

МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Физические методы контроля»

ТЕОРИЯ ФИЗИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ

*Методические рекомендации к практическим занятиям
для студентов направления подготовки
12.03.01 «Приборостроение» очной формы обучения*



Могилев 2021

УДК 530.2
ББК 30.13
Т33

Рекомендовано к изданию
учебно-методическим отделом
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Физические методы контроля» «26» марта 2021 г.,
протокол № 7

Составитель ст. преподаватель Н. В. Герасименко

Рецензент канд. техн. наук, доц. С. В. Болотов

Изложены методические основы и расчетные соотношения для решения задач по теории физических полей. Приведены задачи для самостоятельной работы студентов.

Учебно-методическое издание

ТЕОРИЯ ФИЗИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ

Ответственный за выпуск	С. С. Сергеев
Корректор	А. А. Подошевка
Компьютерная верстка	Н. П. Полевничая

Подписано в печать . Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Печать трафаретная. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 16 экз. Заказ №

Издатель и полиграфическое исполнение:
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования
«Белорусско-Российский университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/156 от 07.03.2019.
Пр-т Мира, 43, 212022, г. Могилев.

© Белорусско-Российский
университет, 2021

Содержание

Введение.....	4
1 Практическое занятие № 1. Расчет электростатических и магнитостатических полей методом суперпозиции	5
2 Практическое занятие № 2. Применение теоремы Гаусса и функций векторного анализа для расчета электрических полей.....	8
3 Практическое занятие № 3. Обоснование и применение метода зеркальных изображений для расчета электрических и магнитных полей.....	11
4 Практическое занятие № 4. Расчет тепловых полей с применением уравнений теплопроводности, конвективного и лучистого теплообмена	13
5 Практическое занятие № 5. Расчет характеристик акустических полей при взаимодействии с различными средами	16
6 Практическое занятие № 6. Расчет полей с применением уравнения Лапласа в различных системах координат	18
7 Практическое занятие № 7. Расчет переменных электромагнитных полей в проводящих средах.....	21
8 Практическое занятие № 8. Расчет излучения и отражения электромагнитных волн. Расчет радиационных полей.	25
Список литературы	26

Введение

Освоение ряда специальных дисциплин основано на особенностях взаимодействия физических полей с веществом. Курс «Теория физических полей» предполагает заложить базовые знания студентам в области принципов и методов анализа физических полей, основанных на имеющихся достижениях акустики, радиационной физики, оптики, теплофизики, электроники, радиофизики, а также привить понимание основных явлений в этих областях науки.

Полученные в процессе изучения теории физических полей навыки позволяют анализировать физические поля различной физической природы с применением существующих теоретических методов; проводить анализ основных параметров полей экспериментальными методами, а также получить представление о физических основах приборов и методов контроля технологических процессов и окружающей среды.

1 Практическое занятие № 1. Расчет электростатических и магнитостатических полей методом суперпозиции

Цель работы: освоить методику расчета электростатических и магнитных полей простейшей конфигурации методом, основанным на принципе суперпозиции.

1.1 Краткие теоретические сведения

Закон Кулона для точечных зарядов

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r},$$

где q_1, q_2 – точечные заряды;

\vec{r} – радиус-вектор;

ϵ – диэлектрическая проницаемость среды;

ϵ_0 – электрическая постоянная, $\epsilon_0 \approx 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м;

r – расстояние между зарядами, м;

\vec{F} – сила взаимодействия между зарядами, Н.

Напряженность электрического поля точечного заряда определяется следующим выражением:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}.$$

Потенциал электрического поля точечного заряда вычисляется по формуле

$$\varphi = \int_r^{\infty} (\vec{E} d\vec{l}) = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \frac{q}{r},$$

где r – расстояние от заряда до точки, в которой определяется напряженность и потенциал электрического поля;

$d\vec{l}$ – элемент длины траектории, по которой ведется интегрирование.

Принцип суперпозиции электрических полей заключается в следующем.

Если в пространстве, заполненном диэлектриком (следует отметить, что здесь рассматриваются диэлектрики, *не обладающие самопроизвольной поляризацией*, к каким относится, например, сегнетова соль), расположена система точечных зарядов $q_1, q_2, q_3, \dots, q_n$, то напряженность поля, создаваемого этими зарядами в точке M , определяется выражением

$$\vec{E}(M) = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i,$$

$$\text{где } \vec{E}_i(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \frac{q_i \vec{r}_i}{r_i^2};$$

\vec{r}_i – радиус-вектор, проведенный из точки, где располагается заряд q_i , в точку наблюдения M .

Потенциал в точке M , определяемый системой зарядов, равен:

$$\varphi(M) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \frac{q_i}{r_i}.$$

Связь между напряженностью электрического поля и потенциалом выражается формулой

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi.$$

1.2 Пример решения задачи

Пример – Определить напряженность и потенциал электрического поля, создаваемого двумя разноименными зарядами, расположенными на расстоянии L . Рассмотреть два случая, когда расстояние от зарядов до точки, где определяется поле, сравнимо с L , и когда это расстояние значительно превышает L .

Решение

Сделаем чертеж (рисунок 1.1).

