несущественным*; в противном случае состояние i *существенное*.

Задачи для самостоятельной работы

8.1 Матрица вероятностей перехода цепи Маркова имеет вид:

$$P=\begin{pmatrix} 0,1 & 0,5 & 0,4 \\ 0,6 & 0,2 & 0,2 \\ 0,3 & 0,4 & 0,3 \end{pmatrix}.$$

Распределение по состояниям в момент времени $t=0$ определяется вектором $(0,7;0,2;0,1)$.

Найти:

а) распределение по состояниям в момент времени $t=2$;

б) вероятность того, что в моменты времени $t=0,1,2,3$ состояниями цепи будут соответственно $1,3,3,2$;

в) стационарное распределение.

8.2 Пусть ξ_t – номер состояния в цепи Маркова в момент времени t; $P(\xi_0=1)=1$; и матрица вероятностей перехода имеет вид:

$$P=\begin{pmatrix} 3/7 & 3/7 & 1/7 \\ 1/11 & 2/11 & 8/11 \\ 1/11 & 3/11 & 6/11 \end{pmatrix}.$$

Положим

$$\eta_t=\begin{cases} 1, & \xi_t=1, \\ 2, & \xi_t\neq 1. \end{cases}$$

Показать, что последовательность η_t является цепью Маркова. Найти её матрицу вероятностей перехода.

8.3 Некоторая физическая система в результате проверки может оказаться в одном из следующих состояний: s_1 – полностью исправна, s_2 – имеет незначительные неисправности, при которых может решать поставленные перед ней задачи, s_3 – имеет существенные неисправности и может решать ограниченный класс задач, s_4 – полностью вышла из строя. В начальный момент времени система полностью исправна. Проверка системы производится в фиксированные моменты времени t_1, t_2, t_3. Процесс, протекающий в системе, может рассматриваться как однородная марковская цепь с тремя шагами (первая, вторая и третья проверки). Матрица переходных вероятностей имеет вид:

$$P=\begin{pmatrix} 0,3 & 0,4 & 0,1 & 0,2 \\ 0 & 0,2 & 0,5 & 0,3 \\ 0 & 0 & 0,4 & 0,6 \\ 0 & 0 & 0 & 1,0 \end{pmatrix}.$$

Определить вероятности состояний системы после одной, двух и трёх проверок.

8.4 Техническое устройство, состоящее из m узлов, время от времени (в моменты t_1, t_2, …, t_k) подвергается профилактическому осмотру и ремонту. После каждого шага (момента осмотра и ремонта) устройство может оказаться в одном из следующих состояний: s_0 – все узлы исправны (ни один не заменялся новым), s_1 – один узел заменен новым, остальные исправны, s_2 – два узла заменены новыми, остальные исправны, ... , s_i – i узлов ($i < m$) заменены новыми, остальные исправны, ..., s_m – все m узлов заменены новыми.

Вероятность того, что в момент профилактики узел придется заменить новым, равна p (независимо от состояния других узлов). Рассматривая состояния технического устройства как марковскую цепь, найти переходные вероятности и для $m=3$, $p=0,4$ вычислить вероятности состояний устройства после трех шагов (в начальный момент все узлы исправны).

8.5 Точка S «блуждает» по оси абсцисс Ox по следующему закону: на каждом шаге она с вероятностью $0,5$ остается на месте, с вероятностью $0,3$ перескакивает на единицу вправо и с вероятностью $0,2$ – влево. Состояние системы S после k шагов определяется одной координатой (абсциссой) точки S. Начальное положение точки – начало координат. Рассматривая последовательность положений точки S как цепь Маркова, найти вероятность того, что она после четырех шагов окажется от начала координат не дальше, чем на расстоянии, равном единице.

Домашнее задание

8.6 В любой данный день человек здоров или болен. Если человек здоров сегодня, то вероятность того, что он будет здоров и завтра, равна $0,98$. Если человек сегодня болен, то завтра он будет здоров лишь с вероятностью $0,30$. Найти переходную матрицу данного марковского процесса.

8.7 Вычислить двухшаговую переходную матрицу для одношаговой матрицы

$$P=\begin{pmatrix} 0,5 & 0,25 & 0,25 \\ 0,25 & 0,5 & 0,25 \\ 0,25 & 0,25 & 0,5 \end{pmatrix}.$$

Указать значения $p_{11}(2)$, $p_{12}(2)$, $p_{13}(2)$.

Ответы

8.1 а) $(0,385;0,336;0,279)$; б) $0,0336$; в) $(16/47,17/47,14/47)$. **8.2** $\begin{pmatrix} 3/7 & 4/7 \\ 1/11 & 10/11 \end{pmatrix}$. **8.3** $(0,027;0,076;0,217;0,680)$. **8.4** $(0,010;0,110;0,398;0,482)$. **8.5** $0,693$.

9 Практическое занятие № 9. Дискретные случайные величины

Пусть задано вероятностное пространство $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$.

Случайной величиной называется действительная функция от элементарного события $\xi = \xi(\omega)$, $\omega \in \Omega$, для которой при любом действительном x множество $\{\omega | \xi(\omega) < x\}$ принадлежит $\mathfrak{A}$ (т. е. является событием) и для него определена вероятность $P\{\omega | \xi(\omega) < x\}$, записываемая кратко $P\{\xi < x\}$. Эта вероятность, рассматриваемая как функция x, называется *функцией распределения* случайной величины ξ и обозначается обычно либо $F_\xi(x)$, либо $F(x)$ (иногда функцией распределения называют вероятность $P\{\xi \le x\}$).

Важным классом распределений вероятностей являются *дискретные* распределения, задаваемые конечным или счётным набором вероятностей $P\{\xi = x_k\}$, для которых $\sum\limits_k P\{\xi = x_k\} = 1$. Функция распределения $F_\xi(x)$ в этом случае ступенчатая и задаётся суммой $F_\xi(x) = \sum\limits_{k: x_k \le x} P\{\xi = x_k\}$.

Если распределение случайной величины дискретно, то говорят также, что сама случайная величина или её функция распределения дискретны.

Математическим ожиданием дискретной случайной величины ξ называется число

$$M\xi = \sum_k x_k P\{\xi = x_k\}, \tag{9.1}$$

если ряд (9.1) сходится абсолютно. Если $\eta = g(\xi)$, то для вычисления $M\eta = Mg(\xi)$ можно применять следующую формулу (также с оговоркой об абсолютной сходимости):

$$Mg(\xi) = \sum_k g(x_k) P\{\xi = x_k\}.$$

Для действительной случайной величины ξ математическое ожидание $M\xi^k$ называется *k-м моментом* или *моментом k-го порядка*, $M|\xi|^k$ называется *абсолютным моментом k-го порядка*, $M(\xi - M\xi)^k$ – *центральным моментом k-го порядка*, $M|\xi - M\xi|^k$ – абсолютным *центральным моментом k-го порядка*. Второй центральный момент называется *дисперсией* и обозначается $D\xi = M(\xi - M\xi)^2$. Дисперсия может быть вычислена по формуле

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2.$$

Корень квадратный из дисперсии называется *средним квадратическим отклонением*. При вычислении математических ожиданий часто используют следующие свойства.

1 Свойство *аддитивности* для любых ξ и η с конечными $M\xi$ и $M\eta$:

$$M(\xi + \eta) = M\xi + M\eta.$$

2 Свойство *линейности* для любого числа c:

$$M(c\xi) = cM\xi.$$

Задачи для самостоятельной работы

9.1 Из урны, содержащей три серебряных и четыре золотых шара, наудачу извлекают три шара. Случайная величина ξ – количество золотых шаров среди извлечённых.

Для случайной величины ξ:

а) записать закон распределения вероятностей и построить многоугольник распределения;

б) найти функцию распределения $F(x)$ и построить её график;

в) вычислить математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, моду, медиану и коэффициенты асимметрии и эксцесса;

г) с помощью функции $F(x)$ найти вероятность $P(1 < \xi \le 3)$; проверить полученный результат с помощью закона распределения вероятностей.

