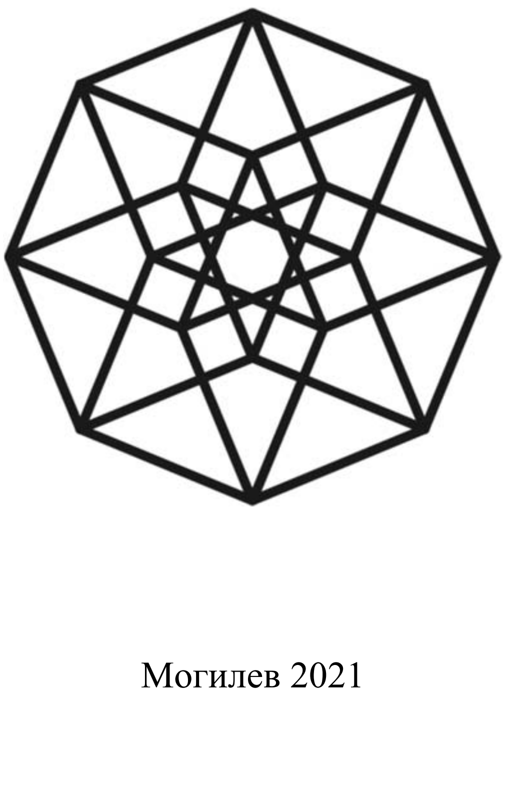
МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Высшая математика»

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Методические рекомендации к практическим занятиям для студентов направления подготовки 01.03.04 «Прикладная математика» очной формы обучения



Могилев 2021

УДК 514.123
ББК 22.151
А64

Рекомендовано к изданию
учебно-методическим отделом
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Высшая математика» «29» апреля 2021 г., протокол № 8

Составители: канд. пед. наук, доц. Е. Л. Старовойтова;
ст. преподаватель А. Г. Козлов

Рецензент канд. физ.-мат. наук И. И. Маковецкий

Методические рекомендации содержат необходимые для проведения практических занятий вопросы и задачи.

Учебно-методическое издание

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Ответственный за выпуск В. Г. Замураев

Корректор Т. А. Рыжикова

Компьютерная вёрстка Н. П. Полевничая

Подписано в печать . Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Печать трафаретная. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 56 экз. Заказ №

Издатель и полиграфическое исполнение:
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования
«Белорусско-Российский университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/156 от 07.03.2019.
Пр-т Мира, 43, 212022, г. Могилев.

Содержание

1 Практическое занятие № 1. Декартова прямоугольная система координат. Полярная система координат. Метод координат на плоскости. Основные приложения метода координат на плоскости. Расстояние между двумя точками. Деление отрезка в данном отношении

Вопросы к практическому занятию

1 Декартова система координат, единичные векторы, координатная плоскость.

2 Декартовы координаты точки.

3 Полярная система координат.

4 Полярные координаты точки.

5 Связь между декартовыми и полярными координатами точки.

6 Сущность метода координат на плоскости.

7 Уравнение линии на плоскости.

8 Формула для нахождения расстояния между двумя точками в декартовой системе координат.

9 Формула для нахождения расстояния между двумя точками в полярной системе координат.

10 Формулы деления отрезка в данном отношении.

11 Формулы для нахождения середины отрезка.

12 Формулы для нахождения направляющих косинусов.

13 Формула для нахождения площади треугольника с вершинами в заданных точках.

14 Условие расположения трех точек на одной прямой.

15 Формулы для нахождения координат центра тяжести масс треугольника.

Задачи к практическому занятию

1 Даны точки $A(6;-3)$ и $B(9;-7)$. Вычислить расстояние между точками A и B и расстояние от точки B до начала координат.

2 Даны точки $A(-1;-3)$ и $B(4;2)$. Найти направление отрезка AB.

3 Найти координаты точки M, делящей отрезок между точками $M_1(-1;8)$ и $M_2(3;3)$ в отношении $\lambda=\frac{3}{2}$.

4 В точках $A(2;1)$, $B(-1;3)$ и $C(-2;5)$ помещены соответственно массы 50, 20 и 30 г. Определить координаты центра масс этой системы.

5 Даны точки $A(-2;0)$, $B(6;6)$ и $C(1;-4)$. Найти площадь треугольника ABC и координаты центра тяжести этого треугольника, полагая его однородным.

6 Дана точка $M\left(-1;-\sqrt{3}\right)$. Найти полярные координаты точки *M*.

7 Найти прямоугольные координаты точки M с полярными координатами $\left(2;\frac{-2\pi}{3}\right)$.

8 Вычислить длины сторон треугольника, вершины которого находятся в точках $A(1;2)$, $B(-3;4)$, $C(2;-1)$.

9 На оси Ox найти точки *B* и *C*, расстояние от которых до точки $A(3;-5)$ равно $5\sqrt{2}$.

10 На оси Oy найти точки *B* и *C*, расстояние от которых до точки $P(-2;7)$ равно $\sqrt{68}$.

11 На биссектрисе координатного угла, расположенной в первой и третьей четвертях, найти точки B и C, находящиеся от точки $K(5;-4)$ на расстоянии $\sqrt{101}$.

12 Даны вершины треугольника $A(7;9)$, $B(2;-3)$, $C(3;6)$. Найти точку M пересечения медиан, точку E пересечения биссектрисы AE со стороной BC.

Домашнее задание

1 Даны точки $P(2;-4)$ и $S(3;-9)$. Вычислить расстояние между точками P и S и расстояние от точки P до начала координат.

2 Даны точки $P(1;2)$ и $Q(4;-1)$. Найти направление отрезка PQ.

3 Найти координаты точки *M*, делящей отрезок между точками $M_1(5;-8)$ и $M_2(-4;9)$ в отношении $\lambda = 1$.

4 В точках $A(-2;1)$, $B(3;7)$ и $C(0;-3)$ помещены соответственно массы 170, 20 и 30 г. Определить координаты центра масс этой системы.

5 Даны точки $A(-2;2)$, $B(-3;5)$ и $C(-8;-2)$. Найти площадь ΔABC и координаты центра тяжести этого треугольника, полагая его однородным.

6 Вычислить площадь квадрата, две смежные вершины которого расположены в точках $A(11;-2)$, $B(-1;4)$.

7 Вычислить площадь квадрата, если две противолежащие его вершины находятся в точках $A(4;-2)$, $C(-1;3)$.

8 Вычислить площадь треугольника, вершины которого находятся в точках $A(2;3)$, $B(3;-4)$, $C(5;1)$.

9 Найти координаты центра тяжести *M* треугольника, вершины которого находятся в точках $A(13;5)$, $B(4;-3)$, $C(-2;4)$.

2 Практическое занятие № 2. Прямая линия как линия первого порядка. Уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении. Уравнение прямой с угловым коэффициентом. Уравнение прямой, проходящей через две точки. Уравнение прямой в отрезках. Нормальное уравнение прямой

Вопросы к практическому занятию

1 Прямая линия как линия первого порядка.

2 Уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении.

3 Уравнение прямой с угловым коэффициентом.

4 Уравнение прямой, проходящей через две точки.

5 Уравнение прямой в отрезках.

6 Нормальное уравнение прямой.

Задачи к практическому занятию

1 Написать уравнение прямой, проходящей через точку $A(3;4)$ и составляющей с осью Ox угол $\varphi = 45°$.

2 Записать уравнение прямой $y = 2x - 3$ в отрезках и построить ее.

3 Составить уравнение прямой, проходящей через точки $A(3;4)$ и $B(5;8)$.

4 Найти величины отрезков, отсекаемых на осях координат прямой, заданной уравнением $7x - 3y - 21 = 0$.

