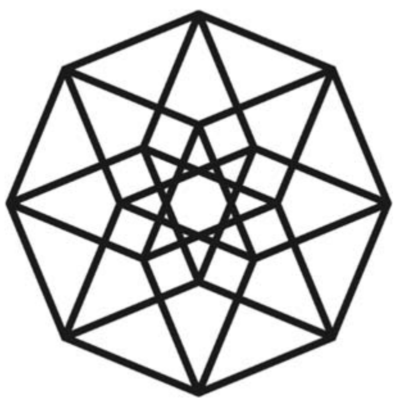
МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Высшая математика»

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ АЛГЕБРЫ

Методические рекомендации к лабораторным работам для студентов направления подготовки 01.03.04 «Прикладная математика» дневной формы обучения



Могилев 2021

УДК 519.6
ББК 22.19
В92

Рекомендовано к изданию
учебно-методическим отделом
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Высшая математика» «29» апреля 2021 г., протокол № 8

Составители: доц. Д. В. Роголев;
ст. преподаватель А. Н. Бондарев

Рецензент канд. физ.-мат. наук, доц. И. И. Маковецкий

Методические рекомендации содержат краткую информацию о применяемых численных методах алгебры, рекомендации по выполнению и оформлению отчётов по лабораторным работам, варианты заданий. Для выполнения работ рекомендуется использовать язык программирования Python и систему математических вычислений GNU Octave.

Учебно-методическое издание

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ АЛГЕБРЫ

Ответственный за выпуск	В. Г. Замураев
Корректор	Т. А. Рыжикова
Компьютерная верстка	Н. П. Полевничая

Подписано в печать . Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Печать трафаретная. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 56 экз. Заказ № .

Издатель и полиграфическое исполнение:
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования
«Белорусско-Российский университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/156 от 07.03.2019.
Пр-т Мира, 43, 212022, г. Могилев.

Содержание

Требования к составлению отчётов

Отчёты к лабораторным работам оформляются с использованием текстовых редакторов (LibreOffice и т. п.) и должны включать следующее.

1 Название и цель работы.

2 Постановка задачи для своего варианта.

3 Выведенные вспомогательные формулы и/или функции.

4 Таблицы с результатами расчётов.

5 Точное решение (если возможно его нахождение).

6 Анализ полученных результатов и выводы.

1 Лабораторная работа № 1. Вычисление погрешностей

Цель работы: получение навыков расчёта погрешностей.

1 Абсолютные и относительные погрешности. Если x – точное значение некоторой величины, x^* – её приближённое значение, то *абсолютной погрешностью* величины x^* называют величину

$$\Delta x^* \geq |x^* - x|.$$

Относительной погрешностью приближённого значения называют отношение абсолютной погрешности к абсолютному значению приближённой величины:

$$\delta x^* = \frac{\Delta x^*}{|x^*|}, \quad \left(|x^*| \neq 0\right).$$

Пусть задана дифференцируемая функция $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ и пусть Δx_i^* и δx_i^* – абсолютные и относительные погрешности аргументов. Тогда абсолютная и относительная погрешности функции

$$\Delta y^* = |y^* - y| \leq \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)}{\partial x_i} \right| \Delta x_i^* \text{ (формула Лагранжа)}; \quad (1.1)$$

$$\delta y^* = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{x_i^*}{y^*} \frac{\partial f(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)}{\partial x_i} \right| \delta x_i^*. \quad (1.2)$$

2 Постановка задачи 1. Найти относительную погрешность вычисления функции $y = \dfrac{x_2}{x_2 - x_1}$, если $x_1^* = 1{,}0126$, $\Delta x_1^* = 0{,}0003$, $x_2^* = 0{,}3185$, $\Delta x_2^* = 0{,}0005$.

3 Решение задачи 1. Абсолютные погрешности аргументов $\Delta x_1^* = 0{,}0003$, $\Delta x_2^* = 0{,}0005$. Относительные погрешности

$$\delta x_1^* = \frac{\Delta x_1^*}{\left|x_1^*\right|} = \frac{0,0003}{1,0126} = 0,0003 = 0,03\,\%;\ \delta x_2^* = \frac{\Delta x_2^*}{\left|x_2^*\right|} = \frac{0,0005}{0,3185} = 0,0016 = 0,16\,\%.$$

Согласно (1.2) $\delta y^* = \sum\limits_{i=1}^{2}\left|\frac{x_i^*}{y^*}\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|\delta x_i^*$ или

$$\delta\left(y^*\right) = \left|\frac{x_1^*}{x_2^* - x_1^*}\right|\delta x_1^* + \left|\frac{x_1^*}{x_2^* - x_1^*}\right|\delta x_2^* =$$

$$= \left|\frac{x_1^*}{x_2^* - x_1^*}\right|(\delta x_1^* + \delta x_2^*) = \left|\frac{1,0126}{0,3185 - 1,0126}\right|(0,003 + 0,005) = 0,012.$$

Ответ: $\delta\left(y^*\right) = 0,012$.

4 Оценка погрешности функции по формуле Тейлора. Пусть задана функция $f(x)$ и требуется приближённо вычислить её значение в точке x_1. Для этого воспользуемся формулой Тейлора

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_n(x), \tag{1.3}$$

где x_0 – некоторая произвольная точка, в которой вычисляются функция и её производные,

$R_n(x)$ – остаточный член формулы Тейлора,

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k. \tag{1.4}$$

Приближённо можно считать, что $f(x_1) \approx S_n = \sum\limits_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x_1 - x_0)^k$.

При этом погрешность этого приближения определим как

$$\Delta(x_1) = \left|f(x_1) - \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x_1 - x_0)^k\right| = \left|R_n(x_1)\right|. \tag{1.5}$$

Остаточный член $R_n(x_1)$ удобно представить в форме Лагранжа

$$R_n(x_1) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x_1 - x_0)^{n+1}\ , \tag{1.6}$$

где c – некоторая точка интервала $[x_0; x_1]$. Тогда погрешность вычисления значения функции в точке x_1 можно оценить модулем первого слагаемого остаточного члена (в формуле (1.6) полагаем $c = x_0$):

$$\Delta(x_1) \approx \Delta_n = \left| \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x_1 - x_0)^{n+1} \right| . \tag{1.7}$$

5 Постановка задачи 2. Используя формулу Тейлора при $n = 1,3,5$, вычислить приближённо $e^{1,5}$ и оценить погрешность.

6 Решение задачи 2. Выполним вычисление по формуле Тейлора, разложив функцию в точке $x_0 = 1$:

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{e^1}{k!}(x-1)^k + \frac{e^c}{(n+1)!}(x-1)^{n+1} \text{ , } c \in [0;1,5].$$

Приближённо $e^{1,5} \approx S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{e^1}{k!}(0,5)^k$, а оценка погрешности $\Delta_n = \dfrac{e^1 \cdot (0,5)^{n+1}}{(n+1)}$.

Получим:

– при $n = 1$: $S_1 = e^1 + 0,5e^1 = 4,077423,$

$\Delta_1 = 0,5^2 e^1 / 2 = 0,339785, \quad \overline{\Delta} = 0,404266;$

– при $n = 3$: $S_3 = e^1\left(1 + 0,5 + 0,5^2/2 + 0,5^3/6\right) = 4,473839,$

$\Delta_3 = 0,5^4 e^1 / 24 = 0,007079, \quad \overline{\Delta} = 0,007850;$

– при $n = 5$: $S_5 = e^1\left(1 + 0,5 + \dfrac{0,5^2}{2} + \dfrac{0,5^3}{6} + \dfrac{0,5^4}{24} + \dfrac{0,5^5}{120}\right) = 4,481626,$

$\Delta = 0,5^6 e^1 / 720 = 0,000059, \quad \overline{\Delta} = 0,000063.$

Здесь $\overline{\Delta}$ – погрешность, вычисленная по формуле (1.5).

Ответ: $S_1 = 4,077423, \quad \Delta_1 = 0,339785, \quad \overline{\Delta} = 0,404266$;

$S_3 = 4,473839, \quad \Delta_3 = 0,007079, \quad \overline{\Delta} = 0,007850$;

$S_5 = 4,481626, \quad \Delta = 0,000059, \quad \overline{\Delta} = 0,000063.$

Контрольные вопросы

1 Что называется абсолютной погрешностью числа?
2 Что называется относительной погрешностью числа?
3 Как находится абсолютная погрешность функции?
4 Как находится относительная погрешность функции?
5 Как оценить погрешность функции с помощью формулы Тейлора?

Варианты заданий к лабораторной работе № 1.

Задача 1. Найти относительную погрешность вычисления функции $f(x_1, x_2)$ (таблица 1.1).

Таблица 1.1 – Варианты заданий к задаче 1

Номер варианта	$f(x_1,x_2)$	x_1^*	Δx_1^*	x_2^*	Δx_2^*
1	$x_1/\left(x_2^2+x_1^2\right)$	1,321	0,002	1,912	0,003
2	$x_2/\left(x_2^2-x_1^2\right)$	2,321	0,003	1,622	0,002
3	x_1^2+1/x_2^2	2,001	0,002	0,902	0,003
4	x_1-1/x_2	1,561	0,006	1,237	0,004
5	$x_1x_2/\left(x_2+x_1\right)$	3,345	0,003	4,567	0,005
6	$\left(x_2-x_1\right)/x_2x_1$	2,321	0,002	1,912	0,003
7	$x_1x_2^2+x_2x_1^2$	1,121	0,005	2,115	0,002
8	$\left(x_2^2-x_1^2\right)/\left(x_2^2+x_1^2\right)$	2,321	0,002	1,912	0,003
9	$\left(x_2-x_1\right)/\left(x_2+x_1\right)$	5,132	0,004	3,945	0,001
10	$\left(x_2+3x_1\right)/\left(2x_2+x_1\right)$	7,164	0,003	1,876	0,02
11	$3x_1-\left(x_2^2-x_1^2\right)/\left(x_2+x_1\right)$	1,345	0,009	0,579	0,001
12	$5x_1^3+1/x_2$	1,14	0,02	7,34	0,05
13	$x_1x_2^3-x_2x_1^3$	8,01	0,07	3,89	0,01
14	$x_1^2x_2^3+x_2^2x_1^3$	5,21	0,06	1,89	0,02
15	$(2x_1+7x_2)^2$	4,005	0,007	2,543	0,005
16	$(3x_1-x_2)^3$	4,897	0,001	7,986	0,004
17	$(x_1-1/x_2)^2$	0,8	0,01	2,21	0,04
18	$2x_1^2-1/x_2$	1,654	0,001	0,345	0,003
19	$\left(4x_2-5x_1\right)/\left(3x_2+x_1\right)$	2,321	0,007	1,276	0,005
20	$(x_1x_2^2-1)/(x_2x_1^2+1)$	2,98	0,06	1,11	0,03
21	$\left(x_2^3-x_1^3\right)/\left(x_2^3+x_1^3\right)$	2,24	0,02	3,11	0,01
22	$x_1x_2/\left(x_2^2+x_1^2\right)$	3,45	1,04	1,22	0,01
23	$5/x_1-x_2^2$	0,89	0,02	2,32	0,04
24	$1/\left(x_1x_2\right)+x_1^2$	1,239	0,004	0,764	0,002
25	$1/x_1-x_2^2x_1$	1,567	0,007	2,003	0,001
26	$1/x_1+x_1/x_2$	0,673	0,005	1,991	0,01
27	$(3x_1+2x_2)^3$	4,01	0,03	2,32	0,05
28	$(2x_1+3x_2)/(x_1-4x_2)$	0,84	0,05	0,45	0,03
29	$1/\left(x_1+x_2\right)+1/\left(x_2-3x_1\right)$	2,789	0,006	1,543	0,002
30	$(x_1-x_2)^4$	1,23	0,02	3,01	0,04

Задача 2. Используя формулу Тейлора при $n=1,3,5$, вычислить приближённо значение $f(x_1)$ (таблица 1.2) и оценить погрешность.

Таблица 1.2 – Варианты заданий к задаче 2

Вариант	$f(x_1)$	Вариант	$f(x_1)$	Вариант	$f(x_1)$
1	$\sqrt[3]{30}$	11	$\sqrt{68}$	21	$\sin 200°$
2	$\sqrt[4]{18}$	12	$\sin 100^0$	22	$\sqrt{52}$
3	$\sin 50°$	13	$\cos 80^0$	23	$\mathrm{tg}\, 50°$
4	$\cos 25°$	14	$\mathrm{arcctg}\, 0,5$	24	$\ln 4,5$
5	$\mathrm{arctg}\, 1,5$	15	$\sqrt[5]{29}$	25	$\ln 0,7$
6	$\arccos 0,8$	16	$\ln 3$	26	$5^{-1,3}$
7	$\ln 1,5$	17	$4^{-2,3}$	27	$\mathrm{sh}\, 1,7$
8	$e^{4,5}$	18	$\cos^2 15°$	28	$\mathrm{ch}\, 2$
9	$2^{1,4}$	19	$\cos^2 35°$	29	$e^{-3,3}$
10	$e^{-1,3}$	20	$\arcsin 0,4$	30	$\sqrt[3]{120}$

2 Лабораторная работа № 2. Решение системы линейных алгебраических уравнений методом Гаусса

Цель работы: изучение метода Гаусса для решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ).

1 Теоретические сведения. Методом Гаусса называют точный метод решения невырожденной системы линейных уравнений, состоящий в том, что последовательным исключением неизвестных систему

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \ , \ i = \overline{1,n} \ , \tag{2.1}$$

приводят к эквивалентной системе с треугольной матрицей

$$\begin{cases} x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1n}x_n = d_1; \\ \qquad\quad x_2 + \ldots + c_{2n}x_n = d_2; \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \ldots \\ \qquad\qquad\qquad\quad x_n = d_n, \end{cases} \tag{2.2}$$

решение которой находят по рекуррентным формулам

$$x_n = d_n \ , \ x_i = d_i - \sum_{k=i+1}^{n} c_{ik} x_k \ , \ i = n-1, n-2, \ldots, 1 \ . \tag{2.3}$$

Таким образом, вычисления по методу Гаусса распадаются на два этапа. На первом этапе, называемом *прямым ходом* метода, исходную систему (2.1) при помощи элементарных преобразований преобразуют к треугольному виду (2.2).

На втором этапе, который называют *обратным ходом*, решают треугольную систему (2.2), эквивалентную исходной.

Отметим, что к элементарным преобразованиям системы относятся:

– перестановка любых двух уравнений системы;

– умножение любого уравнения системы на отличное от нуля число;

– вычёркивание уравнения, все коэффициенты которого равны нулю;

– прибавление к одному уравнению системы любого другого, умноженного на отличное от нуля число.

Каждому элементарному преобразованию системы (2.1) соответствует аналогичное элементарное преобразование над строками расширенной матрицы $(A|B)$ этой системы. Поэтому на практике элементарным преобразованиям подвергают не систему, а её расширенную матрицу.

2 Постановка задачи. Методом Гаусса решить с точностью $\varepsilon = 10^{-2}$ СЛАУ

$$\begin{cases} 3,21x_1 - 4,15x_2 + 2,13x_3 = 5,06; \\ 7,09x_1 + 1,17x_2 - 2,23x_3 = 4,75; \\ 0,43x_1 - 1,4x_2 - 0,62x_3 = -1,05. \end{cases} \tag{2.4}$$

3 Решение СЛАУ методом Гаусса. Выпишем расширенную матрицу системы (2.4):

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 3,21 & -4,15 & 2,13 & 5,06 \\ 7,09 & 1,17 & -2,23 & 4,75 \\ 0,43 & -1,4 & -0,62 & -1,05 \end{array}\right).$$

Совершая над строками расширенной матрицы $(A|B)$ элементарные преобразования, приведём её к специальному виду:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 3,21 & -4,15 & 2,13 & 5,06 \\ 7,09 & 1,17 & -2,23 & 4,75 \\ 0,43 & -1,4 & -0,62 & -1,05 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{l} \text{разделим первую строку} \\ \text{на } 3,21 \end{array}\right] =$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1,2928 & 0,6635 & 1,5763 \\ 7,09 & 1,17 & -2,23 & 4,75 \\ 0,43 & -1,4 & -0,62 & -1,05 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{l} \text{умножим первую строку на } -7,09 \\ \text{и прибавим ко второй строке;} \\ \text{умножим первую строку на } -0,43 \\ \text{и прибавим к третьей строке} \end{array}\right] =$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1,2928 & 0,6635 & 1,5763 \\ 0 & 10,3359 & -6,9342 & -6,4259 \\ 0 & -0,8441 & -0,9053 & -1,7278 \end{array}\right) = \left[\begin{array}{l} \text{разделим вторую строку} \\ \text{на } 10,3359 \end{array}\right] =$$

$$=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1,2928 & 0,6635 & 1,5763 \\ 0 & 1 & -0,6709 & -0,6217 \\ 0 & -0,8441 & -0,9053 & -1,7278 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{l}\text{умножим вторую строку} \\ \text{на } 0,8441 \text{ и прибавим к} \\ \text{третьей строке}\end{array}\right]=$$

$$=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1,2928 & 0,6635 & 1,5763 \\ 0 & 1 & -0,6709 & -0,6217 \\ 0 & 0 & -1,4716 & -2,2526 \end{array}\right)=\left[\begin{array}{l}\text{разделим третью строку} \\ \text{на } -1,4716\end{array}\right]=$$

$$=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1,2928 & 0,6635 & 1,5763 \\ 0 & 1 & -0,6709 & -0,6217 \\ 0 & 0 & 1 & 1,5307 \end{array}\right).$$

По полученной матрице запишем систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1-1,2928x_2+0,6635x_3=1,5763; \\ \qquad\qquad x_2-0,6709x_3=-0,6217; \\ \qquad\qquad\qquad\qquad x_3=1,5307, \end{cases} \tag{2.5}$$

эквивалентную системе (2.4).

