

МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Физические методы контроля»

ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

*Методические рекомендации к практическим занятиям
для студентов направления подготовки
12.03.01 «Приборостроение» очной формы обучения*



Могилев 2021

УДК 621.317
ББК 31.21
Т45

Рекомендовано к изданию
учебно-методическим отделом
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Физические методы контроля» «17» мая 2021 г.,
протокол № 8

Составители: канд. техн. наук, доц. В. Ф. Гоголинский;
ст. преподаватель Н. В. Герасименко;
ст. преподаватель И. А. Черкасова

Рецензент С. В. Болотов

Даны краткие теоретические сведения, примеры и решения задач, необходимые для решения типовых задач на практических занятиях, по теории электрических цепей.

Учебно-методическое издание

ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Ответственный за выпуск	С. С. Сергеев
Корректор	А. А. Подошевка
Компьютерная верстка	Н. П. Полевничая

Подписано в печать . Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Печать трафаретная. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 16 экз. Заказ №

Издатель и полиграфическое исполнение:
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования
«Белорусско-Российский университет».

Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/156 от 07.03.2019.

Пр-т Мира, 43, 212022, г. Могилев.

© Белорусско-Российский
университет, 2021

Содержание

Введение.....	4
1 Практическое занятие № 1. Элементы электрических цепей и их математические модели. Эквивалентные преобразования электрических цепей.....	5
2 Практическое занятие № 2. Расчет электрических цепей постоянного тока.....	9
3 Практическое занятие № 3. Расчет электрических цепей при синусоидальных воздействиях.....	19
4 Практическое занятие № 4. Расчет трехфазных и индуктивно- связанных цепей.....	25
5 Практическое занятие № 5. Расчет переходных процессов классическим и операторным методами.....	32
6 Практическое занятие № 6. Расчет нелинейных цепей при постоянных воздействиях.....	37
7 Практическое занятие № 7. Расчет нелинейных цепей при синусоидальных воздействиях.....	39
Список литературы.....	41

Введение

Дисциплина «Теория электрических цепей» (ТЭЦ) – одна из фундаментальных в системе электротехнического образования. Глубокое изучение теории необходимо при анализе и расчете электромагнитных процессов и явлений, на которых базируется принцип действия устройств современной электроэнергетики, электро- и радиотехники, вычислительной и преобразовательной техники, электроники и автоматики. Знания, полученные при изучении курса ТЭЦ, используются во многих специальных дисциплинах при подготовке инженеров по различным электротехническим специальностям.

Цель методических рекомендаций – помочь студентам в освоении ключевых разделов курсов теоретических основ электротехники и теории электрических цепей.

Методические рекомендации могут быть использованы как для самостоятельной работы, так и в качестве вспомогательного материала на практических занятиях. Методические указания содержат ряд типовых задач, решение которых позволит глубже усвоить теоретический материал.

1 Практическое занятие № 1. Элементы электрических цепей и их математические модели. Эквивалентные преобразования электрических цепей

Цель занятия: изучить основные законы электротехники; методы преобразования электрических цепей при различных способах соединения резисторов; основные методы расчета электрических цепей постоянного тока с одним источником питания.

1.1 Основные теоретические сведения

1 Закон Ома для пассивного участка цепи:

$$I = \frac{U}{R}.$$

2 Закон Ома для активного участка цепи:

$$I = \frac{\pm \sum E \pm \sum U}{\sum R}.$$

Знак «плюс» пишется, если направление ЭДС и напряжения совпадают с направлением тока.

3 Первый закон Кирхгофа для электрического узла:

$$\sum_{k=1}^n I_k = 0,$$

где I_k – ток k -й ветви, присоединенной к данному узлу, причем притекающие токи берутся со знаком «минус», вытекающие – со знаком «плюс».

4 Второй закон Кирхгофа для замкнутого контура:

$$\sum_{k=1}^n E_k = \sum_{i=1}^m I_i R_i,$$

где E_k – ЭДС k -го источника контура;

I_i – ток, протекающий через резистор R_i .

I_i и E_k берутся со знаком «плюс», если их направления совпадают с направлением обхода контура.

5 Мощность, потребляемая активным сопротивлением:

$$P = I^2 \cdot R.$$

6 Баланс мощности для электрической цепи постоянного тока:

$$\sum_{i=1}^n E_i \cdot I_i = \sum_{i=1}^n I_i^2 \cdot R_i.$$

$(E_i \cdot I_i)$ берется со знаком «плюс», если направления ЭДС и тока совпадают, и со знаком «минус», если их направления не совпадают.

7 Эквивалентные преобразования электрических цепей постоянного тока. Расчет сложных электрических цепей во многих случаях можно упростить и сделать более наглядным путем эквивалентного преобразования схемы одного вида в схему другого вида. При этом токи и напряжения в частях цепи, не затронутых преобразованием, должны остаться такими же, как и в исходной схеме. Целесообразное преобразование схемы приводит к уменьшению числа ее ветвей или узлов, а значит и числа уравнений, необходимых для расчета.

Примеры преобразования схем:

- замена нескольких последовательно или параллельно соединенных резисторов одним (рисунок 1.1);
- преобразование треугольника резисторов в эквивалентную звезду и наоборот (рисунок 1.2).

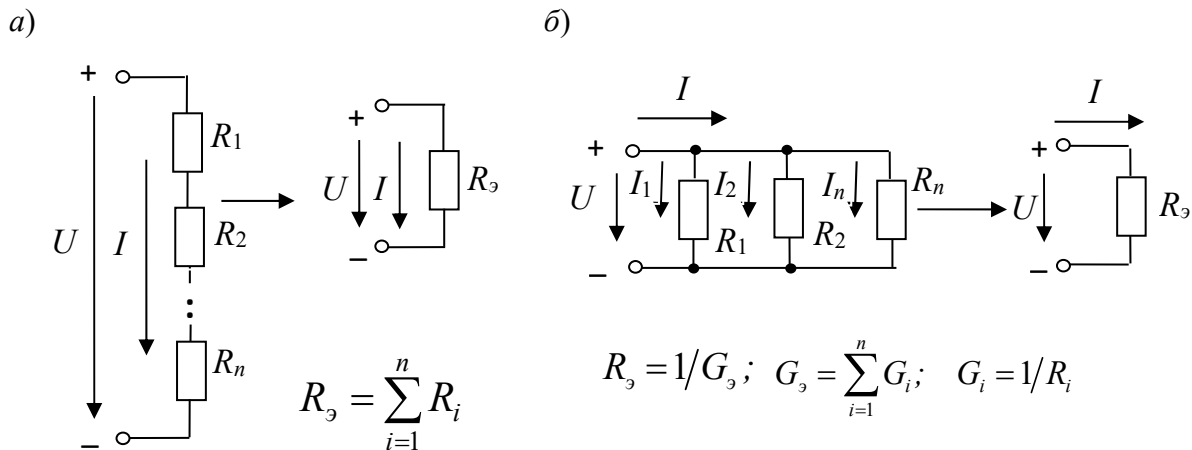


Рисунок 1.1 – Последовательное и параллельное соединение резисторов

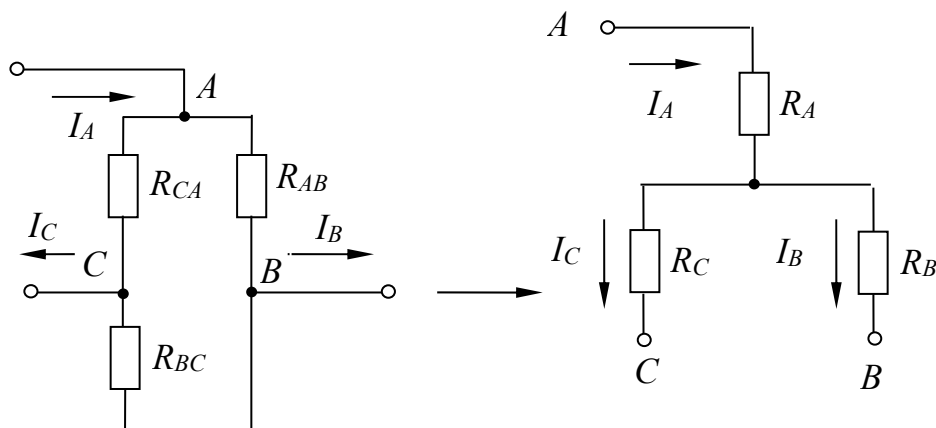


Рисунок 1.2 – Соединение резисторов треугольником и звездой

Формулы для расчета R_A, R_B, R_C (преобразование треугольника в звезду):

$$R_A = \frac{R_{AB} \cdot R_{CA}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{CA}};$$

$$R_B = \frac{R_{AB} \cdot R_{BC}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{CA}};$$

$$R_C = \frac{R_{CA} \cdot R_{BC}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{CA}}.$$

Формулы для расчета R_A, R_B, R_C (преобразование звезды в треугольник):

$$R_{AB} = R_A + R_B + \frac{R_A \cdot R_B}{R_C};$$

$$R_{BC} = R_B + R_C + \frac{R_B \cdot R_C}{R_A};$$

$$R_{CA} = R_C + R_A + \frac{R_C \cdot R_A}{R_B}.$$

1.2 Примеры решения задач

Определить токи и напряжения на отдельных участках схемы (рисунок 1.3), если напряжение на входе $U = 240$ В, а сопротивления резисторов: $R_1 = R_2 = 0,5$ Ом, $R_3 = R_5 = 10$ Ом, $R_4 = R_6 = R_7 = 5$ Ом. Рассчитать мощность P , потребляемую электрической цепью.

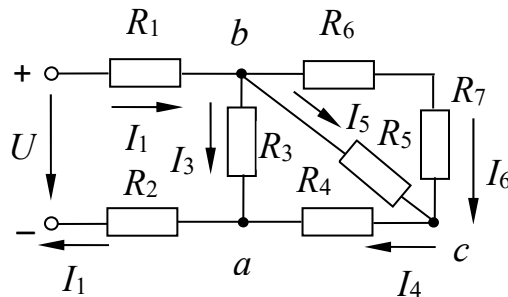


Рисунок 1.3 – Электрическая цепь постоянного тока

Решение

Определим эквивалентное сопротивление схемы:

$$R_{bc} = \frac{(R_6 + R_7) \cdot R_5}{R_5 + R_6 + R_7} = \frac{(5 + 5) \cdot 10}{5 + 5 + 10} = 5 \text{ Ом},$$

т. к. резисторы R_6 и R_7 соединены последовательно друг с другом и параллельно с резистором R_5 .

$$R_{ab} = \frac{(R_{bc} + R_4) \cdot R_3}{R_{bc} + R_4 + R_3} = \frac{(5 + 5) \cdot 10}{5 + 5 + 10} = 5 \text{ Ом},$$

т. к. резисторы R_{bc} и R_4 соединены последовательно друг с другом и параллельно с резистором R_3 .

$$R_9 = R_{ab} + R_1 + R_2 = 5 + 0,5 + 0,5 = 6 \text{ Ом}.$$

Ток I_1 определяем по закону Ома:

$$I_1 = U / R_9 = 240 / 6 = 40 \text{ А}.$$

Напряжение между точками a и b определяем по закону Ома:

$$U_{ab} = R_{ab} \cdot I_1 = 40 \cdot 5 = 200 \text{ В},$$

или $U_{ab} = U - (R_1 + R_2) \cdot I_1 = 200 \text{ В}$ – по второму закону Кирхгофа.

Токи:

$$I_3 = U_{ab} / R_3 = 200 / 10 = 20 \text{ А};$$

$$I_4 = I_1 - I_3 = 40 - 20 = 20 \text{ А};$$

$$I_6 = I_5 = I_4 / 2 = 20 / 2 = 10 \text{ А}, \text{ т. к. } R_6 + R_7 = R_5.$$

Напряжения:

$$U_{bc} = R_5 \cdot I_5 = 10 \cdot 10 = 100 \text{ В};$$

$$U_{ca} = R_4 \cdot I_4 = 20 \cdot 5 = 100 \text{ В}.$$

Мощность, потребляемая электрической цепью:

$$P = U \cdot I_1 = 240 \cdot 40 = 9600 \text{ Вт.}$$

Проверим правильность решения задачи, осуществив моделирование работы схемы в среде Multisim.

В качестве источника питания можно использовать источник *DC Power* из группы *Sources*, установив значение постоянного напряжения U . Измерительные приборы перевести в режим *DC* (постоянный ток).

Результаты моделирования соответствуют расчётным значениям с небольшой погрешностью (рисунок 1.4).

Показания измерительных приборов соответствуют расчётным значениям.

