МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Высшая математика»

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Методические рекомендации к практическим занятиям для студентов направления подготовки 01.03.04 «Прикладная математика» очной формы обучения

Могилев 2021

УДК 517.9
ББК 22.161.61
О66

Рекомендовано к изданию
учебно-методическим отделом
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Высшая математика» «27» мая 2021 г., протокол № 9

Составители: ст. преподаватель О. А. Маковецкая;
доц. И. И. Маковецкий

Рецензент канд. физ.-мат. наук, доц. В. А. Ливинская

Методические рекомендации разработаны на основе рабочей программы по дисциплине «Обыкновенные дифференциальные уравнения» для студентов направления подготовки 01.03.04 «Прикладная математика» и предназначены для использования при проведении практических занятий в третьем семестре.

Учебно-методическое издание

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Ответственный за выпуск	В. Г. Замураев
Корректор	И. В. Голубцова
Компьютерная верстка	Н. П. Полевничая

Подписано в печать . Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Печать трафаретная. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 56 экз. Заказ №

Издатель и полиграфическое исполнение:
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования
«Белорусско-Российский университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/156 от 07.03.2019.
Пр-т Мира, 43, 212022, г. Могилев.

Содержание

1 Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

1.1 Теоретическая часть

Дифференциальное уравнение первого порядка, разрешенное относительно производной, всегда можно записать в виде

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0, \tag{1.1}$$

где $P(x,y),Q(x,y)$ – некоторые функции.

Дифференциальное уравнение вида

$$f(x)dx+\varphi(y)dy=0, \tag{1.2}$$

где $f(x)$ и $\varphi(y)$ – непрерывные функции, называется уравнением с разделенными переменными.

Найдем общий интеграл уравнения (1.2). Пусть $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$, а $\Phi(y)$ – первообразная функции $\varphi(y)$. Тогда вид общего интеграла уравнения (1.2)

$$\int f(x)dx+\int\varphi(y)dt=C;$$

$$F(x)+\Phi(y)=C, \tag{1.3}$$

где C – произвольная постоянная.

Выражение (1.3) получено непосредственным интегрированием (1.2), а символы неопределенного интеграла обозначают не процесс получения неопределенного интеграла, а одну из первообразных подынтегральной функции.

Дифференциальное уравнение вида

$$M_1(x)\cdot N_1(y)dx+M_2(x)\cdot N_2(y)dy=0, \tag{1.4}$$

где $M_1(x),M_2(x),N_1(y),N_2(y)$ – некоторые непрерывные функции, называется уравнением с разделяющимися переменными.

Для перехода от уравнения (1.4) к уравнению (1.2) достаточно разделить уравнение (1.4) на $N_1(y)\cdot M_2(x)$, однако при этом следует отдельно рассмотреть корни уравнений $M_2(x)=0, N_1(y)=0$ во избежание потери решений.

Уравнение вида

$$y'=f(ax+by+c) \tag{1.5}$$

может быть сведено к уравнению с разделяющимися переменными с помощью замены $ax+by+c=z(x)$. Тогда уравнение (1.5) примет следующий вид:

$$\frac{dz}{dx} = bf\left(z\right) + a.$$

Это уравнение является уравнением с разделяющимися переменными, общий интеграл которого

$$\int \frac{dz}{bf\left(z\right) + a} = x + C.$$

1.2 Образцы решения примеров

1 Найти общий интеграл дифференциального уравнения $\sqrt{y^3}dy = \sin x dx$.

Данное дифференциальное уравнение является дифференциальным уравнением с разделенными переменными. Общий интеграл находим, интегрируя обе части исходного уравнения:

$$\frac{2}{5}y^{\frac{5}{2}} = -\cos x + C.$$

2 Найти общий интеграл дифференциального уравнения $y' = y\left(x^2 + e^x\right)$.

Воспользуемся дифференциальной формой записи и преобразуем это уравнение к виду уравнения с разделенными переменными, которое проинтегрируем для получения общего интеграла:

$$\frac{dy}{dx} = y\left(x^2 + e^x\right); \quad \frac{dy}{y} = \left(x^2 + e^x\right)dx \quad \left(y \neq 0\right); \quad \int \frac{dy}{y} = \int \left(x^2 + e^x\right)dx + C.$$

$\ln\left|y\right| = \dfrac{x^3}{3} + e^x + C$ – искомый общий интеграл, или в явном виде $y = e^{\frac{x^3}{3} + e^x + C}$.

$y = 0$ является решением исходного дифференциального уравнения. Таким образом, решениями исходного дифференциального уравнения являются функции $y = e^{\frac{x^3}{3} + e^x + C}$, $y = 0$.

3 Найти общее решение дифференциального уравнения $y' = \dfrac{1}{\ln\left(2x + y\right)} - 2$.

Используем замену $z = z\left(x\right) = 2x + y$. Получим $y' = z' - 2$ и новый вид уравнения:

$$z' - 2 = \frac{1}{\ln z} - 2; \; \frac{dz}{dx} = \frac{1}{\ln z}; \; \ln z dz = dx; \; \int \ln z dx = \int dx + C; \; z\ln z - z = x + C.$$

Вводя обратную замену, получаем $\left(2x + y\right)\left(\ln\left|2x + y\right| - 1\right) = x + C$ – искомый общий интеграл исходного дифференциального уравнения.

1.3 Задачи к занятию

Найти общие решения дифференциальных уравнений.

1 $2ydy = 3x^2dx$.

2 $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x-1}$.

3 $\frac{dy}{1+y^2} = \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

4 $1 + y' + y + xy' = 0$.

5 $y' + y\operatorname{tg} x = 0$.

6 $xyy' = \left(1 - x^2\right)^2$.

7 $y' = \cos^2\left(x - y\right)$.

8 $y' = \sqrt{2x + y + 1}$.

9 $y^{10}dy = \left(1 - 3x^3\right)dx$.

10 $\left(e^x + 1\right)dx = 6y^5dy$.

11 $\left(1 + x^2\right)dy - 2xydx = 0$.

12 $y' = y^2\cos x$.

13 $\sqrt{4 - y^2}dx + y\sqrt{9 - x^2}dy = 0$.

14 $e^{2x}\left(1 + y'\right) = 1$.

15 $y' = e^{x+2y}$.

Найти частные решения дифференциальных уравнений.

1 $dy = \left(x^2 - 1\right)dx$, если $y\left(1\right) = 4$.

2 $y' + \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{ctg} x} = 0$, если $y\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{6}$.

3 $\left(1 + x^2\right)dx = xydy$, если $y\left(2\right) = 1$.