Закончен прямой ход метода Гаусса. Переходим к обратному ходу. Из (2.5) по формулам (2.3) получим

$$x_3=1,5307;\ \ x_2=-0,6217+0,6709x_3=-0,6217+0,6709\cdot 1,5307\approx 0,4052;$$
$$x_1=1,5763+1,2928x_2-0,6635x_3=$$
$$=1,5763+1,2928\cdot 0,4052-0,6635\cdot 1,5307\approx 1,0845.$$

Итак, $x_1\approx 1,0845$; $x_2\approx 0,4052$; $x_3\approx 1,5307$ – решение СЛАУ (2.4).

Выполним проверку полученного результата на компьютере и получим

$$x_1\approx 1,0845;\ \ x_2\approx 0,4003;\ \ x_3\approx 1,5320\,.$$

Ответ: $x_1\approx 1,08$; $x_2\approx 0,40$; $x_3\approx 1,53$.

Контрольные вопросы

1 К какому классу численных методов относится метод Гаусса?
2 В чём суть метода Гаусса?
3 Из каких этапов состоит метод Гаусса?
4 Что называется элементарными преобразованиями СЛАУ?

Варианты заданий к лабораторной работе № 2.

1 $\begin{cases} 0,14x_1+0,24x_2-0,84x_3=1,11; \\ 1,07x_1-0,83x_2+0,56x_3=0,48; \\ 0,64x_1+0,43x_2-0,38x_3=-0,83. \end{cases}$

2 $\begin{cases} 2,5x_1-3,12x_2-4,03x_3=-7,5; \\ 0,61x_1+0,71x_2-0,05x_3=0,44; \\ -1,03x_1-2,05x_2+0,87x_3=-1,16. \end{cases}$

3 $\begin{cases} 1,14x_1-2,15x_2-5,11x_3=-4,16; \\ -0,71x_1+0,81x_2-0,02x_3=-0,17; \\ 0,42x_1-1,13x_2+7,05x_3=6,15. \end{cases}$

4 $\begin{cases} 3,11x_1-1,66x_2-0,60x_3=-0,92; \\ -1,65x_1+1,51x_2-0,78x_3=2,57; \\ 0,60x_1+0,78x_2-1,87x_3=1,65. \end{cases}$

5 $\begin{cases} 0,71x_1+0,10x_2+0,12x_3=0,29; \\ 0,10x_1+0,34x_2-0,04x_3=0,32; \\ 0,12x_1-0,04x_2+0,10x_3=-0,10. \end{cases}$

6 $\begin{cases} 0,12x_1-0,43x_2+0,14x_3=-0,17; \\ -0,07x_1+0,34x_2+0,72x_3=0,62; \\ 1,18x_1-0,08x_2-0,25x_3=1,12. \end{cases}$

7 $\begin{cases} 0,66x_1-1,44x_2-0,18x_3=1,83; \\ 0,48x_1-0,24x_2+0,37x_3=-0,84; \\ 0,86x_1+0,43x_2+0,64x_3=0,64. \end{cases}$

8 $\begin{cases} 1,6x_1+0,12x_2+0,57x_3=0,18; \\ 0,38x_1+0,25x_2-0,54x_3=0,63; \\ 0,28x_1+0,46x_2-1,12x_3=0,88. \end{cases}$

9 $\begin{cases} 0,42x_1-1,13x_2+7,05x_3=6,15; \\ 1,14x_1-2,15x_2+5,11x_3=-4,16; \\ -0,71x_1+0,81x_2-0,02x_3=-0,17. \end{cases}$

10 $\begin{cases} 7,09x_1+1,17x_2-2,23x_3=-4,75; \\ 0,43x_1-1,4x_2-0,62x_3=-1,05; \\ 3,21x_1-4,25x_2+2,13x_3=5,06. \end{cases}$

11 $\begin{cases} 0,61x_1+0,71x_2-0,05x_3=0,44; \\ -1,03x_1-2,05x_2+0,87x_3=-1,16; \\ 2,5x_1-3,12x_2-5,03x_3=-7,5. \end{cases}$

12 $\begin{cases} 0,10x_1+0,12x_2-0,13x_3=0,10; \\ 0,12x_1+0,71x_2+0,15x_3=0,26; \\ -0,13x_1+0,15x_2+0,63x_3=0,38. \end{cases}$

13 $\begin{cases} 0,34x_1-0,04x_2+0,10x_3=0,33; \\ -0,04x_1+0,10x_2+0,12x_3=-0,05; \\ 0,10x_1+0,12x_2+0,71x_3=0,28. \end{cases}$

14 $\begin{cases} 1,17x_1+0,53x_2-0,84x_3=1,15; \\ 0,64x_1-0,29x_2-0,43x_3=0,15; \\ 0,32x_1+0,43x_2-0,93x_3=-0,48. \end{cases}$

15 $\begin{cases} 0,82x_1+0,43x_2-0,57x_3=0,48; \\ -0,35x_1+1,12x_2-0,48x_3=0,52; \\ 0,48x_1+0,23x_2+0,37x_3=1,44. \end{cases}$

16 $\begin{cases} 1,16x_1+1,3x_2-1,14x_3=0,43; \\ 0,83x_1-0,48x_2-2,44x_3=-0,15; \\ 2x_1-0,16x_2+1,3x_3=1,5. \end{cases}$

17 $\begin{cases} 0,10x_1-0,04x_2-0,13x_3=-0,15; \\ -0,04x_1+0,34x_2+0,05x_3=0,31; \\ -0,13x_1+0,05x_2+0,63x_3=0,37. \end{cases}$

18 $\begin{cases} 1,20x_1-0,20x_2+0,30x_3=-0,60; \\ -0,20x_1+1,60x_2-1,10x_3=0,30; \\ -0,30x_1+0,10x_2-1,5x_3=0,40. \end{cases}$

19 $\begin{cases} 0,20x_1+0,44x_2+0,81x_3=0,74; \\ 0,58x_1-0,29x_2+0,05x_3=0,02; \\ 1,05x_1+0,34x_2+0,10x_3=0,32. \end{cases}$

20 $\begin{cases} 0,40x_1+0,11x_2+0,18x_3=0,47; \\ 0,28x_1-0,59x_2+0,03x_3=0,01; \\ 0,02x_1+0,24x_2+0,10x_3=0,22. \end{cases}$

21 $\begin{cases} 1,2x_1 + 0,18x_2 - 0,42x_3 = 1,5; \\ 0,44x_1 + 0,36x_2 + 0,12x_3 = 1,16; \\ 0,36x_1 - 0,42x_2 - 0,22x_3 = 0,15. \end{cases}$

22 $\begin{cases} 1,60x_1 + 2,18x_2 - 0,72x_3 = 1,15; \\ 0,43x_1 - 0,16x_2 + 0,53x_3 = 0,83; \\ 0,34x_1 + 0,57x_2 - 0,83x_3 = -0,42. \end{cases}$

23 $\begin{cases} 1,06x_1 - 0,28x_2 + 0,84x_3 = 0,57; \\ 0,43x_1 + 0,62x_2 - 0,35x_3 = 0,66; \\ 0,37x_1 - 0,75x_2 - 0,64x_3 = -0,38. \end{cases}$

24 $\begin{cases} 0,63x_1 + 0,05x_2 + 0,15x_3 = 0,34; \\ 0,05x_1 + 0,34x_2 + 0,10x_3 = 0,32; \\ 0,15x_1 + 0,10x_2 + 0,11x_3 = 0,42. \end{cases}$

25 $\begin{cases} 0,30x_1 + 1,20x_2 - 0,20x_3 = -0,60; \\ -0,10x_1 - 0,20x_2 + 1,60x_3 = 0,30; \\ -1,50x_1 - 0,30x_2 + 2,10x_3 = 0,40. \end{cases}$

26 $\begin{cases} 6,36x_1 + 11,75x_2 + 10x_3 = -41,70; \\ 7,42x_1 + 19,03x_2 + 11,75x_3 = -49,49; \\ 5,77x_1 + 4,72x_2 + 6,36x_3 = -27,67. \end{cases}$

27 $\begin{cases} 0,18x_1 + 0,25x_2 - 0,44x_3 = 1,15; \\ 0,42x_1 - 0,35x_2 + 1,12x_3 = 0,86; \\ 1,14x_1 + 0,12x_2 - 0,83x_3 = 0,68. \end{cases}$

28 $\begin{cases} 0,64x_1 - 0,43x_2 + 0,57x_3 = 0,43; \\ 0,56x_1 + 0,12x_2 - 0,27x_3 = 0,88; \\ 0,63x_1 - 0,83x_2 + 0,43x_3 = -0,12. \end{cases}$

29 $\begin{cases} 0,8x_1 - 0,13x_2 + 0,63x_3 = 1,15; \\ 0,42x_1 + 0,57x_2 + 0,32x_3 = 0,84; \\ 0,54x_1 + 0,62x_2 - 0,32x_3 = 0,25. \end{cases}$

30 $\begin{cases} 0,75x_1 - 0,84x_2 + 1,11x_3 = 0,66; \\ 1,12x_1 - 0,14x_2 + 0,45x_3 = 0,83; \\ 0,32x_1 + 0,23x_2 - 0,48x_3 = 0,14. \end{cases}$

3 Лабораторная работа № 3. Решение системы линейных алгебраических уравнений методом *LU*-разложения

Цель работы: изучение метода LU-разложения для решения СЛАУ.

1 Теоретические сведения. Рассмотрим последовательность СЛАУ

$$Ax = b^{(i)}, \quad i = \overline{1, N} \tag{3.1}$$

и предположим, что векторы $b^{(i)}$ неизвестны заранее и поступают по одному, т. е. мы не можем свести (3.1) к матричному уравнению. При решении каждой такой СЛАУ методом Гаусса будет тратиться $O(n^3)$ операций, причём к матрице A будут применяться одни и те же преобразования G_k.

Поэтому удобнее, однажды проделав прямой ход (или его аналог), построить LU-разложение $A = LU$ и в дальнейшем вычислять x путём решения двух СЛАУ с треугольными матрицами:

$$LUx = b \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} Ly = b, \\ Ux = y. \end{cases} \tag{3.2}$$

Рассмотрим алгоритм построения LU-разложения в предположении, что главные миноры матрицы A отличны от нуля: $|A_k| \neq 0$, $k = \overline{1, n}$. По определению

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ L_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ L_{31} & L_{32} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{n1} & L_{n2} & L_{n3} & \cdots & 1 \end{pmatrix}}_{L} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \dots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix}}_{U} \tag{3.3}$$

При машинной реализации алгоритма матрицы L и U можно хранить на месте матрицы A:

$$A \to \tilde{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ L_{21} & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ L_{31} & L_{32} & u_{33} & \dots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{n1} & L_{n2} & L_{n3} & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix}}_{L-E+U}, \text{ т. е. } \tilde{a}_{ij} = \begin{cases} u_{ij}, & i \le j, \\ L_{ij}, & i > j. \end{cases}$$

Из (3.3) имеем

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} L_{ik} u_{kj} = \sum_{k=1}^{\min(i,j)} L_{ik} u_{kj}. \tag{3.4}$$

Выделяя последние слагаемые в суммах (3.4), получаем

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{ik} u_{kj} \text{ при } i \le j; \tag{3.5}$$

$$L_{ij} = \frac{1}{u_{jj}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} L_{ik} u_{kj} \right) \text{ при } i > j \tag{3.6}$$

или

$$\tilde{a}_{ij} = \begin{cases} a_{ij} - \sum\limits_{k=1}^{i-1} \tilde{a}_{ik} \tilde{a}_{kj} & \text{при } i \le j; \\ \dfrac{1}{\tilde{a}_{jj}} \left(a_{ij} - \sum\limits_{k=1}^{j-1} \tilde{a}_{ik} \tilde{a}_{kj} \right) & \text{при } i > j. \end{cases} \tag{3.7}$$

Таким образом, неизвестные элементы матриц L и U последовательно выражаются через a_{ij} и уже найденные L_{ik} и u_{kj}.

Выбор главного элемента.

По аналогии с методом Гаусса, этап алгоритма LU-разложения, определяемый циклом в строках $1 \dots j$ будем называть j-м шагом LU-разложения. Для того чтобы алгоритм был универсальным, необходимо реализовать выбор главного элемента $\tilde{a}_{jj} = u_{jj}$, на который происходит деление в строке j.

Рассмотрим матрицу $A^{(j)}$, которая получается из A после $(j-1)$-го шага разложения. К этому моменту столбцы с 1-го по $(j-1)$-й уже содержат часть матриц L и U, а оставшиеся столбцы являются столбцами исходной матрицы A. Очевидно, что строки с 1 по $(j-1)$-ю переставлять нельзя, иначе нарушится структура матрицы $\tilde{A}$.

Перестановка же строк с j по n эквивалентна преобразованию

$$PA = LU \quad \Rightarrow \quad A = P^{-1}LU\ ,\ b = P^{-1}b,$$

где P – матрица перестановки.

Итак, на j-м шаге алгоритма мы имеем право переставлять строки с номерами от j до n. Поэтому элементы u_{ij} для i от 1 до $j-1$, вычисляемые по формуле (3.5), можно найти сразу. После этого нужно осуществить перестановку строк, но проблема в том, что ведущий элемент u_{jj} ещё неизвестен, как неизвестны и возможные кандидаты на его место.

Поэтому перестановка должна быть выполнена таким образом, чтобы элемент $a_{jj}^{(j)} = u_{jj}$, вычисляемый по формуле

$$u_{jj} = a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} L_{jk} u_{kj}\ ? \tag{3.8}$$

был максимальным по модулю. Заметим, что элементы L_{ij} вычисляются по формуле (3.6), которая при $i = j$ отличается от (3.8) только множителем $1/u_{jj}$. Поэтому выбор главного элемента на j-м шаге LU-разложения осуществляется следующим образом.

1 Вычисляем кандидатов на роль ведущего элемента: для всех i от j до n вычисляем $a_{ij}^{(j)} = \tilde{a}_{ij}$ по второй формуле из (3.7), только без деления на $\tilde{a}_{jj}$.

2 Среди полученных значений $a_{ij}^{(j)}$ для $i \ge j$ выбираем максимальный по модулю $a_{i^*j}^{(j)}$.

3 Меняем местами j-ю и i^*-ю строки матрицы $A^{(j)}$.

4 Для всех i от $j+1$ до n делим $a_{ij}^{(j)}$ на $a_{jj}^{(j)}$.

Чтобы после получения LU-разложения корректно решить СЛАУ (3.2), необходимо предварительно переставить элементы вектора b в соответствии с перестановками, которые происходили в ходе разложения. Поэтому стандартная процедура должна возвращать не только матрицу $\tilde{A}$, но и матрицу перестановок P, а также $s = \pm 1$ – значение чётности числа перестановок.