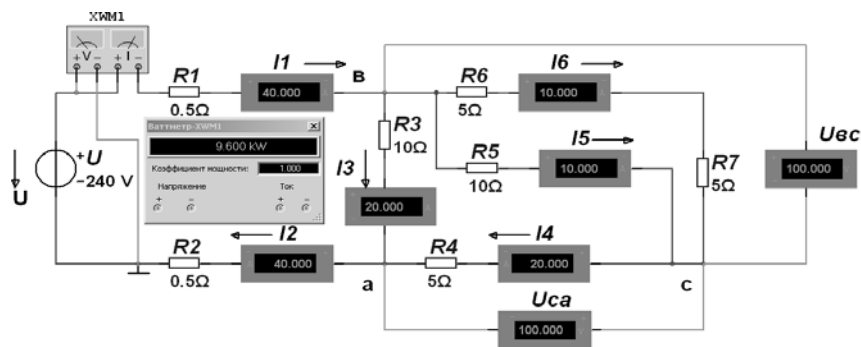


Рисунок 1.4 – Потенциальная диаграмма

2 Практическое занятие № 2. Расчет электрических цепей постоянного тока

Цель занятия: изучить основные методы расчета разветвленных цепей постоянного тока с несколькими источниками.

2.1 Основные теоретические сведения

1 Расчет сложных электрических цепей методом непосредственного применения законов Кирхгофа.

Метод непосредственного применения законов Кирхгофа является универсальным при расчетах и анализах сложных электрических цепей.

Порядок расчета по этому методу состоит в следующем:

- указываем произвольно положительные направления токов в ветвях, а также направления обхода в выбранных независимых контурах;
- записываем уравнения по первому закону Кирхгофа, количество уравнений по первому закону Кирхгофа равно $k - 1$, где k – число узлов электрической цепи;
- записываем уравнения по второму закону Кирхгофа применительно к контуру.

Число уравнений, составляемых по второму закону Кирхгофа, равно

$$n - (\kappa - 1),$$

где n – число ветвей электрической цепи.

Решая систему полученных уравнений, определяем токи ветвей.

Для проверки правильности расчета электрической цепи используют уравнение баланса мощностей.

2 Расчет сложных электрических цепей методом контурных токов.

Метод контурных токов вытекает из метода, основанного на непосредственном применении законов Кирхгофа. Уравнения по методу контурных токов получают по второму закону Кирхгофа – введением так называемых контурных токов. Количество уравнений, составленных по методу контурных токов, равно $n - (\kappa - 1)$.

Направления контурных токов выбираются произвольно. При составлении уравнений положительными принимаются ЭДС, совпадающие с направлениями контурных токов. Решая систему уравнений, определим значение контурных токов. Во внешних ветвях контурные токи будут являться истинными токами. Токи в смежных ветвях определяют по первому закону Кирхгофа.

2.2 Примеры решения задач

Рассчитать токи (рисунок 2.1).

Исходные данные: $R_1 = 2 \text{ Ом}$; $R_2 = 13 \text{ Ом}$; $R_3 = 11 \text{ Ом}$; $R_4 = 8 \text{ Ом}$; $R_5 = 15 \text{ Ом}$; $R_6 = 15 \text{ Ом}$; $E_1 = 16 \text{ В}$; $E_3 = 0 \text{ В}$; $E_6 = 12 \text{ В}$; $J_1 = 2 \text{ А}$; $J_2 = 0 \text{ А}$.

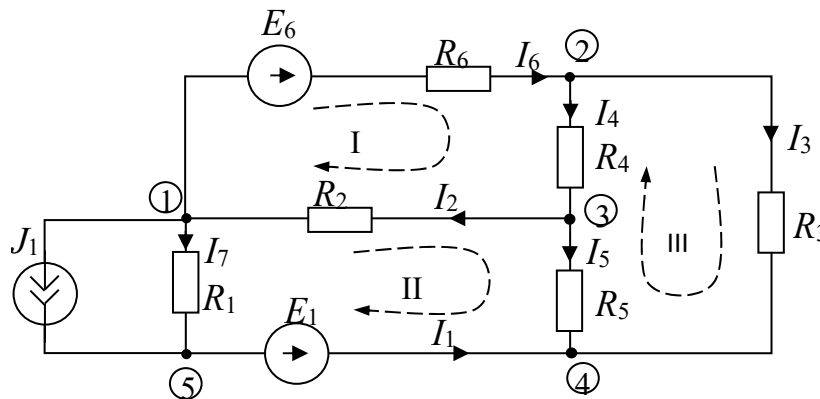


Рисунок 2.1 – Схема электрической цепи

Решение

1 Составление графа схемы.

Граф схемы (см. рисунок 2.1) приведен на рисунке 2.2.

Число ветвей графа $b = 7$. Число узлов $y = 5$.

На рисунке 2.3 изображено дерево графа.

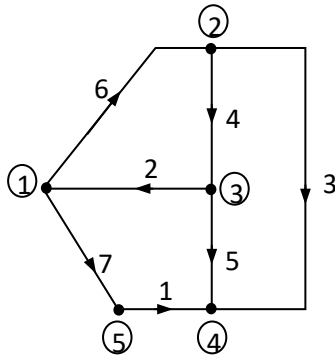


Рисунок 2.2 – Граф схемы

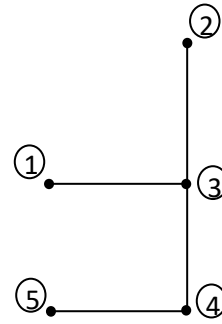


Рисунок 2.3 – Дерево графа

Число ветвей дерева $d = 4$. Число ветвей связи $k = 3$.

Следовательно, по первому закону Кирхгофа можно составить четыре независимых уравнения, а по второму – три.

2 Уравнения по законам Кирхгофа.

Первый закон Кирхгофа:

$$- \text{узел 1} \quad -I_2 + I_6 + I_7 = -J_1;$$

$$- \text{узел 2} \quad I_3 + I_4 - I_6 = 0;$$

$$- \text{узел 3} \quad I_2 - I_4 + I_5 = 0;$$

$$- \text{узел 5} \quad I_1 - I_7 = J_1.$$

В матричной форме

$$[A][I] = -[A][J],$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \\ I_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ J_1 \end{bmatrix}.$$

Второй закон Кирхгофа:

$$- \text{контур I} \quad I_2 R_2 + I_4 R_4 + I_6 R_6 = E_6;$$

$$- \text{контур II} \quad -I_1 R_1 - I_2 R_2 + I_5 R_5 - I_7 R_7 = -E_1;$$

$$- \text{контур III} \quad I_3 R_3 - I_4 R_4 - I_5 R_5 = 0.$$

В матричной форме

$$[B][R][I] = [B][E],$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \\ R_6 \\ R_1 \end{matrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \\ I_7 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ E_6 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

3 Расчет токов в ветвях электрической цепи.

Преобразуем источник тока J_1 (см. рисунок 2.1) в источник ЭДС $E' = J_1 R_1 = 4$ В (рисунок 2.4), при этом узел 5 и ветвь 7 устраняются; в ветви 1 включены последовательно R_1 , E и E' , ток $I_1 = J_1 + I_7$.

После преобразования схемы $d = 3$, $\kappa = 3$, применение методов контурных токов и узловых потенциалов равноценно.

Применим метод контурных токов. Задаемся направлением контурных токов (см. рисунок 2.4) I_{11} , I_{22} , I_{33} .

Запишем уравнения применительно к рассматриваемой схеме:

$$\begin{cases} I_{11}(R_2 + R_4 + R_6) - I_{22}R_2 - I_{33}R_4 = E_6; \\ -I_{11}R_2 + I_{22}(R_1 + R_2 + R_5) - I_{33}R_5 = -E_1 - E'; \\ -I_{11}R_4 - I_{22}R_5 + I_{33}(R_3 + R_4 + R_5) = 0. \end{cases}$$

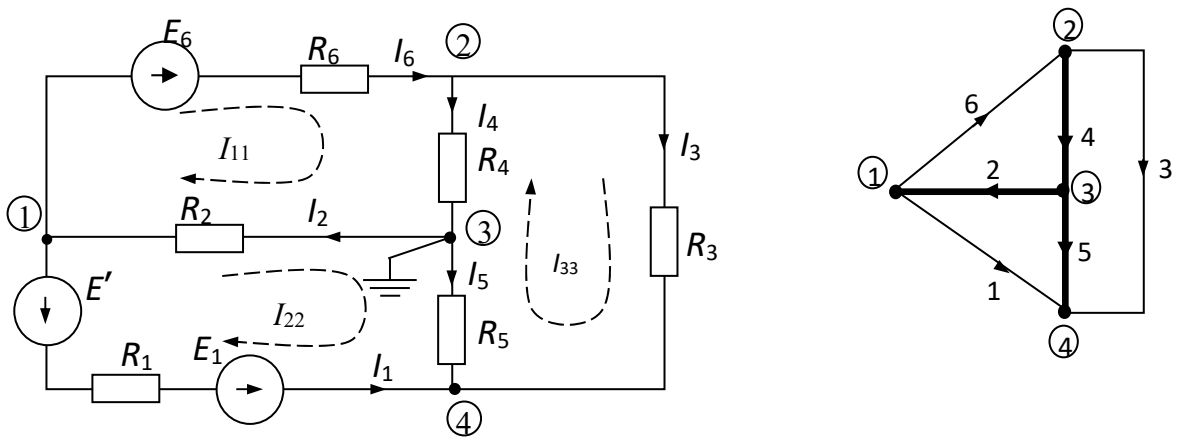


Рисунок 2.4 – Расчетная электрическая схема и ее граф

Подставим исходные данные:

$$\begin{cases} 36 \cdot I_{11} - 13 \cdot I_{22} - 8 \cdot I_{33} = 12; \\ -13 \cdot I_{11} + 30 \cdot I_{22} - 15 \cdot I_{33} = -20; \\ -8 \cdot I_{11} - 15 \cdot I_{22} + 34 \cdot I_{33} = 0. \end{cases}$$

Данную систему алгебраических уравнений можно решить, например, применяя правило Крамера:

$$I_{ii} = \Delta_i / \Delta,$$

где Δ – главный определитель системы;
 Δ_i – алгебраическое дополнение для i -го тока.

Обратимся к стандартной программе решения системы линейных алгебраических уравнений на ЭВМ и получим

$$I_{11} = -0,095 \text{ А}; I_{22} = -0,923 \text{ А}; I_{33} = -0,43 \text{ А}.$$

Можно использовать для решения системы из трёх уравнений стандартную программу для микрокалькулятора.

Имея значения контурных токов, определяем искомые токи в ветвях схемы:

$$I_1 = -I_{22} = 0,923 \text{ А}; I_2 = I_{11} - I_{22} = 0,828 \text{ А}; I_3 = I_{33} = -0,43 \text{ А};$$

$$I_4 = I_{11} - I_{33} = 0,335 \text{ А}; I_5 = I_{22} - I_{33} = -0,493 \text{ А}; I_6 = I_{11} = -0,095 \text{ А};$$

$$I_7 = I_1 - J_1 = -1,077 \text{ А}.$$

Знак «минус» перед токами I_3 , I_5 , I_6 и I_7 означает, что их действительное направление противоположно принятому на схеме (см. рисунок 2.1).

Если использовать для расчета метод узловых напряжений, то необходимо выбрать базисный узел, например, узел 3, и принять $U_3 = U_0 = 0$, затем составить на основании (1.16) систему для определения узловых напряжений:

$$\begin{cases} U_{10}(g_1 + g_2 + g_6) - U_{20}g_6 - U_{40}g_1 = -(E' + E_1)g_1 - E_6g_6; \\ -U_{10}g_6 + U_{20}(g_6 + g_3 + g_4) - U_{40}g_3 = E_6g_6; \\ -U_{10}g_1 - U_{20}g_3 + U_{40}(g_1 + g_3 + g_5) = (E' + E_1)g_1. \end{cases}$$

Проводимости ветвей

$$g_1 = \frac{1}{R_1} = 0,5 \text{ См}; \quad g_2 = \frac{1}{R_2} = 0,0771 \text{ См}; \quad g_3 = \frac{1}{R_3} = 0,091 \text{ См};$$

$$g_4 = \frac{1}{R_4} = 0,125 \text{ См}; \quad g_5 = \frac{1}{R_5} = 0,0671 \text{ См}; \quad g_6 = \frac{1}{R_6} = 0,2 \text{ См}.$$

Подставляем численные значения:

$$\begin{cases} 0,0777 \cdot U_{10} - 0,2 \cdot U_{20} - 0,5 \cdot U_{40} = -12,4; \\ -0,2 \cdot U_{10} + 0,416 \cdot U_{20} - 0,091 \cdot U_{40} = 2,4; \\ -0,5 \cdot U_{10} - 0,091 \cdot U_{20} + 0,658 \cdot U_{40} = 10. \end{cases}$$

Решение системы:

$$U_{10} = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -10,5 \text{ В}; \quad U_{20} = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 2,46 \text{ В}; \quad U_{40} = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 7,49 \text{ В}.$$

Токи определяются по закону Ома.