5 Уравнение прямой в отрезках имеет вид $\frac{x}{\frac{2}{3}} + \frac{y}{-12} = 1$. Записать общее уравнение этой прямой.

6 Составить уравнение прямой по заданной точке $M(1;2)$ и направляющему вектору $\vec{p}(2;1)$.

7 Составить нормальное уравнение прямой, нормальный вектор которой составляет угол $\varphi = 60°$ с осью Ox, а расстояние от начала координат до прямой составляет 4.

8 Описать уравнением множество точек плоскости, равноудаленных от начала координат и от точки $A(-2;4)$.

9 Уравнение прямой $4x - 3y + 12 = 0$ представить в виде:

а) уравнения прямой с угловым коэффициентом;

б) уравнения в отрезках;

в) нормального уравнения.

10 Определить, при каком значении α прямая $(\alpha^2 - \alpha)x + (2 + \alpha)y - 3\alpha + 1 = 0$:

а) параллельна оси Ox; б) проходит через начало координат.

11 Найти значение k из условия, что прямая $y = kx + 2$ удалена от начала координат на расстояние $\sqrt{3}$.

Домашнее задание

1 Уравнение прямой в отрезках имеет вид $\dfrac{x}{\frac{-1}{2}} + \dfrac{y}{\frac{3}{2}} = 1$. Записать общее уравнение этой прямой.

2 Составить нормальное уравнение прямой, нормальный вектор которой составляет угол $\varphi = 135°$ с осью Ox, а расстояние от начала координат до прямой составляет 7.

3 Составить уравнение прямой, проходящей через точки $A(3;4)$ и $B(3;8)$.

4 Составить уравнение прямой по точке $M(0;-3)$ и направляющему вектору $\vec{p}(-7;5)$.

5 Записать уравнение прямой с угловым коэффициентом, уравнение в отрезках и нормальное уравнение для заданных кривых и определить, на каком расстоянии от начала координат они находятся:

а) $3x - 3y + 6 = 0$; б) $x + 2,5 = 0$; в) $y = x - 1$; г) $x + 5y = 0$.

3 Практическое занятие № 3. Угол между двумя прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых. Взаимное расположение двух прямых. Расстояние от точки до прямой. Пучок прямых

Вопросы к практическому занятию

1 Угол между двумя прямыми.
2 Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых.
3 Взаимное расположение двух прямых.
4 Расстояние от точки до прямой. Пучок прямых.

Задачи к практическому занятию

1 Найти угол между прямыми, заданными уравнениями $y = \dfrac{-5}{3}x - 3$ и $y = \dfrac{-x}{4} + \dfrac{7}{4}$.

2 Найти угол между прямыми, заданными уравнениями $5x + 3y + 15 = 0$ и $x + 4y - 7 = 0$.

3 Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M\left(4;-5\right)$ и параллельной прямой $3x+4y+12=0$.

4 Найти расстояние от точки $M_0\left(-7;4\right)$ до прямой, заданной уравнением $4x-3y-15=0$.

5 Найти точку пересечения прямых $2x-y-3=0$ и $-3x-y+2=0$.

6 Определить угловой коэффициент прямых:

а) $9x+3y-1=0$; б) $x-2y+5=0$; в) $7x-5y+1=0.$

7 Составить уравнения прямых, проходящих через начало координат и образующих с осью Ox угол:

а) $\dfrac{\pi}{6}$; б) $\dfrac{3\pi}{4}$;

8 Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A\left(3;4\right)$ параллельно прямой $y=5x+3$.

9 Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A\left(2;-1\right)$ перпендикулярно к прямой $y=-3x-1$.

10 Составить уравнение прямой, проходящей через две данные точки $B\left(1;-6\right)$ и $C\left(-5;4\right)$.

11 Составить уравнение прямой, имеющей угловой коэффициент $k=-2$ и проходящей через точку $P\left(4;3\right)$.

12 Составить уравнение прямой, составляющей с положительным направлением оси Ox угол 30° и проходящей через точку $N\left(-6;7\right)$.

13 При каких значениях α следующие пары прямых параллельны:

а) $2x-3y+4=0$ и $\alpha x-6y+7=0$;

б) $\alpha x-4y+1=0$ и $-2x-4y+1=0$.

14 Найти расстояние между параллельными прямыми $3x+4y-20=0$ и $6x+8y+5=0$.

Домашнее задание

1 Вычислить угол, образованный прямыми:

а) $y=2x-5$ и $y=-\dfrac{1}{2}x+1$; в) $y=5x+3$ и $y=\dfrac{3}{4}x+7$;

б) $2x-3y+10=0$ и $5x-y+4=0$; г) $y=\dfrac{3}{4}x-2$ и $8x+6y+5=0$.

2 Найти расстояние от точки $C(3;3)$ до прямой, заданной уравнением $4x+3y-9=0$.

3 Найти координаты точки пересечения прямых $y=\dfrac{5}{2}x+\dfrac{13}{2}$ и $y=3x-6.$

4 Найти длину высоты треугольника с вершинами в точках

$A\left(\frac{3}{2};1\right)$, $B\left(1;\frac{5}{3}\right)$, $C(3;3)$, опущенной из вершины A.

5 Вершины треугольника находятся в точках $A(5;6)$, $B(-1;12)$, $C(1;0)$. Составить уравнение высоты этого треугольника, опущенной из вершины В.

6 При каких значениях α следующие пары прямых перпендикулярны:

а) $4x+y-6=0$ и $3x-\alpha y-2=0$;

б) $x-\alpha y+5=0$ и $2x+3y+3=0$.

7 Найти расстояние между прямыми $2x-3y+8=0$ и $4x-6y=10$.

4 Практическое занятие № 4. Общее уравнение плоскости. Исследование общего уравнения плоскости. Уравнение плоскости, проходящей через три точки. Уравнение плоскости в отрезках. Нормальное уравнение плоскости. Расстояние от точки до плоскости

Вопросы к практическому занятию

1 Уравнение поверхности.

2 Уравнение плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору.

3 Нормальный вектор плоскости.

4 Общее уравнение плоскости.

5 Частные случаи общего уравнения плоскости.

6 Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки.

7 Уравнение плоскости в отрезках на осях.

8 Нормальное уравнение плоскости.

9 Расстояние от точки до плоскости.

10 Проекция точки на плоскость.

Задачи к практическому занятию

1 Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(-4;5;-6)$ и имеющей нормальный вектор $\vec{n}=(-1;-2;3)$.

2 Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_1(-1;4;-9)$, $M_2(2;5;-7)$, $M_3(-3;6;-8)$.

3 Найти величины отрезков, отсекаемых плоскостью $2x-9y+3z-54=0$ на координатных осях.

4 Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(1;-2;3)$ и $M_2(0;2;5)$ параллельной оси Oy.

5 Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1;-2;3)$ и проходящей через ось Oz.

6 Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1;2;3)$ параллельно двум данным векторам $\vec{a}=(6;-8;10)$ и $\vec{b}=(4;-3;5)$.

7 Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1;-2;3)$ и перпендикулярной вектору $\vec{n}=(3;-4;5)$.

8 Составить уравнение плоскости, проходящей через две параллельные прямые $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{3}=\frac{z+2}{1}$ и $\frac{x+1}{2}=\frac{y+3}{3}=\frac{z}{1}$.

9 Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2;5;4)$ и отсекающей на оси ординат отрезок $b=-6$, а на оси аппликат отрезок $c=3$.

10 Найти проекцию B точки $A(5;2;-1)$ на плоскость $2x-y+3z+23=0$.

11 Найти расстояние от точки $M_0(7;-8;3)$ до плоскости $x+2y-z-12=0$.

12 Найти расстояние между плоскостью $2x+3y+8z+6=0$ и точкой $M(1;8;5)$.