9.2 Функция распределения дискретной случайной величины ξ имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0, x \le 0, \\ \dfrac{1}{3}, 0 < x \le 1, \\ 1, x > 1. \end{cases}$$

Записать закон распределения величины ξ и найти её математическое ожидание, среднее квадратическое отклонение и медиану. Привести примеры случайных величин, имеющих указанный закон распределения.

9.3 Производятся независимые выстрелы по мишени из спортивного пистолета. Вероятность попадания в десятку при каждом выстреле равна $0{,}9$.

Найти закон распределения числа непопаданий в десятку, если стрельба заканчивается:

а) после первого попадания в десятку;

б) после второго попадания в десятку.

В обоих случаях найти математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение рассматриваемой случайной величины.

9.4 Известно, что среди пяти деталей одна с дефектом. Детали проверяют по одной по очереди до обнаружения детали с дефектом. Найти закон распределения, математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение числа проверенных деталей.

9.5 Случайная величина ξ – число выпадений герба при одновременном подбрасывании пяти монет. Записать закон распределения величины ξ и найти её математическое ожидание $M\xi$ и дисперсию $D\xi$.

Требуется:

а) записать закон распределения величины $\eta = a\xi + b$ $(a, b \in \mathbb{R})$ и найти $M\eta$ и $D\eta$. Как связаны эти числовые характеристики величины η с соответствующими характеристиками величины ξ;

б) записать закон распределения величины $\zeta = \xi^2$ и найти $M\zeta$ и $D\zeta$.

9.6 Функция вероятности случайной величины ξ имеет вид:

$$p(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}\ ,\ \lambda > 0,\ k = \overline{0,\infty}.$$

Найти математическое ожидание $M\xi$ величины ξ и вероятность $P(\xi \geq M\xi)$.

Домашнее задание

9.7 В урне три серебряных и четыре золотых шара. Наугад достают один шар, записывают, золотой этот шар или серебряный, и кладут шар обратно в урну. Всё это проделывают 5 раз. Случайная величина ξ – количество золотых шаров среди записанных.

Для случайной величины ξ:

а) записать закон распределения и построить многоугольник распределения;

б) найти функцию распределения $F(x)$ и построить её график;

в) вычислить математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, моду, медиану и коэффициенты асимметрии и эксцесса;

г) с помощью функции $F(x)$ найти вероятность $P(2 < \xi \leq 4)$; проверить полученный результат с помощью закона распределения.

9.8 Случайная величина ξ принимает два значения – 0 и 1 с вероятностями $1-p$ и p соответственно. Чему равны вероятность p и среднее значение $M\xi$ величины ξ, если среднее квадратическое отклонение σ_ξ этой величины равно:

а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{\sqrt{3}}{4}$?

9.9 На пути движения автомобиля шесть светофоров, каждый из которых с вероятностью 0,5 разрешает либо запрещает дальнейшее движение автомобиля. Найти среднее и медианное значения числа светофоров, пройденных автомобилем до первой остановки.

10 Практическое занятие № 10. Непрерывные случайные величины

Ещё один класс распределений вероятностей составляют *абсолютно непрерывные* распределения, задаваемые плотностью вероятности $p_\xi(x) = p(x)$, т. е. такой неотрицательной функцией $p(x)$, что

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(x)dx;$$

в общем случае рассматривается интеграл Лебега, который совпадает с интегралом Римана (собственным или несобственным), если последний существует.

Если распределение случайной величины абсолютно непрерывно, то говорят также, что сама случайная величина или её функция распределения абсолютно непрерывны.

Если случайная величина η есть непрерывная и возрастающая функция $g(\xi)$ от случайной величины ξ, то $F_\eta(x)=F_\xi\left(g^{-1}(x)\right)$. Если ещё $g(x)$ дифференцируема и распределение ξ имеет плотность $p_\xi(x)$, то распределение η имеет плотность

$$p_\eta(x)=p_\xi\left(g^{-1}(x)\right)\cdot\frac{1}{\left|g'\left(g^{-1}(x)\right)\right|}.$$

Математическое ожидание непрерывной случайной величины ξ, имеющей плотность $p_\xi(x)$, определяется формулой

$$M\xi=\int_{-\infty}^{+\infty}xp_\xi(x)dx, \tag{10.1}$$

если интеграл (10.1) сходится абсолютно. Если $\eta=g(\xi)$, то

$$Mg(\xi)=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)p_\xi(x)dx, \tag{10.2}$$

также в предположении абсолютной сходимости интеграла.

Дисперсия непрерывной случайной величины может быть вычислена по формуле

$$D\xi=M\xi^2-(M\xi)^2=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2p_\xi(x)dx-\left(\int_{-\infty}^{+\infty}xp_\xi(x)dx\right)^2.$$

Задачи для самостоятельной работы

10.1 Плотность вероятности непрерывной случайной величины ξ имеет вид:

$$p(x)=\begin{cases}ax, & 0<x<1,\\ 0, & x<0 \text{ или } x>1.\end{cases}$$

Для случайной величины ξ:

а) найти значение постоянной a и построить график плотности $p(x)$;

б) найти функцию распределения $F(x)$ и построить её график;

в) вычислить математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, моду, квантиль порядка p, медиану и коэффициенты асимметрии и эксцесса;

г) найти вероятности: $P(0{,}25<\xi\le 0{,}5)$ и $P(0{,}5<\xi\le 0{,}75)$.

10.2 Вероятность того, что время τ между соседними поступлениями вызовов на телефонную станцию будет меньше некоторого значения t задана функцией $F(t)=1-e^{-0{,}1t}$, $t\ge 0$.

Для случайной величины τ:

а) построить график функции распределения $F(t)$;

б) найти плотность $p(t)$ и построить её график;

в) вычислить математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, моду и медиану;

г) найти вероятность $P(\tau \geq M\tau)$, где $M\tau$ – математическое ожидание величины τ.

10.3 Шкала секундомера имеет цену делений $0,2$ с. Какова вероятность сделать по этому секундомеру отсчёт времени с ошибкой более $0,05$ с, если отсчёт делается с точностью до целого деления с округлением в ближайшую сторону?

10.4 Определить среднее значение $m(t)$ массы радиоактивного вещества спустя время t, если в начальный момент масса вещества была m_0, а вероятность распада ядра любого атома в единицу времени постоянна и равна p.

10.5 Случайная величина ξ равномерно распределена на отрезке $[0,1]$.

Найти плотности распределения вероятностей случайных величин:

а) $\eta = 2\xi + 1$;

б) $\zeta = -\ln(1-\xi)$.

10.6 Случайная точка B имеет равномерное распределение на окружности радиусом r с центром в точке $A(0,a)$, а случайная точка $C(\xi,0)$ является пересечением оси абсцисс с прямой, проходящей через A и B. Найти функцию распределения и плотность вероятности случайной величины ξ.

Домашнее задание

10.7 Функция распределения вероятностей непрерывной случайной величины ξ имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0, \ x \leq 0, \\ a\sin x, \ 0 < x \leq \dfrac{\pi}{2}, \\ 1, \ x > \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Для случайной величины ξ:

а) найти значение постоянной a и построить график функции распределения $F(x)$;

б) найти плотность вероятности $p(x)$ и построить её график;

в) вычислить математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, моду и медиану;

г) найти вероятности: $P\left(0 < \xi < \dfrac{\pi}{4}\right)$ и $P\left(\dfrac{\pi}{4} \leq \xi \leq \dfrac{\pi}{2}\right)$.

10.8 Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины, плотность вероятности которой имеет вид $f(x) = \dfrac{1}{2}e^{-|x|}$ (распределение Лапласа).

10.9 По известному «правилу трёх сигм» вероятность отклонения случайной величины от своего математического ожидания более чем на три средних квадратических отклонения мала. Найти $P\left(|\xi - M\xi| < 3\sigma_{\xi}\right)$, если ξ имеет следующее распределение:

а) равномерное распределение на отрезке $[-1,1]$;

б) $P\{\xi = -1\} = P\{\xi = 1\} = \dfrac{1}{18}$, $P\{\xi = 0\} = \dfrac{8}{9}$.