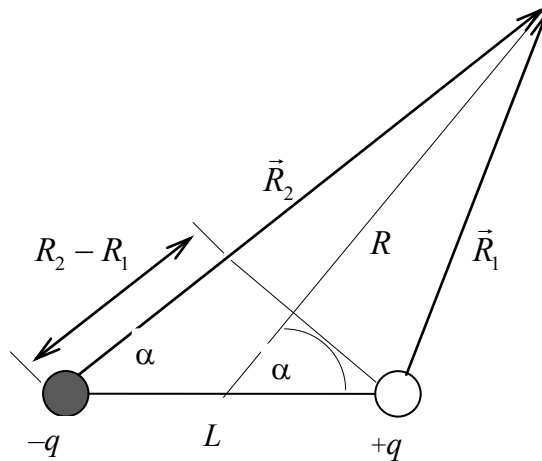


Рисунок 1.1 – Чертеж к примеру

При $L \approx R_1; R_2$

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 R_1} - \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 R_2} = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \left(\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2} \right);$$

$$\vec{E} = \frac{q\vec{R}_1}{4\pi\epsilon\epsilon_0 R_1^3} - \frac{q\vec{R}_2}{4\pi\epsilon\epsilon_0 R_2^3} = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \left(\frac{\vec{R}_1}{R_1^3} - \frac{\vec{R}_2}{R_2^3} \right).$$

При $L \ll R_1; R_2$

$$R_2 - R_1 \approx L \cos \alpha,$$

тогда $\varphi = \frac{qL \cos \alpha}{4\pi\epsilon\epsilon_0 R^2}$.

Так как $\vec{E} = -\text{grad } \varphi$, то для нахождения величины напряженности электрического поля определим координаты этого вектора в полярной системе координат. Известно, что

$$E_R = -\frac{d\varphi}{dR} = \frac{qL \cos \alpha}{2\pi\epsilon\epsilon_0 R^3}; E_\alpha = -\frac{1}{R} \frac{d\varphi}{d\alpha} = \frac{qL \sin \alpha}{4\pi\epsilon\epsilon_0 R^3};$$

$$E = \sqrt{E_R^2 + E_\alpha^2} = \frac{qL}{4\pi\epsilon\epsilon_0 R^3} \sqrt{4 \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} = \frac{qL}{4\pi\epsilon\epsilon_0 R^3} \sqrt{3 \cos^2 \alpha + 1}.$$

Из формул видно, что $E = 0$ лишь в точке, расположенной посередине между зарядами диполя.

1.3 Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. В каждой из вершин равностороннего треугольника со стороной 1 м, находящегося в воде ($\epsilon = 81$), располагаются положительные электрические заряды величиной 1 К. Определить потенциал, создаваемый зарядами в центре треугольника.

Задача 2. В каждой из вершин равностороннего треугольника со стороной 1 м, находящегося в воздухе, располагаются положительные электрические заряды величиной 1 К. Определить напряженность электрического поля, создаваемую зарядами в центре треугольника.

Задача 3. В каждой из вершин квадрата со стороной 1 м, находящегося в воде ($\epsilon = 81$), располагаются положительные электрические заряды величиной 1 К. Определить силу, действующую на каждый из зарядов.

Задача 4. В каждой из семи вершин куба со стороной 1 м, находящегося в воздухе, располагаются положительные электрические заряды величиной 1 К. Определить потенциал, создаваемый зарядами в восьмой вершине куба.

Задача 5. В трех вершинах тетраэдра со стороной 1 м, находящегося в воде ($\epsilon = 81$), располагаются одинаковые положительные электрические заряды. Определить величину этих зарядов, если потенциал в четвертой вершине равен 10 В.

2 Практическое занятие № 2. Применение теоремы Гаусса и функций векторного анализа для расчета электрических полей

Цель работы: освоить методику расчета электрических полей простейшей конфигурации с помощью теоремы Гаусса.

2.1 Краткие теоретические сведения

Теорема Гаусса в интегральной форме имеет вид:

$$\oint_S (\vec{D} \cdot d\vec{S}) = Q,$$

где \vec{D} – вектор электрической индукции;

$d\vec{S}$ – вектор элементарной площадки, выбранной на замкнутой поверхности S ;

Q – величина электрического заряда, находящегося внутри замкнутой поверхности S .

Градиент представляет собой векторную функцию скалярного аргумента.

В декартовой системе координат

$$\text{grad } \varphi = \vec{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – единичные векторы по координатам x, y, z соответственно.

В цилиндрической системе координат

$$\text{grad } \varphi = \vec{r}_0 \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \vec{\alpha}_0 \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} + \vec{z}_0 \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

В сферической системе координат

$$\text{grad } \varphi = \vec{R}_0 \frac{\partial \varphi}{\partial R} + \vec{\theta}_0 \frac{1}{R} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + \vec{\alpha}_0 \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}.$$

Дивергенция представляет собой скалярную функцию векторного аргумента.

В декартовой системе координат

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z},$$

где E_x, E_y, E_z – координаты вектора \vec{E} .

В цилиндрической системе координат

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rE_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial E_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial E_z}{\partial z}.$$

В сферической системе координат

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} (R^2 E_R) + \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \cdot E_\theta) + \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial E_\alpha}{\partial \alpha}.$$

Ротор представляет собой векторную функцию векторного аргумента, результат векторного произведения оператора Гамильтона с векторным полем.