1.4 Домашнее задание

Найти общие решения дифференциальных уравнений.

1 $y'\left(1 + 5y\right) = xy\sin\left(2x\right)$.

2 $y' = \left(10x + 5y + 1\right)^3$.

3 $y' - xy^3 = 0$.

4 $y' = \left(x + y\right)^{10} - 1$.

Найти частные решения дифференциальных уравнений.

1 $ydx + \operatorname{ctg} xdy = 0$, если $y\left(\frac{\pi}{3}\right) = -1$.

2 Однородные дифференциальные уравнения

2.1 Теоретическая часть

Функция $f\left(x, y, ..., z\right)$ называется однородной функцией степени *t*, если $f\left(kx, ky, ..., kz\right) = k^t f\left(x, y, ..., z\right)$.

Однородным дифференциальным уравнением называется дифференциальное уравнение вида $y' = f\left(y / x\right)$ или $M\left(x, y\right)dx + N\left(x, y\right)dy = 0$, если функции $M(x,y), N(x,y)$ – однородные функции одной и той же степени. Чтобы решить однородное дифференциальное уравнение, следует использовать подстановку $y = tx$, в результате применения которой исходное дифференциальное уравнение сведется к уравнению с разделяющимися переменными.

Уравнение вида $y' = f\left(\dfrac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$ приводится к однородному с помощью переноса начала координат в точку пересечения прямых $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ и $a_2x + b_2y + c_2 = 0$. Если эти прямые не пересекаются, то ввиду параллельности их нормальных векторов $a_1x + b_1y = k(a_2x + b_2y)$, следовательно, уравнение имеет вид $y' = F(a_1x + b_1y)$ и приводится к уравнению с разделяющимися переменными заменой $z = a_1x + b_1y$ или $z = a_1x + b_1y + c_1$.

Некоторые уравнения можно привести к однородным с помощью замены $y = z^m$. Число m в большинстве случаев заранее не известно. Чтобы его найти, надо в уравнении сделать замену $y = z^m$. Требуя, чтобы уравнение было однородным, определяют число m.

2.2 Образцы решения примеров

1 Решить уравнение $(x + y)dx = (x - y)dy$.

Данное уравнение является однородным. Применим к нему подстановку $y = tx$, при этом $dy = xdt + tdx$:

$$(x + tx)dx = (x - tx)(xdt + tdx);\ \frac{dx}{x} = \frac{1 - t}{1 + t^2}dt;$$

$$\ln|x| = \operatorname{arctg} t - \frac{1}{2}\ln\left(1 + t^2\right) + C,$$

откуда $\ln|x| = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} - \dfrac{1}{2}\ln\left(1 + \dfrac{y^2}{x^2}\right) + C$ – общий интеграл исходного дифференциального уравнения.

2 Решить уравнение $(x + y + 2)dx = (x - y + 2)dy$.

Имеем уравнение вида $y' = \dfrac{x + y + 2}{x - y + 2}$. Прямые $x + y + 2 = 0$ и $x - y + 2 = 0$ пересекаются в точке $(-2;0)$, поэтому используем преобразование $x_1 = x + 2, y_1 = y$. Получим уравнение

$$y_1' = \frac{x_1 + y_1}{x_1 - y_1}.$$

Это однородное уравнение, которое сводится к уравнению с разделяющимися переменными с помощью замены $y_1 = tx_1$. Далее

$$\frac{1-t}{1+t^2}dt = \frac{dx_1}{x_1};$$

$$\operatorname{arctg} t - \frac{1}{2}\ln\left(1+t^2\right) = \ln\left|x_1\right| + C;$$

$$\operatorname{arctg}\frac{y_1}{x_1} - \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{y_1^2}{x_1^2}\right) = \ln\left|x_1\right| + C.$$

Переходим к исходным переменным x, y. Обратной заменой получаем общий интеграл исходного дифференциального уравнения

$$\operatorname{arctg}\frac{y}{x+2} - \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{y^2}{\left(x+2\right)^2}\right) = \ln\left|x+2\right| + C.$$

3 Решить уравнение $2x^4yy' + y^4 = 4x^6$.

Используем замену $y = z^m$. Получим уравнение $2mx^4 \cdot z^{2m-1}z' + z^{4m} = 4x^6$. Это уравнение будет однородным при $m = \frac{3}{2}$, следовательно, исходное уравнение может быть сведено к однородному с помощью замены $y = z^{\frac{3}{2}}$. Применим эту подстановку. Получим новое уравнение $3x^4z^2z' + z^6 = 2x^6$.

Далее, используя замену $z = tx$, полученное уравнение сводится к уравнению с разделяющимися переменными

$$\frac{3t^2}{2-t^6-3t^3}dt = \frac{dx}{x},$$

общий интеграл которого имеет вид

$$\frac{1}{\sqrt{17}}\ln\frac{t^3+3/2+\sqrt{17}/2}{t^3+3/2-\sqrt{17}/2} = \ln\left|x\right| + C,$$

откуда общий интеграл исходного дифференциального уравнения

$$\frac{1}{\sqrt{17}}\ln\frac{y^2/x^3+3/2+\sqrt{17}/2}{y^2/x^3+3/2-\sqrt{17}/2} = \ln\left|x\right| + C.$$

2.3 Задачи к занятию

Решить следующие уравнения.

1 $(x+2y)dx - xdy = 0$.

2 $(y^2 - 2xy)dx + x^2dy = 0$.

3 $y^2 + x^2y' = xyy'$.

4 $xy' = y - xe^{y/x}$.

5 $(y + \sqrt{xy})dx = xdy$.

6 $(2x - 4y + 6)dx + (x + y - 3)dy = 0$.

7 $(2x + y + 1)dx - (4x + 2y - 3)dy = 0$.

8 $x - y - 1 + (y - x + 2)y' = 0$.

9 $x^3(y' - x) = y^2$.

10 $(x - y)dx + (x + y)dy = 0$.

11 $2x^3y' = y(2x^2 - y^2)$.

12 $(x^2 + y^2)y' = 2xy$.

13 $xy' - y = x\,\mathrm{tg}\dfrac{y}{x}$.

14 $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$.

15 $y' = y^2 - \dfrac{2}{x^2}$.

2.4 Домашнее задание

1 $xy' - y = (x+y)\ln\dfrac{x+y}{x}$.

2 $(x + 4y)y' = 2x + 3y - 5$.

3 $xy' = y\cos\ln\dfrac{y}{x}$.

4 $2xy' + y = y^2\sqrt{x - x^2y^2}$.