Ответы

10.3 $\dfrac{1}{2}$. **10.4** $m_0 e^{-pt}$. **10.5** а) плотность равномерного распределения на отрезке $[1,3]$; б) e^{-x}, $x > 0$. **10.6** $F(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a}$, $p(x) = \dfrac{1}{\pi}\dfrac{a}{a^2 + x^2}$ (распределение Коши). **10.8** $M\xi = 0$, $D\xi = 2$. **10.9** а) 1; б) $\dfrac{8}{9}$.

11 Практическое занятие № 11. Законы распределения вероятностей некоторых случайных величин

Приведём часто встречающиеся законы распределения. Сначала перечислим некоторые дискретные распределения.

1 *Вырожденное* распределение: $P\{\xi = a\} = 1$, a – постоянная.

2 *Гипергеометрическое* распределение (параметры: N, M, n – натуральные числа, $M \le N$, $n \le N$):

$$P\{\xi = m\} = \frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n},\ m = 0,1,\ldots,\min(M,n).$$

3 *Биномиальное* распределение (параметры: n – натуральное число, $0 \le p \le 1$): $P\{\xi = k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$, $k = 0,1,\ldots,n$.

4 *Распределение Пуассона* с параметром $\lambda > 0$:

$$P\{\xi = k\} = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\ k = 0,1,2,\ldots$$

5 *Геометрическое* распределение с параметром p $(0 < p \le 1)$:

$$P\{\xi = k\} = p(1-p)^k,\ k = 0,1,2,\ldots$$

Далее перечисляются некоторые абсолютно непрерывные распределения, определяемые плотностью $p(x)$.

1 *Равномерное* распределение на отрезке $[a,b]$, $a < b$: $p(x) = \dfrac{1}{b-a}$, если $a \le x \le b$, $p(x) = 0$, если $x \notin [a,b]$.

2 *Нормальное* (или *гауссовское*) распределение с параметрами a, σ^2, $-\infty < a < \infty$, $0 < \sigma < \infty$:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{ -\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2} \right\}, \ -\infty < x < \infty.$$

Нормальное распределение с параметрами $(0,1)$ называют также *стандартным нормальным* распределением.

3 *Показательное* распределение с параметром $\lambda > 0$:

$$p(x) = \lambda e^{-\lambda x} \ (x \ge 0), \ p(x) = 0 \ (x < 0).$$

4 *Гамма-распределение* с параметрами $\lambda > 0$, $\alpha > 0$:

$$p(x) = \frac{\lambda^\alpha x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda x} \ (x > 0), \ p(x) = 0 \ (x \le 0),$$

где $\Gamma(\alpha)$ – гамма-функция, $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx$.

5 *Распределение Коши* с параметром $b > 0$:

$$p(x) = \frac{1}{\pi} \frac{b}{1 + b^2 x^2}, \ -\infty < x < \infty.$$

Задачи для самостоятельной работы

11.1 На перекрёстке стоит автоматический светофор, в котором 1 мин горит зеленый свет и $0,5$ мин – красный, затем опять 1 мин горит зеленый свет и $0,5$ мин – красный и т. д. Некто подъезжает к перекрестку на автомобиле в случайный момент, не связанный с работой светофора.

Найти:

а) вероятность того, что он проедет перекресток, не останавливаясь;

б) закон распределения, математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение времени ожидания у перекрёстка.

11.2 Электронная лампа работает исправно в течение случайного времени τ, распределённого по показательному закону с параметром λ. По истечении времени τ лампа выходит из строя, после чего её немедленно заменяют новой.

Найти вероятность того, что за время T:

а) лампу не придётся заменять;

б) лампу придётся заменять ровно 3 раза;

в) лампу придётся заменять не менее 3 раз.

11.3 Время τ распада атома распределено по показательному закону. Доказать, что вероятность распада атома за время t_2 при условии, что перед этим он уже прожил время t_1, совпадает с безусловной вероятностью распада того же самого атома за время t_2 (отсутствие последействия).

11.4 Число автомобилей, движущихся по шоссе в одном направлении в любой промежуток времени Δt, распределено по закону Пуассона с параметром $\lambda\Delta t$ (простейший поток событий с интенсивностью λ). Время между появлениями двух автомобилей распределено по показательному закону с параметром λ. Человек выходит на шоссе, чтобы остановить первый попавшийся автомобиль, движущийся в данном направлении. Найти закон распределения времени τ, которое ему придется ждать; определить математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение случайной величины τ.

11.5 Измерение дальности до объекта сопровождается систематическими и случайными ошибками. Систематическая ошибка равна 50 м в сторону занижения дальности. Случайные ошибки подчиняются нормальному закону со средним квадратическим отклонением $\sigma = 100$ м.

Найти:

а) вероятность измерения дальности с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине 150 м;

б) вероятность того, что измеренная дальность не превзойдёт истинной.

11.6 Изделие считается высшего качества, если отклонение его размеров от номинала не превосходит по абсолютной величине $3{,}45$ мм. Случайные отклонения размера изделия от номинала подчиняются нормальному закону со средним квадратическим отклонением, равным 3 мм, а систематические отклонения отсутствуют. Определить среднее число изделий высшего сорта, если изготовляются четыре изделия.

11.7 Какой ширины должно быть поле допуска, чтобы с вероятностью не более $0{,}0027$ получалась деталь с контролируемым размером вне поля допуска, если случайные отклонения размера от середины поля допуска подчиняются закону нормального распределения с параметрами $a = 0$ и $\sigma = 5$ мк?

11.8 Случайная величина ξ распределена по нормальному закону с параметрами a и σ^2. Найти закон распределения случайной величины $\eta = \dfrac{\xi - a}{\sigma}$.

Домашнее задание

11.9 Поезда метрополитена идут регулярно с интервалом 2 мин. Пассажир выходит на платформу в случайный момент времени, никак не связанный с расписанием поездов. Случайная величина τ – время, в течение которого ему придётся ждать поезда, имеет равномерное распределение. Найти плотность вероятности случайной величины τ, её математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение. Найти вероятность того, что ждать придётся не больше полминуты.

11.10 Время между двумя сбоями компьютера распределено по показательному закону с параметром λ. Решение определенной задачи требует безотказной работы компьютера в течение времени T. Если за время T произошел сбой, то задачу приходится решать заново. Сбой обнаруживается только через время T после начала решения задачи. Рассматривается случайная величина θ – время, за которое задача будет решена. Найти ее закон распределения и математическое ожидание (среднее время решения задачи).

11.11 Срединным отклонением случайной величины ξ, имеющей нормальное распределение, называется число E, определяемое из условия $P(|\xi - a| < E) = 0{,}5$.Измерительный прибор имеет систематическую ошибку 5 м и срединную ошибку 50 м. Какова вероятность того, что ошибка измерения не превзойдёт по абсолютной величине 5 м?

Ответы

11.1 а) $\frac{2}{3}$; б) $\frac{1}{12}$, $\frac{\sqrt{3}}{12}$. **11.2** а) $e^{-\lambda T}$; б) $\frac{(\lambda T)^3}{3!}e^{-\lambda T}$; в) $1 - e^{-\lambda T}\left(1 - \lambda T - \frac{1}{2}(\lambda T)^2\right)$. **11.4** Показательное с параметром λ, $M\tau = \sigma_\tau = \frac{1}{\lambda}$. **11.5** а) $0{,}8186$; б) $0{,}6914$. **11.6** 3. **11.7** Не менее 30 мк. **11.10** θ – дискретная случайная величина, $\theta_k = kT$, $p(k) = e^{-\lambda T}\left(1 - e^{-\lambda T}\right)^{k-1}$. $M\theta = Te^{\lambda T}$. **11.11** $0{,}0536$.