В декартовой системе координат

$$\operatorname{rot} \vec{E} = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \vec{i} - \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \vec{k}.$$

В цилиндрической системе координат

$$\operatorname{rot} \vec{E} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \alpha} - \frac{\partial E_\alpha}{\partial z} \right) \vec{r}_0 - \left(\frac{\partial E_z}{\partial r} - \frac{\partial E_r}{\partial z} \right) \vec{\alpha}_0 + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial (rE_\alpha)}{\partial r} - \frac{\partial E_r}{\partial \alpha} \right) \vec{z}_0.$$

В сферической системе координат

$$\operatorname{rot} \vec{E} = \frac{1}{R \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (E_\alpha \sin \theta) - \frac{\partial E_\theta}{\partial \alpha} \right] \vec{R}_0 + \frac{1}{R} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial E_R}{\partial \alpha} - \frac{\partial (RE_\alpha)}{\partial R} \right] \vec{\theta}_0 + \frac{1}{R} \left[\frac{\partial (RE_\theta)}{\partial R} - \frac{\partial E_R}{\partial \theta} \right] \vec{\alpha}_0.$$

2.2 Пример решения задачи

Пример – Найти распределение плотности заряда в пространстве, если вектор электрической индукции описывается выражением

$$\vec{D}(r, \alpha, z) = (r^2 \sin \alpha + z^2) \vec{r}_0 + (r^2 + z) \cos \alpha \cdot \vec{\alpha}_0 + \sin r \alpha z \sin z \cdot \vec{z}_0.$$

Решение

Воспользуемся выражением для дивергенции в цилиндрической системе координат.

Плотность заряда в цилиндрической системе координат:

$$\rho(r, \alpha, z) = \operatorname{div} \vec{D}(r, \alpha, z) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r D_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial D_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial D_z}{\partial z}.$$

$$D_r = r^2 \sin \alpha + z^2;$$

$$D_\alpha = (r^2 + z) \cos \alpha;$$

$$D_z = \sin r \alpha z \cdot \sin z.$$

Откуда следует, что

$$\begin{aligned} \rho(r, \alpha, z) &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r^3 \sin \alpha + r z^2) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \alpha} (r^2 + z) + \frac{\partial}{\partial z} (\sin r \alpha z \cdot \sin z) = \\ &= \frac{1}{r} (3r^2 \sin \alpha + z^2) + \frac{1}{r} (r^2 + z) (-\sin \alpha) + r \alpha \cos r \alpha z \cdot \sin z + \cos z \sin r \alpha z = \\ &= 3r \sin \alpha + \frac{z^2}{r} - r \sin \alpha - \frac{z^2 \sin \alpha}{r} + r \alpha \cos r \alpha z \cdot \sin z + \cos z \sin r \alpha z. \end{aligned}$$

2.3 Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Потенциал электростатического поля выражается функцией $\varphi(x, y, z) = x^2 y z + \sin y$. Определить напряженность электрического поля в точке $A(1, 1, 1)$.

Задача 2. Потенциал электростатического поля в среде с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 2$ выражается функцией $\varphi(x, y, z) = \cos x + \cos y + \cos z$. Определить плотность электрических зарядов, создающих это поле, в точке $A(1, 1, 1)$.

Задача 3. Определить, является ли потенциальным электрическое поле, создаваемое электрическими зарядами с объемной плотностью $\rho(x, y, z) = 6x + 6y + 6z$, напряженность которого описывается выражением $\vec{E}(x, y, z) = \vec{i}x^3 + \vec{j}y^3 + \vec{k}z^3$.

3 Практическое занятие № 3. Обоснование и применение метода зеркальных изображений для расчета электрических и магнитных полей

Цель работы: получить представление о методе зеркальных изображений и способах расчета полей на его основе.

3.1 Краткие теоретические сведения

Идея метода зеркальных изображений заключается в том, что вместо неоднородной среды рассматривается однородная среда, влияние же неоднородности учитывается введением *фиктивных зарядов*.

Если заряд находится над проводящей поверхностью, то для нахождения поля вводится фиктивный заряд, равный по величине и обратный по знаку действительному заряду и расположенный зеркально относительно проводящей плоскости. Поле рассчитывается от системы этих двух зарядов.

Если заряд q находится вблизи раздела двух диэлектриков, то для расчета поля вводятся еще два фиктивных заряда q_1 и q_2 , при этом q_1 расположен зеркально относительно заряда q ; а заряд q_2 – в том же месте, где и заряд q . В среде, где расположен действительный заряд q , поле находится от двух зарядов q и q_1 . Поле в другом полупространстве находится от одного заряда q_2 .

При этом

$$q_1 = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} q; \quad q_2 = \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} q,$$

где ε_1 – диэлектрическая проницаемость среды полупространства, где находится действительный заряд q ;

ε_2 – диэлектрическая проницаемость среды полупространства, где отсутствует заряд q .

3.2 Пример решения задачи

Пример – Определить потенциал и плотность заряда на поверхности проводящих плоскостей, составляющих прямой двухгранный угол, в точках A и B (рисунок 3.1), если поле создается зарядом q , расположенном на биссектрисе угла между плоскостями.

Решение

Полагаем, что расстояние от заряда до плоскостей равно r . Отобразим зеркально заряд q относительно плоскостей (см. рисунок 3.1).

Получаем систему из четырех зарядов q_1, q_2, q_3, q_4 . Легко видеть, что $q_1 = q$; $q_2 = -q$; $q_3 = q$; $q_4 = -q$. Так как точки A и B симметричны, то достаточно найти

искомые характеристики лишь для одной из них.