3 Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

3.1 Теоретическая часть

Линейным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида $y' + p(x)y = q(x)$.

Чтобы его решить, сначала следует решить уравнение $y' + p(x)y = 0$, которое является уравнением с разделяющимися переменными, в общем решении которого постоянная C заменяется на неизвестную функцию $C(x)$. Затем выражение, полученное для y, следует подставить в исходное уравнение и найти функцию $C(x)$.

В ряде случаев уравнение становится линейным, если поменять местами неизвестную функцию и независимую переменную.

3.2 Образцы решения примеров

1 Решить уравнение $xy' - 2y = 2x^4$.

Исходя из предположения, что $x \neq 0$, получим линейное уравнение первого порядка $y' - \frac{2}{x} y = 2x^3$. Сначала найдем решение уравнения:

$$y' - \frac{2}{x} y = 0\,;\ \frac{dy}{y} = \frac{2}{x} dx\,;\ \ln|y| = \ln|x| + \ln C(x);\ y = C(x) \cdot x\,.$$

Теперь выполним подстановку найденного решения уравнения без правой части в исходное уравнение:

$$C'(x)x + C(x) - \frac{2}{x} C(x) \cdot x = 2x^3\,;\ C'(x) = 2x^2\,;\ C(x) = \frac{2}{3} x^3 + C_1\,.$$

Окончательно получаем общее решение исходного дифференциального уравнения $y = \left(\frac{2}{3} x^3 + C_1 \right) \cdot x$.

2 Решить уравнение $y = \left(2x + y^3 \right) y'$.

Запишем это уравнение в дифференциальной форме $ydx = \left(2x + y^3 \right) dy$. Далее, поменяв местами искомую функцию и независимую переменную, получим линейное уравнение $\frac{dx}{dy} - 2x = y^3$, решение которого можно найти с помощью метода, описанного ранее.

3.3 Задачи к занятию

1 $(2x+1) y' = 4x + 2y$.

2 $\left(xy + e^x \right) dx - xdy = 0$.

3 $y = x\left(y' - x \cos x \right)$.

4 $(xy' - 1) \ln x = 2y$.

5 $\left(x + y^2 \right) dy = ydx$.

6 $y' + y \operatorname{tg} x = \sec x$.

7 $x\ y' + xy + 1 = 0$.

8 $2x\left(x^2 + y \right) dx = dy$.

9 $xy' + (x+1) y = 3x^2 e^{-x}$.

10 $\left(2e^y - x \right) y' = 1$.

3.4 Домашнее задание

Решить следующие уравнения.

1 $y' + \frac{2y}{x} = x^2$.

2 $y' + xy = x$.

3 $y' - \frac{y}{x} = \frac{1}{x^2}$.

Найти частные решения линейных дифференциальных уравнений, удовлетворяющих начальным условиям.

1 $y' + 3y = 1, y(0) = 0$.

2 $y' + 2 \operatorname{tg} x \cdot y = \cos^4 x, y(0) = -1$.

3 $y' - \operatorname{tg} x \cdot y = 0, y(0) = 0$.

4 Уравнение Бернулли

4.1 Теоретическая часть

Уравнение Бернулли в общем случае имеет вид

$$y' + p(x)y = q(x)y^n,\ n \neq 0,1, \qquad (4.1)$$

где $y = y(x)$ – неизвестная функция;

$p(x), q(x)$ – некоторые функции.

Путем введения замены $z = y^{1-n}$ любое уравнение Бернулли сводится к неоднородному линейному уравнению. Разделим уравнение (4.1) на y^n:

$$y'y^{-n} + p(x)y^{1-n} = q(x).$$

С учетом того, что $z' = \left(y^{1-n}\right)' = (1-n)y^{-n}y'$, получаем линейное неоднородное уравнение

$$\frac{1}{1-n}z' + p(x)z = q(x).$$

4.2 Образцы решения примеров

1 Решить уравнение Бернулли $xy' - 4y = x^2\sqrt{y}$.

Приведем это уравнение к виду (4.1), разделив на $x \neq 0$:

$$y' - 4\frac{y}{x} = x\sqrt{y}.$$

Используем подстановку, сводящую уравнение Бернулли к линейному, разделим уравнение на $\sqrt{y}$ и введем замену $z = y^{\frac{1}{2}}$:

$$y'y^{-\frac{1}{2}} - \frac{4y^{\frac{1}{2}}}{x} = x;$$

$$z' - \frac{2z}{x} = \frac{x}{2}. \qquad (4.2)$$

Решаем уравнение (4.2) по известной схеме. Получаем

$$z = \left(\frac{1}{2}\ln x + C_1\right)x^2.$$

Отсюда общее решение $y = \left(\frac{1}{2}\ln x + C_1\right)^2 \cdot x^4$.

4.3 Задачи к занятию

Найти общие решения уравнений Бернулли.

1 $y' - \frac{4}{x}y = x\sqrt{y}$.

2 $y' + \frac{2}{x}y = 3x^2 y^{\frac{3}{4}}$.

3 $xy' - 2y = 2x^4$.

4 $x^2 y' + xy + 1 = 0$.

5 $y' + 2xy = 2xy^3$.

6 $xy' + y = y^2 \ln x$.

7 $(2x+1)y' = 4x + 2y$.

Найти частное решение уравнения Бернулли, удовлетворяющее начальным условиям.

1 $y' + 3y = y^2 e^{2x}$, $y(0) = 1$.

2 $y' - \frac{y}{x-3} = \frac{y^2}{x-3}$, $y(1) = -2$.

4.4 Домашнее задание

Найти общее решение уравнения Бернулли.

1 $xy' + y = y^2 \ln x$.

2 $xy' + 2\sqrt{xy} = y$.

3 $y' - xy = -y^3 e^{-x^2}$.

4 $xy' - 4y = x^2\sqrt{y}$.

Найти частное решение уравнения Бернулли, удовлетворяющее заданным начальным условиям.

1 $y' - 7y = e^{3x} y^2$, $y(0) = 2$.

5 Уравнение в полных дифференциалах

5.1 Теоретические сведения

Дифференциальным уравнением в полных дифференциалах называется уравнение вида

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0, \tag{5.1}$$

если существует такая функция $U(x,y)$, что

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial x} = M(x,y); \ \frac{\partial U(x,y)}{\partial y} = N(x,y).$$

Иными словами, левая часть уравнения является полным дифференциалом функции $U(x,y)$:

$$dU(x,y)=M(x,y)dx+N(x,y)dy.$$

Решением уравнения в полных дифференциалах будет функция $y=y(x)$, определяемая неявным соотношением $U(x,y)=C,\ C\in\mathbb{R}$.