12 Практическое занятие № 12. Дискретные векторные случайные величины

Если на одном и том же вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ определены случайные величины ξ_1, ξ_2, …, ξ_r, то иногда говорят, что задан *случайный вектор* $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_r)$. *Многомерной функцией распределения* (или *совместной функцией распределения*) ξ_1, ξ_2, …, ξ_r называется вероятность $P\{\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2, ..., \xi_r < x_r\}$, рассматриваемая как функция от точки $x = (x_1, ..., x_r)$ r-мерного евклидова пространства $\mathbb{R}^r$ и обозначаемая $F_{\xi_1,...,\xi_r}(x_1, ..., x_r)$ (кратко $F_\xi(x)$) или $F(x_1, ..., x_r)$ (кратко $F(x)$).

Дискретное r-мерное распределение задаётся с помощью конечного или счётного набора вероятностей $P\{\xi = x(k)\}$, $x(k) \in \mathbb{R}^r$.

Если случайная величина η есть непрерывная и возрастающая функция $g(\xi)$ от случайной величины ξ, то $F_\eta(x) = F_\xi\left(g^{-1}(x)\right)$.

Случайные величины ξ_1, …, ξ_r называются *независимыми*, если для любых x_1, …, $x_r \in \mathbb{R}$

$$F_{\xi_1,...,\xi_r}(x_1, ..., x_r) = \prod_{k=1}^{r} F_{\xi_k}(x_k).$$

Для дискретных распределений данное определение равносильно следующему: для всех $x = (x_1, ..., x_r) \in \mathbb{R}^r$

$$P\{\xi_1 = x_1, ..., \xi_r = x_r\} = \prod_{k=1}^{r} P\{\xi_k = x_k\}.$$

Если случайные величины ξ_1, …, ξ_r независимы, то функции от них $\eta_k = g_k(\xi_k)$, $k = 1,\ldots,r$, также будут независимыми случайными величинами.

Математическое ожидание $M\xi\eta$ произведения двух случайных величин ξ и η называется *смешанным вторым моментом*. Смешанный центральный второй момент $M(\xi - M\xi)(\eta - M\eta)$ называется *ковариацией* случайных величин ξ и η и обозначается $\mathrm{cov}(\xi,\eta)$. *Коэффициентом корреляции* ξ и η называется отношение $\rho(\xi,\eta) = \dfrac{\mathrm{cov}(\xi,\eta)}{\sqrt{D\xi D\eta}}$.

Математическое ожидание обладает следующим свойством *мультипликативности*: для любых независимых ξ и η с конечными $M\xi$ и $M\eta$

$$M\xi\eta = M\xi M\eta.$$

С помощью свойств математического ожидания получается следующая формула для вычисления ковариации: $\mathrm{cov}(\xi,\eta) = M\xi\eta - M\xi M\eta$.

Для независимых ξ_1, …, ξ_n

$$D(\xi_1 + \ldots + \xi_n) = \sum_{k=1}^{n} D\xi_k\,,\ \mathrm{cov}(\xi_i,\xi_j) = 0\ (i \neq j).$$

В общем случае

$$D(\xi_1 + \ldots + \xi_n) = \sum_{k=1}^{n} D\xi_k + 2\sum_{1\le k<l\le n} \mathrm{cov}(\xi_k,\xi_l).$$

Если имеются две дискретные случайные величины ξ и η, то *условная вероятность* события $\{\xi = x_i\}$ при условии $\eta = y_j$ определяется равенством

$$P\{\xi = x_i | \eta = y_j\} = \frac{P\{\xi = x_i, \eta = y_j\}}{P\{\eta = y_j\}}. \tag{12.1}$$

Совокупность условных вероятностей (12.1) при всех i задаёт *условное распределение* случайной величины ξ при условии $\eta = y_j$. Условное математическое ожидание ξ при условии $\eta = y_j$ определяется формулой

$$M\{\xi | \eta = y_j\} = \sum_i x_i P\{\xi = x_i | \eta = y_j\} = \sum_i \frac{x_i P\{\xi = x_i, \eta = y_j\}}{P\{\eta = y_j\}}. \tag{12.2}$$

Условные вероятности (12.1) и условное математическое ожидание (12.2) можно рассматривать как случайные величины $f_i(\eta) = P\{\xi = x_i | \eta\}$ и $g(\eta) = M\{\xi | \eta\}$, которые при $\eta = y_j$ принимают значения $P\{\xi = x_i | \eta = y_j\}$ и $M\{\xi | \eta = y_j\}$ соответственно. Вычисляя математическое ожидание от условного математического ожидания $M\{\xi | \eta\}$, получаем полезную *формулу полного математического ожидания*

$$M\xi = M[M\{\xi | \eta\}]. \tag{12.3}$$

В частности,

$$P\{\xi = x_i\} = MP\{\xi = x_i | \eta\}. \qquad (12.4)$$

Задачи для самостоятельной работы

12.1 В схеме Бернулли производится два испытания с вероятностью успеха p в каждом. Пусть случайная величина ξ_i – число успехов в i-м испытании. Записать совместный закон распределения вероятностей величин ξ_1 и ξ_2, законы распределения каждой из величин и найти совместную функцию распределения этих величин.

12.2 Игральная кость размечена таким образом, что сумма очков на противоположных гранях равна 7. Игральную кость бросают один раз. Случайная величина ξ – число очков, выпавших на верхней грани, случайная величина η – на нижней. Записать совместный закон распределения величин ξ и η.

12.3 Из урны, содержащей один бронзовый, два серебряных и три золотых шара, наудачу извлекают три шара. Случайная величина ξ – количество золотых, а случайная величина η – количество серебряных шаров среди извлечённых. Для случайных величин ξ и η:

а) записать совместный закон распределения вероятностей и законы распределения каждой из величин;

б) вычислить математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение каждой из величин;

в) вычислить ковариацию и коэффициент корреляции, записать ковариационную и корреляционную матрицы;

г) записать условные распределения вероятностей;

д) вычислить условные математические ожидания, записать уравнения линий регрессии, построить эти линии на одном чертеже и найти точку их пересечения.

Будут ли случайные величины ξ и η независимы; не коррелированы? Является ли регрессия величины ξ на величину η и величины η на величину ξ линейной?

12.4 Случайные величины ξ и η независимы, одинаково распределены и имеют дискретное распределение $P\{\xi = x_k\} = P\{\eta = x_k\} = p_k$.

Найти $P\{\xi = \eta\}$.

12.5 Каждая из случайных величин ξ и η принимает значения 0, 1 и 2. Двумерная случайная величина (ξ, η) имеет равномерное дискретное распределение. Найти законы распределения величин:

а) $\xi + \eta$;

б) $\xi - \eta$;

в) $|\xi - \eta|$.

Домашнее задание

12.6 По мишени производится один выстрел. Вероятность попадания равна p. Рассматриваются две случайные величины: ξ – число попаданий, η – число промахов. Найти совместную функцию распределения величин ξ и η.

12.7 Игральную кость бросают 2 раза. Случайная величина ξ – число выпадений единицы, случайная величина η – число выпадений двойки.

Для случайных величин ξ и η:

а) записать совместный закон распределения вероятностей и законы распределения каждой из величин;

б) вычислить математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение каждой из величин;

в) вычислить ковариацию и коэффициент корреляции, записать ковариационную и корреляционную матрицы;

г) записать условные распределения вероятностей;

д) вычислить условные математические ожидания, построить линии регрессии.

Ответы

12.4 $\sum\limits_{k} p_k^2$.