Домашнее задание

1 Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(-3;-2;1)$ и имеющей нормальный вектор $\vec{n}=(1;-3;-7)$.

2 Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1;-2;3)$ и проходящей через ось Oz.

3 Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_1(-3;5;-8)$, $M_2(5;-7;1)$, $M_3(-5;4;-1)$.

4 Найти величины отрезков, отсекаемых плоскостью $2x-4y+3z-12=0$ на координатных осях.

5 Найти проекцию B точки $A(5;2;-1)$ на прямую $\frac{x-1}{2}=\frac{y+11}{4}=\frac{z-2}{5}$.

6 Найти расстояние от точки $M_1(6;4;-1)$ до плоскости $2x-y-2z+15=0$.

7 Найти расстояние между плоскостью $x-4y+4z-8=0$ и точкой $M(0;-3;2)$.

5 Практическое занятие № 5. Взаимное расположение двух плоскостей. Угол между плоскостями. Условия параллельности и перпендикулярности двух плоскостей. Взаимное расположение трех плоскостей. Пучок плоскостей

Вопросы к практическому занятию

1 Угол между плоскостями.
2 Условие перпендикулярности двух плоскостей.
3 Условие параллельности двух плоскостей.
4 Взаимное расположение трех плоскостей.
5 Пучок плоскостей.

Задачи к практическому занятию

1 Найти величину острого угла между плоскостями $2x+6y-7z-3=0$ и $x+3y-z+2=0$.

2 Определить, являются ли плоскости $2x+3y-4z+4=0$ и $5x-2y+z-3=0$ перпендикулярными.

3 Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1;-2;3)$ параллельно плоскости $3x-4y+5z+6=0$.

4 Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(0;-3;2)$ параллельно плоскости, проходящей через точки $M_1(0;-2;-1)$, $M_2(1;-3;4)$, $M_3(1;1;-1)$.

5 Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1;-4;-3)$ перпендикулярно к плоскостям $2x+y-3z+5=0$ и $x+4y+6z-1=0$.

6 Составить уравнение плоскости, параллельной плоскости $x-2y+2z+5=0$ и удаленной от точки $M(3;4;-2)$ на расстояние $d=5$.

7 Найти расстояние между параллельными плоскостями $x+y-z-2=0$ и $2x+2y-2z+5=0$.

8 Найти расстояние от точки $M_0(5;4;-1)$ до плоскости, проходящей через точки $M_1(0;4;0)$, $M_2(0;4;-3)$, $M_3(3;0;3)$.

9 Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(-1;3;0)$ и $M_2(2;4;-1)$, перпендикулярно плоскости $x-2y+3z-10=0$.

Домашнее задание

1 Найти величину острого угла между плоскостями $x-y-\sqrt{2}z-7=0$ и $x+y+\sqrt{2}z+5=0$.

2 Определить, являются ли плоскости $5x-3y-4z+3=0$ и $-7x-y+5z-3=0$ перпендикулярными.

3 Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(3;-1;2)$ и параллельной плоскости $2x-3y+7z-11=0$.

4 Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1;-2;4)$ перпендикулярно к плоскостям $2x+3y-5z+6=0$ и $3x+4y-3z-5=0$.

5 Найти расстояние между параллельными плоскостями $2x-3y+6z-14=0$ и $2x-3y+6z+42=0$.

6 Составить уравнение плоскости, проходящей через начало координат и точку $M(2;1;-1)$ перпендикулярно плоскости $2x-z=0$.

6 Практическое занятие № 6. Параметрические уравнения прямой. Канонические уравнения прямой. Уравнение прямой, проходящей через две точки. Задание прямой двумя общими уравнениями. Углы между двумя прямыми. Расстояние от точки до прямой в пространстве. Взаимное расположение прямой и плоскости. Угол между прямой и плоскостью. Условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости

Вопросы к практическому занятию

1 Канонические уравнения прямой.
2 Параметрические уравнения прямой.
3 Уравнение прямой в пространстве, проходящей через две точки.
4 Общее уравнение прямой в пространстве.
5 Направляющий вектор прямой.
6 Угол между прямыми.
7 Расстояние от точки до прямой в пространстве.

Задачи к практическому занятию

1 Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(-1;0;5)$ и образующей с осями координат углы $\alpha=\frac{\pi}{3}$, $\beta=\frac{\pi}{4}$, $\gamma=\frac{2\pi}{3}$.

2 Составить канонические и параметрические уравнения прямой,

проходящей через точку $M_0(2;-3;5)$ и образующей с осями координат углы $\alpha=\frac{\pi}{4},\ \beta=\frac{\pi}{3},\ \gamma=\frac{\pi}{3}$.

3 Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(-1;0;5)$ и параллельной прямой $\frac{x-2}{5}=\frac{y+3}{4}=\frac{z}{-2}$.

4 Составить уравнение прямой, проходящей через точки $M_0(-1;0;5)$ и $M_1(2;-3;4)$.

5 Найти направляющие косинусы прямой $\frac{x+3}{3}=\frac{y-2,5}{0}=\frac{z-1}{-4}$.

6 Составить канонические уравнения прямой, заданной уравнениями $\begin{cases} x-2y+3z+1=0, \\ 2x+y-4z-8=0. \end{cases}$

7 Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(3;2;-5)$ и перпендикулярной к плоскости $4x-y+3z-10=0$.

8 Найти угол между прямой $\begin{cases} 2x+3y+3z-5=0, \\ x+2y+2z+4=0 \end{cases}$ и плоскостью $2x-y+2z-3=0$.

9 Найти расстояние от точки $M_1(8;5;4)$ до прямой $\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-3}{1}$.

10 Общее уравнение прямой $\begin{cases} x+2y-3z+2=0, \\ 2x-2y+z-5=0 \end{cases}$ преобразовать к каноническому виду и определить величины углов, образованных этой прямой с координатными осями.

Домашнее задание

1 Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точки $M_1(7;1;6)$ и $M_2(2;-3;4)$.

2 Составить канонические уравнения прямой, заданной уравнениями:

а) $\begin{cases} 3x+y-z+5=0, \\ 2x+y+2z+3=0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x+y-z+5=0, \\ 2x+y+2z+3=0. \end{cases}$

3 Найти угол между прямой, проходящей через точки $A(5;1;-4)$ и $B(6;1;-3)$, и плоскостью $2x-2y+z-3=0$.

4 Найти расстояние от точки $M_1\left(9;6;5\right)$ до прямой $\frac{x-3}{2}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-4}{1}$.

5 Составить параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0\left(2;-3;-7\right)$ и имеющей направляющий вектор $\vec{a}=\left(4;-6;5\right)$.

6 Найти уравнение прямой, проходящей через точку $M_1\left(1;-1;2\right)$ и пересекающей ось Oz под прямым углом.

7 Найти точки пересечения прямой $\frac{x-3}{-1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-5}{5}$ с координатными плоскостями.

7 Практическое занятие № 7. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых. Взаимное расположение двух прямых в пространстве. Кратчайшее расстояние между двумя прямыми

Вопросы к практическому занятию

1 Условие параллельности двух прямых в пространстве.
2 Условие перпендикулярности двух прямых в пространстве.
3 Взаимное расположение двух прямых в пространстве.
4 Кратчайшее расстояние между двумя прямыми.