Для того чтобы выражение $M(x,y)dx+N(x,y)dy$ являлось полным дифференциалом, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}.$$

Предполагается, что функции $M(x,y),N(x,y)$ являются дифференцируемыми, а их частные производные $\partial M(x,y)/\partial y, \partial N(x,y)/\partial x$ – непрерывными в некоторой области.

Интегрирующим множителем уравнения (5.1) называется функция $m(x,y)\neq 0$, после умножения на которую уравнение (5.1) становится уравнением в полных дифференциалах. В случае если функции M,N имеют непрерывные частные производные и не обращаются в нуль одновременно, то интегрирующий множитель существует, однако не существует общего метода для его отыскания (когда общее решение уравнения (5.1) не известно).

Для отыскания интегрирующего множителя в ряде случаев следует воспользоваться известными формулами $d(xy)=ydx+xdy$, $d\left(y^2\right)=2ydy$, $d\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{ydx-xdy}{y^2}$, $d(\ln y)=\frac{dy}{y}$ и т. д.

Кроме того, если в уравнении (5.1) можно выделить полный дифференциал некоторой функции $\varphi(x,y)$, то иногда уравнение упрощается, если от переменных (x,y) перейти к переменным (x,z) или (y,z), где $z=\varphi(x,y)$.

5.2 Образцы решения примеров

1 Найти решение дифференциального уравнения $2xydx+\left(x^2+3y^2\right)dy=0$.

Это уравнение в полных дифференциалах, т. к.

$$\frac{\partial(2xy)}{\partial y}=\frac{\partial\left(x^2+3y^2\right)}{\partial x}=2x.$$

Пусть $U(x,y)$ – некоторая функция, для которой $U'_x=2xy, U'_y=x^2+3y^2$. Интегрируя первое уравнение по переменной *x*, получаем

$$U(x,y,C)=\int 2xydx+C(y)=x^2y+C(y).$$

Теперь, дифференцируя $U(x,y,C)$ по переменной y, имеем

$$\frac{\partial U(x,y,C)}{\partial y} = x^2 + C'(y).$$

В то же время $U'_y = x^2 + 3y^2$, откуда $C'(y) = 3y^2$. Отсюда получаем $C(y) = y^3 + C_1$. Таким образом, общий интеграл исходного дифференциального уравнения в полных дифференциалах имеет вид $x^2 y + y^3 = C$.

2 Решить уравнение $ydx - \left(4x^2 y + x\right)dy = 0$.

Данное уравнение не является дифференциальным уравнением в полных дифференциалах, однако, используя соотношение $ydx - xdy = -x^2 d\left(y/x\right)$, от исходного вида дифференциального уравнения можно перейти с помощью деления на $-x^2$ к уравнению вида

$$d\left(\frac{y}{x}\right) + d\left(2y^2\right) = 0.$$

Непосредственным интегрированием последнего уравнения получаем общий интеграл исходного дифференциального уравнения $y/x + 2y^2 = C$.

Убеждаемся, что при делении на $-x^2$ не было потеряно дополнительное решение. Для этого выполняем подстановку $x = 0$ в исходное уравнение, в результате чего оказывается, что $x = 0$ – дополнительное решение исходного дифференциального уравнения.

5.3 Задачи к занятию

Проверить, являются ли данные уравнения уравнениями в полных дифференциалах, и решить их.

1 $2xydx + \left(x^2 - y^2\right)dy = 0$.

2 $e^{-y}dx - \left(2y + xe^{-y}\right)dy = 0$.

3 $\dfrac{3x^2 + y^2}{y^2}dx - \dfrac{2x^3 + 5y}{y^3}dy = 0$.

4 $\left(2 - 9xy^2\right)xdx + \left(4y^2 - 6x^3\right)ydy = 0$.

5 $\dfrac{y}{x}dx + \left(y^3 + \ln x\right)dy = 0$.

6 $2x\left(1 + \sqrt{x^2 - y}\right)dx - \sqrt{x^2 - y}dy = 0$.

Решить уравнения, найдя каким-либо способом интегрирующий множитель или сделав замену переменных.

1 $\left(x^2 + y^2 + x\right)dx + ydy = 0$.

2 $ydy = \left(xdy + ydx\right)\sqrt{1 + y^2}$.

3 $\left(x^2 + y^2 + y\right)dx - xdy = 0$.

4 $xy^2\left(xy' + y\right) = 1$.

5.4 Домашнее задание

Проверить, являются ли данные уравнения уравнениями в полных дифференциалах, и решить их.

1 $\left(1+y^2\sin 2x\right)dx-2y\cos^2 x dy=0$. 3 $3x^2\left(1+\ln y\right)dx=\left(2y-\dfrac{x^3}{y}\right)dy$.

2 $\left(\dfrac{x}{\sin y}+2\right)dx+\dfrac{\left(x^2+1\right)\cos y}{\cos 2y-1}dy=0$.

Решить уравнения, найдя каким-либо способом интегрирующий множитель или сделав замену переменных.

1 $y^2dx-\left(xy+y^3\right)dy=0$. 2 $\left(x^2+3\ln y\right)ydx=xdy$.

6 Дифференциальные уравнения *n*-го порядка, допускающие понижение порядка

6.1 Теоретические сведения

1 Уравнения, содержащие только x и $y^{(n)}$.

Пусть уравнение порядка *n* содержит только *x* и $y^{(n)}$, т. е. имеет вид

$$F\left(x,y^{(n)}\right)=0. \tag{6.1}$$

Тогда возможны два случая: уравнение разрешено относительно $y^{(n)}$ и уравнение нельзя разрешить относительно $y^{(n)}$.

В первом случае уравнение, разрешенное относительно производной, будет иметь вид $y^{(n)}=f\left(x\right)$, причем функция $f\left(x\right)$ является непрерывной на некотором интервале $\left(a,b\right)$. Общее решение такого уравнения получается в результате *n*-кратного последовательного интегрирования правой части уравнения:

$$y=\int dx\int dx...\int f\left(x\right)dx+C_1\frac{x^{n-1}}{\left(n-1\right)!}+C_2\frac{x^{n-2}}{\left(n-2\right)!}+...+C_{n-1}x+C_n.$$

Рассмотрим случай, когда уравнение (6.1) невозможно разрешить относительно производной. Предположим, что оно допускает параметрическое решение, причем $x=\varphi\left(t\right),y^{(n)}=\psi\left(t\right)$.