$$\varphi = \sum \varphi_i = 0 \text{ (в силу симметрии).}$$

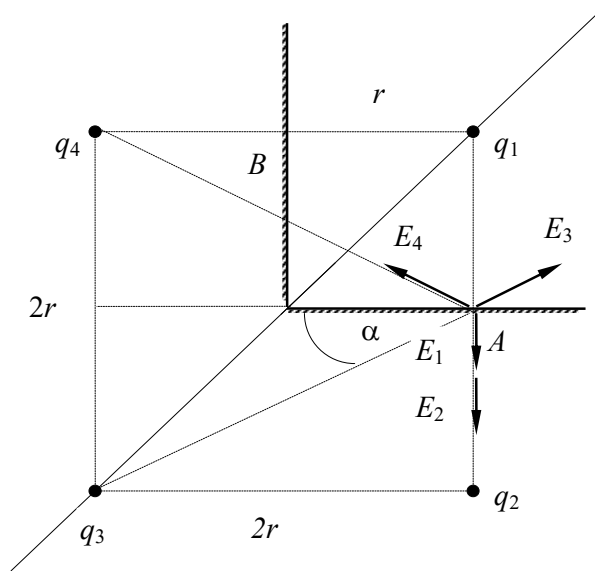


Рисунок 3.1 – Чертеж к примеру

Для нахождения плотности заряда σ используем граничное условие на границе раздела «диэлектрик – проводник» $\sigma = D_n = \epsilon \epsilon_0 E_n$, откуда найдем напряженность электрического поля в точке A :

$$E = \sum_{i=1}^4 E_i;$$

$$E_1 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2}; \quad E_2 = \frac{q_2}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2} = \frac{-q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2};$$

$$E_3 = \frac{q_3}{20\pi\epsilon\epsilon_0 r^2} = \frac{q}{20\pi\epsilon\epsilon_0 r^2}; \quad E_4 = \frac{q_4}{20\pi\epsilon\epsilon_0 r^2} = \frac{-q}{20\pi\epsilon\epsilon_0 r^2};$$

$$E = \sum_{i=1}^4 E_i = E_1 + E_2 - E_{3n} - E_{4n};$$

$$E_{3n} = E_{4n} = \frac{q}{20\pi\epsilon\epsilon_0 r^2} \sin \alpha = \frac{q}{20\sqrt{5}\pi\epsilon\epsilon_0 r^2},$$

где $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Тогда

$$E = \frac{2q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2} - \frac{2q}{20\sqrt{5}\pi\epsilon\epsilon_0 r^2} = \frac{q}{2\pi\epsilon\epsilon_0 r^2} \left(1 - \frac{1}{5\sqrt{5}}\right);$$

$$\sigma(A) = \epsilon\epsilon_0 E = \frac{q}{2\pi_0 r^2} \left(1 - \frac{1}{5\sqrt{5}}\right).$$

3.3 Задачи для самостоятельного решения

Задача. Если заряд q находится вблизи границы раздела двух диэлектриков, то для расчета поля вводятся еще два фиктивных заряда q_1 и q_2 , при этом заряд q_1 расположен зеркально относительно зарядов q , а заряд q_2 – в том же месте, где и заряд q . В верхнем полупространстве, где расположен действительный заряд q , поле находится от двух зарядов q и q_1 . Поле в нижнем полупространстве находится только от одного заряда q_2 . Найти величину этих фиктивных зарядов.

4 Практическое занятие № 4. Расчет тепловых полей с применением уравнений теплопроводности, конвективного и лучистого теплообмена

Цель работы: освоить методику расчета тепловых полей.

4.1 Краткие теоретические сведения

Стационарное уравнение теплопроводности применяется в случаях, когда температура поверхностей стенок остается постоянной во времени. В декартовой системе координат уравнение имеет вид:

$$a^2 \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{q}{c\rho} = 0,$$

где a – коэффициент температуропроводности, характеризующий скорость распространения температуры в пространстве, м²/с; $a^2 = \frac{\lambda}{c\rho}$;

λ – коэффициент теплопроводности, показывающий способность тел передавать теплоту, Вт/(м·К);

c – удельная теплоемкость вещества, равная количеству тепловой энергии, необходимой для нагрева на 1 К единицы массы вещества, Дж/(кг·К);

ρ – плотность вещества, кг/м³;

q – объемная плотность тепловых источников. Если источники тепла внутри рассматриваемой области пространства отсутствуют, $q = 0$ Вт/м³.

В случаях, когда требуется учесть процесс нагрева или остывание тела (области пространства) применяют нестационарное уравнение теплопроводности. Данное уравнение имеет вид:

$$a^2 \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{q}{c\rho} = \frac{\partial T}{\partial t}.$$

Связь температуры и теплового потока задается законом теплопроводности Фурье

$$d\vec{h} = -\lambda \cdot dS \cdot dt \cdot \text{grad } T.$$

Теплообмен между поверхностью твердого тела и соприкасающимся с ним жидким или газообразным теплоносителем называется теплоотдачей. Количество теплоты, переданное горячим теплоносителем стенке в единицу времени определяется законом (уравнением) Ньютона:

$$\Phi = \alpha S (T_H - T_{CT}),$$

где α – коэффициент теплоотдачи;

S – площадь стенки;

T_H – температура теплоносителя;

T_{CT} – температура стенки.

Процесс переноса тепла от одной подвижной среды (горячей) с температурой T_{n1} к другой подвижной среде (холодной) с температурой T_{n2} через однослойную твердую стенку толщиной h и площадью S из материала с коэффициентом теплопроводности λ называется теплопередачей. Количество теплоты, передаваемое в единицу времени, описывается законом теплопередачи

$$\Phi = \frac{S(T_{n1} - T_{n2})}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{h}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}},$$

4.2 Пример решения задачи

Пример – Внутри плоской стенки толщиной 10 см из материала с коэффициентом теплопроводности $\lambda = 10$ Вт/(м·К) расположен распределенный источник тепла с объемной плотностью мощности $q = 10$ Вт/м³. Одна из поверхностей стенки находится при температуре 0 °С, а вторая 20 °С. Определить температуру посередине стенки. Схема стенки приведена на рисунке 4.1.