Задачи к практическому занятию

1 Найти величину острого угла между прямыми $\frac{x-4}{-3}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-5}{-2}$ и $\begin{cases} x-y+2z-8=0, \\ 2x+y-z+3=0. \end{cases}$

2 Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0\left(-1;0;5\right)$ и параллельной прямой $\begin{cases} x+y-z+2=0, \\ x-y+2z-1=0. \end{cases}$

3 Исследовать взаимное расположение двух прямых, заданных уравнениями $\begin{cases} x=1-9t, \\ y=2+8t, \\ z=3-7t \end{cases}$ и $\begin{cases} x=6-2t, \\ y=5+3t, \\ z=4+t. \end{cases}$

4 Установить взаимное расположение прямых $\frac{x-2}{4}=\frac{y}{3}=\frac{z+1}{-2}$

и $\begin{cases} x = 5 - 8t, \\ y = 4 - 6t, \\ z = 3 + 4t. \end{cases}$

5 Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0\left(3;-1;5\right)$ и перпендикулярной к прямым $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z-1}{3}$ и $\dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y-4}{2} = \dfrac{z+3}{4}$.

6 Составить канонические уравнения прямой, лежащей в плоскости xOy и проходящей через точку $M_0\left(2;3;0\right)$ перпендикулярно к прямой $\dfrac{x+3}{5} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-6}{-1}$.

7 Исследовать взаимное расположение прямых $\dfrac{x-1}{5} = \dfrac{y+4}{-3} = \dfrac{z-7}{4}$ и $\dfrac{x-9}{2} = \dfrac{y+3}{-1} = \dfrac{z-4}{2}$.

8 Найти угол между прямыми $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{-1} = \dfrac{z}{-2}$ и $\dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y+11}{2} = \dfrac{z+6}{1}$ и выяснить, являются ли они пересекающимися или скрещивающимися.

9 Найти угол между прямыми $\begin{cases} 2x - 3y + z - 2 = 0, \\ 3x - 4y - z + 1 = 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} x + 2y - z - 3 = 0, \\ 2x + 3y + 2z + 4 = 0. \end{cases}$

10 Найти кратчайшее расстояние между прямыми $\dfrac{x-4}{2} = \dfrac{y+2}{-1} = \dfrac{z-2}{2}$ и $\dfrac{x-7}{4} = \dfrac{y+6}{-3} = \dfrac{z-3}{5}$.

Домашнее задание

1 Найти величину острого угла между прямыми $\dfrac{x}{11} = \dfrac{y+1}{8} = \dfrac{z-1}{7}$ и $\dfrac{x-4}{7} = \dfrac{y}{-2} = \dfrac{z+1}{8}$.

2 Найти величину острого угла между прямыми $\begin{cases} x - y + 2 = 0, \\ 2x + y - z - 6 = 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} x + y + z - 1 = 0, \\ x - y + 3z + 1 = 0. \end{cases}$

3 Исследовать взаимное расположение прямых $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z-3}{2}$ и $\dfrac{x-7}{3} = \dfrac{y-4}{2} = \dfrac{z-6}{1}$.

4 При каком значении переменной a прямые $L_1: \dfrac{x+2}{2} = \dfrac{y}{-3} = \dfrac{z-1}{4}$ и $L_2: \dfrac{x-3}{a} = \dfrac{y-1}{4} = \dfrac{z-7}{2}$ пересекаются?

5 Исследовать взаимное расположение прямых $L_1: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-3}{3}$ и $L_2: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z+4}{1}$.

6 Найти угол между прямыми $\begin{cases} x-2y+z-3=0, \\ 3x+y-z+5=0 \end{cases}$ и $\begin{cases} 2x+y+2z-1=0, \\ 3x-y-z+3=0. \end{cases}$

7 Исследовать взаимное расположение прямых $\dfrac{x-1}{5} = \dfrac{y+4}{-3} = \dfrac{z-7}{4}$ и $\dfrac{x-9}{2} = \dfrac{y+3}{-1} = \dfrac{z-4}{2}$. Найти расстояние между ними.

8 Практическое занятие № 8. Взаимное расположение прямой и плоскости. Угол между прямой и плоскостью. Условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости

Вопросы к практическому занятию

1 Угол между прямой и плоскостью.
2 Условия параллельности прямой и плоскости.
3 Условия перпендикулярности прямой и плоскости.
4 Координаты точки пересечения прямых.
5 Условие, при котором прямая лежит в плоскости.

Задачи к практическому занятию

1 Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(3;2;-5)$ и перпендикулярной к плоскости $4x-y+3z-10=0$.

2 Найти угол между прямой $\begin{cases} 2x+3y+3z-5=0, \\ x+2y+2z+4=0 \end{cases}$ и плоскостью $2x-y+2z-3=0$.

3 Исследовать взаимное расположение прямой и плоскости:

а) $\begin{cases} x=1-t, \\ y=2+3t, \\ z=6-4t \end{cases}$ и $x+y+z-3=0$.

б) $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z+4}{2}$ и $3x+y-4z-15=0$;

в) $\begin{cases} x-y+4z-6=0, \\ 2x+y-z+3=0 \end{cases}$ и $3x+y+6z-12=0$.

4 Проверить, лежит ли прямая $\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-2}{1}$ в плоскости $x-y+z-6=0$.

5 Найти координаты точки, симметричной точке $M_1(3;4;5)$ относительно плоскости $x-2y+z-6=0$.

6 Найти величину угла между прямой $\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-6}{1}=\dfrac{z+7}{-2}$ и плоскостью $4x-2y-2z-3=0$.

7 Найти координаты проекции точки $M(2;2;-2)$ на плоскость $3x-y+z-13=0$.

8 При каком значении m прямая $\dfrac{x+10}{m}=\dfrac{y-7}{2}=\dfrac{z+2}{-6}$ параллельна плоскости $5x-3y+4z-1=0$?

9 Найти расстояние от точки $M(3;5;5)$ до прямой $\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y}{4}=\dfrac{z}{1}$.

10 Найти расстояние между прямыми $\dfrac{x-9}{-6}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-2}{1}$ и $\dfrac{x+5}{3}=\dfrac{y+5}{2}=\dfrac{z-1}{-2}$.

Домашнее задание

1 Найти угол между прямой $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z}{-2}$ и плоскостью $2x++3y-6z+2=0$.

2 Найти величину угла между прямой, проходящей через точки $A(5;1;-4)$ и $B(6;1;-3)$, и плоскостью $2x-2y+z-3=0$.

3 Найти координаты точки, симметричной точке $M_1(2;8;0)$ относительно плоскости $\dfrac{x-1}{-3}=\dfrac{y+3}{1}=\dfrac{z-3}{-1}$.

4 Найти величину острого угла между прямой $\begin{cases} x-y+z=0, \\ 2x+y-z-3=0 \end{cases}$ и плоскостью $2x+y+2z-5=0$.

5 Исследовать взаимное расположение прямой и плоскости:

а) $\begin{cases} x = 2 - 4t, \\ y = t, \\ z = -3 + 2t \end{cases}$ и $5x - 6y + 2z - 10 = 0$;

б) $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y+13}{17} = \dfrac{z+7}{13}$ и $5x - z = 4$.

6 При каких значениях C и D прямая $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y-3}{-3} = \dfrac{z}{7}$ лежит в плоскости $2x - y + Cz + D = 0$?

9 Практическое занятие № 9. Определение канонического уравнения второй степени. Классификация линий второго порядка. Общее уравнение линий второго порядка

Вопросы к практическому занятию

1 Определение канонического уравнения второй степени.
2 Классификация линий второго порядка.
3 Общее уравнение линий второго порядка.