Тогда $dy^{(n-1)}=\psi\left(t\right)\cdot\varphi'\left(t\right)dt$, откуда можно найти $y^{(n-1)}$. Аналогично находятся выражения для $y^{(n-2)},y^{(n-3)},...,y',y$ и

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi_n(t, C_1, C_2, ..., C_n). \end{cases}$$

Эти уравнения определяют общее решение уравнения (6.1) в параметрическом виде.

2 Уравнение вида $F\left(x, y^{(k)}(x), y^{(k+1)}(x), ..., y^{(n)}(x)\right) = 0$, не содержащее в явном виде неизвестной функции и некоторых ее первых производных.

Это уравнение допускает понижение порядка на k единиц заменой $y^{(k)} = p(x)$. В результате такой замены получим уравнение $F\left(x, p, p', ..., p^{(n-k)}\right) = 0.$ Если это уравнение интегрируется в квадратурах и $p = \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_{n-k})$ – его общее решение, то неизвестную функцию находим из уравнения $y^{(k)} = \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_{n-k})$ k-кратным интегрированием правой части.

3 Уравнения, не содержащие независимого переменного.

Пусть уравнение имеет вид $F\left(y, y', y'', ..., y^{(n)}\right) = 0$, т. е. не содержит независимого переменного. Порядок такого уравнения можно понизить на единицу заменой $p(y) = y'$, $p = p(y)$. С помощью этой подстановки можно выразить производные неизвестной функции вплоть до порядка n:

$$y'' = p' \cdot p;$$

$$y''' = \frac{d}{dx}(p'p) = p''p^2 + (p')^2 p.$$

Далее по аналогии $y^{(n)} = \omega\left(p, p', p'', ..., p^{(n-1)}\right)$.

Подстановка этих выражений в исходное уравнение приводит его к новому уравнению $(n-1)$ порядка. Предположим, что $p = \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_{n-1})$ является общим решением получившегося уравнения $(n-1)$ порядка. Тогда $y' = \varphi(y, C_1, C_2, ..., C_{n-1})$. Разделением переменных и интегрированием получаем общий интеграл

$$\int \frac{dy}{\varphi(y, C_1, C_2, ..., C_{n-1})} = x + C_n.$$

4 Уравнения, однородные относительно неизвестной функции и ее производных.

Порядок такого уравнения может быть понижен на единицу подстановкой $y' = yz$, где $z = z(x)$ – новая неизвестная функция.

5 Уравнения, левая часть которых является точной производной.

Пусть задано уравнение $F\left(x,y,y',y'',...,y^{(n)}\right)=0$, в котором левая часть является производной от некоторой функции переменных $x,y,y',y'',...,y^{(n-1)}$, т. е.

$$F\left(x,y,y',y'',...,y^{(n)}\right)=\frac{d}{dx}\Phi\left(x,y,y',y'',...,y^{(n-1)}\right).$$

Такое уравнение называется уравнением в точных производных. Его порядок можно понизить на единицу интегрированием и получением первого интеграла этого уравнения.

Если уравнение не является уравнением в точных производных, то можно попытаться подобрать такую функцию, после умножения на которую уравнение станет уравнением в точных производных.

6.2 Образцы решения примеров

1 Найти общее решение дифференциального уравнения $y'''=x-\sin x$.

$$y=\int dx\int dx\int\left(x-\sin x\right)dx=\frac{x^4}{24}-\cos x+\frac{C_1x^2}{2}+C_2x+C_3.$$

2 Проинтегрировать уравнение $y''+e^{y''}=x$.

Положим, $y''=t$. Тогда $x=t+e^t$ и далее получаем

$$dy'=y''dx=t\left(1+e^t\right)dt;$$

$$y'=\frac{t^2}{2}+\int te^t dt=\frac{t^2}{2}+e^t\left(t-1\right)+C_1.$$

Отсюда

$$dy=y'dx=\left(\frac{t^2}{2}+e^t\left(t-1\right)+C_1\right)\cdot\left(1+e^t\right)dt;$$

$$y=\frac{t^3}{6}+\left(\frac{t}{2}-\frac{3}{4}\right)e^{2t}+\left(\frac{t^2}{2}+C_1-1\right)e^t+C_1t+C_2.$$

Общее решение исходного дифференциального уравнения в параметрическом виде

$$\begin{cases} x=t+e^t, \\ y=\dfrac{t^3}{6}+\left(\dfrac{t}{2}-\dfrac{3}{4}\right)e^{2t}+\left(\dfrac{t^2}{2}+C_1-1\right)e^t+C_1t+C_2. \end{cases}$$

3 Проинтегрировать уравнение $y'''x\ln x=y''$.

Положим, в этом уравнении $y''=p(x), y'''=p'$ и уравнение примет вид $p'x\ln x=p$.

Это уравнение первого порядка с разделяющимися переменными:

$$\frac{dp}{p}=\frac{dx}{x\ln x}\ (p\neq 0, x\ln x\neq 0).$$

Интегрируя, получаем $\ln|p|=\ln|\ln x|+\ln C_1, C_1>0$. Отсюда $p=C_1\ln|x|, C_1\neq 0$.

Прежде чем найти общее решение, проверим, не потерялись ли решения $x\ln x=0$ и $p=0$. Условие $x\ln x\neq 0$ не приводит к потере решения уравнения $p'x\ln x=p$. Условие $p\neq 0$ приводит к потере решения $p=0$, однако его можно включить в общее решение при $C_1=0$. Тогда $p=C_1\ln|x|, C_1\in\mathbb{R}$. Отсюда находим $y''=C_1\ln|x|$, $y'=\int C_1\ln|x|dx=C_1(x\ln|x|-x)+C_2, C_1, C_2\in\mathbb{R}$. Окончательно

$$y=C_1\int(x\ln|x|-x)dx+C_2x+C_3=C_1\left(x^2\left(\frac{\ln|x|}{x}-\frac{1}{4}\right)\right)+C_2x+C_3,\ C_i\in\mathbb{R}\left(i=\overline{1,3}\right).$$

4 Найти общее решение уравнения $2(y')^2=(y-1)y''$.