Замечание – На практике можно сначала получить матрицу U, выполняя преобразования метода Гаусса с выбором главного элемента. Матрица P получается из единичной матрицы перестановкой тех же строк, что и при получении матрицы U. Затем находятся элементы матрицы L по формуле (3.6). После чего переставляем строки вектора правой части $b = P \cdot b$ и решаем первую систему из (3.2) сверху вниз по формулам

$$\begin{cases} y_1 = b_1, \\ y_i = b_i - \sum_{k=1}^{i-1} L_{ik} y_k, \quad i = \overline{2,n}. \end{cases} \tag{3.9}$$

Наконец, решаем вторую систему из (3.2) снизу вверх по формулам

$$\begin{cases} x_n = y_n / u_{nn}, \\ x_i = \dfrac{1}{u_{ii}} (y_i - \sum_{k=i+1}^{n} u_{ik} x_k), \quad i = \overline{n-1,1}. \end{cases} \tag{3.10}$$

2 Постановка задачи. Методом LU-разложения решить СЛАУ

$$\begin{cases} 3,21x_1 - 4,15x_2 + 2,13x_3 = 5,06; \\ 7,09x_1 + 1,17x_2 - 2,23x_3 = 4,75; \\ 0,43x_1 - 1,4x_2 - 0,62x_3 = -1,05. \end{cases} \tag{3.11}$$

3 Решение СЛАУ методом LU-разложения. Выпишем основную матрицу A системы (3.11) и матрицу перестановок $P = E$:

$$A = \begin{pmatrix} 3,21 & -4,15 & 2,13 \\ 7,09 & 1,17 & -2,23 \\ 0,43 & -1,4 & -0,62 \end{pmatrix}, \ P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В первом столбце максимальный по модулю элемент находится во второй строке. Переставим первую и вторую строки матриц A и P:

$$A = \begin{pmatrix} 7,09 & 1,17 & -2,23 \\ 3,21 & -4,15 & 2,13 \\ 0,43 & -1,4 & -0,62 \end{pmatrix}, \ P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Совершая над строками расширенной матрицы A элементарные преобразования, приведём её к верхней треугольной матрице U:

$$A=\begin{pmatrix}7{,}09 & 1{,}17 & -2{,}23\\ 3{,}21 & -4{,}15 & 2{,}13\\ 0{,}43 & -1{,}4 & -0{,}62\end{pmatrix}=\left[\begin{array}{l}\text{умножим первую строку на } -3{,}21/7{,}09\\ \text{и прибавим ко второй строке;}\\ \text{умножим первую строку на } -0{,}43/7{,}09\\ \text{и прибавим к третьей строке}\end{array}\right]=$$

$$=\begin{pmatrix}7{,}09 & 1{,}17 & -2{,}23\\ 0 & -4{,}68 & 3{,}14\\ 0 & -1{,}471 & -0{,}484\end{pmatrix}=\left[\begin{array}{l}\text{умножим вторую строку}\\ \text{на } -1{,}471/4{,}68 \text{ и прибавим к}\\ \text{третьей строке}\end{array}\right]=$$

$$=\begin{pmatrix}7{,}09 & 1{,}17 & -2{,}23\\ 0 & -4{,}68 & 3{,}14\\ 0 & 0 & -1{,}47\end{pmatrix}=U.$$

Теперь по формуле (3.6) вычисляем по столбцам:

$$L_{11}=\frac{a_{11}}{u_{11}}=\frac{7{,}09}{7{,}09}=1\ ,\ L_{21}=\frac{a_{21}}{u_{11}}=\frac{3{,}21}{7{,}09}\approx 0{,}453\ ,\ L_{31}=\frac{a_{31}}{u_{11}}=\frac{0{,}43}{7{,}09}\approx 0{,}061\ ;$$

$$L_{22}=\frac{1}{u_{22}}\cdot\left(a_{22}-L_{21}\cdot u_{12}\right)=\frac{1}{-4{,}68}\cdot\left(-4{,}15-0{,}453\cdot 1{,}17\right)=1\ ,$$

$$L_{32}=\frac{1}{u_{22}}\cdot\left(a_{32}-L_{31}\cdot u_{12}\right)=\frac{1}{-4{,}68}\cdot\left(-1{,}4-0{,}061\cdot 1{,}17\right)\approx 0{,}314\ ;$$

$$L_{33}=\frac{1}{u_{33}}\cdot\left(a_{33}-L_{31}\cdot u_{13}-L_{32}\cdot u_{23}\right)=\frac{1}{-1{,}47}\cdot\left(-0{,}62-0{,}061\cdot(-2{,}23)-0{,}314\cdot 3{,}14\right)=1\ .$$

Получили $L=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0{,}453 & 1 & 0\\ 0{,}061 & 0{,}314 & 1\end{pmatrix}$. Вектор $b=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5{,}06\\ 4{,}75\\ -1{,}05\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4{,}75\\ 5{,}06\\ -1{,}05\end{pmatrix}$.

Теперь по формулам (3.9) находим

$$y_1=b_1=4{,}75,\ y_2=b_2-L_{21}\cdot y_1=5{,}06-0{,}453\cdot 4{,}75\approx 2{,}909,$$

$$y_3=b_3-L_{31}\cdot y_1-L_{32}\cdot y_2=-1{,}05-0{,}061\cdot 4{,}75-0{,}314\cdot 2{,}909\approx -2{,}253.$$

Окончательно по формулам (3.10) получаем

$$x_3=\frac{y_3}{u_{33}}=\frac{-2{,}253}{-1{,}47}\approx 1{,}531,\ x_2=\frac{1}{u_{22}}\cdot\left(y_2-u_{23}\cdot x_3\right)=\frac{2{,}909-3{,}14\cdot 1{,}531}{-4{,}68}\approx 0{,}405,$$

$$x_1=\frac{1}{u_{11}}\cdot\left(y_1-u_{12}\cdot x_2-u_{13}\cdot x_3\right)=\frac{4{,}75-1{,}17\cdot 0{,}405-(-2{,}23)\cdot 1{,}531}{7{,}09}\approx 1{,}085.$$

Ответ: $x_1\approx 1{,}09;\quad x_2\approx 0{,}41;\quad x_3\approx 1{,}53$.

Контрольные вопросы

1 К какому классу численных методов относится метод LU-разложения?
2 В каких случаях удобно применять метод LU-разложения?
3 В чём заключается метод LU-разложения?
4 В чём преимущества метода LU-разложения перед методом Гаусса?

Варианты заданий даны в лабораторной работе № 2.

4 Лабораторная работа № 4. Решение системы линейных алгебраических уравнений методом квадратного корня

Цель работы: изучение метода квадратного корня для решения СЛАУ.

1 Теоретические сведения. Пусть задана система $A \cdot x = b$, где $A \neq 0$ – симметрическая ($a_{ij} = a_{ji}$, $i, j = \overline{1, n}$) и положительно определённая невырожденная матрица. В этом случае матрицу A можно разложить в произведение двух треугольных матриц (нижней L и верхней треугольной L^T):

$$A = L \cdot L^T, \tag{4.1}$$

$$L = \begin{pmatrix} L_{11} & 0 & \dots & 0 \\ L_{21} & L_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ L_{n1} & L_{n2} & \dots & L_{nn} \end{pmatrix}, \quad L^T = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{21} & \dots & L_{n1} \\ 0 & L_{22} & \dots & L_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & L_{nn} \end{pmatrix}.$$

Это позволяет свести решение заданной системы к последовательному решению двух систем с треугольными матрицами, что является задачей более простой.

Метод квадратного корня или метод Холецкого даёт большой выигрыш во времени по сравнению с другими методами (например, методы Гаусса или LU-разложения), т. к., во-первых, существенно уменьшает число умножений и делений, во-вторых, позволяет накапливать сумму произведений без записи промежуточных результатов. Всего метод квадратного корня требует $k = n(n^2 + 9n - 1)/6$ операций умножения и деления (примерно в два раза меньше, чем метод Гаусса), а также n операций извлечения корня.

Подставим в исходную систему правую часть выражения (4.1). В результате получим $L \cdot L^T \cdot x = b$. Обозначим $L^T \cdot x = y$. Тогда $L \cdot y = b$ и решение исходной системы сводится к решению двух систем:

1) $L \cdot y = b$, решая которую находим столбец неизвестных y;

2) $L^T \cdot x = y$, из которой получаем матрицу x неизвестных исходной системы.

Для нахождения матрицы L элементы матрицы $L \cdot L^T$, представляющие собой суммы произведений неизвестных элементов нижней треугольной матрицы L приравнивают к соответствующим элементам матрицы A. Элементы матрицы L последовательно вычисляются по следующим формулам:

$$L_{11} = \sqrt{a_{11}}; \tag{4.2}$$

$$L_{i1} = a_{i1} / L_{11}, \ i = 2,3,\ldots,n; \tag{4.3}$$

$$L_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{ik}^2}, \ i = 2,3,\ldots,n; \tag{4.4}$$

$$L_{ij} = \frac{1}{L_{ii}} \cdot \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{ik} \cdot L_{jk} \right), \ i = 2,3,\ldots,n-1, \ j = i+1, i+2,\ldots,n \ \text{ или } i \le j; \tag{4.5}$$

$$L_{ij} = 0, \ i > j. \tag{4.6}$$

После нахождения элементов матрицы L системы примут вид:

$$\begin{pmatrix} L_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ L_{21} & L_{22} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ L_{n1} & L_{n2} & \ldots & L_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}, \tag{4.7}$$

$$\begin{pmatrix} L_{11} & L_{21} & \ldots & L_{n1} \\ 0 & L_{22} & \ldots & L_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & L_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix}. \tag{4.8}$$

Последовательно решая систему (4.7), получим

$$\begin{cases} y_1 = b_1 / L_{11}; \\ y_2 = (b_2 - L_{21} \cdot y_1) / L_{22}; \\ \ldots \\ y_n = (b_n - L_{n1} \cdot y_1 - L_{n2} \cdot y_2 - \ldots - L_{nn} \cdot y_{n-1}) / L_{nn}. \end{cases} \tag{4.9}$$

Аналогично решается система (4.8):

$$\begin{cases} x_n = y_n / L_{nn}; \\ x_{n-1} = \left(y_{n-1} - L_{n,n-1} \cdot x_n \right) / L_{n-1,n-1}; \\ x_{n-2} = \left(y_{n-2} - L_{n,n-2} \cdot x_n - L_{n-1,n-2} \cdot x_{n-1} \right) / L_{n-2,n-2}; \\ \ldots \\ x_1 = \left(y_1 - L_{n1} \cdot x_n - L_{n-1,1} \cdot x_{n-1} - \ldots - L_{21} \cdot x_2 \right) / L_{11}. \end{cases} \tag{4.10}$$

Для наглядности решение СЛАУ можно представить в виде таблицы 4.1 (пример для системы 4-го порядка).

Таблица 4.1 – Решение СЛАУ методом квадратного корня

<table>
<tr><td rowspan="5">1</td><td colspan="5">Расширенная матрица</td><td>–</td></tr>
<tr><td>a_{11}</td><td>a_{12}</td><td>a_{13}</td><td>a_{14}</td><td>b_1</td><td>–</td></tr>
<tr><td>a_{21}</td><td>a_{22}</td><td>a_{23}</td><td>a_{24}</td><td>b_2</td><td>–</td></tr>
<tr><td>a_{31}</td><td>a_{32}</td><td>a_{33}</td><td>a_{34}</td><td>b_3</td><td>–</td></tr>
<tr><td>a_{41}</td><td>a_{42}</td><td>a_{43}</td><td>a_{44}</td><td>b_4</td><td>–</td></tr>
<tr><td rowspan="5">2</td><td colspan="4">Матрица L^T</td><td>y_i</td><td>Сумма $\overline{y}_i$ по строке</td></tr>
<tr><td>L_{11}</td><td>L_{21}</td><td>L_{31}</td><td>L_{41}</td><td>y_1</td><td>$\overline{y}_1$</td></tr>
<tr><td>0</td><td>L_{22}</td><td>L_{32}</td><td>L_{42}</td><td>y_2</td><td>$\overline{y}_2$</td></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>L_{33}</td><td>L_{43}</td><td>y_3</td><td>$\overline{y}_3$</td></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>L_{44}</td><td>y_4</td><td>$\overline{y}_4$</td></tr>
<tr><td rowspan="4">3</td><td colspan="4">Решение и его проверка</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>x_4</td><td>x_3</td><td>x_2</td><td>x_1</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$\overline{x}_4$</td><td>$\overline{x}_3$</td><td>$\overline{x}_2$</td><td>$\overline{x}_1$</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$1+x_4$</td><td>$1+x_3$</td><td>$1+x_2$</td><td>$1+x_1$</td><td></td><td></td></tr>
</table>

В раздел 1 таблицы 4.1 записываем расширенную матрицу системы.

Находим элементы матрицы L последовательно по формулам (4.2)–(4.6) и результаты заносим в раздел 2 таблицы 4.1. Далее находим y_i из системы (4.9). Организуем столбец контроля $\overline{y}_i$:

$$\overline{y_i} = y_i + \sum_{k=1}^{n} L_{ik}. \tag{4.11}$$

После этого в разделе 3 таблицы 4.1 находим решение по формулам (4.10):

$$\begin{cases} x_4 = y_4 / L_{44}; \\ x_3 = \left(y_3 - L_{43} \cdot x_4 \right) / L_{33}; \\ x_2 = \left(y_2 - L_{42} \cdot x_4 - L_{32} \cdot x_3 \right) / L_{22}; \\ x_1 = \left(y_1 - L_{41} \cdot x_4 - L_{31} \cdot x_3 - L_{21} \cdot x_2 \right) / L_{11}. \end{cases}$$

Аналогично находим $\overline{x_i}$ контрольной системы, заменив все y_i на $\overline{y}_i$, а x_i на $\overline{x}_i$ для $i = 3,2,1$. Если все вычисления верны, то значение решения x_i будет отличаться от соответствующего значения $\overline{x}_i$ на единицу и, значит, две последние строки расчётной таблицы должны совпасть.

2 Постановка задачи. Методом Холецкого решить систему уравнений

$$\begin{cases} 1,23x_1 + 0,42x_2 + 0,35x_3 + 1,70x_4 = 1,30; \\ 0,42x_1 + 4,45x_2 + 0,17x_3 + 2,20x_4 = 0,15; \\ 0,35x_1 + 0,17x_2 + 6,37x_3 + 0,29x_4 = 0,72; \\ 1,70x_1 + 2,20x_2 + 0,29x_3 + 9,00x_4 = 0,90. \end{cases}$$

3 Решение задачи. Выполнив расчёты по формулам (4.2)–(4.6) и (4.9), (4.10), составим таблицу 4.2.

Таблица 4.2 – Решение задачи методом квадратного корня

1	Расширенная матрица					–
	1,23	0,42	0,35	1,70	1,30	–
	0,42	4,45	0,17	2,20	0,15	–
	0,35	0,17	6,37	0,29	0,72	–
	1,70	2,20	0,29	9,00	0,90	–
2	Матрица L^T				y_i	Сумма $\overline{y}_i$ по строке
	1,1091	0,3787	0,3156	1,5328	1,1722	4,5083
	0	2,0752	0,0243	0,7804	–0,1416	2,7383
	0	0	2,5040	–0,0850	0,1412	2,5602
	0	0	0	2,4565	–0,3152	2,1413
3	Решение и его проверка					
	x_4	x_3	x_2	x_1		
	–0,1283	0,0520	–0,0206	1,2265		
	0,8717	1,0520	0,9794	2,2262		
	0,8717	1,0520	0,9794	2,2262		

Ответ: $x_1 = 1,2265$; $x_2 = -0,0206$; $x_3 = 0,0520$; $x_4 = -0,1283$.

Контрольные вопросы

1 Каким требованиям должна удовлетворять основная матрица системы?
2 Какая матрица называется положительно определённой?
3 Каковы преимущества метода Холецкого?

Варианты заданий к лабораторной работе № 4

Методом квадратного корня решить СЛАУ, заданную расширенной матрицей.

1 $\begin{pmatrix} 1,19 & 0,52 & 0,64 & 0,45 & 5,44 \\ 0,52 & 2,41 & 1,92 & 0,38 & 8,37 \\ 0,64 & 1,92 & 4,73 & 1,79 & 15,62 \\ 0,45 & 0,38 & 1,79 & 1,22 & 6,35 \end{pmatrix}$.

2 $\begin{pmatrix} 1,58 & 1,2 & 0,14 & 0,27 & 3,24 \\ 1,2 & 4,7 & 0,03 & 0,37 & 6,16 \\ 0,14 & 0,03 & 4,99 & 0,75 & 11,48 \\ 0,27 & 0,37 & 0,75 & 3,71 & 5,63 \end{pmatrix}$.