Задачи к практическому занятию

1 Установить, какие линии определяются следующими уравнениями (построить их на чертеже):

а) $x^2 - xy = 0$;
б) $xy + y^2 = 0$;
в) $x^2 - y^2 = 0$;
г) $xy^2 - 8\,xy + 15 = 0$;
д) $y^2 + 5y + 4 = 0$;
е) $x^2y - 7xy + 10y = 0$;
ж) $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 16$;
з) $(x+5)^2 + (y-1)^2 = 9$;
и) $(x-1)^2 + y^2 = 4$;
к) $x^2 + (y+3)^2 = 1$;
л) $x^2 + 2y^2 = 0$;

2 Даны линии. Определить, какие из них проходят через начало координат:

а) $x + y = 0$;
б) $x - y = 0$;
в) $x^2 + y^2 - 36 = 0$;
г) $x^2 + y^2 - 2x = 0$;
д) $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 1 = 0$.

3 Найти точки пересечения двух линий:

а) $x^2 + y^2 = 8$, $x - y = 0$;
б) $x^2 + y^2 - 16x + 4y + 18 = 0$, $x + y = 0$;
в) $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 3 = 0$, $x^2 + y^2 = 25$;
г) $x^2 + y^2 - 8x + 10y + 40 = 0$, $x^2 + y^2 = 4$.

4 Вывести уравнение геометрического места точек, одинаково удалённых от координатных осей.

5 Вывести уравнение геометрического места точек, находящихся на расстоянии a от оси Oy.

6 Вывести уравнение геометрического места точек, находящихся на расстоянии b от оси Ox.

7 Из точки P (6; –8) проведены всевозможные лучи до пересечения с осью абсцисс. Составить уравнение геометрического места их середин.

8 Из точки C(10; –3) проведены всевозможные лучи до пересечения с осью ординат. Составить уравнение геометрического места их середин.

9 Составить уравнение геометрического места точек, разность квадратов расстояний которых до точек $A(-a; 0)$ и $B(a; 0)$ равна c.

10 Дано уравнение окружности $x^2 + y^2 = 25$. Составить уравнение геометрического места середин тех хорд этой окружности, длина которых равна 8.

Домашнее задание

1 Вывести уравнение геометрического места точек, для которых кратчайшие расстояния до двух данных окружностей $(x + 3)^2 + y^2 = 1$, $(x - 3)^2 + y^2 = 81$ равны между собой.

2 Вывести уравнение геометрического места точек, для которых кратчайшие расстояния до двух данных окружностей $(x - 10)^2 + y^2 = 289$, $(x - 10)^2 + y^2 = 1$, равны между собой.

3 Вывести уравнение геометрического места точек, для которых кратчайшие расстояния до данной окружности $(x - 5)^2 + y^2 = 9$, и до данной прямой $x + 2 = 0$ равны между собой.

4 Прямая перпендикулярна полярной оси и отсекает на ней отрезок, равный 3. Составить уравнение этой прямой в полярных координатах.

5 Окружность радиусом $R = 5$ проходит через полюс, её центр лежит на полярной оси. Составить уравнение этой окружности в полярной системе координат.

10 Практическое занятие № 10. Определения эллипса, гиперболы, параболы, их канонические уравнения и свойства. Директрисы и эксцентриситет эллипса и гиперболы. Полярные уравнения эллипса, гиперболы, параболы. Оптические свойства эллипса, гиперболы, параболы. Касательные к эллипсу, гиперболе, параболе

Вопросы к практическому занятию

1 Определения эллипса, гиперболы, параболы, их канонические уравнения и свойства.

2 Директрисы и эксцентриситет эллипса и гиперболы.

3 Полярные уравнения эллипса, гиперболы, параболы.

4 Оптические свойства эллипса, гиперболы, параболы.

5 Касательные к эллипсу, гиперболе, параболе.

Задачи к практическому занятию

1 Установить, какие линии определяются следующими уравнениями:

а) $y = +\frac{3}{4}\sqrt{16 - x^2}$; в) $y = -\frac{5}{3}\sqrt{9 - x^2}$;

б) $y = -\frac{2}{3}\sqrt{9 - y^2}$; г) $y = +\frac{1}{7}\sqrt{49 - y^2}$.

Изобразить эти линии на чертеже.

2 Дан эллипс $9x^2 + 5y^2 = 45$. Найти:

а) его полуоси; в) фокусы;

б) эксцентриситет; г) уравнения директрис.

3 Вычислить площадь четырёхугольника, две вершины которого лежат в фокусах эллипса $9x^2 + 5y^2 = 1$, две другие совпадают с концами его малой оси.

4 Вычислить расстояние от фокуса F(c; 0) эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ до односторонней с этим фокусом директрисы.

5 Установить, какие линии определяются следующими уравнениями:

а) $y = +\frac{2}{3}\sqrt{x^2 - 9}$; в) $y = -3\sqrt{x^2 + 1}$;

б) $x = -\frac{4}{3}\sqrt{x^2 + 9}$; г) $y = +\frac{2}{5}\sqrt{x^2 + 25}$.

Изобразить эти линии на чертеже.

6 Дана точка $M_1(10; -\sqrt{5})$ на гиперболе $\frac{x^2}{80} - \frac{y^2}{20} = 1$. Составить уравнения прямых, на которых лежат фокальные радиусы точки M_1.

7 Убедившись, что точка $M_1(-5;\ \frac{9}{4})$ лежит на гиперболе $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$, определить фокальные радиусы точки M_1.

8 Эксцентриситет гиперболы $\varepsilon = 2$, фокальный радиус её точки M, проведённый из некоторого фокуса, равен 16. Вычислить расстояние от точки M до односторонней с этим фокусом директрисы.

9 Эксцентриситет гиперболы $\varepsilon = 3$, расстояние от точки M гиперболы до директрисы равно 4. Вычислить расстояние от точки M до фокуса, одностороннего с этой директрисой.

10 Составить уравнение параболы, вершина которой находится в начале координат, зная, что:

а) парабола симметрично расположена относительно оси Ox и проходит через точку $A(9;\ 6)$;

б) парабола симметрично расположена относительно оси Ox и проходит через точку $B(-1;\ 3)$;

в) парабола симметрично расположена относительно оси Oy и проходит через точку $C(1;\ 1)$;

г) парабола симметрично расположена относительно оси Oy и проходит через точку $D(4;\ -8)$.

11 Составить уравнение параболы, которая имеет фокус $F(0;\ -3)$ и проходит через начало координат, зная, что её осью служит ось Oy.

12 Найти фокус F и уравнение директрисы параболы $y^2 = 24x$.

13 Вычислить фокальный радиус точки M параболы $y^2 = 20x$, если абсцисса точки M равна 7.

Домашнее задание

1 Дан эллипс $9x^2 + 25y^2 = 225$. Найти:

а) его полуоси; в) фокусы;

б) эксцентриситет; г) уравнения директрис.

2 Вычислить площадь четырёхугольника, две вершины которого лежат в фокусах эллипса $x^2 + 5y^2 = 20$, а две другие совпадают с концами его малой оси.

3 Определить точки гиперболы $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$, расстояние которых до правого фокуса равно 4,5.

4 Определить точки гиперболы $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$, расстояние которых до левого фокуса равно 7.

5 Через левый фокус гиперболы $\frac{x^2}{144}-\frac{y^2}{25}=1$ проведён перпендикуляр к её оси, содержащей вершины. Определить расстояния от фокусов до точек пересечения этого перпендикуляра с гиперболой.

6 Установить, какие линии определяются следующими уравнениями:

а) $y = +2\sqrt{x}$; г) $y = +\sqrt{-x}$; ж) $y = -3\sqrt{-2x}$;

б) $y = -2\sqrt{x}$; д) $x = +\sqrt{5y}$; з) $x = -5\sqrt{-y}$.

в) $x = -\sqrt{3y}$; е) $x = +4\sqrt{-y}$;

Изобразить эти линии на чертеже.

7 Вычислить фокальный радиус точки M параболы $y^2 = 12x$, если ордината точки M равна 6.