4 *Определение тока амперметра, включенного в одну из ветвей схемы, методом активного двухполюсника.*

Требуется определить ток I_2 (см. рисунок 2.1). Следует применить метод эквивалентного генератора, тогда по формуле Тевенена

$$I_2 = \frac{U_{31xx}}{R_{ex} + R_2}.$$

Определим U_{31xx} в режиме холостого хода (рисунок 2.5), для чего найдем I_{6xx} и I_{4xx} .

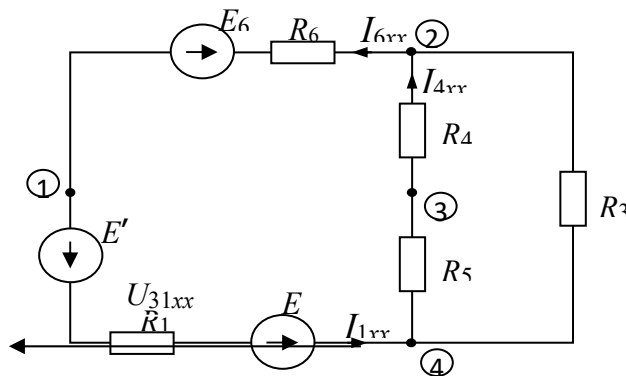


Рисунок 2.5 – Схема режима холостого хода

По закону Ома

$$I_{6xx} = I_{1xx} = \frac{E_1 + E' - E_6}{R_1 + R_6 + \frac{(R_4 + R_5) \cdot R_3}{R_3 + R_4 + R_5}} = \frac{20 - 12}{2 + 5 + 7,4} = 0,55 \text{ А};$$

$$I_{4xx} = \frac{U_{42}}{R_4 + R_5} = \frac{I_{1xx} R_{42}}{R_4 + R_5} = \frac{0,55 \cdot 7,4}{8 + 15} = 0,177 \text{ А}.$$

Напряжение холостого хода U_{31xx} :

$$U_{31xx} = \varphi_3 - \varphi_1 = I_{6xx} R_6 + E_6 + I_{4xx} R_4 = 0,55 \cdot 5 + 12 + 0,177 \cdot 8 = 16,6,$$

где $\varphi_3 = \varphi_1 + I_{6xx} R_6 + E_6 + I_{4xx} R_4$.

Для определения входного сопротивления двухполюсника (рисунок 2.6) преобразуем треугольник 432 в эквивалентную звезду.

$$R_a = \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4 + R_5} = \frac{11 \cdot 8}{11 + 8 + 15} = 2,58 \text{ Ом};$$

$$R_b = \frac{R_3 R_5}{R_3 + R_4 + R_5} = \frac{11 \cdot 15}{34} = 5,2 \text{ Ом};$$

$$R_c = \frac{R_4 R_5}{R_3 + R_4 + R_5} = \frac{8 \cdot 15}{34} = 3,53 \text{ Ом};$$

$$R_{ex} = R_{31} = R_c + \frac{(R_a + R_6)(R_1 + R_b)}{R_a + R_6 + R_1 + R_b} = 3,53 + \frac{7,58 \cdot 7,2}{14,78} = 7,23 \text{ Ом}.$$

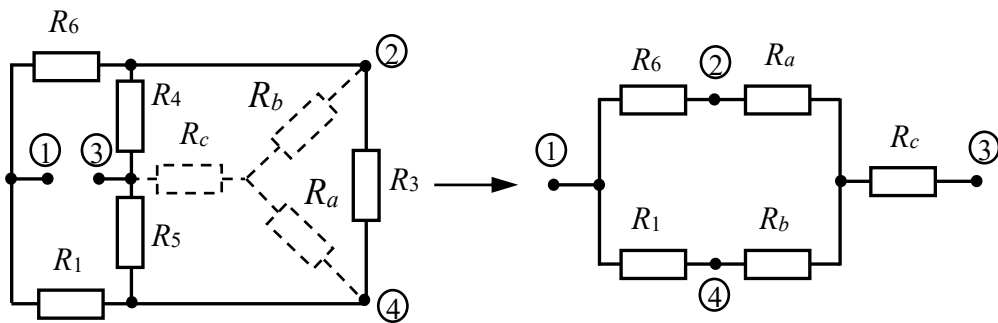


Рисунок 2.6 – Схема для определения входного сопротивления

Искомый ток амперметра

$$I_2 = \frac{U_{31xx}}{R_{ex} + R_2} = \frac{16,6}{7,23 + 13} = 0,8 \text{ А.}$$

Расхождение с током I_2 , рассчитанным по методу контурных токов, менее чем 3 %.

5 Составление баланса мощностей.

Баланс составляется для исходной схемы с источником тока (см. рисунок 2.1).

$$\sum_i P_{i.уст} = \sum_i P_{i.пр}.$$

Мощность приемников

$$\begin{aligned} \sum_i P_{i.пр} &= \sum_i I_i^2 R_i = I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3 + I_4^2 R_4 + I_5^2 R_5 + I_6^2 R_6 + I_7^2 R_1 = 0,828^2 \cdot 13 + \\ &+ 0,43^2 \cdot 11 + 0,335^2 \cdot 8 + 0,493^2 \cdot 15 + 0,095^2 \cdot 15 + 1,077^2 \cdot 2 = 17,945 \text{ Вт.} \end{aligned}$$

Мощность источников

$$\begin{aligned} \sum P_{уст} &= E_1 I_1 + I_6 E_6 - J_1 I_7 R_1 = 16 \cdot 0,923 + 12 \cdot (-0,095) - \\ &- 2 \cdot (-1,077) \cdot 2 = 17,936 \text{ Вт;} \\ 17,945 &\approx 17,936. \end{aligned}$$

Выполнение баланса мощностей подтверждает правильность расчета токов.

6 Потенциальная диаграмма.

Потенциальная диаграмма (рисунок 2.8) строится для контура, содержащего источники ЭДС и тока (рисунок 2.7).

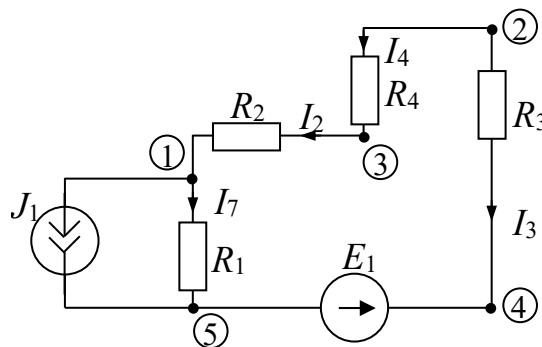


Рисунок 2.7 – К построению потенциальной диаграммы

Принимаем $\varphi_5 = 0$. Определяем потенциалы остальных точек контура:

$$\varphi_4 = \varphi_5 + E_1 = 16 \text{ В};$$

$$\varphi_2 = \varphi_4 + I_3 R_3 = 16 - 0,43 \cdot 11 = 11,27 \text{ В};$$

$$\varphi_3 = \varphi_2 - I_4 R_4 = 11,27 - 0,335 \cdot 8 = 8,59 \text{ В};$$

$$\varphi_1 = \varphi_3 - I_2 R_2 = 8,59 - 0,828 \cdot 13 = -2,174 \text{ В};$$

$$\varphi_5 = \varphi_1 - I_7 R_1 = -2,174 - (-1,077) \cdot 2 = -0,02 \approx 0 \text{ В}.$$

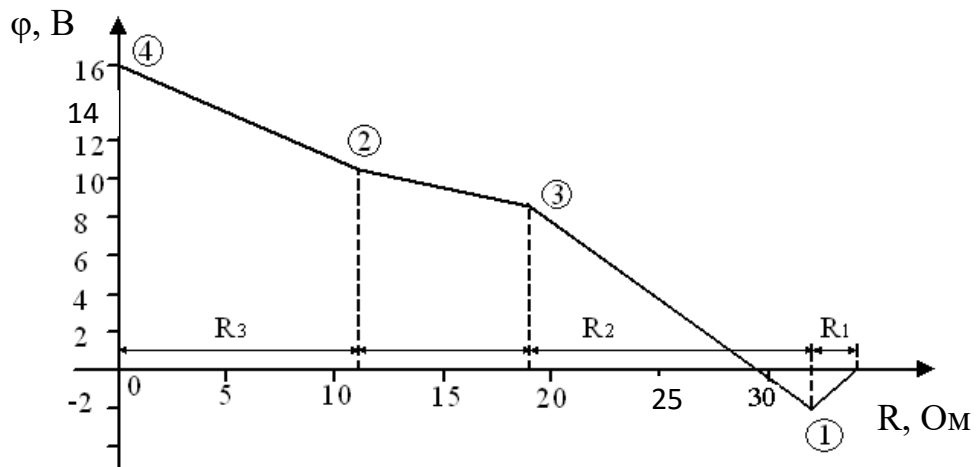


Рисунок 2.8 – Потенциальная диаграмма

Проверим правильность решения задачи, осуществив моделирование работы схемы в среде Multisim (рисунок 2.9).

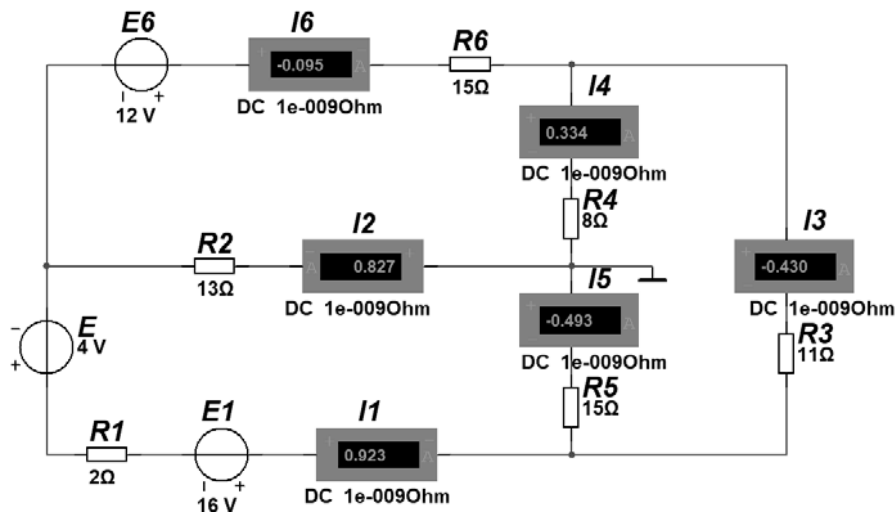
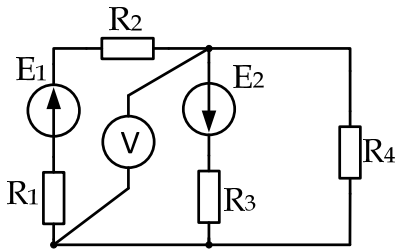


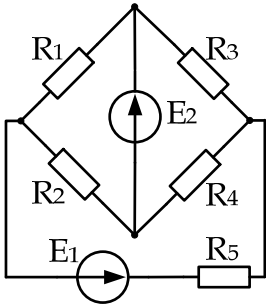
Рисунок 2.9 – Модель электрической цепи в Multisim

Показания измерительных приборов соответствуют расчётным значениям.

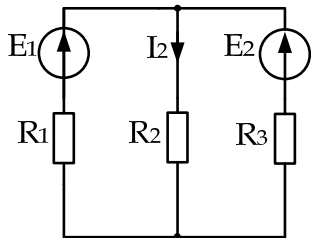
2.3 Задачи для самостоятельного решения



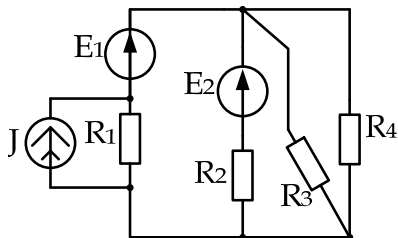
Задача 1. Дано: $R_1 = 10 \text{ Ом}$; $R_2 = 15 \text{ Ом}$; $R_3 = 40 \text{ Ом}$; $R_4 = 32 \text{ Ом}$; $E_1 = 90 \text{ В}$; $E_2 = 10 \text{ В}$. Определить показание вольтметра, применяя метод, требующий минимум вычислений.



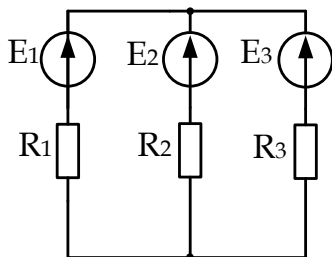
Задача 2. Дано: $R_1 = 7 \text{ Ом}$; $R_2 = 10 \text{ Ом}$; $R_3 = 5 \text{ Ом}$; $R_4 = 17 \text{ Ом}$; $R_5 = 4 \text{ Ом}$; $E_1 = 60 \text{ В}$; $E_2 = 100 \text{ В}$. Определить силу тока в каждой ветви, применяя оптимальный метод расчета.