3 $\begin{pmatrix} 2,83 & 1,23 & 0,31 & 0,8 & 4,36 \\ 1,23 & 2,16 & 1,93 & 1,47 & 9,74 \\ 0,31 & 1,93 & 3,34 & 1,19 & 12,51 \\ 0,8 & 1,47 & 1,19 & 3,25 & 6,77 \end{pmatrix}$.

4 $\begin{pmatrix} 2,67 & 0,63 & 0,8 & 0,75 & 9,93 \\ 0,63 & 4,13 & 0,89 & 1,81 & 9,74 \\ 0,8 & 0,89 & 3,27 & 1,62 & 6,82 \\ 0,75 & 1,81 & 1,62 & 4,79 & 13,14 \end{pmatrix}$.

5 $\begin{pmatrix} 4,93 & 1,36 & 0,41 & 1,99 & 10,56 \\ 1,36 & 4,8 & 0,34 & 1,2 & 7,55 \\ 0,41 & 0,34 & 3,89 & 1,05 & 5,65 \\ 1,99 & 1,2 & 1,05 & 4,33 & 11,36 \end{pmatrix}$.

6 $\begin{pmatrix} 1,26 & 0,74 & 0,88 & 1,75 & 6,58 \\ 0,74 & 1,92 & 1,65 & 0,47 & 5,48 \\ 0,88 & 1,65 & 2,28 & 0,47 & 7,03 \\ 1,75 & 0,47 & 0,47 & 3,62 & 9,55 \end{pmatrix}$.

7 $\begin{pmatrix} 1,37 & 1,66 & 0,23 & 0,24 & 2,33 \\ 1,66 & 2,98 & 0,84 & 0,68 & 5,33 \\ 0,23 & 0,84 & 4,98 & 0,04 & 14,56 \\ 0,24 & 0,68 & 0,04 & 4,12 & 1,14 \end{pmatrix}$.

8 $\begin{pmatrix} 2,32 & 1,89 & 0,61 & 0,1 & 6,66 \\ 1,89 & 4,45 & 0,85 & 1,01 & 11,34 \\ 0,61 & 0,85 & 3,42 & 0,03 & 11,48 \\ 0,1 & 1,01 & 0,03 & 3,15 & 3,29 \end{pmatrix}$.

9 $\begin{pmatrix} 4,67 & 0,9 & 0,5 & 1,72 & 12,87 \\ 0,9 & 4,5 & 1,29 & 1,48 & 7,65 \\ 0,5 & 1,29 & 4,81 & 1,61 & 10,46 \\ 1,72 & 1,48 & 1,61 & 1,47 & 8,14 \end{pmatrix}$.

10 $\begin{pmatrix} 3,54 & 0,79 & 1 & 1,96 & 16,85 \\ 0,79 & 4,07 & 0,17 & 1,96 & 11,43 \\ 1 & 0,17 & 1,73 & 0,11 & 6,88 \\ 1,96 & 1,96 & 0,11 & 2,66 & 13,27 \end{pmatrix}$.

11 $\begin{pmatrix} 1,09 & 0,72 & 0,75 & 0,73 & 5,13 \\ 0,72 & 1,64 & 1,4 & 0,42 & 5,1 \\ 0,75 & 1,4 & 2,49 & 1,79 & 10,75 \\ 0,73 & 0,42 & 1,79 & 2,73 & 12,03 \end{pmatrix}$.

12 $\begin{pmatrix} 1,08 & 1,25 & 1,38 & 0,39 & 6,57 \\ 1,25 & 3,7 & 1,48 & 0,15 & 12,81 \\ 1,38 & 1,48 & 3,21 & 0,66 & 10,34 \\ 0,39 & 0,15 & 0,66 & 1,28 & 3,14 \end{pmatrix}$.

13 $\begin{pmatrix} 2,32 & 1,03 & 0,43 & 1,61 & 10,38 \\ 1,03 & 3,32 & 1,82 & 1,15 & 10,44 \\ 0,43 & 1,82 & 3,41 & 1,35 & 13,4 \\ 1,61 & 1,15 & 1,35 & 1,53 & 10,96 \end{pmatrix}$.

14 $\begin{pmatrix} 3,19 & 1,19 & 0,87 & 1,83 & 14,73 \\ 1,19 & 3,75 & 1,75 & 0,89 & 16,25 \\ 0,87 & 1,75 & 1,53 & 0,03 & 9,85 \\ 1,83 & 0,89 & 0,03 & 3,18 & 9,83 \end{pmatrix}$.

15 $\begin{pmatrix} 1,15 & 0 & 0,19 & 1,57 & 3,81 \\ 0 & 3,69 & 0,72 & 1,48 & 12,5 \\ 0,19 & 0,72 & 4,29 & 0,8 & 8,29 \\ 1,57 & 1,48 & 0,8 & 3,01 & 10,69 \end{pmatrix}$.

16 $\begin{pmatrix} 4,83 & 0,08 & 1,15 & 1,55 & 12,32 \\ 0,08 & 2,73 & 1,87 & 0,67 & 7,11 \\ 1,15 & 1,87 & 2,59 & 0,23 & 7,38 \\ 1,55 & 0,67 & 0,23 & 2,39 & 8,47 \end{pmatrix}$.

$$17\quad\begin{pmatrix} 1,63 & 0,84 & 0,23 & 1,06 & 5,23 \\ 0,84 & 4,09 & 0,39 & 0,87 & 5,3 \\ 0,23 & 0,39 & 4,84 & 0,14 & 7,98 \\ 1,06 & 0,87 & 0,14 & 1,19 & 4,81 \end{pmatrix}.$$

$$18\quad\begin{pmatrix} 3,4 & 1,14 & 1,31 & 1,88 & 12,96 \\ 1,14 & 3,23 & 0,38 & 0,91 & 6,99 \\ 1,31 & 0,38 & 3,06 & 1,6 & 10,04 \\ 1,88 & 0,91 & 1,6 & 2,47 & 11,28 \end{pmatrix}.$$

$$19\quad\begin{pmatrix} 4,26 & 1,4 & 0,73 & 0,44 & 12,52 \\ 1,4 & 2,1 & 0,48 & 0,82 & 9,72 \\ 0,73 & 0,48 & 2,77 & 0,14 & 10,69 \\ 0,44 & 0,82 & 0,14 & 4,91 & 10,88 \end{pmatrix}.$$

$$20\quad\begin{pmatrix} 3,17 & 0,06 & 0,07 & 0,62 & 9,16 \\ 0,06 & 4,25 & 1,72 & 1,73 & 15,67 \\ 0,07 & 1,72 & 2,85 & 1,31 & 9,35 \\ 0,62 & 1,73 & 1,31 & 2,33 & 11,8 \end{pmatrix}.$$

$$21\quad\begin{pmatrix} 4,28 & 1,27 & 0,57 & 1,76 & 10,17 \\ 1,27 & 2,27 & 0,57 & 0,09 & 3,26 \\ 0,57 & 0,57 & 2,67 & 0,78 & 4,89 \\ 1,76 & 0,09 & 0,78 & 1,89 & 6,51 \end{pmatrix}.$$

$$22\quad\begin{pmatrix} 2,62 & 1,97 & 0,72 & 0,22 & 12,13 \\ 1,97 & 4,78 & 1,2 & 0,77 & 18,18 \\ 0,72 & 1,2 & 1,05 & 0,07 & 5,94 \\ 0,22 & 0,77 & 0,07 & 2,05 & 5,98 \end{pmatrix}.$$

$$23\quad\begin{pmatrix} 4,59 & 1,49 & 0,47 & 1,1 & 5,8 \\ 1,49 & 1,55 & 0,2 & 0,72 & 3,97 \\ 0,47 & 0,2 & 4,03 & 1,94 & 11,61 \\ 1,1 & 0,72 & 1,94 & 4,6 & 15,68 \end{pmatrix}.$$

$$24\quad\begin{pmatrix} 3,2 & 0,55 & 1,8 & 1,77 & 9,28 \\ 0,55 & 2,5 & 0,51 & 0,48 & 8,98 \\ 1,8 & 0,51 & 4,45 & 0,89 & 11,13 \\ 1,77 & 0,48 & 0,89 & 1,06 & 5,66 \end{pmatrix}.$$

$$25\quad\begin{pmatrix} 4,42 & 1,12 & 1,92 & 0,24 & 5,07 \\ 1,12 & 3,57 & 0,99 & 0,21 & 9,43 \\ 1,92 & 0,99 & 4,22 & 1,95 & 10,64 \\ 0,24 & 0,21 & 1,95 & 3,98 & 12,41 \end{pmatrix}.$$

$$26\quad\begin{pmatrix} 4,18 & 0,61 & 1,99 & 0,65 & 9,5 \\ 0,61 & 2,53 & 1,54 & 1,64 & 5,6 \\ 1,99 & 1,54 & 1,94 & 1,22 & 7,47 \\ 0,65 & 1,64 & 1,22 & 1,35 & 4,5 \end{pmatrix}.$$

$$27\quad\begin{pmatrix} 2,25 & 0,32 & 1,22 & 0,42 & 4,56 \\ 0,32 & 2,43 & 0,35 & 1,98 & 6,82 \\ 1,22 & 0,35 & 3,09 & 0,07 & 3,71 \\ 0,42 & 1,98 & 0,07 & 4,04 & 6,04 \end{pmatrix}.$$

$$28\quad\begin{pmatrix} 2,86 & 1,11 & 0,68 & 0,65 & 5,49 \\ 1,11 & 3,16 & 0,75 & 0,28 & 5,37 \\ 0,68 & 0,75 & 1,87 & 0,89 & 4,8 \\ 0,65 & 0,28 & 0,89 & 4,4 & 3,34 \end{pmatrix}.$$

$$29\quad\begin{pmatrix} 4,46 & 0,62 & 0,76 & 0,73 & 6,31 \\ 0,62 & 3,38 & 0,82 & 1,23 & 6,14 \\ 0,76 & 0,82 & 4,47 & 0,47 & 5,9 \\ 0,73 & 1,23 & 0,47 & 3,23 & 9,67 \end{pmatrix}.$$

$$30\quad\begin{pmatrix} 2,84 & 0,09 & 0,06 & 1,82 & 4,04 \\ 0,09 & 2,45 & 0,79 & 1,34 & 5,64 \\ 0,06 & 0,79 & 4 & 0,77 & 9 \\ 1,82 & 1,34 & 0,77 & 2,62 & 7,65 \end{pmatrix}.$$

5 Лабораторная работа № 5. Решение системы линейных алгебраических уравнений методом прогонки

Цель работы: изучение метода прогонки для решения СЛАУ.

1 Теоретические сведения. Рассмотрим линейные алгебраические системы со слабо заполненными матрицами ленточной структуры, в которых ненулевые элементы располагаются на главной и нескольких побочных диагоналях.

Такие СЛАУ возникают, например, при решении задач сплайн-интерполяции функций, дискретизации краевых задач для дифференциальных уравнений методами конечных разностей и др.

Для решения систем с ленточными матрицами метод Гаусса можно трансформировать в более эффективные методы.

Будем искать решение такой системы, каждое уравнение которой связывает три «соседние» неизвестные:

$$b_i x_{i-1} + c_i x_i + d_i x_{i+1} = r_i \;, \tag{5.1}$$

где $i = \overline{1,n}$; $b_1 = d_n = 0$.

Данная система имеет трёхдиагональную структуру:

$$\begin{pmatrix} c_1 & d_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ b_2 & c_2 & d_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_3 & c_3 & d_3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & b_{n-1} & c_{n-1} & d_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b_n & c_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ \dots \\ r_{n-1} \\ r_n \end{pmatrix} .$$

Как и в решении СЛАУ методом Гаусса, цель – избавиться от ненулевых элементов в поддиагональной части матрицы системы. Предположим, что существуют такие наборы чисел δ_i и λ_i $(i = \overline{1,n})$, при которых

$$x_i = \delta_i x_{i+1} + \lambda_i \;. \tag{5.2}$$

Уменьшив в выражении (5.2) индекс на единицу и подставив полученное выражение $x_{i-1} = \delta_{i-1} x_i + \lambda_{i-1}$ в систему (5.1), придём к эквивалентной системе

$$b_i \delta_{i-1} x_i + b_i \lambda_{i-1} + c_i x_i + d_i x_{i+1} = r_i \;. \tag{5.3}$$

Откуда

$$x_i = \frac{-d_i}{c_i + b_i \delta_{i-1}} \cdot x_{i+1} + \frac{r_i - b_i \lambda_{i-1}}{c_i + b_i \delta_{i-1}} \;. \tag{5.4}$$

Таким образом, получаем расчётные формулы:

$$\delta_1 = \frac{-d_1}{c_1}, \quad \lambda_1 = \frac{r_1}{c_1}, \tag{5.5}$$

$$\delta_i = \frac{-d_i}{c_i + b_i \delta_{i-1}}, \quad \lambda_i = \frac{r_i - b_i \lambda_{i-1}}{c_i + b_i \delta_{i-1}}, \; i = \overline{2, n-1}, \tag{5.6}$$

$$\delta_n = 0\,,\ x_n = \lambda_n = \frac{r_n - b_n\lambda_{n-1}}{c_n + b_n\delta_{n-1}}\,. \tag{5.7}$$

Далее по формулам (5.2) последовательно находятся x_{n-1}, $x_{n-2},\ldots,$ x_1 при $i = n-1, n-2, \ldots, 1$ соответственно.

Такой метод решения системы называется ***методом прогонки*** и сводится к вычислениям по следующей схеме: нахождение прогоночных коэффициентов δ_i, λ_i по формулам (5.5)–(5.7) при $i=\overline{1,n}$ (прямая прогонка) и затем неизвестных x_i по формуле (5.2) при $i = n-1, n-2, \ldots, 1$ (обратная прогонка).

Метод прогонки относится к классу прямых методов. Если отсутствуют погрешности округлений, то полученное решение является точным.

Будем называть прогонку ***корректной***, если знаменатели прогоночных коэффициентов (5.6) не обращаются в нуль, и ***устойчивой***, если $|\delta_i| < 1$ при $i=\overline{1,n}$.

Теорема (достаточные условия корректности и устойчивости метода прогонки). Пусть коэффициенты b_i и d_i уравнения (5.3) при $i=\overline{2,n-1}$ отличны от нуля и пусть

$$|c_i| > |b_i| + |d_i|, \quad i=\overline{1,n}\,. \tag{5.8}$$

Тогда прогонка по формулам (5.5)–(5.7) корректна и устойчива (т. е. $c_i + b_i\delta_{i-1} \neq 0$, $|\delta_i| < 1$).

Правильность расчётов можно проверить на основании тождества

$$|A| = c_1 \cdot \prod_{k=2}^{n} \Delta_k\ , \tag{5.9}$$

где $\Delta_i = c_i + b_i\delta_{i-1}$, ($i=\overline{2,n}$).

2 Постановка задачи. Решить методом прогонки СЛАУ

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = -5; \\ x_1 + 10x_2 - 5x_3 = -18; \\ x_2 - 5x_3 + 2x_4 = -40; \\ x_3 + 4x_4 = -27. \end{cases} \tag{5.10}$$

3 Решение СЛАУ (5.10) методом прогонки. Для СЛАУ (5.10) имеем

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 10 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ c = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix},\ d = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},\ r = \begin{pmatrix} -5 \\ -18 \\ -40 \\ -27 \end{pmatrix}.$$

Так как условия (5.8) выполняются:

$$\begin{cases} |c_1| = 2 > 1 = |b_1| + |d_1|, \\ |c_2| = 10 > 6 = |b_2| + |d_2|, \\ |c_3| = 5 > 3 = |b_3| + |d_3|, \\ |c_4| = 4 > 1 = |b_4| + |d_4|, \end{cases}$$

то прогонка корректна и устойчива.

По формулам (5.5) находим $\delta_1 = \dfrac{-d_1}{c_1} = \dfrac{-1}{2} = -0{,}5$, $\lambda_1 = \dfrac{r_1}{c_1} = \dfrac{-5}{2} = -2{,}5$.