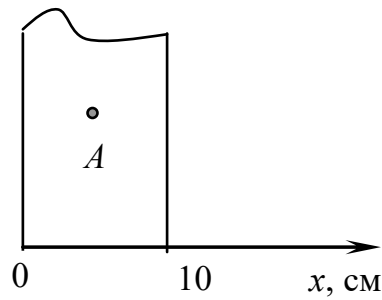


Рисунок 4.1 – Схема к расчету теплопроводности стенки

Решение

Для решения применим стационарное уравнение теплопроводности, т. к. температура поверхностей стенок остается постоянной во времени.

Уравнение теплопроводности в применении к данной задаче сводится к одномерному:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{q}{\lambda} = 0.$$

Такое уравнение решается непосредственным интегрированием:

$$T(x) = \frac{q}{2\lambda} x^2 + c_1 x + c_2.$$

Так как температура по шкале Кельвина отличается от температуры по шкале Цельсия на константу, распределение температуры в градусах Цельсия будет определяться таким же выражением:

$$t(x) = \frac{q}{2\lambda} x^2 + c_1 x + c_2.$$

Постоянные интегрирования определим из решения граничной задачи.

Из условия на первой поверхности стенки $c_2 = 0$, а из условия на второй поверхности

$$20 = \frac{10}{2 \cdot 10} \cdot 0,01 + 0,1c_1.$$

Отсюда $c_1 = 199,95$.

С учетом этого зависимость температуры поперек стенки определяется выражением

$$T(x) = 0,5x^2 + 199,95x.$$

Теперь из этого выражения находим значение температуры посередине стенки в точке A :

$$T(A) = 0,5 \cdot 0,05^2 + 199,95 \cdot 0,05 = 100,1 \text{ } ^\circ\text{C}.$$

4.3 Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Определить величину теплового потока, проходящего через кирпичную стенку дома толщиной 0,5 м и площадью 10 м², если температура внутри дома равна 20 °С, а на улице – минус 30 °С. Коэффициент теплопроводности кирпича равен 0,77 Вт/(м·К).

Задача 2. Определить величину теплового потока, проходящего через трехслойную стенку дома, содержащую два слоя кирпича толщиной 0,25 м, между которыми расположен слой воздуха толщиной 10 см. Площадь стенки 10 м², температура внутри дома равна 20 °С, а на улице – минус 30 °С. Коэффициент теплопроводности кирпича равен 0,77 Вт/(м·К), а воздуха – 0,02 Вт/(м·К).

Задача 3. Определить, во сколько раз больной человек излучает больше тепловой энергии чем здоровый, если температура здорового человека равна 36 °С, а больного 40 °С.

5 Практическое занятие № 5. Расчет характеристик акустических полей при взаимодействии с различными средами

Цель работы: изучить методы расчета акустических полей и акустических характеристик сред.

5.1 Краткие теоретические сведения

Сила, отнесенная к единице площади, называется *механическим напряжением*, выражается формулой

$$\vec{\sigma}_n = \frac{d\vec{F}}{dS},$$

где dS – элемент площади, на которую действует сила.

Модуль Юнга E – это коэффициент пропорциональности между относительным удлинением (сжатием) Δl стержня длиной l и его натяжением T или давлением P :

$$T = E \frac{\Delta l}{l} \text{ или } P = -E \frac{\Delta l}{l}.$$

В случае растягивающих сил относительное удлинение Δl положительно, а в случае сжимающих – отрицательно.

Отношение относительного поперечного сжатия к относительному удлинению называется *коэффициентом Пуассона*.

$$\nu = -\frac{\Delta d}{d} / \frac{\Delta l}{l} = -\frac{\Delta d}{d} \cdot \frac{l}{\Delta l}.$$

Продольные звуковые волны в виде изменения акустического (избыточного) давления, которое мы обозначим $P_a(x, t)$, описываются волновым уравнением

$$\frac{\partial^2 P_a}{\partial t^2} - C^2 \Delta P_a = 0,$$

где Δ – оператор Лапласа, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$;

C – скорость звуковой волны.

В твердых телах могут распространяться как продольные, так и поперечные звуковые волны. Они описываются также волновым уравнением, основной величиной в которых является продольное или поперечное смещение, которое мы обозначим $u_l(x, t)$ и $u_\tau(x, t)$ соответственно:

$$\frac{\partial^2 u_l}{\partial t^2} - C_l^2 \Delta u_l = 0; \quad \frac{\partial^2 u_\tau}{\partial t^2} - C_\tau^2 \Delta u_\tau = 0.$$

5.2 Пример решения задачи

Пример – Найти скорость продольных и поперечных акустических колебаний в стальном стержне и в большом стальном изделии, если $\rho = 8 \cdot 10^3$ кг/м³, $E = 2 \cdot 10^{11}$ Н/м², $\nu = 0,25$.

Решение

Для продольных волн в стержне

$$C_l = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{11}}{8 \cdot 10^3}} = 5 \cdot 10^3 \text{ м/с.}$$

Для продольных волн в стальном изделии

$$C_l = \sqrt{\frac{E'}{\rho}} = \sqrt{\frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{E}{\rho}} = C \sqrt{\frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}} =$$

$$= 5 \cdot 10^3 \sqrt{\frac{1-0,25}{(1+0,25)(1-0,5)}} = 5,48 \cdot 10^3 \text{ м/с.}$$

Для поперечных волн в стальном изделии

$$C_\tau = \sqrt{\frac{G}{\rho}} = \sqrt{\frac{E}{2(1+\nu)\rho}} = C \sqrt{\frac{1}{2(1+\nu)}} = 5 \cdot 10^3 \sqrt{\frac{1}{2,5}} = 3,16 \cdot 10^3 \text{ м/с.}$$

5.3 Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Найти скорость распространения крутильных колебаний вдоль стального стержня.