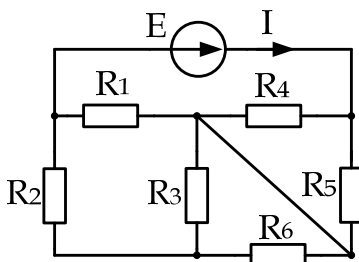
Задача 3. Дано: $R_1 = 10 \text{ Ом}$; $R_2 = 10 \text{ Ом}$; $R_3 = 5 \text{ Ом}$; $E_1 = 40 \text{ В}$; $E_2 = 20 \text{ В}$. Определить I_2 , применяя оптимальный метод расчета.



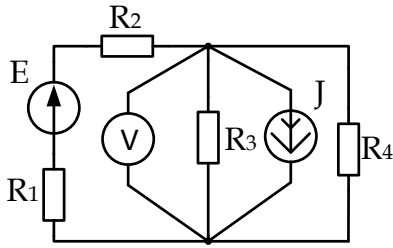
Задача 4. Дано: $R_1 = 20 \text{ Ом}$; $R_2 = 10 \text{ Ом}$; $R_3 = 30 \text{ Ом}$; $R_4 = 30 \text{ Ом}$; $J = 0,5 \text{ А}$; $E_1 = 45 \text{ В}$; $E_2 = 12 \text{ В}$. Определить ток в каждой ветви, применяя оптимальный метод расчета.



Задача 5. Дано: $R_1 = 50 \text{ Ом}$; $R_2 = 60 \text{ Ом}$; $R_3 = 70 \text{ Ом}$; $E_1 = 50 \text{ В}$; $E_2 = 60 \text{ В}$; $E_3 = 70 \text{ В}$. Определить токи ветвей, применяя принцип наложения и закон Ома.



Задача 6. Дано: $R_1 = 5 \text{ Ом}$; $R_2 = 6 \text{ Ом}$; $R_3 = 7 \text{ Ом}$; $R_4 = 10 \text{ Ом}$; $R_5 = 10 \text{ Ом}$; $R_6 = 7 \text{ Ом}$; $E = 100 \text{ В}$. Примените эквивалентные преобразования и найдите ток I с помощью закона Ома.



Задача 7. Дано: $R_1 = 10$ Ом; $R_2 = 10$ Ом; $R_3 = 20$ Ом; $R_4 = 5$ Ом; $E = 5$ В; $J = 4$ А. Определите показание вольтметра, применяя метод, требующий минимум вычислений.

3 Практическое занятие № 3. Расчет электрических цепей при синусоидальных воздействиях

Цель занятия: изучить основные методы расчета электрических цепей переменного тока с применением комплексных чисел.

3.1 Основные теоретические сведения

Метод комплексных амплитуд расчета цепей переменного тока.

Сущность символического метода состоит в том, что гармонической функции тока (напряжения, ЭДС) ставится в соответствие комплексная гармоническая функция:

$$i = I_m \sin(\omega t \pm \varphi), \quad \dot{I}_m = I_m \cdot e^{j(\omega t \pm \varphi)}.$$

Для $t = 0$ комплексное амплитудное значение тока равно $\dot{I}_m = I_m \cdot e^{j(\pm\varphi)}$, а комплекс действующего значения тока равен $\dot{I} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \cdot e^{j(\pm\varphi)}$, аналогично

$$\dot{U} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \cdot e^{j(\pm\varphi)}.$$

Закон Ома в символической форме имеет вид:

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{\underline{Z}},$$

где \underline{Z} – комплекс полного сопротивления цепи.

При последовательном соединении элементов R, L, C

$$\underline{Z} = R + jX_L - jX_C = R + j(X_L - X_C) = z \cdot e^{j\varphi},$$

где $z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$;

$$\varphi = \arctg \frac{X_L - X_C}{R}.$$

При параллельном соединении элементов

$$\frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} + \frac{1}{\underline{Z}_3} + \dots + \frac{1}{\underline{Z}_i}.$$

3.2 Примеры решения задач

1 Катушка с активным сопротивлением $R = 6$ Ом и индуктивностью $L = 25,5$ мГн соединена последовательно с конденсатором, емкость которого $C = 1590$ мкФ.

Определить ток, напряжения на катушке и конденсаторе, мощности катушки, конденсатора и всей цепи. Построить векторную диаграмму напряжений, если напряжение на входе схемы (рисунок 3.1, а) $U = 127$ В и частота $f = 50$ Гц. Осуществить моделирование работы схемы в среде Multisim.

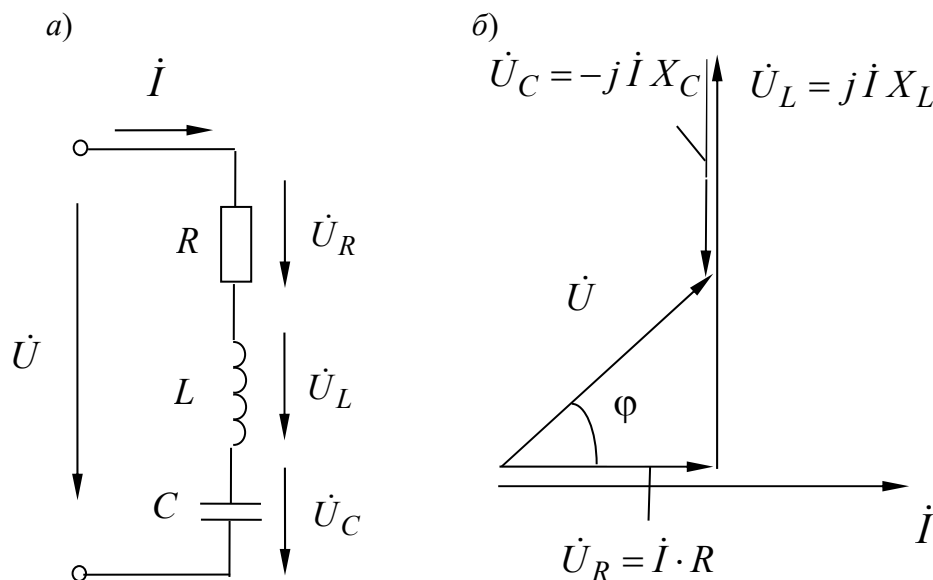


Рисунок 3.1 – Электрическая цепь переменного тока

Решение

Реактивные сопротивления элементов цепи равны:

$$X_L = 2 \cdot \pi \cdot f \cdot L = 2 \cdot 3,14 \cdot 50 \cdot 25,5 \cdot 10^{-3} = 8 \text{ Ом};$$

$$X_C = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot C} = \frac{1}{2 \cdot 3,14 \cdot 50 \cdot 1590 \cdot 10^{-6}} = 2 \text{ Ом}.$$

Комплекс полного сопротивления цепи

$$\begin{aligned}\underline{Z} &= R + jX_L - jX_C = R + j(X_L - X_C) = R + jX = 6 + j6 = \\ &= \sqrt{6^2 + 6^2} e^{j\left(\arctg\frac{6}{6}\right)} = 8,5 e^{j45^\circ} \text{ Ом.}\end{aligned}$$

Комплекс полного сопротивления катушки

$$\underline{Z}_k = R + jX_L = 6 + j8 = \sqrt{6^2 + 8^2} e^{j\left(\arctg\frac{8}{6}\right)} = 10 e^{j53^\circ} \text{ Ом.}$$

Комплексы напряжения и тока:

$$\dot{U} = 127 \text{ В;}$$

$$\begin{aligned}\dot{I} &= \frac{\dot{U}}{\underline{Z}} = \frac{127}{8,5 \cdot e^{j45^\circ}} = 14,9 \cdot e^{-j45^\circ} = 14,9 \cdot \cos(-45^\circ) + j \cdot \sin(-45^\circ) = \\ &= 10,5 - j10,5 \text{ А.}\end{aligned}$$

Комплексные действующие значения напряжений:

– на конденсаторе

$$\dot{U}_C = \underline{Z}_C \cdot \dot{I} = -j \cdot X_C \cdot \dot{I} = -j2 \cdot 14,9 \cdot e^{-j45^\circ} = 29,8 \cdot e^{-j135^\circ} = -21,1 - j21,1 \text{ В;}$$

– на катушке

$$\dot{U}_k = \underline{Z}_k \cdot \dot{I} = 10 \cdot e^{j53^\circ} \cdot 14,9 \cdot e^{-j45^\circ} = 149 \cdot e^{j8^\circ} = 147,5 + j20,7 \text{ В.}$$

Комплекс полной мощности

$$\tilde{S} = \dot{U} \cdot \dot{I}^* = 127 \cdot 14,9 \cdot e^{j45^\circ} = 1892 \cdot e^{j45^\circ} = 1338 + j1338 \text{ В} \cdot \text{А,}$$

где \dot{I}^* – комплексно-сопряженное значение тока.

Выделяя вещественную и мнимую части, находим, что активная мощность цепи составляет $P = 1338$ Вт, а реактивная – $Q = 1338$ вар.

Реактивная мощность конденсатора

$$Q_C = I^2 \cdot X_C = 14,9^2 \cdot 2 = 444 \text{ вар.}$$

Комплекс полной мощности катушки

$$\tilde{S} = \dot{U}_k \cdot I^* = 149 \cdot 14,9 \cdot e^{j8^\circ} \cdot e^{j45^\circ} = 2220 \cdot e^{j53^\circ} = 1336 + j1773 \text{ В}\cdot\text{А}.$$

Векторная диаграмма приведена на рисунке 3.1, б.

Проверим правильность решения задачи, осуществив моделирование её работы в среде Multisim.

В качестве источника питания для цепи на рисунке 3.2 можно использовать источник *AC Power* из группы *Sources*, установив действующее значение напряжения *RMS* и частоту *F*. Измерительные приборы перевести в режим *AC*. При этом они осуществляют индикацию действующих значений токов и напряжений. Результаты моделирования соответствуют расчётным значениям с небольшой погрешностью.

Измерение мощностей P , S и Q можно провести с помощью ваттметра, который в Multisim, кроме активной мощности, измеряет коэффициент мощности $\cos\varphi = \frac{P}{S}$.

В соответствии с показаниями ваттметра можно записать: $P = 1343$ Вт; $\cos\varphi = 0,707$; $\varphi = 45^\circ$ (напряжение опережает ток по фазе); $S = \frac{P}{\cos\varphi} = 1900$ В·А;

$Q = \sqrt{S^2 - P^2} = 1343$ вар, что с небольшой погрешностью соответствует расчётным значениям.

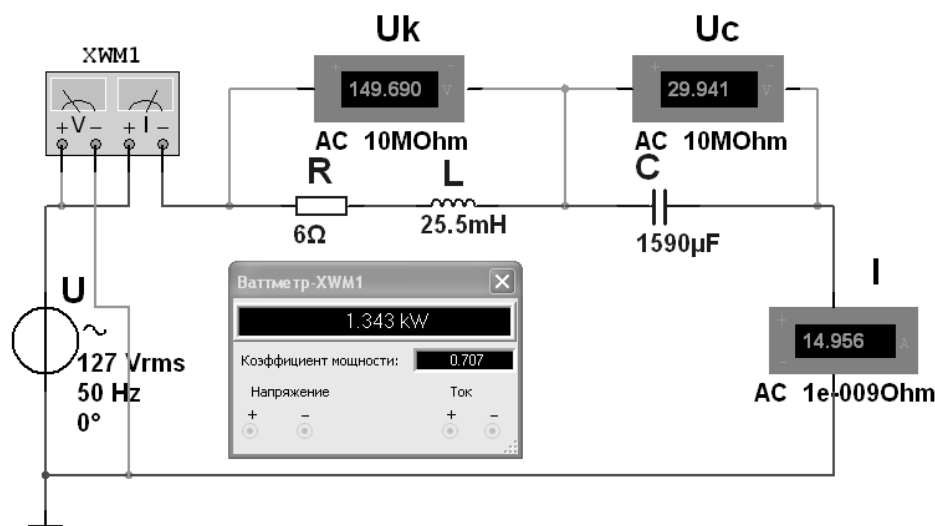


Рисунок 3.2 – Модель электрической цепи переменного тока в среде Multisim

2 Определить токи в электрической цепи (рисунок 3.3), если напряжение на входе $U_{ab} = 120$ В, а значение сопротивлений $X_{L0} = 4$ Ом, $R_1 = 6$ Ом, $X_{L1} = 8$ Ом, $X_C = 5$ Ом, $R_2 = 5$ Ом. Осуществить моделирование работы схемы в среде Multisim.

