УДК 519.245

ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ КРАТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

В. С. СТЕПАНОВ
Научный руководитель Д. В. РОГОЛЕВ, канд. физ.-мат. наук
БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Целью данной работы является создание программного продукта, реализующего метод Монте-Карло для вычисления двойного интеграла. Планируется использование данного продукта на кафедре «Высшая математика» при изучении численных методов со студентами специальностей «Промышленное и гражданское строительство», «Автомобильные дороги», «Подъёмно-транспортные, строительные, дорожные машины и оборудование», «Транспортная логистика».

Разработанная программа позволяет наглядно продемонстрировать распределение случайных точек в области интегрирования и получить значение интеграла. В отличие от профессиональных систем компьютерной алгебры (PTC Mathcad, Wolfram Mathematica, Maplesoft Maple и др.) программа не требует наличия специальных навыков у пользователя, обладая интуитивно понятным интерфейсом.

Способы решения задач, использующие случайные величины, получили общее название метода Монте-Карло [1, с. 635]. Более точно под методом Монте-Карло понимается совокупность приёмов, позволяющих получать решения математических или физических задач при помощи многократных случайных испытаний. Оценки искомой величины выводятся статистическим путём и носят вероятностный характер. На практике случайные испытания заменяются результатами некоторых вычислений, производимых над случайными числами.

Эффективное применение метода Монте-Карло стало возможным после появления быстродействующих электронных машин, т. к. для получения достаточно точной оценки искомой величины требуются выполнение вычислений для весьма большого количества частных случаев и последующая статистическая обработка колоссального числового материала.

Из математических задач, для которых разработано применение метода Монте-Карло, можно отметить следующие: решение систем линейных уравнений, обращение матриц, нахождение собственных значений и собственных векторов матрицы, вычисление кратных интегралов, решение задачи Дирихле, решение функциональных уравнений различных типов и др. Метод Монте-Карло успешно используется также для решения задач ядерной физики. Заметим, что для решения одной и той же конкретной задачи схема применения метода может быть существенно различной.

Для выработки случайных чисел можно использовать результат случайных физических процессов (например, бросание игральной кости, вращение рулетки, вспышки в счётчике Гейгера, шум при электрических передачах и т. п.). Имеются также готовые таблицы случайных чисел. Строго говоря, при пользовании механическими приспособлениями для получения случайных чисел нет абсолютной уверенности, что мы имеем дело со случайными событиями с заданным распределением вероятностей. Поэтому полученный материал обычно подвергается статистической «проверке на случайность. В этом смысле надёжнее употреблять случайные числа из таблиц, где такая проверка уже проделана; однако использование таблиц случайных чисел для решения задач часто связано с серьёзными неудобствами.

При решении задач методом Монте-Карло на компьютере обычно требуется весьма большое количество случайных чисел. Для их получения можно использовать два метода [2, с. 202]: *физический*, когда на вход компьютера подключается специальный датчик случайных чисел, регулируемых случайными физическими процессами (например, радиоактивным распадом, шумами в электронных лампах и т. п.), и *математический*, когда с помощью стандартных машинных команд генерируется последовательность чисел, являющаяся для внешнего наблюдателя случайной и удовлетворяющая основным неравенствам, которым должны удовлетворять настоящие случайные числа. Такие числа называются псевдослучайными. Источниками (датчиками) псевдослучайных чисел служат достаточно сложные математические алгоритмы.

В настоящее время созданы достаточно удобные и надёжные математические датчики. Среди наиболее популярных генераторов случайных чисел можно отметить генераторы, в которых используется следующая схема, предложенная Д.Г. Лехмером в 1949 году [3, с. 21]. Выберем четыре числа: m – модуль, $0<m$; a – множитель, $0\le a<m$; c – приращение, $0\le c<m$; X_0 – начальное значение, $0\le X_0<m$. Затем получим желаемую последовательность случайных чисел X_n, полагая $X_{n+1}=(a\cdot X_n+c)\bmod m$, $n\ge 0$. Эта последовательность называется *линейной конгруэнтной последовательностью*. Равномерно распределённые на отрезке [0;1] числа получаем по формуле $U_n = X_n/m$.

В данной программе реализован указанный генератор псевдослучайных чисел со значения $m=2^{35}$, $a=5^{15}$, $c=1$. Значение X_0 можно изменять непосредственно в интерфейсе.

Рассмотрим теперь метод Монте-Карло применительно к поставленной задаче. Пусть дана функция $z=f(x,y)$, непрерывная в ограниченной замкнутой области *D*, и требуется приближённо вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$. Пусть область *D* содержится внутри единичного квадрата $0\le x\le 1$, $0\le y\le 1$. Такую область будем называть *нормированной*.

Произвольную область можно нормировать с помощью соответствующей замены переменных.

Зададим достаточно большое число N случайных точек $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2), \ldots, M_N(x_N, y_N)$. Для этого генератором псевдослучайных чисел создадим $2N$ чисел и выберем из них соответствующие координаты x и у точек. Далее проверим, какие из точек принадлежат области D и какие не принадлежат. Если область D нормированная и задана неравенствами $x_1 \le x \le x_2$, $y_1(x) \le y \le y_2(x)$, то для принадлежности случайной точки $M_i(x_i, y_i)$ этой области проверяем выполнение данных неравенств.

В окне программы задаются: функция $f(x,y)$, значения x_1 и x_2, функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$, количество точек. При выполнении программы кроме непосредственного вычисления интеграла также рисуется область интегрирования и точки на ней.

Пусть определены n точек $M_i \in D$. Тогда приближённо можно считать, что среднее значение подынтегральной функции $\overline{z} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(M_i)$. Отсюда искомый интеграл выразится приближённо формулой $I \approx \overline{z} \cdot S = \frac{S}{n}\sum_{i=1}^{n} f(M_i)$, где S – площадь области интегрирования D, которую приближённо можно считать равной $S = n/N$. Тогда окончательно получаем $I \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f(M_i)$.

Так как метод Монте-Карло служит для оценки значения кратного интеграла, то можно использовать оценку погрешности результата по методу Рунге [4, с. 306]. Для этого вычисляют интеграл для N и $2N$ генерируемых точек. Результат имеет погрешность, не превышающую величины $|I_{2N} - I_N|/15$, где I_{2N} – значение интеграла, вычисленное для $2N$ случайных точек, I_N – значение интеграла, вычисленное для N случайных точек.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 **Демидович, Б. П.** Основы вычислительной математики / Б. П. Демидович, И. А. Марон. – М. : Наука, 1970. – 664 с.

2 **Айвазян, С. А.** Прикладная статистика: Основы моделирования и первичная обработка данных : справ. изд. / С. А. Айвазян, И. С. Енюков, Л. Д. Мешалкин. – М. : Финансы и статистика, 1983. – 471 с.

3 **Кнут, Д. Э.** Искусство программирования : уч. пособие / Д.Э. Кнут; под. ред. Ю. В. Казаченко. – 3-е изд. – М. : Вильямс.– 2000.– Т. 2. Получисленные алгоритмы. – 832 с.

4 **Березин, И. С.** Методы вычислений / И. С. Березин, Н. П. Жидков, 3-е изд. – М., 1966. – 464 с. – Т. 1.