Задача 2. Найти длину продольных и поперечных акустических волн в стали, воде и воздухе для акустических колебаний частотой 5 МГц.

6 Практическое занятие № 6. Расчет полей с применением уравнения Лапласа в различных системах координат

Цель работы: расчет электростатических и магнитных полей простейшей конфигурации методом, основанным на принципе суперпозиции.

6.1 Краткие теоретические сведения

Уравнение Лапласа представляет собой однородное дифференциальное уравнение второго порядка в частных производных, с помощью которого описывают установившиеся распределения (поля) различной физической природы.

В одномерном случае уравнение Лапласа решается непосредственным интегрированием (см. практическое занятие № 4). Для двухмерных и трехмерных случаев применяются специальные методы математической физики, в результате которых общее решение уравнения Лапласа получается в виде разложения в ряд по функциям Бесселя в цилиндрической системе координат и в виде разложения в ряд по полиномам Лежандра в сферической системе координат, а также при помощи функций Грина.

Уравнение Лапласа имеет следующий вид:

– в декартовой системе координат

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0;$$

– в цилиндрической системе координат

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0;$$

– в сферической системе координат

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial \varphi}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{R^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} = 0.$$

6.2 Пример решения задачи

Пример – Схема решения задачи заключается в определении распределения потенциала внутри конденсатора с помощью уравнения Лапласа, а затем по распределению потенциала можно найти распределение напряженности внутри конденсатора. Так как обкладки конденсатора представляют собой часть плоскости и внутри конденсатора отсутствуют свободные заряды, то для расчета распределения потенциала внутри конденсатора нужно применить уравнение Лапласа

Но т. к. расстояние между обкладками конденсатора значительно меньше размера пластин, то напряженность электрического поля будет направлена внутри конденсатора перпендикулярно пластинам (рисунок 6.1).

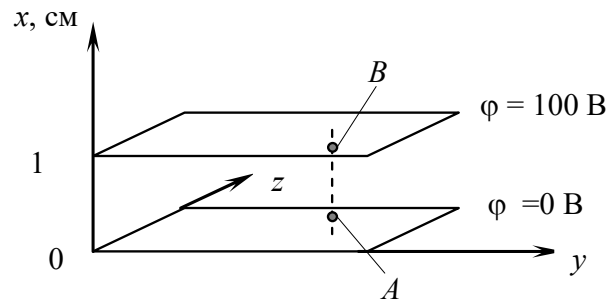


Рисунок 6.1 – Конфигурация плоского конденсатора

Поэтому из трехмерного уравнения Лапласа получится одномерное, содержащее только координату x .

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0.$$

В результате из уравнения в частных производных получается обыкновенное дифференциальное уравнение, которое решается двукратным интегрированием. После первого интегрирования левой и правой частей получаем

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = c_1,$$

где c_1 – постоянная интегрирования.

После второго интегрирования левой и правой частей получаем

$$\varphi(x) = c_1 x + c_2,$$

где c_2 – постоянная интегрирования.

Эти постоянные интегрирования найдем из граничных условий, которые известны из условия задачи:

$$\varphi(0) = 0; \quad \varphi(0,01) = 100 \text{ В}.$$

Тогда из первого граничного условия получаем, что $c_2 = 0$, а из второго – $100 = c_1 \cdot 0,01$. Откуда $c_1 = 10000$. Тогда распределение потенциала внутри обкладок конденсатора определяется зависимостью

$$\varphi(x) = 10000x.$$

Для нахождения потенциала в точках A и B , подставим их координаты в выражение для потенциала:

$$\varphi(A) = 10000 \cdot 0,001 = 10 \text{ В}; \quad \varphi(B) = 10000 \cdot 0,009 = 90 \text{ В}.$$

Так как напряженность электростатического поля связана с потенциалом зависимостью $\vec{E} = -\text{grad}\varphi$, то для ее нахождения необходимо найти градиент потенциала.

$$\vec{E} = -\vec{i} \frac{\partial}{\partial x}(10000x) = -10000 \text{ В/м}.$$

Отсюда видно, что напряженность электрического поля внутри конденсатора постоянна и обратна направлению оси x .

6.3 Задачи для самостоятельного решения

Задача. Исследовать электрическое поле цилиндрического конденсатора, сечение которого представлено на рисунке 6.2.

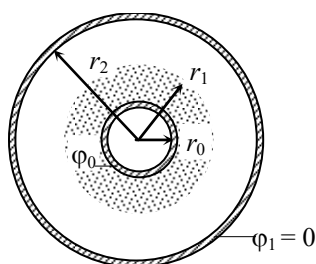


Рисунок 6.2 – Конфигурация цилиндрического конденсатора

7 Практическое занятие № 7. Расчет переменных электромагнитных полей в проводящих средах

Цель работы: изучить методы расчета переменных электромагнитных полей; проанализировать механизм затухания электромагнитных волн.

7.1 Краткие теоретические сведения

В результате расчета переменных электромагнитных полей определяются значения амплитуд напряженности электрического и магнитного полей электромагнитных волн в различных точках пространства.

Напряженности электрического и магнитного полей в электромагнитной волне связаны между собой коэффициентом пропорциональности, называемым волновым сопротивлением $Z_в$, которое для проводящей среды представляет собой комплексное число

$$\dot{Z}_в = \sqrt{\frac{\omega\mu\mu_0}{2\gamma}} + i\sqrt{\frac{\omega\mu\mu_0}{2\gamma}},$$

где ω – круговая частота электромагнитной волны;

γ – удельная проводимость среды, в которой распространяется электромагнитная волна.