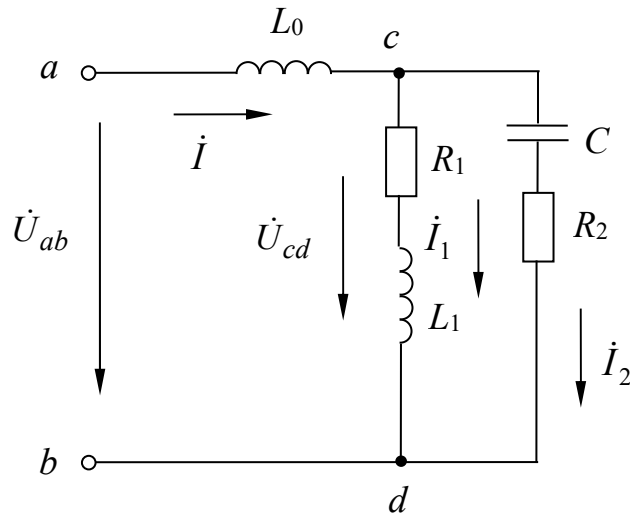


Рисунок 3.3 – Электрическая цепь переменного тока с параллельным соединением элементов

Решение

Входное комплексное сопротивление цепи

$$\begin{aligned}\underline{Z}_{ab} &= \underline{Z}_0 + \underline{Z}_{cd} = \underline{Z}_0 + \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} = jX_{L0} + \frac{(R_1 + jX_{L1}) \cdot (R_2 - jX_C)}{R_1 + jX_{L1} + R_2 - jX_C} = \\ &= j4 + \frac{(6 + j8) \cdot (5 - j5)}{6 + j8 + 5 - j5} = 6,15 + j3,23 \text{ Ом.}\end{aligned}$$

Общий ток цепи

$$\dot{i} = \frac{U_{ab}}{\underline{Z}_{ab}} = \frac{120}{6,15 + j3,23} = 15,39 - j8,08 = 17,4 \cdot e^{-j27,7^\circ} \text{ А.}$$

Комплексное напряжение на зажимах cd по второму закону Кирхгофа

$$\dot{U}_{cd} = \dot{U}_{ab} - \dot{U}_{ac} = 120 - j4 \cdot (15,39 - j8,08) = 87,78 - j61,5 = 107,2 \cdot e^{-j35^\circ} \text{ В.}$$

Токи в ветвях:

$$\dot{i}_1 = \frac{\dot{U}_{cd}}{\underline{Z}_1} = \frac{87,8 - j61,5}{6 + j8} = 0,34 - j10,7 = 10,71 \cdot e^{-j88,2^\circ} \text{ А;}$$

$$\dot{i}_2 = \frac{\dot{U}_{cd}}{\underline{Z}_2} = \frac{87,8 - j61,5}{5 - j5} = 14,92 + j2,64 = 15,2 \cdot e^{j10^\circ} \text{ А.}$$

Комплексная полная мощность всей цепи

$$\tilde{S} = \dot{U}_{ab} \cdot I^* = 120 \cdot (15,39 + j8,08) = 1846 + j970 = 2085 \cdot e^{j27,7^\circ} \text{ В} \cdot \text{А},$$

$$S = \sqrt{1846^2 + 970^2} = 2085 \text{ В} \cdot \text{А},$$

откуда $P = 1846$ Вт; $Q = 970$ вар.

Для проверки баланса мощностей подсчитываем активные и реактивные мощности отдельных ветвей цепи:

$$\tilde{S}_1 = \dot{U}_{cd} \cdot I_1^* = (87,8 - j61,5) \cdot (0,34 + j10,7) = 689 + j919 \text{ В} \cdot \text{А},$$

откуда $P_1 = 689$ Вт; $Q_1 = 919$ вар;

$$\tilde{S}_2 = \dot{U}_{cd} \cdot I_2^* = (87,8 - j61,5) \cdot (14,92 + j2,64) = 1148 + j1148 \text{ В} \cdot \text{А},$$

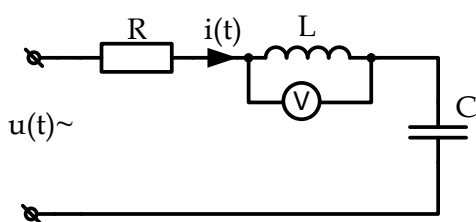
откуда $P_2 = 1148$ Вт; $Q_2 = -1148$ вар.

Активная и реактивная мощности всей цепи соответственно равны:

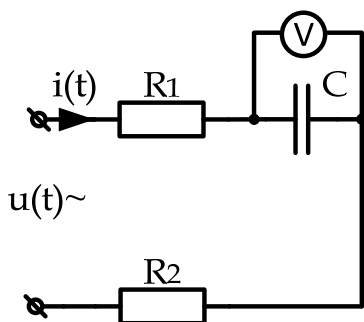
$$P_1 + P_2 = 689 + 1148 = 1837 \text{ Вт};$$

$$Q_1 + Q_2 + Q_0 = Q_1 + Q_2 + X_{L0} \cdot I^2 = 919 - 1148 + 1206 = 977 \text{ вар}.$$

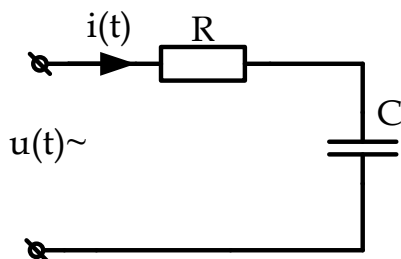
3.3 Задачи для самостоятельного решения



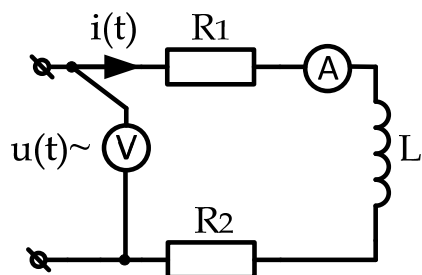
Задача 1. Вольтметр показал значение $U_V = 100$ В. Определить комплексные значения тока, напряжения на конденсаторе, резисторе и реактивную мощность, если $R = 20$ Ом, $X_L = 20$ Ом, $X_C = 40$ Ом.



Задача 2. Вольтметр показал значение $U_V = 100$ В. Определить ток в цепи, напряжение на входе, активную, реактивную и полную мощности, если $R_1 = 10$ Ом, $R_2 = 10$ Ом, $X_C = 20$ Ом.



Задача 3. В последовательной R -, C -цепи переменного синусоидального тока были измерены напряжение на входе, ток и активная мощность. Определить значения параметров R и C , если $I = 1$ А, $U = 100$ В, $P = 80$ Вт, $f = 50$ Гц.



Задача 4. Амперметр показал значение $I = 3$ А. Определить показание вольтметра, если значения параметров цепи: $R_1 = 20$ Ом, $R_2 = 10$ Ом, $X_L = 30$ Ом. Построить векторную диаграмму.

4 Практическое занятие № 4. Расчет трехфазных и индуктивно-связанных цепей

Цель занятия: изучить основные методы расчета трехфазных электрических цепей; цепей при наличии индуктивной связи при соединении нагрузки звездой и треугольником при помощи комплексных чисел.

4.1 Основные теоретические сведения

Фазные напряжения для схемы (рисунок 4.1, а) в комплексной форме определяются по заданному линейному напряжению:

$$\dot{U}_A = U_A; \quad \dot{U}_B = U_B \cdot e^{-j120^\circ}; \quad \dot{U}_C = U_C \cdot e^{-j240^\circ},$$

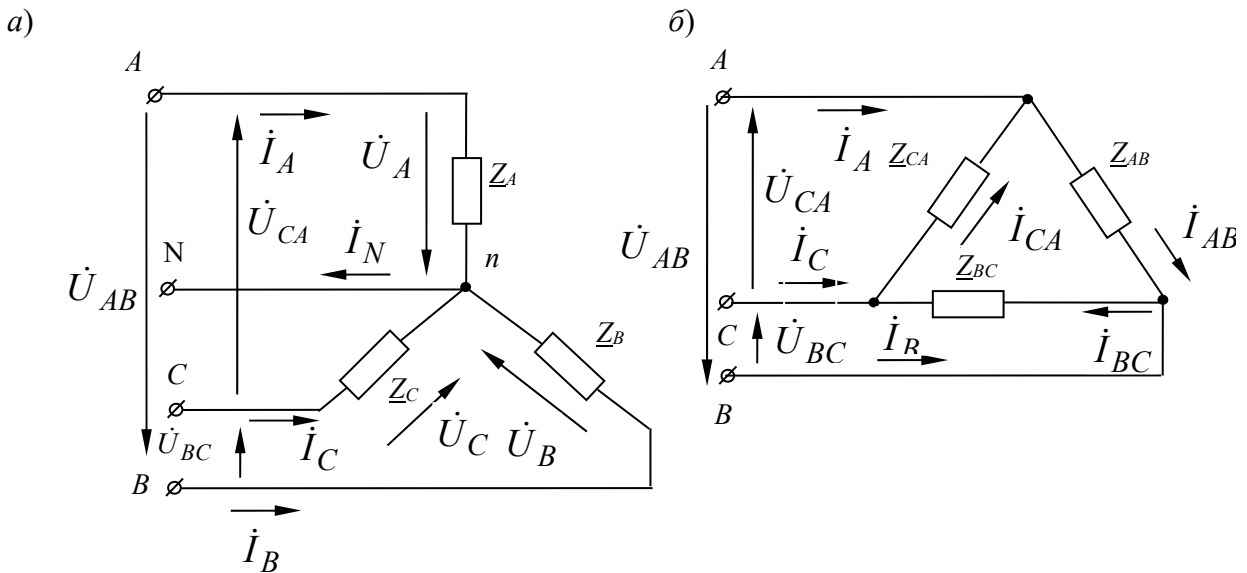
где $U_A = U_B = U_C = U_\phi = U_l / \sqrt{3}$.

Для схемы (см. рисунок 4.1, б) фазные и линейные напряжения равны:

$$U_l = U_\phi.$$

В комплексной форме

$$\dot{U}_{AB} = U_{AB}; \quad \dot{U}_{BC} = U_{BC} \cdot e^{-j120^\circ}; \quad \dot{U}_{CA} = U_{CA} \cdot e^{-j240^\circ}.$$



a – соединение звездой; *b* – соединение треугольником

Рисунок 4.1 – Трехфазные электрические цепи

4.2 Примеры решения задач

1 К трехфазной линии электропередачи, линейные напряжения которой симметричны ($U_{AB} = U_{BC} = U_{CA} = 220$ В), присоединены три приемника энергии по схеме треугольник (рисунок 4.2). Комплексные сопротивления этих приемников следующие: $Z_{AB} = 22$ Ом; $Z_{BC} = 19 - j11$ Ом; $Z_{CA} = 19 + j11$ Ом. Определить линейные и фазные токи в цепи и построить векторную диаграмму.

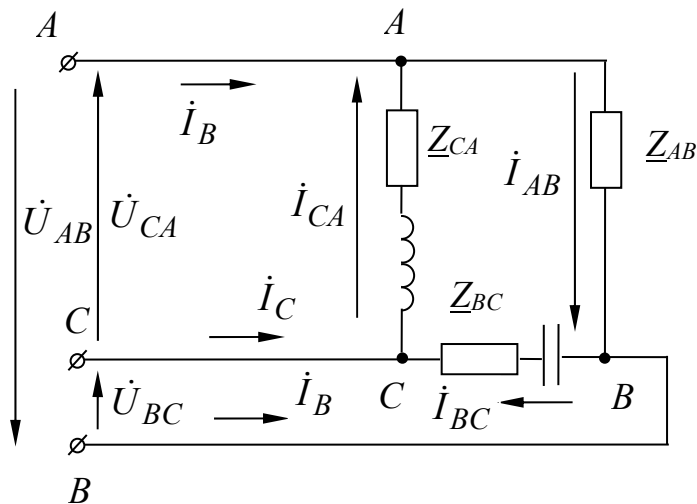


Рисунок 4.2 – Трехфазная электрическая цепь

Решение

Запишем значения линейных напряжений в комплексной форме:

$$\dot{U}_{AB} = U_{AB} = 220 \text{ В,}$$

тогда

$$\dot{U}_{BC} = U_{BC} \cdot e^{-j120^\circ} = 220 \cdot e^{-j120^\circ} = -110 - j190 \text{ В};$$

$$\dot{U}_{CA} = U_{CA} \cdot e^{-j240^\circ} = 220 \cdot e^{-j240^\circ} = -110 + j190 \text{ В}.$$

На основании закона Ома определим фазные токи:

$$\dot{I}_{AB} = \dot{U}_{AB} / \underline{Z}_{AB} = 220 / 22 = 10 \text{ А};$$

$$\dot{I}_{BC} = \dot{U}_{BC} / \underline{Z}_{BC} = (-110 - j190) / (19 - j11) = -j10 = 10 \cdot e^{-j90^\circ} \text{ А};$$

$$\dot{I}_{CA} = \dot{U}_{CA} / \underline{Z}_{CA} = (-110 + j190) / (19 + j11) = j10 = 10 \cdot e^{j90^\circ} \text{ А}.$$

Применив первый закон Кирхгофа к точкам A, B, C , найдем линейные токи:

$$\dot{I}_A = \dot{I}_{AB} - \dot{I}_{CA} = 10 - j10 = 14,1 \cdot e^{-j45^\circ} \text{ А};$$

$$\dot{I}_B = \dot{I}_{BC} - \dot{I}_{CA} = -10 - j10 = 14,1 \cdot e^{-j135^\circ} \text{ А};$$

$$\dot{I}_C = \dot{I}_{CA} - \dot{I}_{BC} = j20 = 20 \cdot e^{j90^\circ} \text{ А}.$$

Проверка:

$$\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 0;$$

$$10 - j10 - j10 - 10 + j20 = 0.$$

Проверим правильность решения задачи, осуществив моделирование её работы в среде Multisim. Сопротивления в фазах нагрузки: $R_{ab} = 22 \text{ Ом}$, $R_{bc} = 19 \text{ Ом}$, $C_{bc} = 1/\omega \cdot X_{bc} = 289,5 \text{ мкФ}$, $R_{ca} = 19 \text{ Ом}$, $L_{ca} = X_{ca}/\omega = 35 \text{ мГн}$.