13 Практическое занятие № 13. Непрерывные векторные случайные величины

Абсолютно непрерывное r-мерное распределение вероятностей задаётся r*-мерной плотностью* $p_\xi(x) = p_{\xi_1,\ldots,\xi_r}(x_1,\ldots,x_r)$, т. е такой неотрицательной функцией $p_\xi(x)$, что

$$F_{\xi_1,\ldots,\xi_r}(x_1,\ldots,x_r) = \int\limits_{-\infty}^{x_1}\ldots\int\limits_{-\infty}^{x_r} p_{\xi_1,\ldots,\xi_r}(x_1,\ldots,x_r)\,dx_1\ldots dx_r .$$

Для абсолютно непрерывных распределений определение независимости случайных величин ξ_1, …, ξ_r равносильно следующему: для любых $x = (x_1,\ldots,x_r) \in \mathbb{R}^r$ (кроме, может быть, точек, образующих множество меры нуль)

$$p_{\xi_1,\ldots,\xi_r}(x_1,\ldots,x_r) = \prod_{k=1}^{r} p_{\xi_k}(x_k).$$

Если случайные величины ξ_1, …, ξ_r независимы, то функции от них $\eta_k = g_k(\xi_k)$, $k = 1,\ldots,r$, также будут независимыми случайными величинами.

Если ξ и η – независимые случайные величины, то по плотностям $p_\xi(x)$ и $p_\eta(x)$ можно вычислить плотность $p_{\xi+\eta}(x)$ их суммы с помощью *формулы композиции* (или *свёртки*):

$$p_{\xi+\eta}(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} p_\xi(y)\,p_\eta(x-y)\,dy = \int\limits_{-\infty}^{\infty} p_\xi(x-y)\,p_\eta(y)\,dy .$$

Полезна также формула композиции для функций распределения:

$$F_{\xi+\eta}(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} F_\xi(x-y)\,p_\eta(y)\,dy .$$

Формула (10.2) обобщается на случай, когда $\eta = g(\xi_1,...,\xi_r)$ – функция, отображающая $\mathbb{R}^r$ в $\mathbb{R}$, следующим образом:

$$Mg(\xi_1,...,\xi_r) = \int...\int g(x_1,...,x_r)p_{\xi_1,...,\xi_r}(x_1,...,x_r)dx_1...dx_r.$$

Условная плотность величины ξ при условии $\eta = y$ определяется формулой

$$p_{\xi|\eta=y}(x) = \frac{p_{\xi,\eta}(x,y)}{p_\eta(y)} = \frac{p_{\xi,\eta}(x,y)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} p_{\xi,\eta}(x,y)dx},$$

$$M\{\xi|\eta = y\} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} xp_{\xi|\eta=y}(x)dx = \frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty} xp_{\xi,\eta}(x,y)dx}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} p_{\xi,\eta}(x,y)dx}.$$

Рассматривая условную плотность $p_{\xi|\eta}(x)$ как случайную величину, которая при $\eta = y$ принимает значение $p_{\xi|\eta=y}(x)$, получаем:

$$M\{\xi|\eta\} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} xp_{\xi|\eta}(x)dx,$$

$$D\{\xi|\eta\} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - M\{\xi|\eta\})^2 p_{\xi|\eta}(x)dx.$$

Формула (12.3) остаётся справедливой и в непрерывном случае, а (12.4) заменяется формулой $p_\xi(x) = Mp_{\xi|\eta}(x)$.

Задачи для самостоятельной работы

13.1 Метеорит упал в некоторую случайную точку внутри треугольника с вершинами $A(0,0)$, $B(1,0)$ и $C(0,1)$. Случайные величины ξ и η – координаты точки падения метеорита.

Для случайных величин ξ и η:

а) записать совместную плотность вероятности и построить её график;

б) записать совместную функцию распределения;

в) найти вероятность $P\left(0 < \xi < \frac{1}{2}, 0 < \eta < \frac{1}{2}\right)$;

г) записать плотности вероятности каждой из величин и построить графики найденных плотностей;

д) вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение каждой из величин;

е) вычислить ковариацию и коэффициент корреляции, записать ковариационную и корреляционную матрицы;

ж) записать условные плотности вероятности и построить их графики;

з) вычислить условные математические ожидания, построить линии регрессии.

Будут ли случайные величины ξ и η независимы; не коррелированы?

Является ли регрессия линейной?

13.2 Дана совместная плотность вероятности двух неотрицательных случайных величин:

$$p(x,y) = axye^{-(x^2+y^2)} \ (x \ge 0,\ y \ge 0).$$

Вычислить значение постоянной a, записать плотности вероятностей каждой из величин, найти условные плотности вероятности.

13.3 Найти распределение суммы двух независимых слагаемых ξ_1 и ξ_2, если слагаемые распределены показательно с одним и тем же параметром α.

13.4 Даны математические ожидания двух нормальных случайных величин $M\xi = 26$, $M\eta = -12$ и их ковариационная матрица

$$K(\xi,\eta) = \begin{pmatrix} 196 & -91 \\ -91 & 169 \end{pmatrix}.$$

Определить совместную плотность вероятности величин ξ и η.

Домашнее задание

13.5 Дана совместная плотность вероятности величин ξ и η:

$$p(x,y) = a\sin(x+y) \ \left(0 \le x \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le y \le \frac{\pi}{2}\right).$$

Для случайных величин ξ и η:

а) записать совместную функцию распределения;

б) записать плотности вероятности каждой из величин;

в) вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение каждой из величин;

г) вычислить ковариацию и коэффициент корреляции, записать ковариационную и корреляционную матрицы.

Ответы

13.3 $p_{\xi_1+\xi_2}(x) = \alpha^2 xe^{-\alpha x} \ (x > 0)$.

13.4 $p_{\xi,\eta}(x,y) = \dfrac{1}{182\pi\sqrt{3}} \exp\left\{-\dfrac{2}{3}\left[\dfrac{(x-26)^2}{196} + \dfrac{(x-26)(y+12)}{182} + \dfrac{(y+12)^2}{169}\right]\right\}$.

14 Практическое занятие № 14. Неравенство Чебышева. Закон больших чисел

Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ заданы случайные величины $\xi_n = \xi_n(\omega)$ $(\omega \in \Omega,\ n = 1,2,\dots)$ и случайная величина $\xi = \xi(\omega)$, $\omega \in \Omega$.

Последовательность ξ_1, ξ_2, … сходится к случайной величине ξ *с вероятностью* 1 (*почти наверное*), если

$$P\left\{ \omega \in \Omega \middle| \lim_{n\to\infty} \xi_n(\omega) = \xi(\omega) \right\} = 1.$$

Последовательность ξ_1, ξ_2, … сходится к случайной величине ξ *по вероятности*, если для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\{ |\xi_n - \xi| > \varepsilon \} = 0.$$

Понятие сходимости по вероятности чаще всего используется, когда предельная случайная величина ξ имеет вырожденное распределение $P\{\xi = a\} = 1$ для некоторого числа a и

$$\xi_n = \frac{\zeta_1 + \zeta_2 + ... + \zeta_n}{n},$$

где ζ_1, ζ_2, … – случайные величины (не обязательно независимые и одинаково распределённые), если для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{ \left| \frac{\zeta_1 + \zeta_2 + ... + \zeta_n}{n} - a \right| > \varepsilon \right\} = 0, \tag{14.1}$$

то говорят, что последовательность ζ_1, ζ_2, … удовлетворяет *закону больших чисел*. Из *неравенства Чебышева*

$$P\{ |\xi - M\xi| \geq \varepsilon \} \leq \frac{D\xi}{\varepsilon^2}$$

можно вывести, что если случайные величины независимы, $M\zeta_n = a$, $D\zeta_n = \sigma^2 < \infty$ ($n = 1,2,...$), то (14.1) выполняется; однако закону других чисел могут удовлетворять и другие последовательности случайных величин.

Если вместо (14.1) выполнено соотношение

$$P\left\{ \omega \in \Omega \middle| \lim_{n\to\infty} \frac{\zeta_1 + \zeta_2 + ... + \zeta_n}{n} = a \right\} = 1, \tag{14.2}$$

т. е. последовательность $\dfrac{\zeta_1 + \zeta_2 + ... + \zeta_n}{n}$ сходится к числу a с вероятностью 1, то говорят, что последовательность ζ_1, ζ_2, … удовлетворяет *усиленному закону больших чисел*. Соотношение (14.2) выполняется, например, при условиях указанных выше: если случайные величины независимы, $M\zeta_n = a$, $D\zeta_n = \sigma^2 < \infty$ ($n = 1,2,...$).