Значения мгновенных напряженностей поля плоской электромагнитной волны, распространяющейся вдоль оси z в проводящей среде выражаются следующим образом:

$$H(z) = H_m e^{-kz} \sin(\omega t - kz + \varphi_H);$$

$$E(z) = H_0 \sqrt{\frac{\omega\mu\mu_0}{\gamma}} e^{-kz} \sin(\omega t - kz + \varphi_H + 45^\circ),$$

где k – показатель поглощения и показатель фазы волны, $k = \sqrt{\frac{\omega\gamma\mu\mu_0}{2}}$.

7.2 Пример решения задачи

Пример – Определить глубину проникновения электромагнитных волн с частотами $f_1 = 50$ Гц, $f_2 = 50$ МГц и $f_3 = 50$ ТГц в пластины из меди ($\rho_1 = 1,78 \cdot 10^{-8}$ Ом/м) и графита ($\rho_2 = 3 \cdot 10^{-5}$ Ом/м). Определить длину волны и фазовую скорость волн в этих средах.

Решение

Так как медь и графит являются немагнитными материалами, то их относительная магнитная проницаемость равна единице.

Определим коэффициент затухания волн в меди:

$$k = \sqrt{\frac{\omega\gamma\mu_a}{2}} = \sqrt{\frac{2\pi f\mu\mu_0}{2\rho}} = \sqrt{\frac{\pi f\mu_0}{\rho}}.$$

Для волны частотой 50 Гц

$$k_1 = \sqrt{\frac{3,14 \cdot 50 \cdot 1,26 \cdot 10^{-6}}{1,78 \cdot 10^{-8}}} = 105,4 \text{ м}^{-1}.$$

Для волны частотой 50 МГц

$$k_2 = \sqrt{\frac{3,14 \cdot 50 \cdot 10^6 \cdot 1,26 \cdot 10^{-6}}{1,78 \cdot 10^{-8}}} = 105420 \text{ м}^{-1}.$$

Для волны частотой 50 ТГц

$$k_3 = \sqrt{\frac{3,14 \cdot 50 \cdot 10^{12} \cdot 1,26 \cdot 10^{-6}}{1,78 \cdot 10^{-8}}} = 1,054 \cdot 10^8 \text{ м}^{-1}.$$

Определим теперь глубину проникновения волн в медь.

Для волны частотой 50 Гц

$$\Delta_1 = \frac{1}{k_1} = \frac{1}{105,4} = 9,48 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 9,48 \text{ мм}.$$

Для волны частотой 50 МГц

$$\Delta_2 = \frac{1}{k_2} = \frac{1}{105420} = 9,48 \cdot 10^{-6} \text{ м} = 9,48 \text{ мкм}.$$

Для волны частотой 50 ТГц

$$\Delta_3 = \frac{1}{k_3} = \frac{1}{1,054 \cdot 10^8} = 9,48 \cdot 10^{-9} \text{ м} = 9,48 \text{ нм}.$$

Определим теперь глубину проникновения волн в графит.
Для этого определим коэффициент затухания волн в графите.
Для волны частотой 50 Гц

$$k_{11} = \sqrt{\frac{3,14 \cdot 50 \cdot 1,26 \cdot 10^{-6}}{3 \cdot 10^{-5}}} = 2,57 \text{ м}^{-1}.$$

Для волны частотой 50 МГц

$$k_{22} = \sqrt{\frac{3,14 \cdot 50 \cdot 10^6 \cdot 1,26 \cdot 10^{-6}}{3 \cdot 10^{-5}}} = 2,57 \cdot 10^3 \text{ м}^{-1}.$$

Для волны частотой 50 ТГц

$$k_{33} = \sqrt{\frac{3,14 \cdot 50 \cdot 10^{12} \cdot 1,26 \cdot 10^{-6}}{3 \cdot 10^{-5}}} = 2,57 \cdot 10^6 \text{ м}^{-1}.$$

Определим теперь глубину проникновения волн в графит.

$$\text{Для волны частотой 50 Гц } \Delta_{11} = \frac{1}{k_{11}} = \frac{1}{2,57} = 0,39 \text{ м}.$$

$$\text{Для волны частотой 50 МГц } \Delta_{22} = \frac{1}{k_{22}} = \frac{1}{2,57 \cdot 10^3} = 3,9 \cdot 10^{-4} \text{ м} = 0,39 \text{ мм}.$$

$$\text{Для волны частотой 50 ТГц } \Delta_{33} = \frac{1}{k_{33}} = \frac{1}{2,57 \cdot 10^6} = 3,9 \cdot 10^{-7} \text{ м} = 0,39 \text{ мкм}.$$

Определим длину волны в медной пластине.

Длина волны в проводящей среде определяется по формуле

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\Delta.$$

Для волны частотой 50 Гц $\lambda_1 = 2\pi\Delta_1 = 6,28 \cdot 9,48 = 59,5$ мм.

Для волны частотой 50 МГц $\lambda_2 = 2\pi\Delta_2 = 6,28 \cdot 9,48 = 59,5$ мкм.

Для волны частотой 50 ТГц $\lambda_3 = 2\pi\Delta_3 = 6,28 \cdot 9,48 = 59,5$ нм.

Определим длину волны в графитовой пластине.

Для волны частотой 50 Гц $\lambda_{11} = 2\pi\Delta_{11} = 6,28 \cdot 0,39 = 2,45$ м.

Для волны частотой 50 МГц $\lambda_{22} = 2\pi\Delta_{22} = 6,28 \cdot 0,39 = 2,45$ мм.