Далее по формулам (5.6) и (5.7) получаем последовательно

$$\delta_2 = \frac{-d_2}{c_2 + b_2\delta_1} = \frac{-(-5)}{10 + 1\cdot\left(\frac{-1}{2}\right)} = \frac{10}{19},\ \lambda_2 = \frac{r_2 - b_2\lambda_1}{c_2 + b_2\delta_1} = \frac{-18 - 1\cdot\left(\frac{-5}{2}\right)}{10 + 1\cdot\left(\frac{-1}{2}\right)} = \frac{-31}{19};$$

$$\delta_3 = \frac{-d_3}{c_3 + b_3\delta_2} = \frac{-2}{-5 + 1\cdot\left(\frac{10}{19}\right)} = \frac{38}{85},\ \lambda_3 = \frac{r_3 - b_3\lambda_2}{c_3 + b_3\delta_2} = \frac{-40 - 1\cdot\left(\frac{-31}{19}\right)}{-5 + 1\cdot\left(\frac{10}{19}\right)} = \frac{729}{85};$$

$$\delta_4 = 0,\ x_4 = \lambda_4 = \frac{r_4 - b_4\lambda_3}{c_4 + b_4\delta_3} = \frac{-27 - 1\cdot\frac{729}{85}}{4 + 1\cdot\frac{38}{85}} = -8.$$

Затем по формулам (5.2) находим

$$x_3 = \delta_3 x_4 + \lambda_3 = \frac{38}{85}\cdot(-8) + \frac{729}{85} = 5;\ x_2 = \delta_2 x_3 + \lambda_2 = \frac{10}{19}\cdot 5 - \frac{31}{19} = 1;$$

$$x_1 = \delta_1 x_2 + \lambda_1 = \frac{-1}{2}\cdot 1 - \frac{5}{2} = -3.$$

Ответ: $x_1 = -3$; $x_2 = 1$; $x_3 = 5$; $x_4 = -8$.

Контрольные вопросы

1 Какие СЛАУ можно решать методом прогонки?

2 К какому классу численных методов относится метод прогонки? Что это означает?

3 Что такое корректность и устойчивость метода прогонки?

4 Каковы достаточные условия корректности и устойчивости метода прогонки?

Варианты заданий к лабораторной работе № 5

Методом прогонки решить систему

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = N; \\ x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 2N; \\ x_2 - 4x_3 + 2x_4 = -N^{-1}; \\ x_3 + 7x_4 = -N, \end{cases}$$

где N – номер варианта. Правильность промежуточных расчётов проверить с помощью тождества (5.9).

6 Лабораторная работа № 6. Приближённое решение системы линейных алгебраических уравнений методом простой итерации

Цель работы: изучение метода простой итерации для решения СЛАУ.

1 Теоретические сведения. Пусть дана СЛАУ порядка n: $A \cdot x = f$, $|A| \neq 0$, где $A = \left(a_{ij}\right)$, x – вектор-столбец неизвестных, f – вектор-столбец свободных членов. При использовании всех итерационных методов решения такую систему приводят к каноническому виду

$$x = B \cdot x + b, \tag{6.1}$$

где B – матрица итерационного перехода, $B = E - J^{-1}A$;

J – матрица расщепления;

b – вектор правой части, $b = J^{-1}f$.

Далее выбирается некоторое начальное приближение к решению системы уравнений $x^{(0)} = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots x_n^{(0)}\right)$ и вычисляется последовательность $x^{(k)}$ приближений к корню (k – номер итерации) по рекуррентным формулам

$$x_i^{(0)} = b_i \text{ , } x_i^{(k+1)} = \sum_{j=1}^{n} B_{ij} \cdot x_i^{(k)} + b_i, \quad i = \overline{1,n}, \quad k = 0,1,2,\dots \tag{6.2}$$

или в векторно-матричной форме

$$x^{(0)} = b \text{ , } x^{(k+1)} = B \cdot x^{(k)} + b, \quad k = 0,1,2,\dots \tag{6.3}$$

В качестве начального приближения $x^{(0)}$ удобно брать вектор-столбец b.

Условия сходимости метода простой итерации имеют вид:

$$\begin{cases} |a_{11}| > |a_{12}|, \quad |a_{11}| > |a_{13}|; \\ |a_{22}| > |a_{21}|, \quad |a_{22}| > |a_{23}|; \\ |a_{33}| > |a_{31}|, \quad |a_{33}| > |a_{32}|. \end{cases} \tag{6.4}$$

Более быстрая сходимость обеспечивается следующей теоремой.

Теорема. Итерационный процесс (6.3) для приведённой линейной системы сходится к единственному её решению, если какая-нибудь каноническая норма матрицы B меньше единицы, т. е.

$$\|B\| < 1 . \tag{6.5}$$

К каноническим нормам относятся:

$$\|B\|_\infty = \max_i \sum_j B_{ij} \text{ (неопределённая или строчная норма),} \tag{6.6}$$

$$\|B\|_1 = \max_j \sum_i B_{ij} \text{ (столбцовая норма),} \tag{6.7}$$

$$\|B\|_E = \sqrt{\sum_{i,j} |B_{ij}|^2} \text{ (евклидова норма).} \tag{6.8}$$

В зависимости от применяемого итерационного метода используют различные критерии окончания итераций. При применении метода простой итерации таким критерием служит

$$\Delta x^{(k+1)} = \frac{\left\| x^{(k+1)} - x^{(k)} \right\|}{\left\| x^{(k+1)} \right\|} \le \varepsilon . \tag{6.9}$$

Здесь можно использовать векторную евклидову норму, совпадающую с модулем вектора. Тогда

$$\Delta x^{(k+1)} = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)} \right)^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(x_i^{(k+1)} \right)^2}} \le \varepsilon \cdot \tag{6.10}$$

2 Постановка задачи. Методом простой итерации решить с точностью $\varepsilon = 0{,}01$ СЛАУ

$$\begin{cases} 3{,}21x_1 - 4{,}15x_2 + 2{,}13x_3 = 5{,}06; \\ 7{,}09x_1 + 1{,}17x_2 - 2{,}23x_3 = 4{,}75; \\ 0{,}43x_1 - 1{,}4x_2 - 0{,}62x_3 = -1{,}05. \end{cases} \tag{6.11}$$

3 Решение СЛАУ (6.11) методом простой итерации. Расширенная матрица СЛАУ (6.11) имеет вид:

$$\left(A|B\right)=\left(\begin{array}{ccc|c} 3,21 & -4,15 & 2,13 & 5,06 \\ 7,09 & 1,17 & -2,23 & 4,75 \\ 0,43 & -1,4 & -0,62 & -1,05 \end{array}\right). \tag{6.12}$$

Элементарными преобразованиями над строками матрицы приводим её к матрице, элементы которой удовлетворяют условиям сходимости (6.4).

Вторую строку расширенной матрицы $\left(A|B\right)$ запишем первой, третью строку запишем второй, а оставшуюся первую строку – третьей. Получим

$$\left(A|B\right)_1=\left(\begin{array}{ccc|c} 7,09 & 1,17 & -2,23 & 4,75 \\ 0,43 & -1,4 & -0,62 & -1,05 \\ 3,21 & -4,15 & 2,13 & 5,06 \end{array}\right).$$

В полученной матрице первая и вторая строки удовлетворяют условиям сходимости (6.4). Проведём преобразования, чтобы и третья строка удовлетворяла условиям. Для этого умножим вторую строку на -2 и прибавим к третьей строке:

$$\left(A|B\right)_2=\left(\begin{array}{ccc|c} 7,09 & 1,17 & -2,23 & 4,75 \\ 0,43 & -1,4 & -0,62 & -1,05 \\ 2,35 & -1,45 & 3,37 & 7,16 \end{array}\right).$$

Условия сходимости (6.4) метода итераций выполнены.

Запишем СЛАУ, эквивалентную (6.12), учитывая матрицу $\left(A|B\right)_2$:

$$\begin{cases} 7,09x_1+1,17x_2-2,23x_3=4,75; \\ 0,43x_1-1,4x_2-0,62x_3=-1,05; \\ 2,35x_1-1,45x_2+3,37x_3=7,16. \end{cases} \tag{6.13}$$

Систему (6.13) приведём к каноническому виду (6.1), выразив из первого уравнения x_1, из второго уравнения – x_2, из третьего уравнения – x_3:

$$\begin{cases} x_1= \quad -\dfrac{1,17}{7,09}x_2+\dfrac{2,23}{7,09}x_3+\dfrac{4,75}{7,09}; \\ x_2=-\dfrac{0,43}{-1,4}x_1 \quad +\dfrac{0,62}{-1,4}x_3-\dfrac{1,05}{-1,4}; \\ x_3=-\dfrac{2,35}{3,37}x_1+\dfrac{1,45}{3,37}x_2 \quad +\dfrac{7,16}{3,37}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1= \qquad -0,165x_2+0,315x_3+0,669; \\ x_2=0,307x_1 \qquad -0,443x_3+0,75; \\ x_3=-0,697x_1+0,43x_2 \qquad +2,125. \end{cases} \tag{6.14}$$

Таким образом,

$$B=\begin{pmatrix} 0 & -0,165 & 0,315 \\ 0,307 & 0 & -0,443 \\ -0,697 & 0,43 & 0 \end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix} 0,669 \\ 0,75 \\ 2,125 \end{pmatrix}.$$

Все нормы матрицы B больше единицы: $\|B\|_\infty=1,128$, $\|B\|_1=1,004$, $\|B\|_E=1,043$. Поэтому метод сходится для данной системы (т. к. выполнены условия (6.4)), но сходимость медленная.

Запишем расчётные формулы метода итераций:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)}= & -0,165x_2^{(k)}+0,315x_3^{(k)}+0,669; \\ x_2^{(k+1)}= 0,307x_1^{(k)} & -0,443x_3^{(k)}+0,75; \\ x_3^{(k+1)}=-0,697x_1^{(k)}+0,43x_2^{(k)} & +2,125. \end{cases} \quad k=0,1,2,\ldots \qquad (6.15)$$

Выбираем нулевое приближение ($x_1^{(0)}$, $x_2^{(0)}$, $x_3^{(0)}$), равное свободным членам СЛАУ (6.15):

$$x_1^{(0)}=0,669\ ,\ x_2^{(0)}=0,75\ ,\ x_3^{(0)}=2,125\ .$$

Вычисляя по формулам (6.15), находим решение $(\tilde{x}_1;\tilde{x}_2;\tilde{x}_3)$ с заданной точностью ε. Оканчиваем расчёт, когда выполнится условие (6.10).

Шаг 1. При $k=0$ из (6.15) находим первое приближение к решению СЛАУ:

$x_1^{(1)}=-0,165x_2^{(0)}+0,315x_3^{(0)}+0,669=-0,165\cdot0,75+0,315\cdot2,125+0,669\approx1,214;$

$x_2^{(1)}=0,307x_1^{(0)}-0,443x_3^{(0)}+0,75=0,307\cdot0,669-0,443\cdot2,125+0,75\approx0,015;$

$x_3^{(1)}=-0,697x_1^{(0)}+0,43x_2^{(0)}+2,125=-0,697\cdot0,669+0,43\cdot0,75+2,125\approx1,980.$

Проверяем условие (6.10):

$$\Delta x^{(1)}=\frac{\sqrt{(1,214-0,669)^2+(0,015-0,75)^2+(1,980-2,125)^2}}{\sqrt{1,214^2+0,015^2+1,980^2}}=0,399>\varepsilon\ .$$

Шаг 2. При $k=1$ из (6.15) находим второе приближение:

$x_1^{(2)}=-0,165x_2^{(1)}+0,315x_3^{(1)}+0,669=-0,165\cdot0,015+0,315\cdot1,980+0,669\approx1,290;$

$x_2^{(2)}=0,307x_1^{(1)}-0,443x_3^{(1)}+0,75=0,307\cdot1,214-0,443\cdot1,980+0,75\approx0,246;$

$x_3^{(2)}=-0,697x_1^{(1)}+0,43x_2^{(1)}+2,125=-0,697\cdot1,214+0,43\cdot0,015+2,125\approx1,284.$

Проверяем условие (6.10):

$$\Delta x^{(2)}=\frac{\sqrt{(1,290-1,214)^2+(0,246-0,015)^2+(1,284-1,980)^2}}{\sqrt{1,290^2+0,246^2+1,284^2}}=0,401>\varepsilon\ .$$

И так далее. Полученные результаты представлены в таблице 6.1.

Таблица 6.1 – Результаты вычислений

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$x_1^{(k)}$	0,670	1,214	1,290	1,033	0,993	1,111	1,132	1,078	1,067	1,092	1,097	1,086
$x_2^{(k)}$	0,750	0,015	0,246	0,578	0,478	0,323	0,366	0,438	0,420	0,386	0,394	0,410
$x_3^{(k)}$	2,125	1,980	1,284	1,331	1,653	1,638	1,489	1,493	1,562	1,561	1,529	1,529
$\Delta x^{(k)}$	–	0,399	0,401	0,237	0,171	0,097	0,082	0,048	0,037	0,021	0,017	0,010

Заканчиваем вычисления, т. к. выполнено условие (6.10):

$$\Delta x^{(11)} = \frac{\sqrt{\left(x_1^{(11)} - x_1^{(10)}\right)^2 + \left(x_2^{(11)} - x_2^{(10)}\right)^2 + \left(x_3^{(11)} - x_3^{(10)}\right)^2}}{\sqrt{\left(x_1^{(11)}\right)^2 + \left(x_2^{(11)}\right)^2 + \left(x_3^{(11)}\right)^2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{(1,086 - 1,097)^2 + (0,410 - 0,394)^2 + (1,529 - 1,529)^2}}{\sqrt{1,086^2 + 0,410^2 + 1,529^2}} = 0,010 \le \varepsilon \ .$$

Ответ: $\tilde{x}_1 = x_1^{(11)} \approx 1,09;\ \tilde{x}_2 = x_2^{(11)} \approx 0,41;\ \tilde{x}_3 = x_3^{(11)} \approx 1,53$.

Контрольные вопросы

1 Какой общий принцип всех итерационных методов решения СЛАУ?
2 Что такое сходимость итерационного метода?
3 Назовите канонические матричные нормы.

Варианты заданий даны в лабораторной работе № 2.

7 Лабораторная работа № 7. Приближённое решение системы линейных алгебраических уравнений методом Зейделя

Цель работы: изучение метода Зейделя для решения СЛАУ.

1 Теоретические сведения. Метод Зейделя является модификацией метода простой итерации. Суть модификации состоит в том, что при вычислении последующих координат вектора $x^{(k+1)}$ сразу же используются уже найденные координаты этого вектора, которые являются улучшенными приближениями к одноименным координатам точного решения.

Воспользуемся разложением матрицы $A = L + D + U$, где L, D, U – нижняя треугольная, диагональная и верхняя треугольная матрицы:

$$L=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & ... & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & ... & 0 \end{pmatrix},\ D=\mathrm{diag}\left(a_{11},a_{22},\ldots,a_{nn}\right),\ U=\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & ... & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & ... & a_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & ... & a_{3n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда итерационный процесс для СЛАУ $A\cdot x=f$ имеет вид:

$$L\cdot x^{(k+1)}+D\cdot x^{(k+1)}+U\cdot x^{(k)}=f\ ,$$

откуда

$$x^{(k+1)}=-(L+D)^{-1}\cdot U\cdot x^{(k)}+(L+D)^{-1}f,\quad k=0,1,\ldots \tag{7.1}$$

Матрица итерационного перехода $B=-(L+D)^{-1}\cdot U$, матрица расщепления $J=L+D$, $b=(L+D)^{-1}f$.

Алгоритм метода Зейделя для системы вида $x=B\cdot x+b$ имеет следующую покоординатную форму:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)}=B_{11}x_1^{(k)}+B_{12}x_2^{(k)}+B_{13}x_3^{(k)}+...+B_{1n}x_n^{(k)}+b_1; \\ x_2^{(k+1)}=B_{21}x_1^{(k+1)}+B_{22}x_2^{(k)}+B_{23}x_3^{(k)}+...+B_{2n}x_n^{(k)}+b_2; \\ x_3^{(k+1)}=B_{31}x_1^{(k+1)}+B_{32}x_2^{(k+1)}+B_{33}x_3^{(k)}+...+B_{3n}x_n^{(k)}+b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n^{(k+1)}=B_{n1}x_1^{(k+1)}+B_{n2}x_2^{(k+1)}+...+B_{n,n-1}x_{n-1}^{(k+1)}+B_{nn}x_n^{(k)}+b_n. \end{cases}\quad k=0,1,\ldots \tag{7.2}$$

Обычно метод Зейделя даёт лучшую сходимость, чем метод простой итерации, но приводит к более громоздким вычислениям.