Задачи для самостоятельной работы

14.1 Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что случайная величина ξ отклонится от своего математического ожидания не меньше чем на:

а) два средних квадратических отклонения;

б) три средних квадратических отклонения.

14.2 В осветительную сеть параллельно включено 20 ламп. Вероятность того, что за время T лампа будет включена, равна $0,8$. Пользуясь неравенством Чебышева, оценить вероятность того, что абсолютная величина разности между числом включенных ламп и средним числом (математическим ожиданием) включенных ламп за время T окажется:

а) меньше трех;

б) не меньше трех.

14.3 Вероятность появления события в каждом испытании равна $1/4$. Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что число X появлений события заключено в пределах от 150 до 250, если будет произведено 800 испытаний.

14.4 Дискретная случайная величина X принимает значения $0,1$, $0,4$ и $0,6$ с вероятностями $0,2$, $0,3$ и $0,5$ соответственно. Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что $|X - MX| < \sqrt{0,4}$.

14.5 Для правильной организации сборки узла необходимо оценить вероятность, с которой размеры деталей отклоняются от середины поля допуска не более чем на 2 мм. Известно, что середина поля допуска совпадает с математическим ожиданием размеров обрабатываемых деталей, а среднее квадратическое отклонение равно $0,25$ мм.

14.6 Случайная величина ξ подчиняется показательному закону распределения $p(x) = \dfrac{x^m}{m!}e^{-x}$ $(x \ge 0)$. Доказать справедливость неравенства

$$P(0 < \xi < 2(m+1)) > \frac{m}{m+1}.$$

14.7 Пусть ξ_k – случайная величина, которая с одинаковой вероятностью может принимать одно из двух значений k^s или $-k^s$. При каком s к среднему арифметическому последовательности ξ_1, ξ_2, … таких независимых случайных величин применим закон больших чисел?

14.8 Установить, будут ли выполнены достаточные условия применимости закона больших чисел для последовательности взаимно независимых случайных величин ξ_k с распределениями, задаваемыми формулами:

а) $P(\xi_k = \pm 2^k) = \dfrac{1}{2^{2k+1}}$, $P(\xi_k = 0) = 1 - \dfrac{1}{2^{2k}}$;

б) $P(\xi_k = \pm k) = \dfrac{1}{2\sqrt{k}}$, $P(\xi_k = 0) = 1 - \dfrac{1}{\sqrt{k}}$.

Домашнее задание

14.9 Вероятность появления события A в одном опыте равна $\dfrac{1}{2}$. Можно ли с вероятностью, большей $0,97$, утверждать, что число появлений события A в 1000 независимых опытах будет в пределах от 400 до 600?

14.10 Определить, имеет ли место закон больших чисел для среднего арифметического из n попарно независимых случайных величин ξ_k с распределением, заданным формулами: $P\left(\xi_k = \pm\sqrt{2}\right) = \dfrac{1}{4}$, $P(\xi_k = 0) = \dfrac{1}{2}$.

Ответы

14.1 а) $\le 0{,}25$; б) $\le 0{,}(1)$. **14.2** а) $\ge 0{,}64$; б) $\le 0{,}36$ **14.3** $\ge 0{,}94$. **14.4** $\ge 0{,}909$. **14.5** $\ge 0{,}984375$. **14.7** $< \dfrac{1}{2}$. **14.8** а) выполняются; б) не выполняются. **14.9** Можно. **14.10** Закон больших чисел имеет место, достаточные условия выполнены.

15 Практическое занятие № 15. Характеристические и производящие функции

Если случайная величина ξ принимает только целые неотрицательные значения, то *производящей функцией* распределения ξ называется функция комплексного переменного z $\varphi_\xi(z) = Mz^\xi = \sum\limits_{k=0}^{\infty} z^k P\{\xi = k\}$, $|z| \le 1$; производящую функцию можно рассматривать и в случае, когда ξ принимает и отрицательные значения, если область сходимости ряда в правой части последнего равенства отлична от окружности $|z| = 1$.

Если случайная величина ξ принимает действительные значения, то *характеристической функцией* распределения ξ называется функция действительного переменного t $f_\xi(t) = Me^{it\xi}$, $-\infty < t < \infty$; в частности, если распределение ξ абсолютно непрерывно и имеет плотность $p_\xi(x)$, то

$$f_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx} p_\xi(x)\,dx.$$

Перечислим важнейшие свойства производящих и характеристических функций.

1 Если $P\{|\xi| < \infty\} = 1$, то $f_\xi(0) = \varphi_\xi(1) = 1$.

2 Если $M|\xi|^k < \infty$ для некоторого целого $k \ge 1$, то

$$\left.\frac{d^k}{dt^k} f_\xi(t)\right|_{t=0} = i^k M\xi^k, \quad \left.\frac{d^k}{dz^k} \varphi_\xi(z)\right|_{z=1} = M\xi^{[k]}.$$

3 Если случайные величины ξ_1, ξ_2, …, ξ_n независимы, то

$$f_{\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n}(t) = f_{\xi_1}(t) f_{\xi_2}(t) \ldots f_{\xi_n}(t),$$
$$\varphi_{\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n}(z) = \varphi_{\xi_1}(z) \varphi_{\xi_2}(z) \ldots \varphi_{\xi_n}(z).$$

Обратное утверждение в общем случае неверно.

4 Если производящие (или характеристические) функции распределений случайных величин ξ_1 и ξ_2 совпадают, то совпадают и функции распределения ξ_1 и ξ_2.

5 (Теорема непрерывности.) Последовательность $F_n(x) = P\{\xi_n \le x\}$ ($n = 1, 2, \ldots$) функций распределения слабо сходится к функции распределения $F(x) = P\{\xi \le x\}$ тогда и только тогда, когда существует непрерывная функция $f(t) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(t)$, где $f_n(t) = Me^{it\xi_n}$. В этом случае $f(t) = Me^{it\xi}$, и сходимость $f_n(t) \to f(t)$ равномерна на каждом конечном интервале значений t.

6 (Формулы обращения.) Если функция $f(t) = Me^{it\xi}$ абсолютно интегрируема, то распределение случайной величины ξ имеет ограниченную непрерывную плотность $p(x)$ и $p(x) = \dfrac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} f(t)dt$. Если x и $x+h$ – точки непрерывности функции распределения $F(x) = P\{\xi \le x\}$, то

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{2\pi}\lim_{a\to 0}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-\frac{a^2t^2}{2}} \frac{1 - e^{-ith}}{ith} e^{-itx} dx.$$

Производящие и характеристические функции векторных случайных величин $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_k) \in \mathbb{R}^k$ определяются формулами

$$f_\xi(t_1, \ldots, t_k) = Me^{i(t_1\xi_1 + \ldots + t_k\xi_k)},$$
$$\varphi_\xi(z_1, \ldots, z_k) = Mz_1^{\xi_1} \ldots z_k^{\xi_k}.$$

Их свойства аналогичны свойствам производящих и характеристических функций одномерных случайных величин.

Задачи для самостоятельной работы

15.1 Найти законы распределения, которым соответствуют следующие производящие функции:

а) $\dfrac{1}{4}(1+z)^2$; в) $e^{\lambda(z-1)}$;

б) $\dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{1}{2}z\right)^{-1}$; г) $\left(\dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3}z\right)^n$.

15.2 Рассмотрим последовательность испытаний Бернулли. Пусть P_n – вероятность того, что первая комбинация «успех, неудача» появится при $(n-1)$-м и n-м испытаниях. Найти производящую функцию, среднее значение и дисперсию P_n, если вероятность успеха p.

15.3 Вероятность появления события в каждом из n опытов одинакова и равна p. Доказать, что производящей функцией для вероятностей появления события не менее $n - m$ раз является функция $\varphi_\xi(z) = \dfrac{(p+qz)^n}{1-z}$.

15.4 Два стрелка производят по n выстрелов, причём каждый стреляет по своей мишени. Определить вероятность того, что у них будет по одинаковому числу попаданий, если вероятность попадания при каждом выстреле постоянна и равна 0,5.