8 На параболе $y^2 = 16x$ найти точки, фокальный радиус которых равен 13.

11 Практическое занятие № 11. Полярные уравнения эллипса, гиперболы, параболы. Оптические свойства эллипса, гиперболы, параболы. Касательные к эллипсу, гиперболе, параболе

Вопросы к практическому занятию

1 Полярные уравнения эллипса, гиперболы, параболы.

2 Оптические свойства эллипса, гиперболы, параболы.

3 Касательные к эллипсу, гиперболе, параболе.

Задачи к практическому занятию

1 Дано уравнение эллипса $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$. Составить его полярное уравнение, считая, что направление полярной оси совпадает с положительным направлением оси абсцисс, а полюс находится:

а) в левом фокусе эллипса; б) в правом фокусе.

2 Дано уравнение гиперболы $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$. Составить полярное уравнение её правой ветви, считая, что направление полярной оси совпадает с положительным направлением оси абсцисс, а полюс находится:

а) в правом фокусе гиперболы; б) в левом фокусе.

3 Дано уравнение гиперболы $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{144} = 1$. Составить полярное уравнение её левой ветви, считая, что направление полярной оси совпадает с положительным направлением оси абсцисс, а полюс находится:

а) в левом фокусе гиперболы; б) в правом фокусе.

4 Дано уравнение параболы $y^2 = 6x$. Составить её полярное уравнение, считая, что направление полярной оси совпадает с положительным направлением оси абсцисс, а полюс находится в фокусе параболы.

5 Определить, какие линии даны следующими уравнениями в полярных координатах:

а) $\rho=\dfrac{5}{1-\frac{1}{2}\cos\theta}$; в) $\rho=\dfrac{6}{1-\frac{1}{2}\cos\theta}$; д) $\rho=\dfrac{10}{1-\frac{3}{2}\cos\theta}$;

б) $\rho=\dfrac{12}{2-\cos\theta}$; г) $\rho=\dfrac{5}{3-4\cos\theta}$; е) $\rho=\dfrac{1}{3-3\cos\theta}$.

6 Установить, что уравнение $\rho=\dfrac{144}{13-5\cos\theta}$ определяет эллипс, и найти его полуоси.

7 Установить, что уравнение $\rho=\dfrac{18}{4-5\cos\theta}$ определяет правую ветвь гиперболы и найти ей полуоси.

8 Установить, что уравнение $\rho=\dfrac{21}{5-2\cos\theta}$ определяет эллипс, и составить полярные уравнения его директрис.

9 Установить, что уравнение $\rho=\dfrac{16}{3-5\cos\theta}$ определяет правую ветвь гиперболы, и составить полярные уравнения директрис и асимптот этой гиперболы.

Домашнее задание

1 На эллипсе $\rho=\dfrac{12}{3-\sqrt{2}\cos\theta}$ найти точки, полярный радиус которых равен 6.

2 На гиперболе $\rho=\dfrac{15}{3-4\cos\theta}$ найти точки, полярный радиус которых равен 3.

3 На параболе $\rho=\dfrac{p}{1-\cos\theta}$ найти точки с наименьшим полярным радиусом и с полярным радиусом, равным параметру параболы.

4 Дано уравнение эллипса $\dfrac{x^2}{y^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$. Составить его полярное уравнение при условии, что направление полярной оси совпадает с положительным направлением оси абсцисс, а полюс находится в центре эллипса.

5 Дано уравнение гиперболы $\dfrac{x^2}{y^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$. Составить её полярное уравнение при условии, что направление полярной оси совпадает с положительным направлением оси абсцисс, а полюс находится в центре гиперболы.

12 Практическое занятие № 12. Классификация поверхностей второго порядка по каноническому уравнению. Исследование формы поверхности методом параллельных сечений

Вопросы к практическому занятию

1 Классификация поверхностей второго порядка по каноническому уравнению.

2 Исследование формы поверхности методом параллельных сечений.

Задачи к практическому занятию

1 Исследовать сечения эллипсоида $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{9}=1$ плоскостями $z=0$, $z=\pm\ 1$, $x=0$ и $y=0$.

2 Исследовать форму и расположение относительно системы координат поверхности $4-z=x^2+y^2$.

3 Показать, что уравнение $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ определяет однополостный гиперболоид вращения вокруг оси *Ox*.

4 Какую поверхность определяет уравнение $2x^2-y^2+2x^2+4z+2y+8z+8=0$?

5 Найти точки пересечения эллипсоида $x^2+2y^2+4z^2=2$ с прямой $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{\sqrt{2}}$.

6 Составить уравнения прямолинейных образующих однополостного гиперболоида $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{16}=1$.

7 Составить уравнения прямолинейных образующих однополостного гиперболоида $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{25}+\frac{z^2}{4}=1$.

Домашнее задание

1 Исследовать сечения эллипсоида $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{25}=1$ плоскостями $z=0$, $x=\pm\ 1$ и $y=0$.

2 Исследовать форму и расположение относительно системы координат поверхности $9-y=x^2+z^2$.

3 Показать, что уравнение $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{25}+\frac{z^2}{2}=1$ определяет однополостный гиперболоид вращения вокруг оси Oy.

4 Какую поверхность определяет уравнение $x^2-y^2+x^2+4x+2y+2z=0$?

5 Найти точки пересечения эллипсоида $4x^2+8y^2+16z^2=16$ с прямой $\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+4}{1}$.

6 Составить уравнения прямолинейных образующих однополостного гиперболоида $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{8}=1$.

7 Составить уравнения прямолинейных образующих однополостного гиперболоида $-\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{25}+\frac{z^2}{16}=1$.

13 Практическое занятие № 13. Классификация поверхностей второго порядка по каноническому уравнению. Приведение уравнения поверхности к каноническому виду методом собственных векторов

Вопросы к практическому занятию

1 Классификация поверхностей второго порядка по каноническому уравнению.

2 Приведение уравнения поверхности к каноническому виду методом собственных векторов.

Задачи к практическому занятию

1 Привести уравнение второго порядка с тремя неизвестными $2x^2-4y^2-z^2-6x+8y+1=0$ к каноническому виду методом собственных векторов и определить тип поверхности.

2 Определить тип поверхности второго порядка $2x^2+5y^2+2z^2-2xy-4xz+2yz+2x-10y-2z-1=0$ методом собственных векторов и привести к каноническому виду.

3 Привести уравнение второго порядка с тремя неизвестными $4x^2+6y^2+4z^2+4xz-8y-4z+3=0$ к каноническому виду методом собственных векторов и определить тип поверхности.

4 Определить тип поверхности второго порядка $3x^2+3y^2+3z^2-6x+4y-1=0$ методом собственных векторов и привести к

каноническому виду.

5 Привести уравнение второго порядка с тремя неизвестными $x^2+3y^2-z^2-6y-z+1=0$ к каноническому виду методом собственных векторов и определить тип поверхности.

6 Определить тип поверхности второго порядка $x^2+4y^2+9z^2-6x+8y-18z-14=0$ методом собственных векторов и привести к каноническому виду.

7 Привести уравнение второго порядка с тремя неизвестными $x^2+2y^2-3z^2+2x+4y-6z=0$ к каноническому виду методом собственных векторов и определить тип поверхности.

8 Определить тип поверхности второго порядка $x^2+5y^2+z^2+2xy+6xz+2yz-2x+6y-10z=0$ методом собственных векторов и привести к каноническому виду.

9 Привести уравнение второго порядка с тремя неизвестными $2xy+2x+2y+2z-1=0$ к каноническому виду методом собственных векторов и определить тип поверхности.

10 Определить тип поверхности второго порядка $4x^2+9y^2+z^2-12xy+4xz-6yz+4x-6y+2z-5=0$ методом собственных векторов и привести к каноническому виду.