2 Постановка задачи. Методом Зейделя решить с точностью $\varepsilon=0,01$ СЛАУ

$$\begin{cases} 3,21x_1-4,15x_2+2,13x_3=5,06; \\ 7,09x_1+1,17x_2-2,23x_3=4,75; \\ 0,43x_1-1,4x_2-0,62x_3=-1,05. \end{cases} \tag{7.3}$$

3 Решение СЛАУ (7.3) методом Зейделя. Аналогично методу простой итерации система (7.3) приводится к эквивалентной системе (6.14):

$$\begin{cases} x_1= \qquad -0,165x_2+0,315x_3+0,669; \\ x_2=0,307x_1 \qquad -0,443x_3+0,75; \\ x_3=-0,697x_1+0,43x_2 \qquad +2,125. \end{cases}$$

Изменим итерационные формулы (6.15) в соответствии с (7.2):

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \qquad\qquad -0,165x_2^{(k)} + 0,315x_3^{(k)} + 0,669; \\ x_2^{(k+1)} = \ 0,307x_1^{(k+1)} \qquad\qquad -0,443x_3^{(k)} + 0,75; \\ x_3^{(k+1)} = -0,697x_1^{(k+1)} + 0,43x_2^{(k+1)} \qquad\qquad + 2,125. \end{cases} \quad k = 0,1,2,\ldots \qquad (7.4)$$

Нулевое приближение равно свободным членам СЛАУ (7.4):

$$x_1^{(0)} = 0,669 \ , \ x_2^{(0)} = 0,75 \ , \ x_3^{(0)} = 2,125 \ .$$

Вычисляя по формулам (7.4), находим решение $(\tilde{x}_1; \tilde{x}_2; \tilde{x}_3)$ с заданной точностью ε. Расчёт оканчиваем при выполнении условия (6.10).

Шаг 1. При $k = 0$ из (7.4) находим первое приближение:

$$x_1^{(1)} = -0,165x_2^{(0)} + 0,315x_3^{(0)} + 0,669 = -0,165 \cdot 0,75 + 0,315 \cdot 2,125 + 0,669 \approx 1,214;$$
$$x_2^{(1)} = 0,307x_1^{(1)} - 0,443x_3^{(0)} + 0,75 = 0,307 \cdot 1,214 - 0,443 \cdot 2,125 + 0,75 \approx 0,182;$$
$$x_3^{(1)} = -0,697x_1^{(1)} + 0,43x_2^{(1)} + 2,125 = -0,697 \cdot 1,214 + 0,43 \cdot 0,182 + 2,125 \approx 1,356.$$

Проверяем условие (6.10):

$$\Delta x^{(1)} = \frac{\sqrt{(1,214 - 0,669)^2 + (0,182 - 0,75)^2 + (1,356 - 2,125)^2}}{\sqrt{1,214^2 + 0,182^2 + 1,356^2}} = 0,601 > \varepsilon \ .$$

Шаг 2. При $k = 1$ из (7.4) находим второе приближение:

$$x_1^{(2)} = -0,165x_2^{(1)} + 0,315x_3^{(1)} + 0,669 = -0,165 \cdot 0,182 + 0,315 \cdot 1,356 + 0,669 \approx 1,066;$$
$$x_2^{(2)} = 0,307x_1^{(2)} - 0,443x_3^{(1)} + 0,75 = 0,307 \cdot 1,066 - 0,443 \cdot 1,356 + 0,75 \approx 0,477;$$
$$x_3^{(2)} = -0,697x_1^{(2)} + 0,43x_2^{(2)} + 2,125 = -0,697 \cdot 1,066 + 0,43 \cdot 0,477 + 2,125 \approx 1,587.$$

Проверяем условие (6.10):

$$\Delta x^{(2)} = \frac{\sqrt{(1,066 - 1,214)^2 + (0,477 - 0,182)^2 + (1,587 - 1,356)^2}}{\sqrt{1,066^2 + 0,477^2 + 1,587^2}} = 0,204 > \varepsilon \ .$$

И так далее. Полученные результаты представлены в таблице 7.1.

Таблица 7.1 – Результаты вычислений

k	0	1	2	3	4	5
$x_1^{(k)}$	0,670	1,214	1,066	1,090	1,088	1,088
$x_2^{(k)}$	0,750	0,182	0,477	0,382	0,407	0,401
$x_3^{(k)}$	2,125	1,356	1,586	1,529	1,541	1,539
$\Delta x^{(k)}$	–	0,601	0,204	0,059	0,014	0,003

Заканчиваем вычисления, т. к. выполнено условие (6.10):

$$\Delta x^{(5)} = \frac{\sqrt{\left(x_1^{(5)} - x_1^{(4)}\right)^2 + \left(x_2^{(5)} - x_2^{(4)}\right)^2 + \left(x_3^{(5)} - x_3^{(4)}\right)^2}}{\sqrt{\left(x_1^{(5)}\right)^2 + \left(x_2^{(5)}\right)^2 + \left(x_3^{(5)}\right)^2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{(1{,}088 - 1{,}088)^2 + (0{,}401 - 0{,}407)^2 + (1{,}539 - 1{,}541)^2}}{\sqrt{1{,}088^2 + 0{,}401^2 + 1{,}539^2}} = 0{,}003 < \varepsilon = 0{,}01 .$$

Ответ: $\tilde{x}_1 = x_1^{(5)} \approx 1{,}09;\ \tilde{x}_2 = x_2^{(5)} \approx 0{,}40;\ \tilde{x}_3 = x_3^{(5)} \approx 1{,}54$.

Вывод: сравнивая результаты с методом простой итерации, отмечаем более высокую скорость сходимости метода Зейделя: в данной работе потребовалось всего пять итераций для достижения точности, сравнимой с 11-й итерацией метода простой итерации.

Контрольные вопросы

1 В чём отличие метода Зейделя от метода простой итерации?
2 На какие матрицы раскладывается основная матрица системы?
3 Каковы матрица итерационного перехода и вектор правой части?
4 Каковы основные достоинства и недостатки метода Зейделя?

Варианты заданий даны в лабораторной работе № 2.

8 Лабораторная работа № 8. Приближённое решение системы линейных алгебраических уравнений методами Якоби и релаксации

Цель работы: изучение методов Якоби и релаксации для решения СЛАУ.

1 Теоретические сведения.

1.1 Метод Якоби. Метод является модификацией метода простой итерации. Он позволяет за счёт целенаправленного выбора линейных преобразований в системе прийти к эквивалентной системе с матрицей, имеющей диагональное преобладание по строкам. Тем самым заведомо обеспечивается условие сходимости итерационного процесса. Матрица A имеет диагональное преобладание по строкам, если выполняется условие

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|,\ i = \overline{1,n}. \tag{8.1}$$

Используя разложение матрицы $A = L + D + U$ (см. п. 1 лабораторной работы № 7), итерационный процесс для СЛАУ $A \cdot x = f$ запишем в виде

$$L \cdot x^{(k)} + D \cdot x^{(k+1)} + U \cdot x^{(k)} = f \ ,$$

откуда итерационный алгоритм

$$x^{(k+1)} = -D^{-1} \cdot (L + U) \cdot x^{(k)} + D^{-1} f, \ \ k = 0,1,\ldots \qquad (8.2)$$

Матрица расщепления $J = D$, тогда матрица итерационного перехода и вектор правой части

$$B = -D^{-1} \cdot (L + U), \ b = D^{-1} f . \qquad (8.3)$$

Далее с полученной системой выполняются все действия метода простой итерации. Условие остановки имеет вид:

$$\left| x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)} \right| \le \varepsilon, \quad i = \overline{1,n} \ . \qquad (8.4)$$

1.2 Метод релаксации. Пусть $z_i^{(k)}$ – i-я компонента k-го приближения вектора $x^{(k)}$ в методе Зейделя. Построим итерационную процедуру вида

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \omega \left(z_i^{(k+1)} - x_i^{(k)} \right) , \qquad (8.5)$$

где число ω – параметр релаксации. Этот параметр выбирается таким образом, чтобы на каждом шаге итерационного процесса уменьшалась величина, характеризующая близость полученного решения к искомому решению системы.

Итерационный алгоритм метода релаксации в покоординатной форме

$$x_i^{(k+1)} = (1-\omega) x_i^{(k)} + \omega a_{ii}^{-1} \left(f_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right), \ i = \overline{1,n} \ , \ k = 0,1,\ldots \quad (8.6)$$

или в матричной форме

$$x^{(k+1)} = (\omega L + D)^{-1} \left((1-\omega) D - \omega U \right) x^{(k)} + \omega (\omega L + D)^{-1} f \ , \ k = 0,1,\ldots \qquad (8.7)$$

Метод релаксации сходится для всех $\omega \in (0;2)$, если матрица A – симметричная и положительно определённая. При $\omega \in (1;2)$ формулу (8.7) называют методом *верхней релаксации* или методом SOR (Successive Over Relaxation). Для SOR оптимальный параметр ω можно найти по формуле

$$\omega_{\text{опт}} = 2 \Big/ \left(1 + \sqrt{1 - r^2(B)} \right), \ \ B = -D^{-1} (L + U) , \qquad (8.8)$$

где $r(B)$ – радиус спектра матрицы B, $r(B) = \max\limits_i |\lambda_i|$.

2 Постановка задачи. Методом Якоби решить с точностью $\varepsilon = 0,01$ СЛАУ

$$\begin{cases} 3,21x_1 - 4,15x_2 + 2,13x_3 = 5,06; \\ 7,09x_1 + 1,17x_2 - 2,23x_3 = 4,75; \\ 0,43x_1 - 1,4x_2 - 0,62x_3 = -1,05. \end{cases} \tag{8.9}$$

3 Решение СЛАУ (8.9) методом Якоби. Для системы трёх уравнений с тремя неизвестными условия сходимости (8.1) примут вид:

$$\begin{cases} |a_{11}| > |a_{12}| + |a_{13}|; \\ |a_{22}| > |a_{21}| + |a_{23}|; \\ |a_{33}| > |a_{31}| + |a_{32}|. \end{cases} \tag{8.10}$$

Расширенная матрица СЛАУ (8.9)

$$\left(A|B\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 3,21 & -4,15 & 2,13 & 5,06 \\ 7,09 & 1,17 & -2,23 & 4,75 \\ 0,43 & -1,4 & -0,62 & -1,05 \end{array}\right). \tag{8.11}$$

Вторую строку расширенной матрицы $\left(A|B\right)$ запишем первой, третью строку запишем второй, а оставшуюся первую строку – третьей. В полученной матрице первая и вторая строки удовлетворяют условиям (8.10). Умножим вторую строку на -3 и прибавим к третьей строке. Получим

$$\left(A|B\right)_2 = \left(\begin{array}{ccc|c} 7,09 & 1,17 & -2,23 & 4,75 \\ 0,43 & -1,4 & -0,62 & -1,05 \\ 1,92 & 0,05 & 3,99 & 8,21 \end{array}\right).$$

Условия сходимости (8.10) метода Якоби выполнены:

$$|7,09| > |1,17| + |-2,23| = 3,40;$$
$$|1,4| > |0,43| + |-0,62| = 1,05;$$
$$|3,99| > |1,92| + |0,05| = 1,97.$$

Запишем СЛАУ, эквивалентную СЛАУ (8.9), учитывая матрицу $\left(A|B\right)_2$:

$$\begin{cases} 7,09x_1 + 1,17x_2 - 2,23x_3 = 4,75; \\ 0,43x_1 - 1,4x_2 - 0,62x_3 = -1,05; \\ 1,92x_1 + 0,05x_2 + 3,99x_3 = 8,21. \end{cases} \tag{8.12}$$

Систему (8.12) приведём к каноническому виду $x = B \cdot x + b$:

$$\begin{cases} x_1 = \quad -\dfrac{1,17}{7,09}x_2 + \dfrac{2,23}{7,09}x_3 + \dfrac{4,75}{7,09}; \\ x_2 = -\dfrac{0,43}{-1,4}x_1 \quad + \dfrac{0,62}{-1,4}x_3 - \dfrac{1,05}{-1,4}; \\ x_3 = -\dfrac{1,92}{3,99}x_1 - \dfrac{0,05}{3,99}x_2 \quad + \dfrac{8,21}{3,99}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \qquad -0,165x_2 + 0,315x_3 + 0,669; \\ x_2 = 0,307x_1 \qquad -0,443x_3 + 0,75; \\ x_3 = -0,481x_1 - 0,013x_2 \qquad + 2,058. \end{cases} \tag{8.13}$$

Отсюда

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -0,165 & 0,315 \\ 0,307 & 0 & -0,443 \\ -0,481 & -0,013 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0,669 \\ 0,75 \\ 2,058 \end{pmatrix}. \tag{8.14}$$

Несложно проверить, что такие же результаты можно получить непосредственно по формулам $B = -D^{-1} \cdot (L+U)$, $b = D^{-1} f$.

Элементы матрицы B по модулю меньше единицы, кроме того, нормы $\|B\|_\infty = 0,75 < 1$, $\|B\|_1 = 0,788 < 1$, $\|B\|_E = 0,805 < 1$. То есть процесс итераций будет сходящимся (причём чем элементы B_{ij} ближе к нулю, тем сходимость быстрее).

Запишем расчётные формулы метода:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \qquad\quad -0,165x_2^{(k)} + 0,315x_3^{(k)} + 0,669; \\ x_2^{(k+1)} = \ 0,307x_1^{(k)} \qquad\quad -0,443x_3^{(k)} + 0,75; \\ x_3^{(k+1)} = -0,481x_1^{(k)} - 0,013x_2^{(k)} \qquad\quad + 2,058. \end{cases} \quad k = 0,1,2,\ldots \tag{8.15}$$

Выбираем нулевое приближение ($x_1^{(0)}$, $x_2^{(0)}$, $x_3^{(0)}$), равное свободным членам СЛАУ (8.15), к искомому решению $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3)$ СЛАУ (8.9):

$$x_1^{(0)} = 0,669\ ,\ x_2^{(0)} = 0,75\ ,\ x_3^{(0)} = 2,058\ .$$

Вычисляя по формулам (8.15), находим решение $(\tilde{x}_1; \tilde{x}_2; \tilde{x}_3)$ с заданной точностью ε. Оканчиваем расчёт, когда выполняются неравенства (8.4).

Шаг 1. При $k = 0$ из (8.15) находим первое приближение:

$$x_1^{(1)} = -0,165x_2^{(0)} + 0,315x_3^{(0)} + 0,669 = -0,165 \cdot 0,75 + 0,315 \cdot 2,058 + 0,669 \approx 1,194;$$
$$x_2^{(1)} = 0,307x_1^{(0)} - 0,443x_3^{(0)} + 0,75 = 0,307 \cdot 0,669 - 0,443 \cdot 2,058 + 0,75 \approx 0,044;$$
$$x_3^{(1)} = -0,481x_1^{(0)} - 0,013x_2^{(0)} + 2,058 = -0,481 \cdot 0,669 - 0,013 \cdot 0,75 + 2,058 \approx 1,746.$$

Очевидно, что условия (8.4) не выполнены:

$$\left|x_1^{(1)} - x_1^{(0)}\right| = |1,194 - 0,669| = 0,525 > \varepsilon; \quad \left|x_2^{(1)} - x_2^{(0)}\right| = |0,044 - 0,75| = 0,706 > \varepsilon;$$
$$\left|x_3^{(1)} - x_3^{(0)}\right| = |1,746 - 2,058| = 0,312 > \varepsilon.$$

Шаг 2. При $k = 1$ из (8.15) находим второе приближение:

$$x_1^{(2)} = -0{,}165x_2^{(1)} + 0{,}315x_3^{(1)} + 0{,}669 = -0{,}165 \cdot 0{,}044 + 0{,}315 \cdot 1{,}746 + 0{,}669 \approx 1{,}212;$$
$$x_2^{(2)} = 0{,}307x_1^{(1)} - 0{,}443x_3^{(1)} + 0{,}75 = 0{,}307 \cdot 1{,}194 - 0{,}443 \cdot 1{,}746 + 0{,}75 \approx 0{,}343;$$
$$x_3^{(2)} = -0{,}481x_1^{(1)} - 0{,}013x_2^{(1)} + 2{,}058 = -0{,}481 \cdot 1{,}194 - 0{,}013 \cdot 0{,}044 + 2{,}058 \approx 1{,}484.$$

Проверяем условия (8.4):

$$\left|x_1^{(2)} - x_1^{(1)}\right| = |1{,}212 - 1{,}194| = 0{,}018 > \varepsilon,\ \left|x_2^{(2)} - x_2^{(1)}\right| = |0{,}343 - 0{,}044| = 0{,}299 > \varepsilon,$$
$$\left|x_3^{(2)} - x_3^{(1)}\right| = |1{,}484 - 1{,}746| = 0{,}262 > \varepsilon.$$

И так далее. Полученные результаты представлены в таблице 8.1.