Для волны частотой 50 ТГц $\lambda_{33} = 2\pi\Delta_{33} = 6,28 \cdot 0,39 = 2,45$ мкм.

Определим фазовую скорость в данных проводящих средах.

Фазовая скорость электромагнитной волны в проводящей среде вычисляется по формуле

$$v = \frac{\omega}{k} = \omega\Delta.$$

Тогда для медной пластины:

– для волны частотой 50 Гц $v_1 = 6,28 \cdot 50 \cdot 9,48 \cdot 10^{-3} = 2,98$ м/с;

– для волны частотой 50 МГц $v_2 = 6,28 \cdot 50 \cdot 10^6 \cdot 9,48 \cdot 10^{-6} = 2980$ м/с;

– для волны частотой 50 ТГц $v_{33} = 6,28 \cdot 50 \cdot 10^{12} \cdot 9,48 \cdot 10^{-9} = 2976$ км/с.

Фазовая скорость в графитовой пластине будет равна:

– для волны частотой 50 Гц $v_{11} = 6,28 \cdot 50 \cdot 3,9 \cdot 10^{-1} = 122,46$ м/с;

– для волны частотой 50 МГц $v_{22} = 6,28 \cdot 50 \cdot 10^6 \cdot 3,9 \cdot 10^{-4} = 122460$ м/с;

– для волны частотой 50 ТГц $v_{33} = 6,28 \cdot 50 \cdot 10^{12} \cdot 3,9 \cdot 10^{-7} = 1,22 \cdot 10^8$ м/с.

7.3 Задачи для самостоятельного решения

Задача. Напряженность магнитного поля электромагнитной волны, распространяющейся вглубь графитовой пластины с удельным сопротивлением $\rho = 3 \cdot 10^{-5}$ Ом/м на ее поверхности, описывается выражением $H(t) = 10 \sin(10^6 t + 45^\circ)$. Определить амплитуду и фазу вектора Пойтинга на глубине 1 мм от поверхности графитовой пластины.

8 Практическое занятие № 8. Расчет излучения и отражения электромагнитных волн. Расчет радиационных полей

Цель работы: изучить основные принципы расчета радиационных полей.

8.1 Краткие теоретические сведения

Основное уравнение радиоактивного распада имеет вид:

$$N = N_0 e^{-\Lambda t},$$

где N_0, N – числа атомов в начальный момент времени и момент времени t соответственно.

8.2 Примеры решения задач

Пример – В настоящее время в природном уране содержится 99,28 % ^{238}U и 0,72 % ^{235}U . Вычислить возраст Земли в предположении, что в момент образования Земли количества ^{238}U и ^{235}U были одинаковы. Период полураспада ^{238}U составляет 4,56 млрд лет, а ^{235}U – 770 млн лет.

Решение

Исходя из закона радиоактивного распада в настоящее время количество ядер ^{238}U равно $N_{238} = N_0 e^{-\frac{0,693}{T_{238}}t}$, а количество ядер ^{235}U равно $N_{235} = N_0 e^{-\frac{0,693}{T_{235}}t}$. Тогда отношение этих количеств будет определяться следующим выражением:

$$\frac{N_{238}}{N_{235}} = \frac{0,9928}{0,0072} = \frac{N_0 e^{-\frac{0,693}{T_{238}}t}}{N_0 e^{-\frac{0,693}{T_{235}}t}} = e^{-0,693t \left(\frac{1}{T_{238}} - \frac{1}{T_{235}} \right)}.$$

Логарифмируя левую и правую части последнего выражения, получим

$$\ln \frac{0,9928}{0,0072} = -0,693t \left(\frac{1}{T_{238}} - \frac{1}{T_{235}} \right).$$

Тогда

$$t = -\frac{\ln 137,9}{0,693 \left(\frac{T_{235} - T_{238}}{T_{235} T_{238}} \right)} = -\frac{4,93 \left(\frac{0,7 \cdot 10^9 \cdot 4,56 \cdot 10^9}{0,7 \cdot 10^9 - 4,56 \cdot 10^9} \right)}{0,693} =$$

$$= -\frac{7,11(-3,19 \cdot 10^9)}{3,86} = 5,9 \cdot 10^9 \text{ лет.}$$

8.3 Задачи для самостоятельного решения

Задача. Период полураспада ^{234}U равен $2,48 \cdot 10^5$ лет. Какое количество атомов ^{234}U осталось бы на Земле в настоящее время, если бы происходил только процесс радиоактивного распада этого элемента? Как объяснить, что в природном уране содержится примесь ^{234}U в количестве 0,055 %? Возраст Земли – 4,5 млрд лет.

Список литературы

- 1 **Бессонов, Л. А.** Теоретические основы электротехники. Электромагнитное поле: учебник для бакалавров / Л. А. Бессонов. – 11-е изд., стер. – Москва: Академия, 2016. – 272 с.
- 2 **Лесин, В. В.** Уравнения математической физики : учебник / В. В. Лесин. – Москва: КУРС; ИНФРА-М, 2020. – 240 с.
- 3 Ультразвуковой контроль: учебное пособие для вузов / Н. П. Алешин [и др.]; под ред. В. В. Ключева. – Москва: Спектр, 2011. – 288 с.
- 4 **Рябушко, А. П.** Высшая математика. Теория и задачи: учебное пособие в 5 ч. Ч. 3: Обыкновенные дифференциальные уравнения. Ряды. Кратные интегралы / А. П. Рябушко. – Минск: Вышэйшая школа, 2017. – 319 с.: ил.
- 5 **Красильников, В. А.** Введение в физическую акустику / В. А. Красильников, В. В. Крылов. – Москва: Наука, 1984. – 400 с.