15.5 Найти законы распределения, которым соответствуют следующие характеристические функции:

а) $\cos t$;

б) $\cos^2 t$;

в) $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos kt$, где $a_k \geq 0$, $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = 1$.

15.6 Найти характеристические функции для следующих законов распределения:

а) равномерного распределения в интервале $(-a, a)$;

б) биномиального распределения;

в) распределения Пуассона;

г) показательного распределения.

15.7 Пользуясь выражением $f_\xi(t) = e^{-\frac{t^2\sigma^2}{2}}$ для характеристической функции центрированной случайной величины ξ, подчиняющейся нормальному закону распределения, определить все центральные моменты.

Домашнее задание

15.8 Найти производящую функцию случайной величины ξ, имеющей геометрическое распределение с параметром p и, пользуясь найденной производящей функцией, найти математическое ожидание и дисперсию величины ξ.

15.9 В партии, состоящей из n изделий, m изделий дефектных. Для проверки качества произведена бесповторная выборка r изделий ($m < r < n - m$). Найти характеристическую функцию числа дефектных изделий, содержащихся в выборке.

15.10 Найти характеристическую функцию случайной величины ξ, плотность вероятности которой $p_\xi(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$.

Ответы

15.1 а) дискретное распределение со скачками в точках 0, 1, 2, соответственно равными $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$; б) дискретное распределение; значение $k \geq 0$ принимается с вероятностью 2^{-k-1}; в) распределение Пуассона с параметром λ; г) биномиальное распределение с вероятностью успеха $p = \frac{2}{3}$.

15.2 $\varphi(z) = \dfrac{p(1-p)z^2}{(1-pz)(1-(1-p)z)}$; $MP_n = \dfrac{1}{p(1-p)}$; $DP_n = \dfrac{1-3p(1-p)}{p^2(1-p)^2}$.

15.4 $\varphi_\xi(z)=\dfrac{(1+z)^{2n}}{4^n z^n}$, $\dfrac{1}{4^n}C_{2n}^n$. **15.5** в) дискретное распределение со скачками $\dfrac{1}{2}a_k$ в точках $\pm k$. **15.7** $\mu_{2k}=\sigma^{2k}(2k-1)!!$; $\mu_{2k+1}=0$. **15.8** $\varphi_\xi(z)=\dfrac{p}{1-(1-p)z}$, $M\xi=\dfrac{1-p}{p}$, $D\xi=\dfrac{1-p}{p^2}$. **15.9** $f_\xi(t)=\sum\limits_{k=0}^{m}\dfrac{C_m^k C_{n-m}^{r-k}}{C_n^r}e^{ikt}$. **15.10** $f_\xi(t)=\dfrac{1}{1+t^2}$.

16 Практическое занятие № 16. Центральная предельная теорема

Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega,\mathfrak{A},P)$ заданы случайные величины $\xi_n=\xi_n(\omega)(\omega\in\Omega$, $n=1,2,\ldots)$ и случайная величина $\xi=\xi(\omega)$, $\omega\in\Omega$.

Последовательность функций распределения $F_n(x)=P\{\xi_n\le x\}$, $n=1,2,\ldots$, *слабо сходится* к функции распределения $F(x)=P\{\xi\le x\}$, если для любой точки x, где $F(x)$ непрерывна, выполняется соотношение

$$\lim_{n\to\infty}F_n(x)=F(x).$$

В этом случае говорят также, что последовательность случайных величин ξ_1, ξ_2, … сходится к ξ *по распределению*; при этом ξ, ξ_1, ξ_2, … могут быть заданы на различных вероятностных пространствах. Пример сходимости по распределению даёт центральная предельная теорема.

Центральная предельная теорема. Если ζ_1, ζ_2, … – независимые одинаково распределённые случайные величины, $M\zeta_n=a$, $D\zeta_n=\sigma^2<\infty$ $(n=1,2,\ldots)$, то для любого x, $-\infty<x<\infty$,

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\frac{\zeta_1+\ldots+\zeta_n-na}{\sigma\sqrt{n}}\le x\right\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{u^2}{2}}du=\Phi(x).$$

Сходимость распределений центрированных и нормированных сумм случайных величин к стандартному нормальному распределению имеет место и при других предположениях о случайных слагаемых. Практическое значение предельной теоремы состоит в том, что она позволяет аппроксимировать распределения допредельных случайных величин ξ_n (при достаточно больших n) распределением предельной случайной величины ξ; это особенно полезно в тех случаях, когда аналитическая запись функции распределения ξ проще выражения для функции распределения ξ_n. Следует иметь ввиду, однако, что вопрос о том, достаточно ли велико n для того, чтобы обеспечить нужную точность приближения, в каждом случае требует особого исследования.

Задачи для самостоятельной работы

16.1 Для определения потребности в жидком металле и сырье выборочно устанавливают средний вес отливки гильзы к автомобильному двигателю, т. к.

вес отливки, рассчитанный по металлической модели, отличается от фактического веса. Сколько нужно взять отливок, чтобы с вероятностью более $0{,}9$ можно было утверждать, что средний вес отобранных отливок отличается от расчётного веса, принятого за математическое ожидание, не более чем на $0{,}2$ кг? Установлено, что среднее квадратическое отклонение веса равно $0{,}45$ кг.

16.2 Из 1000 изделий, отправляемых в сборочный цех, обследованию было подвергнуто 200 отобранных случайным образом изделий. Среди них оказалось 25 бракованных. Приняв долю бракованных изделий среди отобранных за вероятность изготовления бракованного изделия, оценить вероятность того, что во всей партии окажется бракованных изделий не более 15 % и не менее 10 %.

16.3 Какое число подбрасываний симметричной монеты надо произвести, чтобы наблюденная частота выпадения герба отличалась от вероятности выпадения герба не более чем на $0{,}01$ с вероятностью $0{,}99$?

16.4 Для определения скорости v движения объекта выполняется n измерений $v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_n$, причём i-е измерение производится со случайной ошибкой δ_i (т. е. $v_i = v + \delta_i$). Предполагая, что ошибки измерений δ_i независимы и одинаково распределены с математическим ожиданием $M\delta_i = 0$ (отсутствуют систематические ошибки наблюдений) и дисперсией $D\delta_i = \sigma^2$, оценить вероятность того, что средняя наблюденная скорость будет отличаться от истинной скорости v не более чем на ε.

16.5 Вероятность появления события в каждом из 2100 независимых испытаний равна $0{,}7$. Найти вероятность того, что событие появится: а) не менее 1470 и не более 1500 раз; б) не менее 1470 раз; в) не более 1469 раз.

16.6 Вероятность появления события в каждом из 900 независимых испытаний равна $0{,}5$. Найти вероятность того, что относительная частота появления события отклонится от его вероятности по абсолютной величине не более чем на $0{,}02$.

16.7 Установить, будут ли выполнены закон больших чисел и центральная предельная теорема для последовательности взаимно независимых случайных величин ξ_k с распределениями, задаваемыми следующим образом:

а) $P\{\xi_k = \pm 2^k\} = \dfrac{1}{2}$;

б) $P\{\xi_k = \pm k\} = \dfrac{1}{2\sqrt{k}},\ P\{\xi_k = 0\} = 1 - \dfrac{1}{\sqrt{k}}$.

16.8 На улице стоит человек и продаёт газеты. Предположим, что каждый из проходящих мимо людей покупает газету с вероятностью $\dfrac{1}{3}$. Пусть ξ означает число людей, прошедших мимо продавца за время, пока он продавал первые 100 экземпляров газеты. Найти распределение ξ.

Домашнее задание

16.9 Стрелок попадает при выстреле по мишени в десятку с вероятностью $0{,}5$, в девятку – $0{,}3$, в восьмёрку – $0{,}1$, в семёрку – $0{,}05$, в шестёрку – $0{,}05$. Стрелок сделал 100 выстрелов. Какова вероятность того, что он набрал более:

а) 980 очков;

б) 950 очков?