В качестве источника питания используем источник *Three phase wye* из группы *Sources*, установив действующее значение фазного напряжения $L-n$, RMS и частоту F (рисунок 4.3). Измерительные приборы переводим в режим AC . При этом они осуществляют индикацию действующих значений фазных и линейных токов $I_a, I_b, I_c, I_{ab}, I_{bc}, I_{ca}$. Результаты моделирования соответствуют расчётным с небольшой погрешностью.

Правильность решения задачи можно проверить с помощью *Калькулятора*. При этом задаются модуль линейного напряжения U и комплексные сопротивления фаз нагрузки $\underline{Z}_{ab}, \underline{Z}_{bc}, \underline{Z}_{ca}$ (рисунок 4.4). Программа позволяет построить векторную диаграмму токов и напряжений.

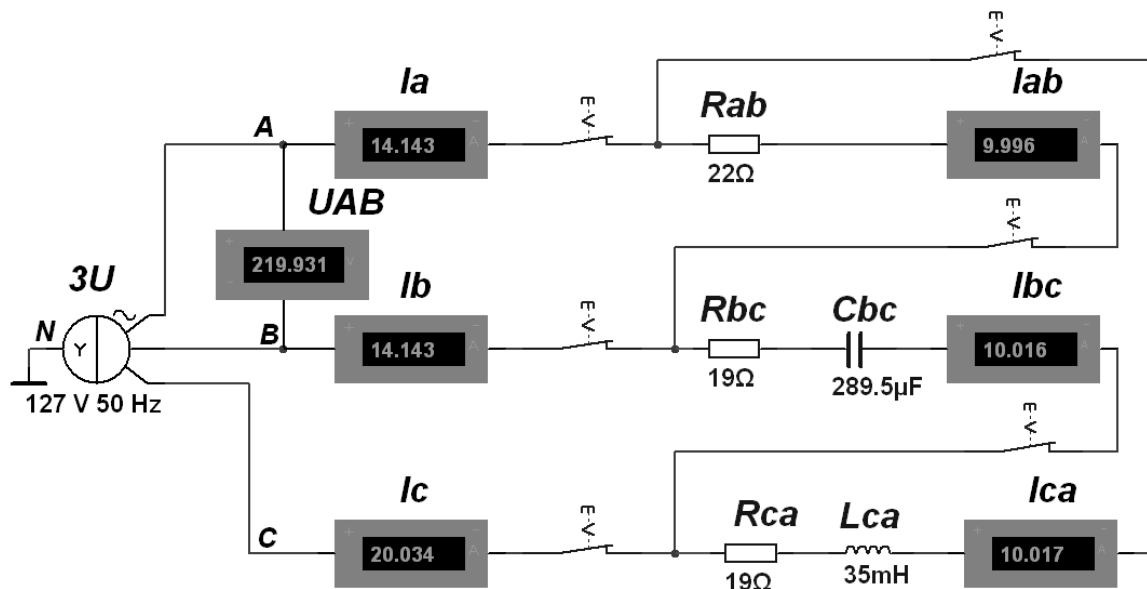
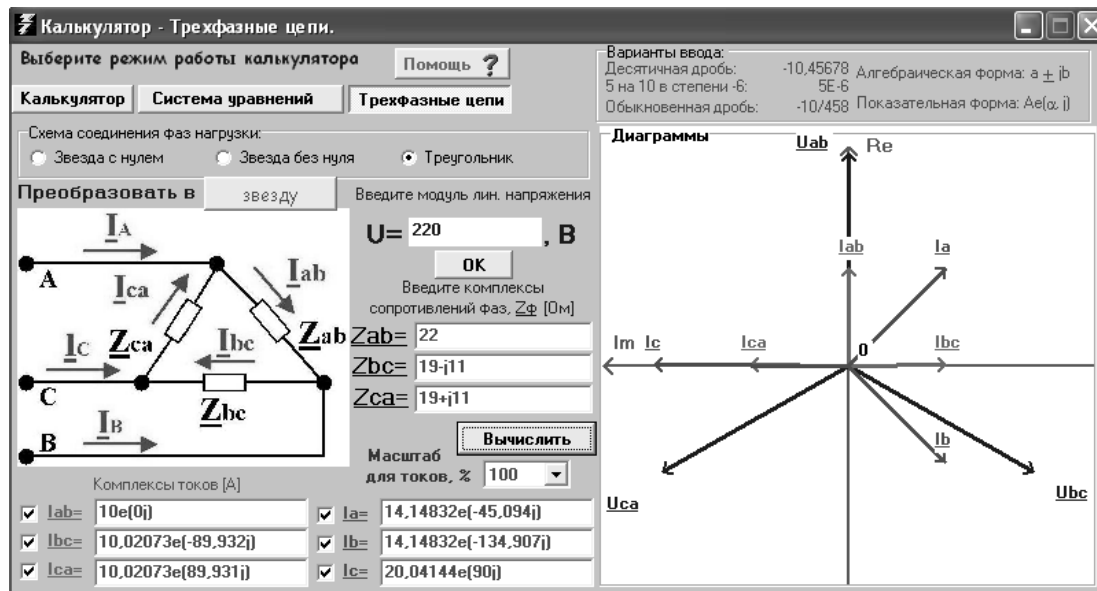


Рисунок 4.3 – Модель трехфазной электрической цепи в Multisim

Рисунок 4.4 – Программа *Калькулятор* для расчёта трёхфазных цепей

2 Определить токи в трехфазной цепи (рисунок 4.5), если линейные напряжения на входе в цепь симметричны: $U_{AB} = U_{BC} = U_{CA} = 208$ В, а комплексные сопротивления фаз $Z_A = 8 + j6$ Ом; $Z_B = 8 - j6$ Ом; $Z_C = 25$ Ом.

Решение

Комплексные проводимости фаз:

$$\underline{Y}_A = 1/\underline{Z}_A = 1/(R_A + jX_A) = 1/(8 + j6) = 0,08 - j0,06 \text{ См};$$

$$\underline{Y}_B = 1/\underline{Z}_B = 1/(R_B + jX_B) = 1/(8 - j6) = 0,08 + j0,06 \text{ См};$$

$$\underline{Y}_C = 1/\underline{Z}_C = 1/R_C = 1/25 = 0,04 \text{ См.}$$

Фазные напряжения генератора

$$U_A = U_B = U_C = U_{AB} / \sqrt{3} = 208 / \sqrt{3} = 120.$$

Значения фазных напряжений в комплексной форме:

$$\dot{U}_A = 120 \text{ В}; \quad \dot{U}_B = U_B \cdot e^{-j120^\circ} = 120 \cdot e^{-j120^\circ} = -60 - j104 \text{ В};$$

$$\dot{U}_C = U_C \cdot e^{-j240^\circ} = 120 \cdot e^{-j240^\circ} = -60 + j104 \text{ В.}$$

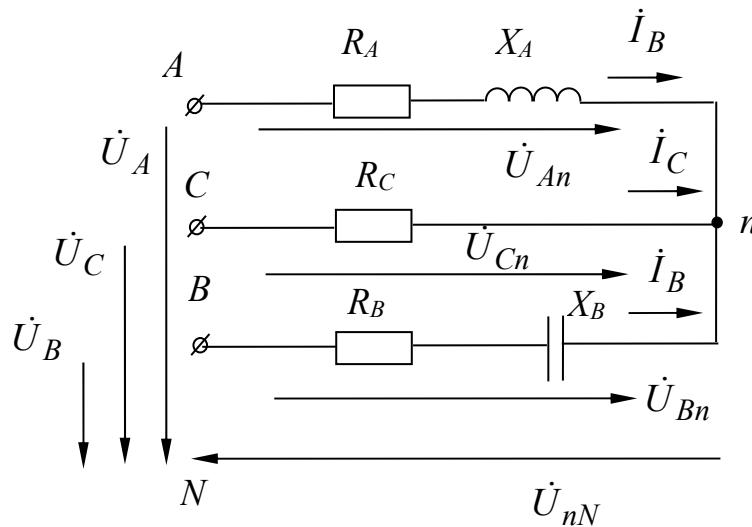


Рисунок 4.5 – Трехфазная электрическая цепь

Напряжение между нейтральными точками генератора и нагрузки определяем следующим образом:

$$\begin{aligned} U_{nN} &= \frac{\dot{U}_A \cdot \underline{Y}_A + \dot{U}_B \cdot \underline{Y}_B + \dot{U}_C \cdot \underline{Y}_C}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C} = \\ &= \frac{120 \cdot (0,08 - j0,06) + (-60 - j104) \cdot (0,08 + j0,06) + (-60 + j104) \cdot 0,04}{0,08 - j0,06 + 0,08 + j0,06 + 0,04} = \\ &= 43,2 - j74,8 = 86,3 \cdot e^{-j60^\circ} \text{ В.} \end{aligned}$$

Фазные напряжения нагрузки:

$$\dot{U}_{An} = \dot{U}_A - \dot{U}_{nN} = 120 - 43,2 + j74,8 = 76,8 + j74,8 = 107,2 \cdot e^{j44^\circ} \text{ В};$$

$$\begin{aligned}\dot{U}_{Bn} &= \dot{U}_B - \dot{U}_{nN} = -60 - j104 - 43,2 + j74,8 = -103,2 - j28,2 = \\ &= 107,2 \cdot e^{-j165^\circ} \text{ В};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{U}_{Cn} &= \dot{U}_C - \dot{U}_{nN} = -60 + j104 - 43,2 + j74,8 = -103,2 + j178,8 = \\ &= 206,4 \cdot e^{-j60^\circ} \text{ В}.\end{aligned}$$

Комплексные линейные токи:

$$\dot{I}_A = \dot{U}_{An} \cdot \underline{Y}_A = (76,8 + j74,8) \cdot (0,08 - j0,06) = 10,63 + j1,38 = 10,7 \cdot e^{j7,4^\circ} \text{ А};$$

$$\begin{aligned}\dot{I}_B &= \dot{U}_{Bn} \cdot \underline{Y}_B = (-103,2 - j28,2) \cdot (0,08 + j0,06) = -6,5 - j8,53 = \\ &= 10,7 \cdot e^{-j127^\circ} \text{ А};\end{aligned}$$

$$\dot{I}_C = \dot{U}_{Cn} \cdot \underline{Y}_C = (-103,2 + j28,2) \cdot 0,04 = -4,13 + j7,15 = 8,25 \cdot e^{-j60^\circ} \text{ А}.$$

Проверка:

$$\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 0;$$

$$10,63 + j1,38 - 6,5 - j8,53 - 4,13 + j7,15 = 0.$$

Проверим правильность решения задачи, осуществив моделирование её работы в среде Multisim. Сопротивления в фазах нагрузки: $R_a = 8 \text{ Ом}$, $L_a = X_a / \omega = 19,1 \text{ мГн}$, $R_b = 8 \text{ Ом}$, $C_b = 1 / \omega \cdot X_b = 530,8 \text{ мкФ}$, $R_c = 25 \text{ Ом}$.

В качестве источника питания используем источник *Three phase wye* из группы *Sources*, установив действующее значение фазного напряжения $L-n$, *RMS* и частоту F (рисунок 4.6). Измерительные приборы переводим в режим *AC*. При этом они осуществляют индикацию действующих значений фазных и линейных токов I_a , I_b , I_c , напряжения между нейтральными точками генератора и нагрузки U_{nN} и фазных напряжений нагрузки U_{an} , U_{bn} , U_{cn} . Результаты моделирования соответствуют расчётным с небольшой погрешностью. Правильность решения задачи можно проверить с помощью *Калькулятора*. При этом задаются модуль линейного напряжения U и комплексные сопротивления фаз нагрузки \underline{Z}_a , \underline{Z}_b , \underline{Z}_c (рисунок 4.7). Программа позволяет построить векторную диаграмму токов и напряжений.