Положим, в этом уравнении $y'=p(y)$. Тогда $y''=p'p$ и уравнение принимает вид

$$p\left(2p-(y-1)\frac{dp}{dy}\right)=0.$$

Последнее уравнение распадается на два уравнения: $p=0$ или $2\frac{dy}{y-1}=\frac{dp}{p}$ $(y\neq 1, p\neq 0)$. Из первого находим $p=y'=0$, откуда $y=C$. Из второго получаем $2\ln|y-1|=\ln|p|-\ln C_1, C_1>0$, откуда

$$p=C_1(y-1)^2, C_1\neq 0.$$

Условие $y\neq 1$ не приводит к потере решения, а условие $p\neq 0$ приводит к потере решения $p=0$, которое может быть включено в общее решение при $C_1=0$. Тогда получаем

$$y'=C_1(y-1)^2,\ C_1\in\mathbb{R}.$$

Отсюда находим общее решение $y=1-1/(C_1x+C_2)$, $C_1, C_2\in\mathbb{R}$.

5 Проинтегрировать уравнение $xyy''-x(y')^2=yy'$.

Это уравнение однородно относительно y, y', y''. Положим, в данном уравнении $y' = yz$. Тогда $y'' = y'z + yz' = y\left(z^2 + z'\right)$. Подставляя в уравнение, получаем

$$xy\ \left(z^2 + z'\right) - xy^2z^2 = y^2z;\ x\left(z^2 + z'\right) - xz^2 = z\ \left(y \neq 0\right);$$

$$xz' = z;\ \frac{dz}{z} = \frac{dx}{x}\ \left(z \neq 0, x \neq 0\right).$$

Отсюда $z = C_1x,\ C_1 \neq 0$. Особое решение $z = 0$ входит в общее при $C_1 = 0,$ т. е. $z = C_1x, C_1 \in \mathbb{R}$. Далее получаем

$$\frac{y'}{y} = C_1x;\ \frac{dy}{y} = C_1xdx;\ \ln\left|y\right| = C_1\frac{x^2}{2} + C_2 \text{ или } y = C_2 \cdot e^{C_1x^2}, C_2 \neq 0.$$

6.3 Задачи к занятию

Решить следующие уравнения.

1 $y'' = \sin 2x + 4x - 3$.

2 $y'' = xe^{x^2} + e^{-x}$.

3 $y^3y'' = y'^2$.

4 $y^3y'' = 1$.

5 $y'' = 2yy'$.

6 $xy'' = y'\ln\dfrac{y'}{x}$.

7 $y''' + \left(y''\right)^2 = 0$.

8 $y''' = 3yy';\ y\left(0\right) = y'\left(0\right) = 1,\ y''\left(0\right) = \dfrac{3}{2}$.

9 $y'' = e^x + \cos 5x - 4$.

10 $y'' = \cos^4 x + 2\sin^2\dfrac{x}{2} + \sqrt{x+2}$.

11 $y'^2 + 2yy' = y'^2 - 1$.

12 $y'^2 + 2yy'' = 0$.

13 $yy'' + 1 = y'^2$.

14 $y'' = y'\ln y';\ y\left(0\right) = 0,\ y'\left(0\right) = 1$.

15 $yy'' = 1 + \left(y'\right)^2$.

6.4 Домашнее задание

Решить следующие уравнения.

1 $2yy'' = 1 + \left(y'\right)^2$.

2 $yy'' = y' + \left(y'\right)^2$.

3 $y'' = e^{2y};\ y\left(0\right) = 0,\ y'\left(0\right) = 1$.

4 $2y'' = 3y^2;\ y\left(-2\right) = 1,\ y'\left(-2\right) = -1$.

5 $2yy'' - 3\left(y'\right)^2 = 4y^2$.

7 Однородные дифференциальные уравнения *n*-го порядка с постоянными коэффициентами

7.1 Теоретические сведения

Однородным дифференциальным уравнением *n*-го порядка с постоянными коэффициентами называется уравнение вида

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0. \tag{7.1}$$

Чтобы решить линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами (7.1), необходимо составить характеристическое уравнение

$$a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0 \tag{7.2}$$

и найти все его корни λ_1, λ_2, …, λ_n.

Общее решение уравнения (7.1) есть сумма, состоящая из слагаемых вида $C_i e^{\lambda_i x}$ для каждого простого корня λ_i уравнения (7.2) и слагаемых вида

$$\left(C_{m+1} + C_{m+2} x + C_{m+3} x^2 + \ldots + C_{m+k} x^{k-1}\right) e^{\lambda x}$$

для каждого кратного корня λ уравнения (7.2), где k – кратность корня. Все C_i – произвольные постоянные. Коэффициенты уравнения (7.1) и корни λ могут быть вещественными или комплексными.

Если же все коэффициенты (7.1) вещественные, то решение можно написать в вещественной форме и в случае комплексных корней λ. Для каждой пары комплексных сопряженных корней $\lambda = \alpha \pm i\beta$ в формулу общего решения включаются слагаемые $C_{m+1} e^{\alpha x} \cos\beta x + C_{m+2} e^{\alpha x} \sin\beta x$, если эти корни простые, и слагаемые $P_{k-1}(x) e^{\alpha x} \cos\beta x + Q_{k-1}(x) e^{\alpha x} \sin\beta x$, если каждый из корней $a + i\beta$ и $\alpha - i\beta$ имеет кратность k. Здесь P_{k-1}, Q_{k-1} – многочлены степени $k-1$, аналогичные многочлену в (7.3), их коэффициенты – произвольные постоянные.

7.2 Образцы решения примеров

1 Решить уравнение $y^V - 2y^{IV} - 16y' + 32y = 0$.

Запишем характеристическое уравнение $\lambda^5 - 2\lambda^4 - 16\lambda + 32 = 0$. Его корнями являются числа $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = -2$, $\lambda_4 = 2i$, $\lambda_5 = -2i$. Тогда общее решение исходного дифференциального уравнения имеет вид

$$y = \left(C_1 + C_2 x\right) e^{2x} + C_3 e^{-2x} + C_4 \cos 2x + C_5 \sin 2x.$$

7.3 Задачи к занятию

Решить следующие уравнения.

1 $y'' + y' - 2y = 0$.

2 $y'' - 2y' = 0$.

3 $y'' - 4y' + 5y = 0$.

4 $y'' + 4y = 0$.

5 $y^{IV} - y = 0$.

6 $y^{IV} + 64y = 0$.

7 $4y'' + 4y' + y = 0$.

8 $y^{V} - 10y''' + 9y' = 0$.

9 $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$.

10 $y^{IV} - 5y'' + 4y = 0$.

11 $y'' + 4y' + 3y = 0$.

12 $2y'' - 5y' + 2y = 0$.

13 $y'' + 2y' + 10y = 0$.

14 $y''' - 8y = 0$.

15 $y^{IV} + 4y = 0$.

16 $y'' - 2y' + y = 0$.

17 $y^{V} - 6y^{IV} + 9y''' = 0$.