Таблица 8.1 – Результаты вычислений

k	$x_1^{(k)}$	$\left\|x_1^{(k)} - x_1^{(k-1)}\right\|$	$x_2^{(k)}$	$\left\|x_2^{(k)} - x_2^{(k-1)}\right\|$	$x_3^{(k)}$	$\left\|x_3^{(k)} - x_3^{(k-1)}\right\|$
0	0,669	–	0,75	–	2,058	–
1	1,194	0,525	0,044	0,706	1,746	0,312
2	1,212	0,018	0,343	0,299	1,484	0,262
3	1,08	0,132	0,465	0,122	1,479	0,005
4	1,058	0,022	0,426	0,039	1,544	0,065
5	1,085	0,027	0,391	0,035	1,554	0,010
6	1,094	0,009	0,395	0,004	1,541	0,013
7	1,089	0,005	0,403	0,008	1,537	0,004

Заканчиваем вычисления на седьмом шаге, т. к. для всех трёх переменных выполнены условия (8.4):

$$\left|x_1^{(7)} - x_1^{(6)}\right| = |1{,}089 - 1{,}094| = 0{,}005 < \varepsilon;\ \left|x_2^{(7)} - x_2^{(6)}\right| = |0{,}403 - 0{,}395| = 0{,}008 < \varepsilon;$$
$$\left|x_3^{(7)} - x_3^{(6)}\right| = |1{,}537 - 1{,}541| = 0{,}004 < \varepsilon.$$

Ответ: $\tilde{x}_1 = x_1^{(7)} \approx 1{,}09;\ \tilde{x}_2 = x_2^{(7)} \approx 0{,}40;\ \tilde{x}_3 = x_3^{(7)} \approx 1{,}54$.

Вывод: сравнивая результаты с методами простой итерации и Зейделя, отмечаем более высокую скорость сходимости метода Якоби по сравнению с простой итерацией. Однако при более «сильной» сходимости (нормы матрицы *B* из формулы (8.8) меньше единицы) метод Якоби сходится медленнее, чем метод Зейделя.

Для лучшей сходимости можно применить метод релаксации.

Контрольные вопросы

1 Что означает диагональное преобладание по строкам матрицы?
2 Каковы матрица перехода и вектор правой части для метода Якоби?
3 Каковы условия сходимости метода релаксации?
4 Что такое метод верхней релаксации?
5 Что называется спектром и радиусом спектра матрицы?

Варианты заданий даны в лабораторной работе № 2.

9 Лабораторная работа № 9. Приближённое решение полной проблемы собственных значений

Цель работы: изучение метода Крылова и метода вращений для решения полной проблемы собственных значений.

1 Теоретические сведения. Пусть A – действительная числовая квадратная матрица размера $n \times n$. Ненулевой вектор $X = \left(x_1, \ldots, x_n\right)^T$, удовлетворяющий условию

$$A \cdot X = \lambda \cdot X \ , \tag{9.1}$$

называется собственным вектором матрицы A, а число λ – соответствующим собственным значением. Собственные значения находятся как корни характеристического уравнения

$$| A - \lambda E | = P_n(\lambda) = 0, \tag{9.2}$$

где $P_n(\lambda)$ – характеристический или собственный многочлен.

Замечание 1 – Если для собственного значения λ_i найден собственный вектор X^i, то вектор μX^i, где μ – произвольное число, также является собственным вектором, соответствующим этому же собственному значению λ_i.

Замечание 2 – Симметрическая матрица имеет полный спектр λ_i, $i = \overline{1,n}$ действительных собственных значений; положительно определённая симметрическая матрица имеет полный спектр действительных положительных собственных значений.

Полной проблемой собственных значений называется поиск всего спектра матрицы, т. е. всех собственных значений и всех соответствующих им собственных векторов. Полную проблему можно решать как точными, так и итерационными методами. Точные методы заключаются в построении и решении собственного многочлена матрицы.

Итерационные методы состоят в построении числовой последовательности, предел которой является собственным значением, и последовательности векторов, имеющей своим пределом собственный вектор. В этих методах используется многократное умножение матрицы на вектор.

1.1 Метод А. Н. Крылова. Пусть собственный многочлен квадратной матрицы A порядка n

$$P_n(\lambda) = \det(\lambda E - A) = \lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + p_2\lambda^{n-2} + \ldots p_{n-1}\lambda^1 + p_n \ . \tag{9.3}$$

Известно, что матрица A обращает свой собственный многочлен в нуль, т. е.

$$A^n + p_1 A^{n-1} + p_2 A^{n-2} + \ldots p_{n-1} A^1 + p_n E = 0 \ . \tag{9.4}$$

Возьмём произвольный ненулевой вектор $y^{(0)} = \left(y_1^{(0)},\ldots,y_n^{(0)}\right)^T$.

Умножая обе части равенства (9.4) справа на $y^{(0)}$, получим

$$A^n y^{(0)} + p_1 A^{n-1} y^{(0)} + p_2 A^{n-2} y^{(0)} + \ldots p_{n-1} A^1 y^{(0)} + p_n y^{(0)} = \vec{0} \ . \qquad (9.5)$$

Обозначим

$$A^k y^{(0)} = y^{(k)},\ k = \overline{1,n}, \qquad (9.6)$$

тогда равенство (9.5) принимает вид

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \ldots p_{n-1} y^{(1)} + p_n y^{(0)} = \vec{0} \qquad (9.7)$$

или

$$\begin{pmatrix} y_1^{(n-1)} & y_1^{(n-2)} \ldots y_1^{(0)} \\ y_2^{(n-1)} & y_2^{(n-2)} \ldots y_2^{(0)} \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ y_n^{(n-1)} & y_n^{(n-2)} \ldots y_n^{(0)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \ldots \\ p_n \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} y_1^{(n)} \\ y_2^{(n)} \\ \ldots \\ y_n^{(n)} \end{pmatrix}, \qquad (9.8)$$

где

$$y^{(k)} = \begin{pmatrix} y_1^{(k)} \\ \ldots \\ y_n^{(k)} \end{pmatrix},\ k = \overline{1,n}.$$

Векторное равенство (9.8) эквивалентно системе уравнений

$$p_1 y_j^{(n-1)} + p_2 y_j^{(n-2)} + \ldots p_{n-1} y_j^{(1)} + p_n y_j^{(0)} = -y_j^{(n)},\ j = \overline{1,n}, \qquad (9.9)$$

из которой можно определить неизвестные коэффициенты $p_1,\ p_2,\ldots,\ p_n$.

Так как на основании формулы (9.6)

$$y^{(k)} = A^k y^{(k-1)}\ ,\ k = \overline{1,n},$$

то координаты $y_1^{(k)},\ y_2^{(k)},\ldots\ y_n^{(k)}$ вектора $y^{(k)}$ последовательно вычисляются по формулам

$$y_i^{(1)} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ y_j^{(0)}\ ,\ y_i^{(2)} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ y_j^{(1)}\ ,\ldots,\ y_i^{(n)} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ y_j^{(n-1)}\ . \qquad (9.10)$$

Таким образом, определение коэффициентов характеристического многочлена (9.3) методом Крылова сводится к решению СЛАУ (9.8), коэффициенты которой вычисляются по формулам (9.10), причём координаты начального вектора $y^{(0)}$ произвольны. Если система (9.8) имеет единственное решение, то её корни p_1, $p_2, \ldots$, p_n являются коэффициентами характеристического многочлена (9.3). Это решение может быть найдено, например, методом Гаусса. Если система (9.8) не имеет единственного решения, то задача усложняется. В этом случае рекомендуется изменить начальный вектор.

1.2 Метод вращений или метод Якоби. Метод используется для решения полной проблемы собственных значений симметрической матрицы и основан на преобразовании подобия исходной матрицы $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ с помощью ортогональной матрицы H.

Две матрицы A и $A^{(i)}$ называются *подобными* ($A \sim A^{(i)}$), если $A^{(i)} = H^{-1}AH$ или $A = HA^{(i)}H^{-1}$, где H – невырожденная матрица.

В методе вращений в качестве H берётся ортогональная матрица, такая, что $HH^T = H^TH = E$, т. е. $H^T = H^{-1}$. При реализации метода вращений преобразование подобия применяется к исходной матрице A многократно:

$$A^{(k+1)} = \left(H^{(k)}\right)^{-1} \cdot A^{(k)} \cdot H^{(k)} = \left(H^{(k)}\right)^{T} \cdot A^{(k)} \cdot H^{(k)}, \quad k = 0,1,2,\ldots \tag{9.11}$$

Формула (9.11) определяет итерационный процесс с начальным приближением $A^{(0)} = A$. На *k*-й итерации для некоторого выбираемого при решении задачи недиагонального элемента $a_{ij}^{(k)}, i \neq j$, определяется ортогональная матрица $H^{(k)}$, приводящая этот элемент $a_{ij}^{(k+1)}$ (а также и $a_{ji}^{(k+1)}$) к нулю. При этом на каждой итерации в качестве $a_{ij}^{(k+1)}$ выбирается наибольший по модулю. Матрица $H^{(k)}$, называемая матрицей вращения Якоби, зависит от угла $\varphi^{(k)}$ и имеет вид:

$$
\begin{array}{cl}
\left(\begin{array}{ccccccccccc}
1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \cdots & 0 & \cos\varphi^{(k)} & 0 & \cdots & 0 & -\sin\varphi^{(k)} & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \cdots & 0 & \sin\varphi^{(k)} & 0 & \cdots & 0 & \cos\varphi^{(k)} & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1
\end{array}\right) &
\begin{array}{l}
\\ \\ \\ \leftarrow i\text{-я строка} \\ \\ \\ \\ \leftarrow j\text{-я строка} \\ \\ \\ \\
\end{array} \\
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & \uparrow & & & & \uparrow & & & \\
 & & & i\text{-й столбец} & & & & j\text{-й столбец} & & &
\end{array} &
\end{array} .
$$

В данной ортогональной матрице элементы на главной диагонали единичные, кроме $h_{ii}^{(k)} = \cos\varphi^{(k)}$ и $h_{jj}^{(k)} = \cos\varphi^{(k)}$, а остальные элементы нулевые, за исключением $h_{ij}^{(k)} = -\sin\varphi^{(k)}$, $h_{ji}^{(k)} = \sin\varphi^{(k)}$ (h_{ij} – элементы матрицы H).

Угол поворота $\varphi^{(k)}$ определяется по формуле

$$\operatorname{tg} 2\varphi^{(k)} = \frac{2a_{ij}^{(k)}}{a_{ii}^{(k)} - a_{jj}^{(k)}} = \overline{P}_k \quad \Rightarrow \quad \varphi^{(k)} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} \overline{P}_k, \tag{9.12}$$

где $|2\varphi^{(k)}| \leqslant \frac{\pi}{2}$, $i < j$, (a_{ij} выбирается в верхней треугольной наддиагональной части матрицы A).

Замечание 3 – В двухмерном пространстве с введённой в нём системой координат Oxy с ортонормированным базисом $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ матрица вращения легко получается из рисунка 9.1, где система координат $Ox'y'$ повернута на угол φ:

$$\begin{cases} \vec{i}' = \vec{i}\cos\varphi + \vec{j}\sin\varphi, \\ \vec{j}' = -\vec{i}\sin\varphi + \vec{j}\cos\varphi. \end{cases}$$

Тогда для компонент $\vec{i}', \vec{j}'$ будем иметь $\left(\vec{i}', \vec{j}'\right) = \left(\vec{i}, \vec{j}\right) \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$. Отсюда следует, что в двухмерном пространстве матрица вращения имеет вид $H = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$. Отметим, что при $n = 2$ для решения задачи требуется только одна итерация.

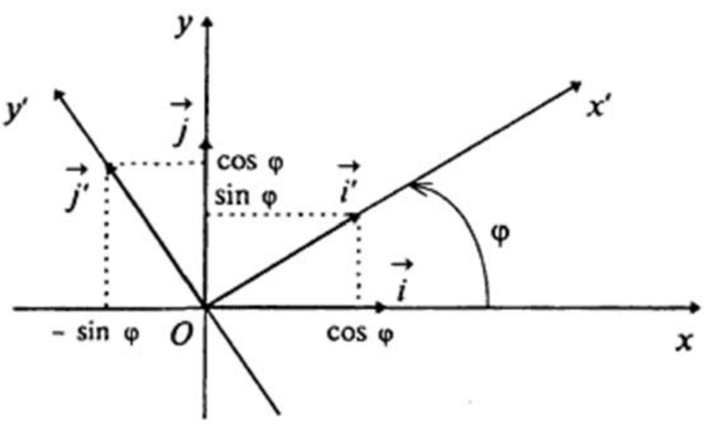


Рисунок 9.1 – Поворот системы координат

1.3 Алгоритм метода вращений.

1 Положить $k = 0$, $A(0) = A$ и задать $\varepsilon > 0$.

2 Выделить в верхней треугольной наддиагональной части матрицы $A^{(k)}$ максимальный по модулю элемент $a_{ij}^{(k)}$, $i < j$. Если $\left|a_{ij}^{(k)}\right| \le \varepsilon$ для всех $i \ne j$,

процесс завершить. Собственные значения определяются по формуле $\lambda_i(A^{(k)}) = a_{ii}^{(k)},\ i = 1,\ldots,n$.

Собственные векторы X^i находятся как i-е столбцы матрицы, получающейся в результате перемножения:

$$\nu_k = H^{(0)} \cdot H^{(1)} \cdot H^{(2)} \cdot \ldots \cdot H^{(k-1)} = \left(X^1, X^2, X^3, \ldots, X^n\right).$$

Если $\left|a_{ij}^{(k)}\right| > \varepsilon$, процесс продолжается.

3 Найти угол поворота по формуле $\varphi^{(k)} = \dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{2a_{ij}^{(k)}}{a_{ii}^{(k)} - a_{jj}^{(k)}}$.

4 Составить матрицу вращения $H^{(k)}$.

5 Вычислить очередное приближение $A^{(k+1)} = \left(H^{(k)}\right)^T A^{(k)} H^{(k)}$. Положить $k = k+1$ и перейти к пункту 2.

Замечание 4 – Используя обозначение $\overline{P}_k$ из (9.12), можно в п. 3 алгоритма вычислять элементы матрицы вращения по формулам

$$\sin\varphi^{(k)} = \operatorname{sign}\overline{P}_k \cdot \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+\overline{P}_k^{\,2}}}\right)},\ \ \cos\varphi^{(k)} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{1+\overline{P}_k^{\,2}}}\right)}\ .$$

Замечание 5 – Контроль правильности выполнения действий по каждому повороту осуществляется проверкой сохранения следа преобразуемой матрицы.

2 Постановка задачи 1. Методом Крылова найти характеристический многочлен матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

3 Решение задачи 1. Выберем начальный вектор $y^{(0)} = \left(1,0,0,0\right)^T$.

Используя формулы (9.10), определим координаты векторов

$$y^{(k)} = A^k y^{(0)}\ ,\ k = \overline{1,n}.$$

Имеем

$$y^{(1)} = Ay^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}; \; y^{(2)} = Ay^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 22 \\ 18 \\ 20 \end{pmatrix};$$

$$y^{(3)} = Ay^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ 22 \\ 18 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 208 \\ 178 \\ 192 \\ 242 \end{pmatrix}; \; y^{(4)} = Ay^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 208 \\ 178 \\ 192 \\ 242 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2108 \\ 1704 \\ 1656 \\ 1992 \end{pmatrix}.$$

Составим систему (9.8):

$$\begin{pmatrix} y_1^{(3)} & y_1^{(2)} & y_1^{(1)} & y_1^{(0)} \\ y_2^{(3)} & y_2^{(2)} & y_2^{(1)} & y_2^{(0)} \\ y_3^{(3)} & y_3^{(2)} & y_3^{(1)} & y_3^{(0)} \\ y_4^{(3)} & y_4^{(2)} & y_4^{(1)} & y_4^{(0)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} y_1^{(4)} \\ y_2^{(4)} \\ y_3^{(4)} \\ y_4^{(4)} \end{pmatrix},$$

которая в данном случае будет иметь вид:

$$\begin{pmatrix} 208 & 30 & 1 & 1 \\ 178 & 22 & 2 & 0 \\ 192 & 18 & 3 & 0 \\ 242 & 20 & 4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 2108 \\ 1704 \\ 1656 \\ 1992 \end{pmatrix}.$$

Решив эту систему, получим $p_1 = -4$; $p_2 = -40$; $p_3 = -56$; $p_4 = -20$. Следовательно, $\det(\lambda E - A) = \lambda^4 - 4\lambda^3 - 40\lambda^2 - 56\lambda - 20$.