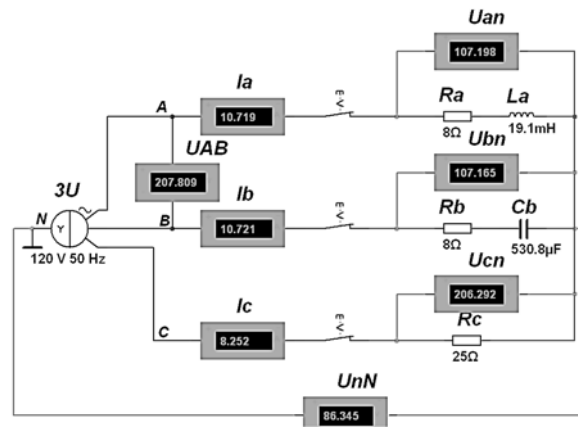


Рисунок 4.6 – Модель трехфазной электрической цепи в Multisim

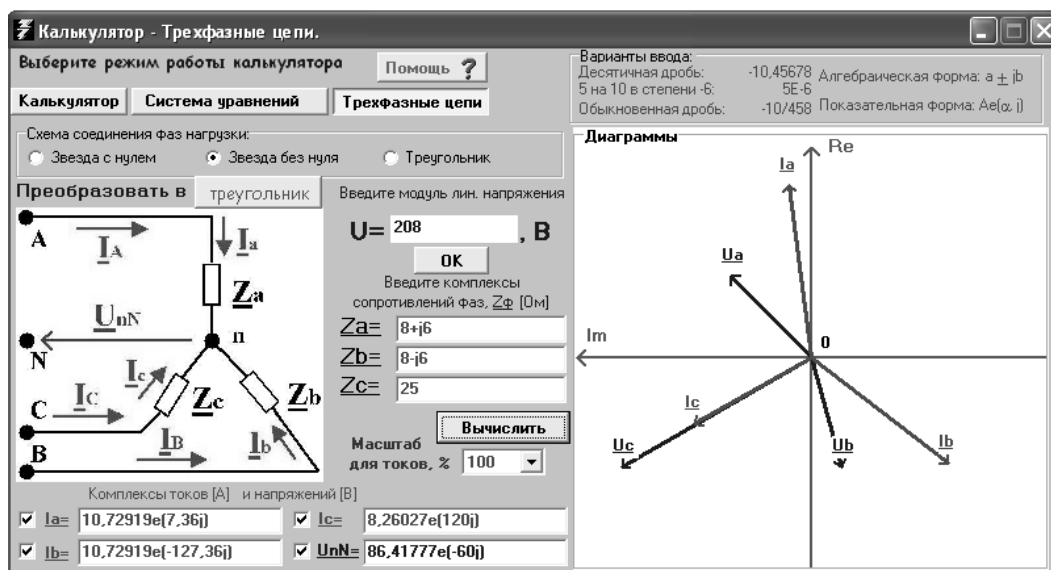
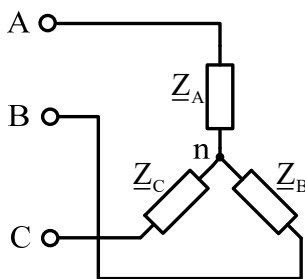
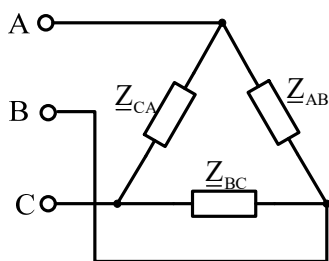


Рисунок 4.7 – Программа *Калькулятор* для расчёта трёхфазных цепей

4.3 Задачи для самостоятельного решения



Задача 1. Симметричная нагрузка соединена звездой. Определить ток в фазе b и фазное напряжение U_c , если известно линейное напряжение $\dot{U}_{AB} = 220 \cdot e^{j90^\circ}$ В и импеданс $\underline{Z} = 5 \cdot e^{j30^\circ}$ Ом. Трёхфазный генератор считать симметричным. Построить векторную диаграмму.



Задача 2. Симметричная нагрузка соединена треугольником. Определить линейный ток \dot{I}_B и фазный ток \dot{I}_{BC} , а также напряжение \dot{U}_{CA} , если известно линейное напряжение $\dot{U}_{AB} = 220 \cdot e^{j90^\circ}$ В и импеданс $\underline{Z} = 5 \cdot e^{j30^\circ}$ Ом. Трехфазный генератор считать симметричным.

5 Практическое занятие № 5. Расчет переходных процессов классическим и операторным методами

Цель занятия: изучить явление переходного процесса в электрической цепи; алгоритмы расчета переходных процессов классическим и операторным методами; свойства операторной схемы замещения.

5.1 Краткие теоретические сведения

Расчет переходного процесса в линейной электрической цепи с сосредоточенными параметрами сводится к решению линейного дифференциального уравнения n -го порядка, полученного на основании законов Кирхгофа. Порядок дифференциального уравнения определяется количеством реактивных элементов в цепи и способом их соединения. Для всех вариантов схем настоящего расчетно-графического задания $n = 2$.

Классический метод расчета предполагает нахождение решения в виде суммы *принужденной* и *свободной* составляющих:

$$x(t) = x_{np}(t) + x_{св}(t),$$

где $x_{np}(t)$ – частное решение неоднородного дифференциального уравнения (принужденная составляющая);

$x_{св}(t)$ – общее решение соответствующего однородного дифференциального уравнения (свободная составляющая).

В качестве частного решения используют значение $x_{np}(t)$, получаемое из расчета рассматриваемой цепи в установившемся режиме *после коммутации*.

Общее решение $x_{св}(t)$ определяется *корнями характеристического уравнения* (p), которые могут иметь вид:

– корни действительные, разные ($p_1 \neq p_2$):

$$x_{ce}(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t},$$

где A_1, A_2 – постоянные интегрирования;

– корни действительные, равные ($p_1 = p_2 = p$):

$$x_{ce}(t) = (A_1 + A_2 t) e^{pt};$$

– корни комплексно-сопряженные ($p_{1,2} = -\alpha \pm j\omega_0$):

$$x_{ce}(t) = A e^{-\alpha t} \sin(\omega_0 t + \nu).$$

Необходимо отметить, что в линейных электрических цепях действительные корни характеристического уравнения и действительные части комплексно-сопряженных корней должны быть *отрицательными*.

Для получения характеристического уравнения достаточно составить выражение для входного сопротивления относительно любой ветви цепи (*кроме ветви с источником тока*) после коммутации в комплексной форме $Z_{ex}(j\omega)$, сделать замену $j\omega$ на p и приравнять это выражение к нулю либо приравнять к нулю матрицу контурных сопротивлений или матрицу узловых проводимостей цепи. При определении $Z_{ex}(p)$ все источники ЭДС в схеме закорачивают, а ветви с источниками тока размыкают.

Для определения A_1 и A_2 либо A и ν (в случае комплексных корней характеристического уравнения) необходимо вычислить значение искомой величины $x(0_+)$ и ее производной $\frac{dx(t)}{dt}$ в момент времени $t = 0_+$, т. е. непосредственно после коммутации, применяя законы Кирхгофа и *законы коммутации*.

Первый закон коммутации: ток через индуктивный элемент непосредственно до коммутации $i_L(0_-)$ равен току через этот элемент непосредственно после коммутации $i_L(0_+)$:

$$i_L(0_-) = i_L(0_+).$$

Второй закон коммутации: напряжение на емкостном элементе (конденсаторе) непосредственно до коммутации $u_C(0_-)$ равно напряжению на этом элементе непосредственно после коммутации $u_C(0_+)$:

$$u_C(0_-) = u_C(0_+).$$

Неизменяющиеся токи в ветвях с индуктивностью $i_L(0_-)$ и напряжения на конденсаторах $u_C(0_-)$ определяются путем расчета электрической цепи

до коммутации.

Применение законов коммутации позволяет определить *независимые начальные значения*, т. е. $i_L(0_+)$ и $u_C(0_+)$.

Чтобы определить *зависимые начальные значения* $u_R(0_+)$, $i_R(0_+)$, $i_C(0_+)$ и их производные, необходимо для режима после коммутации составить систему уравнений согласно законам Кирхгофа в дифференциальной форме.

В полученную систему уравнений подставляют независимые начальные значения $i_L(0_+)$, $u_C(0_+)$ и, решая ее, определяют зависимые начальные значения.

Операторный метод расчета. Сущность операторного метода заключается в том, что функция $x(t)$ действительной переменной, называемая оригиналом, заменяется функцией $X(p)$ комплексного переменного $p = s + j\omega$, называемой изображением. Для перехода от оригинала к изображению $x(t) \rightarrow X(p)$ применяется прямое преобразование Лапласа

$$X(p) = \int_0^{\infty} x(t) e^{-pt} dt.$$

Напряжение *постоянного* (не изменяющегося во времени) источника, напряжение на индуктивности и конденсаторе можно записать в виде изображений следующим образом:

$$U(p) = \frac{U}{p}; U_L(p) = Lp \cdot I(p) - Li_L(0); U_C(p) = \frac{I(p)}{pC} + \frac{u_C(0)}{p},$$

где $i_L(0)$ и $u_C(0)$ – независимые начальные значения.

Далее составляют эквивалентную *операторную схему замещения* электрической цепи *после коммутации*.

Эквивалентные операторные схемы отдельных элементов представлены на рисунке 5.1.

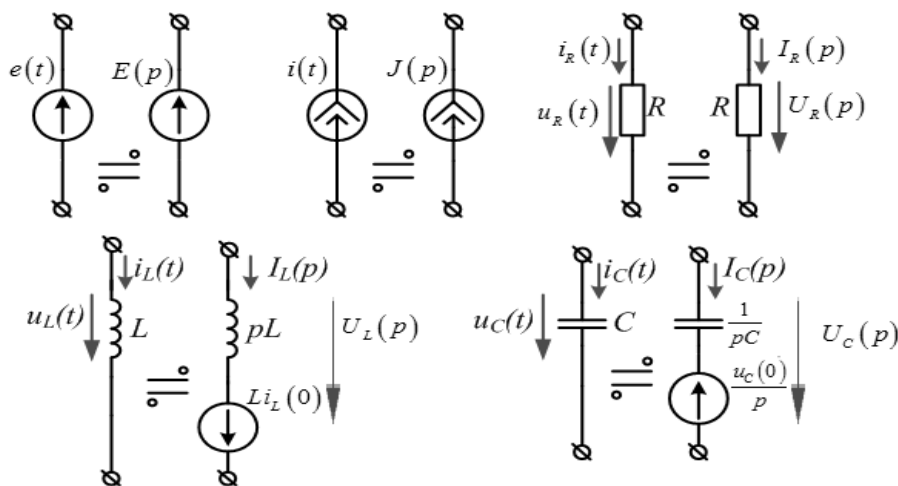


Рисунок 5.1 – Эквивалентные операторные схемы элементов цепи

Расчет изображений искомых токов и напряжений по операторной схеме выполняется на основе законов Ома и Кирхгофа или базирующихся на них методов (метод контурных токов, узловых потенциалов, эквивалентного генератора и др.).

Изображение искомой величины получается в виде отношения двух алгебраических полиномов – рациональной дроби:

$$X(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)}.$$

Для решения обратной задачи (определение функции-оригинала по ее изображению) можно применить специальные таблицы или же *формулу разложения*.

Для схем, содержащих два независимых накопителя энергии, в зависимости от вида корней уравнения $F_2(p) = 0$, формула разложения имеет следующие формы записи:

– корни уравнения действительные, разные ($p_1 \neq p_2$)

$$x(t) = \frac{F_1(p_1)}{F_2'(p_1)} e^{p_1 t} + \frac{F_1(p_2)}{F_2'(p_2)} e^{p_2 t},$$

где $F_2'(p_1) = \left. \frac{dF_2(p)}{dp} \right|_{p=p_1};$

$$F_2'(p_2) = \left. \frac{dF_2(p)}{dp} \right|_{p=p_2};$$

– в составе знаменателя имеется множитель p ($F_2(p) = pF_3(p) = 0$), т. е. знаменатель имеет один нулевой корень:

$$x(t) = \frac{F_1(0)}{F_3(0)} + \frac{F_1(p_1)}{p_1 F_3'(p_1)} e^{p_1 t} + \frac{F_1(p_2)}{p_2 F_3'(p_2)} e^{p_2 t};$$

– корни уравнения комплексно-сопряженные $p_{1,2} = -\alpha \pm j\omega_0$:

$$x(t) = 2 \operatorname{Re} \left[\frac{F_1(p_1)}{F_2'(p_1)} e^{p_1 t} \right] \text{ или } x(t) = \frac{F_1(0)}{F_3(0)} + 2 \operatorname{Re} \left[\frac{F_1(p_1)}{p_1 F_3'(p_1)} e^{p_1 t} \right];$$

– корни уравнения действительные, равные ($p_1 = p_2 = p$):

$$x(t) = \left[\frac{d}{dp} F_1(p) e^{pt} \right]_{p=p_1=p_2} \text{ или } x(t) = \frac{F_1(0)}{F_3(0)} + \left[\frac{d}{dp} F_1(p) e^{pt} \right]_{p=p_1=p_2}.$$

Обратное преобразование Лапласа можно также выполнить при помощи встроенных численных алгоритмов различных математических пакетов.