16.10 Установить, будут ли выполнены закон больших чисел и центральная предельная теорема для последовательности взаимно независимых случайных величин ξ_k с распределением, задаваемым следующим образом: $P\{\xi_k = \pm 2^k\} = \frac{1}{2^{2k+1}}$, $P\{\xi_k = 0\} = 1 - \frac{1}{2^{2k}}$.

Ответы

16.1 > 50. **16.2** $\geq 0,825$. **16.3** 16641. **16.4** $2\Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right)$. **16.5** а) $0,4236$; б) $0,5$; в) $0,5$. **16.6** $0,7698$. **16.7** а) нет; б) закон больших чисел – нет, центральная предельная теорема – да. **16.8** $\frac{\xi - 300}{30}$ асимптотически нормальна с параметрами $a = 0$, $\sigma^2 = 1$. **16.10** Закон больших чисел – да, центральная предельная теорема – нет.

17 Практическое занятие № 17. Основные понятия теории случайных процессов

Пусть Ω – пространство элементарных событий с исходами ω и пусть для каждого элементарного события ω определяется случайная функция времени $\xi(t) = \xi(t,\omega)$, $t \in T$. Такая совокупность функций называется *случайным процессом*. Если T – счётное множество, то $\xi(t)$ называется случайным процессом *с дискретным временем* или *случайной последовательностью* (цепью). Если T – отрезок времени, то $\xi(t)$ называется случайным процессом *с непрерывным временем*.

Функция распределения случайного процесса $\xi(t)$ при фиксированных t_1, t_2, …, t_n определяется равенством

$$F(x_1,...,x_n;t_1,...,t_n) = P\{\xi(t_1) < x_1,...,\xi(t_n) < x_n\} \tag{17.1}$$

для всех x_1, …, x_n из $\mathbb{R}$. Если функция (17.1) достаточное число раз дифференцируема, то n-мерная совместная плотность вероятностей случайного процесса $\xi(t)$ имеет вид

$$f(x_1,...,x_n;t_1,...,t_n) = \frac{\partial^n F(x_1,...,x_n;t_1,...,t_n)}{\partial x_1 ... \partial x_n}. \tag{17.2}$$

Функция распределения (17.1) или плотность вероятности (17.2) тем полнее описывают сам случайный процесс, чем больше n. Случайный процесс считается заданным, если задано множество всех его n-мерных законов распределения для любых n.

Математическим ожиданием случайного процесса $\xi(t)$ называется функция

$$M\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x,t)dx,$$

где $p(x,t)$ – одномерная плотность вероятностей случайного процесса $\xi(t)$. *Дисперсией* случайного процесса $\xi(t)$ называется функция

$$D\xi(t) = M(\xi(t) - M\xi(t))^2.$$

Корреляционная функция $K_\xi(t_1,t_2)$ случайного процесса $\xi(t)$ определяется равенством $K_\xi(t_1,t_2) = \operatorname{cov}(\xi(t_1),\xi(t_2))$.

Случайный процесс с постоянным математическим ожиданием и корреляционной функцией, зависящей только от разности аргументов, называется случайным процессом, *стационарным в широком смысле*. Для стационарного случайного процесса $\xi(t)$, непрерывного по времени, спектральная плотность определяется равенством

$$S_\xi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K_\xi(t)e^{-i\omega t}dt.$$

Если известна спектральная плотность $S_\xi(\omega)$, то в результате обратного преобразования Фурье можно найти корреляционную функцию $K_\xi(t)$. Для процессов с дискретным временем $t = n$, $n \in \mathbb{Z}$, спектральная плотность определяется дискретным преобразованием Фурье.

К основным случайным процессам относится *марковский случайный процесс*, являющийся обобщением цепи Маркова, и, в частности, *пуассоновский процесс*, широко используемый в теории массового обслуживания.

Задачи для самостоятельной работы

17.1 Рассмотрим случайный процесс $\xi(t) = \omega \sin t$, $t \ge 0$, где ω – непрерывная случайная величина, равномерно распределённая на отрезке $[-1,1]$ с плотностью вероятности $p(x) = \dfrac{1}{2}$, $-1 \le x \le 1$. Найти математическое ожидание и корреляционную функцию случайного процесса $\xi(t)$.

17.2 Указать, какая из функций может быть корреляционной функцией $K_\xi(t)$ стационарного случайного процесса:

а) постоянная функция;

б) $\cos t$;

в) $\begin{cases} 1, & |t| < 1, \\ 0, & |t| \ge 1; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 2, & t \le 0, \\ 0, & t > 0. \end{cases}$

17.3 Стационарный случайный процесс имеет корреляционную функцию:

а) $e^{-a|t|}$, $a > 0$;

б) $e^{-a^2t^2}$;

в) $A + B\cos \omega t$;

г) $e^{-a|t|}\cos \omega t$, $a > 0$.

Определить соответствующие спектральные плотности распределения.

17. 4 Найти спектральные плотности и корреляционные функции случайных процессов:

а) $x(t)=e(t)+ae(t-1)$;

б) $x(t)+ax(t-1)=e(t-1)$;

в) $x(t)+ax(t-1)=e(t)+Ce(t-1)$, C – постоянная, где $e(t)$ ($t\in\mathbb{N}$) – независимые случайные величины, имеющие стандартное нормальное распределение, $|a|<1$.

17.5 Пусть $\xi(t)$, $t\in T$ – марковский случайный процесс и $T_1\subset T$. Доказать, что процесс $\xi(t)$, $t\in T_1$ – тоже марковский.

17.6 Показать, что процесс $\xi(t)$, описываемый разностным уравнением $\xi(t+1)=a(t)\xi(t)+\omega(t)$, $t=0,1,2,...$ – марковский. Здесь $a(t)$ – неслучайная последовательность чисел, а $\omega(t)$ – последовательность чисел, распределённая по стандартному нормальному закону.

Ответы

17.1 $M\xi(t)=0$, $K_\xi(t_1,t_2)=\frac{1}{3}\sin t_1\sin t_2$. **17.2** а) да; б) да; в) да; г) нет. **17.4** а) $K_\xi(t)=1+a^2$, $S_\xi(\omega)=2\pi(1+a^2)\delta(t)$.

Список литературы

1 **Башарин, Г. П.** Введение в теорию вероятностей: учебное пособие для студентов II–III курсов специальностей «Математика», «Прикладная математика» / Г. П. Башарин. – Москва: УДН, 1990. – 228 с.

2 **Бочаров, П. П.** Теория вероятностей. Математическая статистика: учебное пособие / П. П. Бочаров, А. В. Печинкин. – Москва: Гардарика, 1998. – 328 с.

3 **Вентцель, Е. С.** Задачи и упражнения по теории вероятностей: учебное пособие / Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров. – 5-е изд., испр. – Москва: Академия, 2003. – 448 с.

4 **Гмурман, В. Е.** Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: учебное пособие для вузов / В. Е. Гмурман. – 11-е изд., перераб. и доп. – Москва: Юрайт, 2020. – 406 с.

5 **Жевняк, Р. М.** Высшая математика: учебное пособие для втузов / Р. М. Жевняк, А. А. Карпук. – Минск: Вышэйшая школа, 1988. – Ч. V. – 253 с.

6 **Зубков, А. М.** Сборник задач по теории вероятностей / А. М. Зубков, Б. А. Севастьянов, В. П. Чистяков. – Москва: Наука, 1989. – 320 с.

7 **Мешалкин, Л. Д.** Сборник задач по теории вероятностей / Л. Д. Мешалкин. – Москва: Моск. ун-т, 1963. – 157 с.

8 Сборник задач по математике для втузов: учебное пособие в 4 ч. / Под общ. ред. А. В. Ефимова и А. С. Поспелова. – 3-е изд., перераб. и доп. – Москва: Физ.-мат. лит., 2003. – Ч. 4. – 432 с.

9 Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций / Под ред. А. А. Свешникова. – Москва: Наука, 1965. – 632 с.