Домашнее задание

1 Привести уравнение второго порядка с тремя неизвестными $x^2+y^2-z^2+2xy=0$ к каноническому виду методом собственных векторов и определить тип поверхности.

2 Определить тип поверхности второго порядка $z^2-3x-4y-5=0$ методом собственных векторов и привести к каноническому виду.

3 Привести уравнение второго порядка с тремя неизвестными $x^2+y^2+2xy-z+1=0$ к каноническому виду методом собственных векторов и определить тип поверхности.

4 Определить тип поверхности второго порядка $x^2+y^2-z^2-2xy+2z-1=0$ методом собственных векторов и привести к каноническому виду.

5 Привести уравнение второго порядка с тремя неизвестными $x^2+4y^2-z^2-10x-16y+6z+16=0$ к каноническому виду методом собственных векторов и определить тип поверхности.

6 Определить тип поверхности второго порядка $x^2+y^2-3z^2-2xy-6xz-6yz+2x+2y+4z=0$ методом собственных векторов и привести к каноническому виду.

14 Практическое занятие № 14. Прямолинейные образующие. Приведение к каноническому виду уравнений второй степени, не содержащих произведений переменных

Вопросы к практическому занятию

1 Прямолинейные образующие.

2 Приведение к каноническому виду уравнений второй степени, не содержащих произведений переменных

Задачи к практическому занятию

1 Убедившись, что точка $M(1;\ 3;\ 1)$ лежит на гиперболическом параболоиде $4x^2 - z = y$, составить уравнения его прямолинейных образующих, проходящих через M.

2 Составить уравнения прямолинейных образующих однополостного гиперболоида $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{16}=1$, параллельных плоскости $6x + 4y + 3z - 17 = 0$.

3 Убедившись, что точка $A(-2;\ 0;\ 1)$ лежит на гиперболическом параболоиде $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$, определить острый угол, образованный его прямолинейными образующими, проходящими через A.

4 Привести уравнение второго порядка с тремя неизвестными $x^2+y^2-z^2+2xy=0$ к каноническому виду и определить тип поверхности.

5 Определить тип поверхности второго порядка $z^2-3x-4y-5=0$ и привести к каноническому виду.

6 Привести уравнение второго порядка с тремя неизвестными $3x^2+6x-8y+6z-7=0$ к каноническому виду и определить тип поверхности.

7 Определить тип поверхности второго порядка $3x^2+3y^2-6x+4y-1=0$ и привести к каноническому виду.

Домашнее задание

1 Убедившись, что точка $A(1;\ 3;\ 1)$ лежит на гиперболическом параболоиде $4y^2 - x = z$, составить уравнения его прямолинейных образующих, проходящих через A.

2 Составить уравнения прямолинейных образующих однополостного гиперболоида $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{16}=1$, параллельных плоскости $x - 2y + z - 5 = 0$.

3 Привести уравнение второго порядка с тремя неизвестными к каноническому виду $3x^2+3y^2-3z^2-6x+4y+4z+3=0$ и определить тип поверхности.

4 Определить тип поверхности второго порядка $4x^2 - y^2 - 4x + 4y + 1 = 0$ и привести к каноническому виду.

5 Привести уравнение второго порядка с тремя неизвестными $x^2 + 3y^2 - z^2 - 6y - z + 1 = 0$ к каноническому виду и определить тип поверхности.

15 Практическое занятие № 15. Сфера и ее простейшее уравнение. Цилиндрические поверхности. Конические поверхности. Эллипсоид вращения. Эллипсоид и его простейшее уравнение

Вопросы к практическому занятию

1 Сфера и ее простейшее уравнение.
2 Цилиндрические поверхности.
3 Конические поверхности.
4 Эллипсоид вращения.
5 Эллипсоид и его простейшее уравнение.

Задачи к практическому занятию

1 Составить уравнение сферы в каждом из следующих случаев:

а) сфера имеет центр $C(0; 0; 0)$ и радиус $r = 9$;

б) сфера проходит через начало координат и имеет центр $C(4; –4; –2)$;

в) сфера проходит через точку $A(2; –1; –3)$ и имеет центр $C(3; –2; 1)$;

г) точки $A(2; –3; 5)$ и $B(4; 1; –3)$ являются концами одного из диаметров сферы.

2 Составить уравнение сферы радиуса $r = 3$, касающейся плоскости $x + 2y + 2z + 3 = 0$ в точке M_1 (l; 1; –3).

3 Вычислить радиус R сферы, которая касается плоскостей $3x + 2y – 6z – 15 = 0$, $3x + 2y – 6z + 55 = 0$.

4 Составить уравнение сферы с центром С (2; 3; –1), которая отсекает от прямой $\begin{cases} 5x - 4y + 3z + 20 = 0, \\ 3x - 4y + z - 8 = 0 \end{cases}$ хорду, имеющую длину, равную 16.

5 Установить, как расположена точка $A(2;–1; 3)$ относительно каждой из следующих сфер внутри, вне или на поверхности:

а) $(x – 3)^2 + (y + 1)^2 + (z – 1)^2 = 4$;

б) $(x + 14)^2 +(y – 11)^2 + (z + 12)^2 = 625$;

в) $(x – 6)^2 + (y – 1)^2 + (z – 2)^2 = 25$;

г) $x^2 + y^2 + z^2 – 4x + 6y – 8z + 22 = 0$;

д) $x^2 + y^2 + z^2 – x + 3y – 2z – 3 = 0$.

6 Составить уравнения линии пересечения плоскости Oxz и сферы с центром в начале координат и радиусом, равным 3.

7 Составить уравнения линии пересечения сферы, центр которой находится в начале координат и радиус равен 5, с плоскостью, параллельной плоскости Oxz и лежащей в левом полупространстве на расстоянии двух единиц от неё.

8 Установить, что плоскость $x-2=0$ пересекает эллипсоид $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}+\frac{z^2}{4}=1$ по эллипсу, найти его полуоси и вершины.

9 Доказать, что эллипсоид $\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{36}-\frac{z^2}{9}=1$ имеет одну общую точку с плоскостью $4x - 3y + 12z - 54 = 0$, и найти её координаты.

10 Составить уравнение поверхности, образованной вращением эллипса $\begin{cases} \frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{a^2}=1, \\ x=0 \end{cases}$ вокруг оси Oy.

11 Составить уравнение конуса, вершина которого находится в точке (3; –1; –2), а направляющая дана уравнениями $\begin{cases} x^2+y^2-z^2=1, \\ x-y+z=0. \end{cases}$

12 Составить уравнение конуса с вершиной в начале координат, образующие которого касаются сферы $(x+2)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=9$.

13 Составить уравнение конуса с вершиной в точке $S(3; 0; -1)$, образующие которого касаются эллипсоида $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{3}=1$.

Домашнее задание

1 Составить параметрические уравнения диаметра сферы $x^2+y^2+z^2+2x-6y+z-11=0$, перпендикулярного к плоскости $5x-y+2z-17=0$.

2 Составить канонические уравнения диаметра сферы $x^2+y^2+z^2-x+3y+z-13=0$, параллельного прямой $\begin{cases} x=2t-1, \\ y=-3t+5, \\ z=4t+7. \end{cases}$

3 Составить уравнения линии пересечения плоскости Oyz и сферы, центр которой находится в точке $C(5; -2; 1)$ и радиус равен 13.

4 Составить уравнение поверхности, образованной вращением эллипса $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \\ z=0 \end{cases}$ вокруг оси Ox.