Определение собственных чисел матрицы состоит в решении полученного характеристического уравнения каким-либо методом.

4 Постановка задачи 2. Для матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ методом вращений найти собственные значения и собственные векторы с точностью $\varepsilon = 10^{-10}$.

5 Решение задачи 2.

Шаг 1.

1 Положим $k = 0,\; A^{(0)} = A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

2 Выше главной диагонали имеется только один элемент $a_{ij} = a_{12} = 1 > \varepsilon$.

3 Находим угол поворота матрицы по формуле (9.12), используя в расчётах 11 цифр после запятой в соответствии с заданной точностью:

$$\mathrm{tg}\,2\varphi^{(0)} = \frac{2a_{ij}}{a_{ii} - a_{jj}} = \frac{2}{2-3} = -2 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \sin\varphi^{(0)} \approx -0{,}52573111212; \\ \cos\varphi^{(0)} \approx 0{,}85065080835. \end{array}\right.$$

4 Сформируем матрицу вращения:

$$H^{(0)} = \begin{pmatrix} \cos\varphi^{(0)} & -\sin\varphi^{(0)} \\ \sin\varphi^{(0)} & \cos\varphi^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}85065080835 & 0{,}52573111212 \\ -0{,}52573111212 & 0{,}85065080835 \end{pmatrix}.$$

5 Выполним первую итерацию:

$$A^{(1)} = \left(H^{(0)}\right)^T \cdot A^{(0)} \cdot H^{(0)} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0{,}85065080835 & -0{,}52573111212 \\ 0{,}52573111212 & 0{,}85065080835 \end{pmatrix} \cdot A^{(0)} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}85065080835 & 0{,}52573111212 \\ -0{,}52573111212 & 0{,}85065080835 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1{,}38196601125 & -4{,}04620781325 \cdot 10^{-12} \\ -4{,}04587474634 \cdot 10^{-12} & 3{,}61803398874 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, след матрицы с заданной точностью сохраняется, т. е. $\sum_{i=1}^{2} a_{ii}^{(0)} = \sum_{i=1}^{2} a_{ii}^{(1)} = 5$. Положим $k = 1$ и начнём шаг 2 с п. 2.

Шаг 2.

2 Максимальный по модулю наддиагональный элемент $|a_{12}| = 4{,}04620781325 \cdot 10^{-12} < \varepsilon = 10^{-10}$, вычисления завершаем.

Для решения задачи с заданной точностью потребовалась одна итерация, полученную матрицу можно считать диагональной.

Ответ: собственные значения есть диагональные элементы матрицы $A^{(0)}$:

$$\lambda_1 = 1{,}38196601125\,,\ \lambda_2 = 3{,}61803398874\,.$$

Соответствующие собственные векторы есть столбцы матрицы $H^{(0)}$:

$$X^1 = \begin{pmatrix} 0{,}85065080835 \\ -0{,}52573111212 \end{pmatrix},\ X^2 = \begin{pmatrix} 0{,}52573111212 \\ 0{,}85065080835 \end{pmatrix}.$$

Контрольные вопросы

1 В чём заключается полная проблема собственных значений?
2 В чём суть точных методов решения полной проблемы?
3 В чём состоит геометрический смысл метода вращения?

Варианты заданий к лабораторной работе № 9.

Задача 1. Методом Крылова найти характеристический многочлен симметрической матрицы $A_{4\times4}$ – основной матрицы линейной системы, заданной в вариантах заданий к лабораторной работе № 4 (согласно варианту).

Задача 2. Методом вращений найти собственные значения и собственные векторы матрицы с точностью $\varepsilon = 10^{-6}$.

1 $\begin{pmatrix} 1,23 & 0,04 & 0,21 \\ 0,04 & 2,23 & 0,06 \\ 0,21 & 0,06 & 1,43 \end{pmatrix}$.

2 $\begin{pmatrix} 7,6 & 0,5 & 0,4 \\ 0,5 & 9,1 & 1,4 \\ 0,4 & 1,4 & 5,8 \end{pmatrix}$.

3 $\begin{pmatrix} 2,24 & -0,48 & 0,23 \\ -0,48 & 1,44 & 0,31 \\ 0,23 & 0,31 & 1,55 \end{pmatrix}$.

4 $\begin{pmatrix} 1,13 & 0,22 & -0,33 \\ 0,22 & 1,23 & 0,07 \\ -0,33 & 0,07 & 2,78 \end{pmatrix}$.

5 $\begin{pmatrix} 2,08 & -0,03 & -0,04 \\ -0,03 & 1,27 & -0,08 \\ -0,04 & -0,08 & 1,21 \end{pmatrix}$.

6 $\begin{pmatrix} 1,22 & -0,11 & 0,31 \\ -0,11 & 2,12 & -0,22 \\ 0,31 & -0,22 & 1,51 \end{pmatrix}$.

7 $\begin{pmatrix} 3,12 & 0,81 & 1,94 \\ 0,81 & 3,15 & 0,15 \\ 1,94 & 0,15 & 5,87 \end{pmatrix}$.

8 $\begin{pmatrix} 2,71 & 0,32 & 1,33 \\ 0,32 & 5,74 & 1,87 \\ 1,33 & 1,87 & 5,72 \end{pmatrix}$.

9 $\begin{pmatrix} 2,7 & 0,9 & -0,5 \\ 0,9 & -2,8 & 0,7 \\ -0,5 & 0,7 & 3,4 \end{pmatrix}$.

10 $\begin{pmatrix} 3,6 & 0,8 & -0,7 \\ 0,8 & 3,6 & 0,9 \\ -0,7 & 0,9 & 3,3 \end{pmatrix}$.

11 $\begin{pmatrix} 3,7 & 0,9 & -0,5 \\ 0,9 & 3,6 & 0,5 \\ -0,5 & 0,5 & 2,3 \end{pmatrix}$.

12 $\begin{pmatrix} 3,8 & 0,7 & -0,2 \\ 0,7 & 1,3 & -0,7 \\ -0,2 & -0,7 & 3,5 \end{pmatrix}$.

13 $\begin{pmatrix} 3,2 & -0,2 & -0,47 \\ -0,2 & 3,9 & 0,41 \\ -0,47 & 0,41 & 2,5 \end{pmatrix}$.

14 $\begin{pmatrix} 3,8 & -0,8 & 0,15 \\ -0,8 & 4,2 & -0,31 \\ 0,15 & -0,31 & 3,5 \end{pmatrix}$.

15 $\begin{pmatrix} 3,8 & -1,3 & 0,1 \\ -1,3 & 4,2 & 1,12 \\ 0,1 & 1,12 & 4,5 \end{pmatrix}$.

16 $\begin{pmatrix} 3,23 & 0,34 & 0,25 \\ 0,34 & 1,23 & 0,34 \\ 0,25 & 0,34 & 1,11 \end{pmatrix}$.

17 $\begin{pmatrix} 2,6 & -0,5 & 0,15 \\ -0,5 & 4,3 & 1,1 \\ 0,15 & 1,1 & 4,8 \end{pmatrix}$.

18 $\begin{pmatrix} 3,71 & -1,48 & 0,43 \\ -1,48 & 4,94 & 0,56 \\ 0,43 & 0,56 & 3,85 \end{pmatrix}$.

19 $\begin{pmatrix} 4,13 & -1,22 & 1,33 \\ -1,22 & 5,63 & 1,07 \\ 1,33 & 1,07 & 4,18 \end{pmatrix}$.

20 $\begin{pmatrix} 6,08 & -1,03 & -1,32 \\ -1,03 & 7,27 & 1,22 \\ -1,32 & 1,22 & 5,21 \end{pmatrix}$.

21 $\begin{pmatrix} 5,81 & -1,31 & 2,31 \\ -1,31 & 8,12 & -1,22 \\ 2,31 & -1,22 & 11,66 \end{pmatrix}$.

22 $\begin{pmatrix} 8,14 & 2,31 & 1,54 \\ 2,31 & 7,15 & -1,15 \\ 1,54 & -1,15 & 10,87 \end{pmatrix}$.

23 $\begin{pmatrix} 6,32 & -3,32 & 1,33 \\ -2,32 & 12,72 & 1,37 \\ 1,33 & 1,37 & 7,72 \end{pmatrix}$.

24 $\begin{pmatrix} 5,3 & 0,91 & -0,34 \\ 0,91 & 4,8 & 0,72 \\ -0,34 & 0,72 & 2,21 \end{pmatrix}$.

25 $\begin{pmatrix} 7,6 & -1,8 & -2,7 \\ -1,8 & 6,6 & 1,91 \\ -2,7 & 1,91 & 12,3 \end{pmatrix}$.

26 $\begin{pmatrix} 3,7 & -0,9 & -0,5 \\ -0,9 & 6,63 & 0,54 \\ -0,5 & 0,54 & 3,3 \end{pmatrix}$.

27 $\begin{pmatrix} 8,83 & -0,71 & 0,2 \\ -0,71 & 4,34 & 0,7 \\ 0,2 & 0,7 & 4,5 \end{pmatrix}$.

28 $\begin{pmatrix} 7,21 & -0,25 & 0,41 \\ -0,25 & 3,9 & 0,48 \\ 0,41 & 0,48 & 8,5 \end{pmatrix}$.

29 $\begin{pmatrix} 5,81 & -0,85 & 0,1 \\ -0,85 & 8,24 & 1,11 \\ 0,1 & 1,11 & 12,57 \end{pmatrix}$.

30 $\begin{pmatrix} 7,8 & 1,22 & -1,15 \\ 1,22 & 14,2 & -2,1 \\ -1,15 & -2,1 & 9,5 \end{pmatrix}$.

10 Лабораторная работа № 10. Приближённое решение частичной проблемы собственных значений

Цель работы: изучение степенного метода (метода итераций) для решения частичной проблемы собственных значений.

1 Теоретические сведения. *Частичной проблемой* собственных значений называется задача отыскания одного или нескольких собственных значений матрицы и соответствующих собственных векторов. Например, найти максимальное и минимальное по модулю собственные значения и соответствующие им собственные векторы.

Для решения частичной проблемы часто используется метод итераций или степенной метод. На его основе можно определить приближённо собственные значения матрицы A и спектральный радиус $\rho(A) = \max\limits_i |\lambda_i(A)|$.

Пусть матрица A имеет n линейно независимых собственных векторов X^i, $i = 1, \ldots, n$, и собственные значения матрицы A таковы, что

$$\rho(A) = |\lambda_1(A)| > |\lambda_2(A)| \geq \ldots \geq |\lambda_n(A)|.$$

Алгоритм метода итераций.

1 Выбрать произвольное начальное (нулевое) приближение собственного вектора $X^{1(0)}$ (второй индекс в скобках здесь и далее указывает номер приближения, а первый индекс без скобок соответствует номеру собственного значения). Положить $k = 0$.

2 Найти $X^{1(1)} = AX^{1(0)}$, $\lambda_1^{(1)} = \dfrac{x_i^{1(1)}}{x_i^{1(0)}}$, где i – любой номер $1 \leq i \leq n$, и положить $k = 1$.

3 Вычислить $X^{1(k+1)} = A \cdot X^{1(k)}$.

4 Найти $\lambda_1^{(k+1)} = \dfrac{x_i^{1(k+1)}}{x_i^{1(k)}}$, где $x_i^{1(k+1)}$, $x_i^{1(k)}$ – соответствующие координаты векторов $X^{1(k+1)}$ и $X^{1(k)}$. При этом может быть использована любая координата с номером i, $1 \leq i \leq n$.

5 Если $\Delta = \left|\lambda_1^{(k+1)} - \lambda_1^{(k)}\right| \leq \varepsilon$, процесс завершить и положить $\lambda_1 \cong \lambda_1^{k+1}$. Если $\Delta > \varepsilon$, положить $k = k + 1$ и перейти к п. 3.

После проведения нескольких итераций рекомендуется «гасить» растущие компоненты получающегося собственного вектора. Это осуществляется нормировкой вектора, например, по формуле $\dfrac{X^{1(k)}}{\left\|X^{1(k)}\right\|_1}$, где векторная норма $\|X\|_1 = \max\limits_i |x_i|$ – максимум среди модулей элементов столбца.

2 Постановка задачи. Для матрицы $A=\begin{pmatrix}5 & 1 & 2\\ 1 & 4 & 1\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}$ найти спектральный радиус степенным методом с точностью $\varepsilon = 0{,}1$.

3 Решение задачи.

1 Выберем начальное приближение собственного вектора $X^{(0)} = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix}^T$ и положим $k = 0$.

2 Найдём первый собственный вектор $X^{1(0)} = AX^{1(0)} = \begin{pmatrix}5 & 1 & 2\\ 1 & 4 & 1\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\ 6\\ 6\end{pmatrix}$ и собственное значение $\lambda_1^{(1)} = \dfrac{x_1^{1(1)}}{x_1^{1(0)}} = \dfrac{8}{1} = 8$. Положим $k = 1$.

3 Вычислим $X^{1(2)} = AX^{1(1)} = \begin{pmatrix}5 & 1 & 2\\ 1 & 4 & 1\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}8\\ 6\\ 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}58\\ 38\\ 40\end{pmatrix}$.

4 Найдём $\lambda_1^{(2)} = \dfrac{x_1^{1(2)}}{x_1^{1(1)}} = \dfrac{58}{8} = 7{,}25$.

5 Так как $\left|\lambda_1^{(2)} - \lambda_1^{(1)}\right| = 0{,}75 > \varepsilon = 0{,}1$, то процесс продолжаем. Берём $k = 2$ и переходим к п. 3.

Результаты вычислений представлены в таблице 10.1.

Таблица 10.1 – Результаты вычислений

k	$x_1^{1(k)}$	$x_2^{1(k)}$	$x_3^{1(k)}$	$\lambda_1^{(k)}$	$\left\|\lambda_1^{(k)} - \lambda_1^{(k-1)}\right\|$
0	1	1	1	–	–
1	8	6	6	8	–
2	58	38	40	7,25	0,75
3	408	250	274	7,034	0,116
4	2838	1682	1888	6,9559	$0{,}078 < \varepsilon$

Точность достигнута на четвёртой итерации. Таким образом, в качестве приближённого значения берётся $\lambda_1 = \lambda_1^{(4)} = 6{,}9559$, а в качестве собственного вектора принимается $X^1 = X^{1(4)} = \begin{pmatrix}2838 & 1682 & 1888\end{pmatrix}^T$.

Так как собственный вектор определяется с точностью до постоянного множителя, то его обычно нормируют, т. е. делят все его компоненты на величину нормы. Имеем $\left\|X^1\right\|_1 = \max\limits_i \left|X_i^1\right| = \max\{2838, 1682, 1888\} = 2838$. Тогда

$$X^1 = \frac{1}{2838} \cdot \begin{pmatrix} 2838 \\ 1682 \\ 1888 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,000 \\ 0,5927 \\ 0,6652 \end{pmatrix}.$$

Замечание – В качестве собственного значения можно взять не только отношение $\frac{x_1^{1(4)}}{x_1^{1(3)}} = \frac{2838}{408} \approx 6{,}9559$, но и $\frac{x_2^{1(4)}}{x_2^{1(3)}} = \frac{1682}{250} \approx 6,7280$, $\frac{x_3^{1(4)}}{x_3^{1(3)}} = \frac{1888}{274} \approx 6,8905$, а также их среднее арифметическое $\frac{6,9559 + 6,728 + 6,8905}{3} \approx 6,8581$.

Контрольные вопросы

1 В чём заключается частичная проблема собственных значений?
2 Что называется спектральным радиусом матрицы?
3 Как вычисляется векторная норма $\|X\|_1$?

Варианты заданий к лабораторной работе № 10.

С точностью $\varepsilon = 0{,}1$ найти степенным методом спектральный радиус для симметрической матрицы $A_{4\times4}$ – основной матрицы линейной системы, заданной в вариантах к лабораторной работе № 4 (согласно варианту).

Список литературы

1 **Бахвалов, Н. С.** Численные методы: учебное пособие для вузов / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. – Москва: Бином; Лаборатория знаний, 2007. – 636 с.

2 **Икрамов, Х. Д.** Численные методы для симметричных линейных систем (прямые методы) / Х. Д. Икрамов. – Москва : Наука, 1988. – 160 с.

3 **Икрамов, Х. Д.** Несимметричная проблема собственных значений / Х. Д. Икрамов. – Москва : Наука, 1991. – 240 с.

4 **Фаддеев, А. К.** Вычислительные методы линейной алгебры / А. К. Фаддеев, В. Н. Фаддеева. – Москва : Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1960. – 656 с.