5.2 Примеры решения задач

Электрическая цепь, представленная на рисунке 5.2, а, была подключена к источнику ЭДС $E = 50$ В. Исследовать переходный процесс $i_3(t)$, применяя классический метод. Построить график.

Примечание – Конденсатор считать незаряженным.

Параметры элементов: $R_1 = 2$ Ом, $R_2 = 10$ Ом, $R_3 = 4$ Ом, $C = 20$ мкФ.

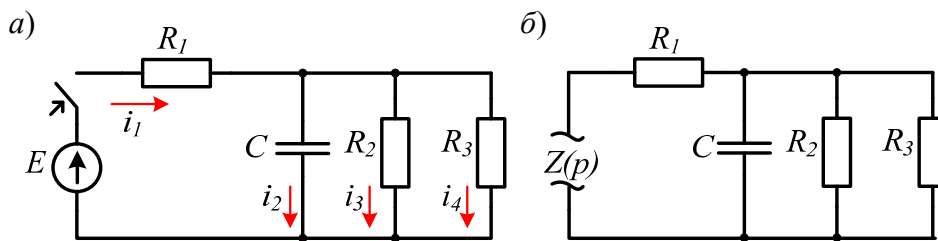


Рисунок 5.2 – Схемы электрических цепей

Решение

Определим значение искомого тока в установившемся режиме (принужденную составляющую).

Вычислим сопротивление параллельного участка

$$R' = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3} = \frac{10 \cdot 4}{10 + 4} = \frac{40}{14} = 2,86 \text{ Ом.}$$

Тогда в ветви с источником ЭДС

$$i_{1np} = \frac{E}{R_1 + R'} = \frac{50}{2 + 2,86} = 10,3 \text{ А.}$$

Значение i_{3np} определим, применяя закон Ома:

$$i_{3np} = \frac{u_{abnp}}{R_2} = \frac{29,5}{10} = 2,95 \text{ А,}$$

$$u_{abnp} = i_{1np} \cdot R' = 10,3 \cdot 2,86 = 29,5 \text{ В.}$$

Для того чтобы получить характеристическое уравнение, сделаем разрыв цепи в произвольном месте и запишем выражение для комплексного входного

сопротивления (импеданса) относительно точек разрыва. В полученном выражении следует всюду заменить $i\omega$ на p .

Для схемы, представленной на рисунке 5.2, б, получим

$$Z(p) = R_1 + \frac{R' \frac{1}{pC}}{R' + \frac{1}{pC}} = 2 + \frac{2,86 \frac{10^6}{20p}}{2,86 + \frac{10^6}{20p}} = \frac{286p + 1,2 \cdot 10^7}{143p + 2,5 \cdot 10^6}.$$

Полученное выражение необходимо приравнять к нулю и затем найти корни уравнения. Очевидно, что достаточно найти корни числителя.

Приравнивая числитель к нулю, получаем корень характеристического уравнения:

$$286p + 1,2 \cdot 10^7 = 0 \Rightarrow p = -42482 \text{ с}^{-1}.$$

Имеем единственный вещественный корень характеристического уравнения. Ожидаемое решение запишем в виде суммы принужденной и свободной составляющей:

$$i_3(t) = i_{3np}(t) + i_{3св}(t) = 2,95 + A \cdot e^{-42482t}.$$

5.3 Задачи для самостоятельного решения

Решить задачи, предложенные преподавателем.

6 Практическое занятие № 6. Расчет нелинейных цепей при постоянных воздействиях

Цель занятия: изучить графический способ расчета нелинейных цепей при постоянных воздействиях.

6.1 Примеры решения задач

Применение графического метода к расчету нелинейных электрических цепей рассмотрим на следующих задачах.

1 Для схемы (рисунок 6.1, а) дано: $R = 20$ Ом. Характеристика нелинейного элемента представлена на рисунке 6.1, б. Определить напряжение U , при котором $U_R = U_{НЭ}$.

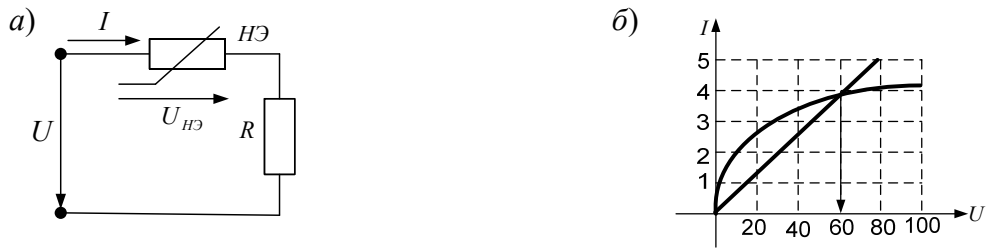


Рисунок 6.1 – Исходные данные

Решение

1 Построим характеристику $U_R(I) = I \cdot R$.

2 В точке пересечения вольт-амперных характеристик (ВАХ) линейного и нелинейного элементов напряжения на этих элементах равны (элементы соединены последовательно и ток один и тот же): $U_R = U_{HЭ} = 60$ В.

3 В соответствии с законом Кирхгофа для схемы получим: $U = U_R + U_{HЭ} = 120$ В.

2 Для схемы (рисунок 6.2, а): $E_2 = -20$ В, $U = 50$ В, вольт-амперные характеристики нелинейных элементов представлены на рисунке 6.2, б. Определить все токи.

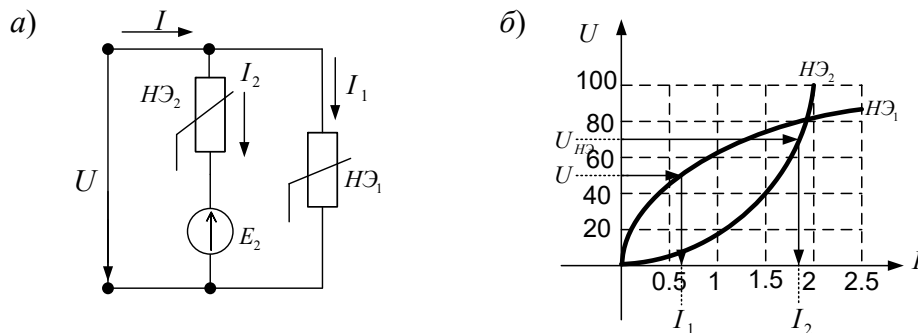


Рисунок 6.2 – Исходные данные

Решение

1 Так как напряжение U является и напряжением на первом нелинейном элементе, то по ВАХ этого элемента определяем ток в нем: $I_1 \cong 0,6$ А.

2 Для определения тока во второй ветви необходимо найти напряжение на втором нелинейном элементе. В соответствии с уравнением $-E_2 = U_{HЭ2} - U$ получим $U_{HЭ2} = U - E_2 = 70$ В.

Следовательно, $I_2 \cong 1,8$ А.

3 Ток в неразветвленной части схемы равен: $I = I_1 + I_2 \cong 2,4$ А.

6.2 Задачи для самостоятельного решения

Решить задачи, предложенные преподавателем.

7 Практическое занятие № 7. Расчет нелинейных цепей при синусоидальных воздействиях

Цель занятия: освоить методику расчета нелинейных цепей переменного синусоидального тока.

7.1 Примеры решения задач

Электрическая цепь (рисунок 7.1, а) подключена к источнику синусоидального тока $i(t) = 0,1 \sin 10^4 t$ А, содержит резистор с сопротивлением $R = 100$ Ом, линейный конденсатор ($X_C = 100$ Ом) и катушку индуктивности с нелинейной вебер-амперной характеристикой, представленной на рисунке 7.1, б ($\psi_m = 0,853 \cdot 10^{-3}$ Вб). Рассчитать и построить зависимости u_C, i_R, u_{cb}, u_{ab} от ωt .

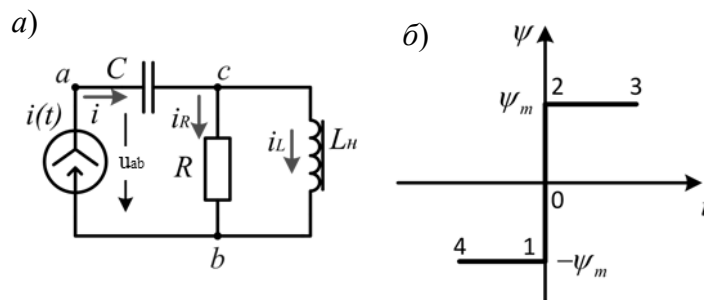


Рисунок 7.1 – Схема электрической цепи и характеристика нелинейного элемента

Составим систему уравнений согласно правилам Кирхгофа:

$$\begin{cases} i = i_R + i_L; \\ u_{ab} = u_{ac} + u_{cb}; \\ u_{cb} = i_R R = \frac{d\psi}{dt}. \end{cases}$$

К началу положительного полупериода источника синусоидального $i(t)$, в интервале времени от $\omega t = 0$ до ωt_1 : $\psi = -\psi_m$, а ток $i_L = 0$ (согласно характеристике на рисунке 6.2, б). Этому интервалу соответствует изменение потокоцепления от $-\psi_m$ до ψ_m , при этом изображающая точка перемещается от 1 к 2. Из первого уравнения системы следует $i_R = i = 0,1 \sin 10^4 t$ А.

Перемагничивание катушки индуктивности происходит под действием напряжения:

$$u_{cb} = R \cdot i_R = \frac{d\psi}{dt} = 100 \cdot 0,1 \sin 10^4 t = 10 \sin 10^4 t.$$

Откуда

$$d\psi = u_{cb} dt = 10 \sin 10^4 t \cdot dt;$$

$$\psi = \int u_{cb} \cdot dt = -\frac{10}{10^4} \cos 10^4 t + A = -10^{-3} \cos 10^4 t + A,$$

где A – постоянная интегрирования.

Рассчитаем напряжение на конденсаторе u_{ac} :

$$\begin{aligned} u_{ac} = u_C &= \frac{1}{C} \int i(t) \cdot dt = \frac{1}{C} \int 0,1 \sin 10^4 t \cdot dt = -\frac{0,1}{10^4 C} \cdot \cos 10^4 t = \\ &= -0,1 \cdot 100 \cos 10^4 t = -10 \cos 10^4 t. \end{aligned}$$

Постоянную интегрирования A и значение ωt_1 (время окончания перемагничивания) определим из уравнения $\psi(t)$.

В момент времени $\omega t = 0$ $\psi = -\psi_m$. Тогда $-\psi_m = 10^{-3} + A$, откуда находим $A = -\psi_m + 10^{-3}$.

Получаем

$$\psi = -10^{-3} \cos 10^4 t - \psi_m + 10^{-3}.$$

Чтобы определить значение ωt_1 , воспользуемся полученным уравнением, при условии, что в момент времени ωt_1 $\psi = \psi_m$. Тогда

$$\psi_m = -10^{-3} \cos 10^4 t_1 - \psi_m + 10^{-3};$$

$$2\psi_m = 10^{-3} (1 - \cos 10^4 t_1); \quad \cos 10^4 t_1 = \cos \omega t_1 = 1 - \frac{2\psi_m}{10^{-3}} = -0,706;$$

$$\omega t_1 = 135^\circ.$$

Во втором интервале времени от ωt_1 до π , когда перемагничивание завершено (изображающая точка на рисунке 7.1, б перемещается от 2 к 3), потокосцепление ψ остается постоянным и равным $+\psi_m$. В этом интервале напряже-

ние $u_{cb} = \frac{d\psi}{dt} = 0$, ток через резистор i_R в таком случае равен 0, следовательно, $i_L = i = 0,1 \sin 10^4 t$ А. Напряжение $u_{ab} = u_{ac} + u_{cb} = u_{ac} + 0 = u_{ac}$.

Расчет электрической цепи при отрицательном полупериоде источника синусоидального тока $i(t)$ выполняется аналогично. Периодические процессы повторяются через промежуток времени T , поэтому достаточно произвести расчет процессов в течение одного периода, принимая во внимание, что значения токов в катушках и напряжений на конденсаторах одинаковы в начале и в конце периода.

7.2 Задачи для самостоятельной работы

Решить задачи, предложенные преподавателем.

Список литературы

- 1 **Башарин, С. А.** Теоретические основы электротехники : учебник / С. А. Башарин, В. В. Федоров. – 5-е изд., перераб. и доп. – Москва: Академия, 2013. – 384 с.
- 2 Теоретические основы электротехники. Сборник задач : учебное пособие для бакалавров / Под ред. Л. А. Бессонова. – 5-е изд., испр. и доп. – Москва : Юрайт, 2015. – 528 с.
- 3 **Лоторейчук, Е. А.** Теоретические основы электротехники : учебник / Е. А. Лоторейчук. – Москва: ФОРУМ ; ИНФРА-М, 2016. – 320 с. : ил.