5 Составить уравнение конуса с вершиной в начале координат, направляющая которого дана уравнениями $\begin{cases} x^2 - 2z + 1 = 0, \\ y - z + 1 = 0. \end{cases}$

6 Составить уравнение конуса с вершиной в точке (0; 0; c), направляющая которого дана уравнениями $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1, \\ z = 0. \end{cases}$

7 Цилиндр, образующие которого перпендикулярны к плоскости $x + y - 2z - 5 = 0$, описан около сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Составить уравнение этого цилиндра.

8 Ось Oz является осью круглого конуса с вершиной в начале координат, точка $M_1(3; -4; 7)$ лежит на его поверхности. Составить уравнение этого конуса.

9 Составить уравнение цилиндра, образующие которого параллельны вектору $\vec{a}$ =(2; –3; 4), а направляющая дана уравнениями $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ z = 1. \end{cases}$

10 Составить уравнение цилиндра, направляющая которого дана уравнениями $\begin{cases} x^2 - y^2 = z, \\ x + y + z = 0, \end{cases}$ а образующие перпендикулярны к плоскости направляющей.

16 Практическое занятие № 16. Гиперболоиды вращения. Однополостный гиперболоид и его простейшее уравнение. Двуполостный гиперболоид и его простейшее уравнение

Вопросы к практическому занятию

1 Гиперболоиды вращения.
2 Однополостный гиперболоид и его простейшее уравнение.
3 Двуполостный гиперболоид и его простейшее уравнение.

Задачи к практическому занятию

1 Установить, что плоскость $z + 1 = 0$ пересекает однополостный гиперболоид $\dfrac{x^2}{32} + \dfrac{y^2}{18} + \dfrac{z^2}{2} = 1$ по гиперболе; найти её полуоси и вершины.

2 Доказать, что двуполостный гиперболоид $\dfrac{x^2}{3} + \dfrac{y^2}{4} - \dfrac{z^2}{25} = -1$ имеет одну общую точку с плоскостью $5x + 2z + 5 = 0$, и найти её координаты.

3 Составить уравнение поверхности, образованной вращением гиперболы $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ y = 0 \end{cases}$ вокруг оси *Oz*.

4 Доказать, что двуполостный гиперболоид, определяемый уравнением $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$, может быть получен в результате вращения гиперболы вокруг оси *Oz* и последующего равномерного сжатия пространства к плоскости *Oxz*.

5 Составить уравнение поверхности, образованной вращением гиперболы $\begin{cases} \frac{x^2}{25} - \frac{z^2}{16} = 1, \\ x = 0 \end{cases}$ вокруг оси *Ox*.

6 Составить уравнение поверхности, образованной вращением гиперболы $\begin{cases} \frac{x^2}{36} - \frac{z^2}{9} = 1, \\ x = 0 \end{cases}$ вокруг оси *Oy*.

Домашнее задание

1 Установить, что плоскость $x - 1 = 0$ пересекает однополостный гиперболоид $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{2} = 1$ по гиперболе; найти её полуоси и вершины.

2 Доказать, что двуполостный гиперболоид $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{25} = -1$ имеет одну общую точку с плоскостью $2x + 5z - 3 = 0$, и найти её координаты.

3 Составить уравнение поверхности, образованной вращением гиперболы $\begin{cases} \frac{x^2}{14} - \frac{z^2}{6} = 1, \\ y = 0 \end{cases}$ вокруг оси *Oz*.

4 Доказать, что двуполостный гиперболоид, определяемый уравнением $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{36} - \frac{z^2}{25} = -1$, может быть получен в результате вращения гиперболы вокруг оси *Oz* и последующего равномерного сжатия пространства к плоскости *Oxz*.

5 Составить уравнение поверхности, образованной вращением гиперболы $\begin{cases} \frac{x^2}{49} - \frac{z^2}{9} = 1, \\ x = 0 \end{cases}$ вокруг оси *Ox*.

6 Составить уравнение поверхности, образованной вращением гиперболы $\begin{cases} \dfrac{x^2}{16} - \dfrac{z^2}{49} = 1, \\ x = 0 \end{cases}$ вокруг оси Oy.

17 Практическое занятие № 17. Параболоид вращения. Эллиптический параболоид и его простейшее уравнение. Гиперболический параболоид и его простейшее уравнение

Вопросы к практическому занятию

1 Параболоид вращения.
2 Эллиптический параболоид и его простейшее уравнение.
3 Гиперболический параболоид и его простейшее уравнение.

Задачи к практическому занятию

1 Установить, что плоскость $y + 6 = 0$ пересекает гиперболический параболоид $\dfrac{x^2}{5} + \dfrac{y^2}{4} = 6z$ по параболе; найти её параметр и вершину.

2 Установить, какая линия является сечением гиперболического параболоида $\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{3} = z$ плоскостью $3x - 3y + 4z + 2 = 0$, и найти её центр.

3 Доказать, что эллиптический параболоид $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{z^2}{4} = 2y$ имеет одну общую точку с плоскостью $2x - 2y - z - 10 = 0$, и найти её координаты.

4 Доказать, что эллиптический параболоид, определяемый уравнением $\begin{cases} \dfrac{z^2}{c^2} - \dfrac{x^2}{a^2} = 1, \\ y = 0 \end{cases}$ может быть получен в результате вращения параболы $\begin{cases} x^2 = 2pz, \\ y = 0 \end{cases}$ вокруг оси Oz и последующего равномерного сжатия пространства к плоскости Oxz.

5 Доказать, что уравнение $z = xy$ определяет гиперболический параболоид.

6 Показать, что плоскость $x - 1 = 0$ пересекает гиперболический параболоид $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 2z$ по параболе; найти ее параметр и вершину.

Домашнее задание

1 Установить, что плоскость $z + 2 = 0$ пересекает гиперболический параболоид $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = z$ по параболе; найти её параметр и вершину.

2 Установить, какая линия является сечением гиперболического параболоида $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{8} = 2z$ плоскостью $x - y + 3z + 1 = 0$, и найти её центр.

3 Доказать, что эллиптический параболоид $\frac{x^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 8y$ имеет одну общую точку с плоскостью $4x - 3y - 2z + 6 = 0$, и найти её координаты.

4 Доказать, что эллиптический параболоид, определяемый уравнением $\begin{cases} \frac{z^2}{16} - \frac{x^2}{4} = 1, \\ y = 0 \end{cases}$ может быть получен в результате вращения параболы $\begin{cases} x^2 = z, \\ y = 0 \end{cases}$ вокруг оси Oz и последующего равномерного сжатия пространства к плоскости Oxz.

5 Доказать, что уравнение $x = yz$ определяет гиперболический параболоид.

6 Показать, что плоскость $y + 8 = 0$ пересекает гиперболический параболоид $\frac{x^2}{25} + \frac{z^2}{16} = 2y$ по параболе; найти её параметр и вершину.

Список литературы

1 **Бортаковский, А. С.** Аналитическая геометрия в примерах и задачах: учебное пособие / А. С. Бортаковский, А. В. Пантелеев. – 2-е изд., стер. – Москва: ИНФРА-М, 2016. – 496 с.

2 **Бортаковский, А. С.** Линейная алгебра и аналитическая геометрия. Практикум: учебное пособие / А. С. Бортаковский, А. В. Пантелеев. – Москва: ИНФРА-М, 2015. – 352 с.

3 **Ефимов, Н. В.** Краткий курс аналитической геометрии: учебник / Н. В. Ефимов. – 14-е изд., испр. – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2014. – 585 с.

4 Сборник задач по высшей математике. 1 курс / К. Н. Лунгу [и др.]. – 7-е изд. – Москва: Айрис-пресс, 2008. – 576 с.

5 Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре: учебное пособие / Под ред. Ю. М. Смирнова. – 2-е изд., перераб. и доп. – Москва: Логос, 2005. – 369 с.