18 $y^{IV} + 2y'' + y = 0$.

19 $y''' - y'' - y' + y = 0$.

20 $y^{V} + 8y''' + 16y' = 0$.

7.4 Домашнее задание

1 $y''' - y = 0$.

2 $y^{V} - 4y''' + 3y' = 0$.

3 $y^{IV} + 2y' + y = 0$.

8 Неоднородные дифференциальные уравнения *n*-го порядка с правой частью специального вида

8.1 Теоретические сведения

Рассмотрим линейное неоднородное уравнение

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x). \tag{8.1}$$

Общее решение уравнения (8.1) следует искать в виде

$$y = y_0 + y_1,$$

где y_0 – общее решение соответствующего дифференциального уравнения без правой части;

y_1 – некоторое частное решение исходного уравнения.

Для линейных неоднородных уравнений с постоянными коэффициентами и с правой частью, состоящей из сумм и произведений функций $b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m$, $e^{\alpha x}$, $\cos\beta x$, $\sin\beta x$, частное решение можно искать методом неопределенных коэффициентов.

Для уравнений с правой частью $P_m(x)e^{\gamma x}$, где $P_m(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m$, частное решение имеет вид

$$y_1 = x^s Q_m(x) e^{\gamma x}, \tag{8.2}$$

где $Q_m(x)$ – многочлен той же степени m.

Число $s = 0$, если γ – не корень характеристического уравнения, а если γ – корень, то s равно кратности этого корня. Коэффициенты многочлена $Q_m(x)$ определяются методом неопределенных коэффициентов.

Если в правую часть уравнения входят синус и косинус и при этом коэффициенты уравнения (8.1) вещественны, то для уравнения с правой частью $e^{\alpha x}\left(P(x)\cos\beta x + Q(x)\sin\beta x\right)$ можно искать частное решение в виде

$$y_1 = x^s e^{\alpha x}\left(R_m(x)\cos\beta x + T_m(x)\sin\beta x\right), \tag{8.3}$$

где $s = 0$, если $\alpha + \beta i$ – не корень характеристического уравнения, и s равно кратности корня $\alpha + \beta i$ – в противном случае, а R_m и T_m – многочлены степени m, равной наибольшей из степеней многочленов P и Q. Коэффициенты многочленов R_m и T_m определяются методом неопределенных коэффициентов.

Частное решение линейного уравнения с правой частью $f_1 + \ldots + f_p$ равно сумме частных решений уравнений с той же левой частью и правыми частями $f_1, \ldots, f_p$.

Линейное неоднородное уравнение

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = f(x) \tag{8.4}$$

с произвольной правой частью $f(x)$ решается методом вариации постоянных.

Пусть найдено общее решение $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n$ линейного однородного уравнения с той же левой частью. Тогда решение уравнения (8.4) ищется в виде $y = C_1(x) y_1 + \ldots + C_n(x) y_n$. Функции $C_i(x)$ определяются из системы

$$\begin{cases} C_1' y_1 + \ldots + C_n' y_n = 0, \\ C_1' y_1' + \ldots + C_n' y_n' = 0, \\ \ldots \\ C_1' y_1^{(n-2)} + \ldots + C_n' y_n^{(n-2)} = 0, \\ a_0\left(C_1' y_1^{(n-1)} + \ldots + C_n' y_n^{(n-1)}\right) = f(x). \end{cases}$$

8.2 Образцы решения примеров

1 Решить уравнение $y''' - 6y'' + 9y' = xe^{3x} + e^{3x}\cos 2x$.

Найдем сначала решение уравнения без правой части, используя характеристическое уравнение $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 9\lambda = 0$. Его решениями являются числа

$\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2,3} = 3$. Общее решение уравнения без правой части имеет вид $y_0 = C_1 + (C_2 + C_3 x)e^{3x}$. Правая часть исходного уравнения представляет собой сумму двух функций $f_1(x) = xe^{3x}$ и $f(x) = e^{3x}\cos 2x$, поэтому для каждого из них отыскиваем частные решения.

Число $\gamma = 3$ является корнем кратности $s = 2$, поэтому частное решение уравнения имеет вид $y_1 = x^2(ax + b)e^{3x}$. Подставив данное выражение в исходное уравнение, определим коэффициенты $a = \frac{1}{18}$, $b = -\frac{1}{18}$.

Число $\alpha + \beta i = 3 + 2i$ не является корнем характеристического уравнения, поэтому частное решение имеет вид $y_2 = e^{3x}(c\cos 2x + d\sin 2x)$. Подставляя y_2 в исходное уравнение, находим $c = -\frac{3}{52}$, $d = -\frac{1}{26}$. Окончательно общее решение исходного дифференциального уравнения имеет вид

$$y = C_1 + (C_2 + C_3 x)e^{3x} + x^2\left(\frac{1}{18}x - \frac{1}{18}\right)e^{3x} + e^{3x}\left(-\frac{3}{52}\cos 2x - \frac{1}{26}\sin 2x\right).$$

2 Найти общее решение уравнения $y'' + y = \operatorname{tg}^2 x$.

Найдем сначала общее решение соответствующего однородного уравнения. Его характеристическое уравнение имеет вид $\lambda^2 + 1 = 0$, корни которого $\lambda_{1,2} = \pm i$. Общее решение однородного уравнения запишем в виде $y = C_1\cos x + C_2\sin x$.

Общее решение исходного уравнения может быть записано в виде $y = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x$.

Система для нахождения неизвестных функций будет иметь вид

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos x + C_2'(x)\sin x = 0, \\ -C_1'(x)\sin x + C_2'(x)\cos x = \operatorname{tg}^2 x. \end{cases}$$

Из этой системы находим $C_1'(x) = -\frac{\sin^3 x}{\cos x}$, $C_2'(x) = \frac{\sin^2 x}{\cos x}$. Интегрируя, получаем

$$C_1(x) = -\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}dx = -\frac{1}{\cos x} - \cos x + C_1;$$

$$C_2(x) = \int \frac{\sin^2 x}{\cos x}dx = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| - \sin x + C_2,$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные.

В итоге общее решение исходного дифференциального уравнения

$$y = \left(-\frac{1}{\cos x} - \cos x + C_1\right)\cos x + \left(\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| - \sin x + C_2\right)\sin x.$$

8.3 Задачи к занятию

Решить следующие уравнения.

1 $y'' - 2y' - 3y = e^{4x}$.

2 $y'' - y = 2e^{x} - x^{2}$.

3 $y'' - 3y' + 2y = \sin x$.

4 $y'' - 3y' + 2y = x\cos x$.

5 $y'' + 2y' - 3y = x^{2}e^{x}$.

6 $y'' - 8y' + 20y = 5xe^{4x}\sin 2x$.

7 $y'' - 4y' + 5y = e^{2x}\sin^{2} x$.

8 $y'' + y = 4xe^{x}$.

9 $y'' + y' - 2y = 3xe^{x}$.

10 $y'' - 5y' + 4y = 4x^{2}e^{2x}$.

11 $y'' + 3y' - 4y = e^{-4x} + xe^{-x}$.

12 $y'' - 2y' + 2y = e^{x} + x\cos x$.

13 $y''' - 4y'' + 3y' = x^{2} + xe^{2x}$.

14 $y'' + 3y' + 2y = e^{-x}\cos^{2} x$.

Найти решения уравнений методом вариации постоянных.

1 $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^{x}}{x}$.

2 $y'' + y = \dfrac{1}{\sin x}$.

3 $y'' + 2y' + y = 3e^{-x}\sqrt{x+1}$.

4 $y'' + 3y' + 2y = \dfrac{1}{e^{x}+1}$.

5 $y'' + 4y = 2\,\mathrm{tg}\,x$.

8.4 Домашнее задание

Найти решения уравнений, удовлетворяющие заданным начальным условиям.

1 $y'' + y = 4e^{x}$; $y(0) = 4$, $y'(0) = -3$.

2 $y'' - 2y' = 2e^{x}$; $y(1) = -1$, $y'(1) = 0$.

3 $y'' + 2y' + 2y = xe^{-x}$; $y(0) = y'(0) = 0$.

4 $y''' - 3y' - 2y = 9e^{2x}$; $y(0) = 0$, $y'(0) = -3$, $y''(0) = 3$.

9 Общие методы интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений

9.1 Теоретические сведения

Системой дифференциальных уравнений называется совокупность уравнений, в каждое из которых входят независимое переменное, искомые функции и их производные. Предполагается, что число уравнений системы равно числу искомых функций. Рассмотрим систему n обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n), \\ ... \\ \dot{y}_n = f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n), \end{cases} \tag{9.1}$$

где x – аргумент;

$y_1, y_2, ..., y_n$ – искомые функции.

Решением системы дифференциальных уравнений (9.1) называется совокупность n непрерывно дифференцируемых функций $(y_1, y_2, ..., y_n)$, которые при подстановке в каждое из уравнений (9.1) обращают его в тождество.

Совокупность функций

$$\begin{aligned} &y_1 = F_1(x, C_1, C_2, ..., C_n), \\ &... \\ &y_n = F_n(x, C_1, C_2, ..., C_n) \end{aligned} \tag{9.2}$$

называется общим решением системы (9.1), если:

а) система функций (9.2) разрешима относительно произвольных постоянных

$$\begin{aligned} &C_1 = \varphi_1(x, y_1, y_2, ..., y_n), \\ &... \\ &C_n = \varphi_n(x, y_1, y_2, ..., y_n); \end{aligned} \tag{9.3}$$

б) совокупность функций (9.2) является решением системы (9.1) при значениях постоянных $C_1, C_2, ..., C_n$, которые определяются формулами (9.3).

Решение, получающееся из общего решения (9.2) при фиксированных значениях произвольных постоянных, называется частным решением.

Каждое из равенств (9.3), где функции $\varphi_i(x, y_1, y_2, ..., y_n)$, $i = 1, 2, ..., n$, являются постоянными на решениях $y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x)$, …, $y_n = y_n(x)$ системы уравнений (9.1), называется первым интегралом системы дифференциальных уравнений (9.1). Совокупность первых интегралов называется общим интегралом системы (9.1).

Нахождение решения задачи Коши для системы дифференциальных уравнений означает определение функций $y_1, y_2, ..., y_n$, удовлетворяющих системе уравнений (9.1) и заданным начальным условиям $y_1 = y_1^0, y_2 = y_2^0, ..., y_n = y_n^0$ при $x = x_0$.

Нормальной системой дифференциальных уравнений называется система вида (9.1), в которой в левой части уравнений стоят производные первого порядка, а правые части уравнений не содержат производных.

Рассмотрим нормальную систему дифференциальных уравнений, линейную относительно неизвестных функций с неоднородностью, записанную в матрично-векторной форме

$$x' = A(t)x + f(t),\ t \in I,$$

где квадратная матричная функция $A(t) = \left[a_{kj}(t) \right]$ (коэффициент уравнения) и векторная функция $f(t) = \left(f_1(t), ..., f_n(t) \right)^T$ заданы на промежутке I.

Данное уравнение равносильно системе n линейных относительно неизвестных скалярных функций $x_k(t), k = \overline{1,n}$. Скалярные функции $a_{kj}(t)$ называют коэффициентами системы, матрицу $A(t)$ – матрицей коэффициентов системы, $f_k(t)$ – неоднородностями системы.

Если неоднородность линейного векторного уравнения отсутствует, т. е. $f(t) \equiv 0$ на отрезке $t \in I$, то уравнение называют однородным, в общем случае – неоднородным. Линейное векторное дифференциальное уравнение с постоянной матрицей A называют уравнением со стационарным оператором, или иногда системой с постоянными коэффициентами.

Совокупность линейно независимых решений однородной системы $x' = A(t)x$ называется фундаментальной матрицей системы $W(t) = \left(x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t) \right)$, а совокупность n линейно независимых решений линейной системы – фундаментальной системой решений данной системы.

Любое решение однородной системы может быть представлено в виде линейной комбинации элементов фундаментальной системы решений

$$x(t) = W(t)C.$$

9.2 Образцы решения примеров

1 Проинтегрировать уравнение $x' = Ax$, где $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Соответствующая система имеет вид

$$\begin{cases} x_1' = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3, \\ x_2' = x_2 + 2x_3, \\ x_3' = 3x_3. \end{cases}$$

Последовательно находим $x_3(t) = C_3 e^{3t}$, $x_2(t) = C_2 e^{t} + C_3 e^{3t}$, $x_1(t) = C_1 e^{2t} - 3C_2 e^{t} + 7C_3 e^{3t}$.

2 Найти решение задачи Коши $x' = Ax + f(t)$ при начальных условиях, если $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$, $f(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ 1 \end{pmatrix}$, $x_1(1) = 0$, $x_2(1) = 1$, $t \in \mathbb{R}$.

Соответствующая система имеет вид

$$\begin{cases} x_1' = 2x_1 + e^t, \\ x_2' = -3x_2 + 1. \end{cases}$$

Общее решение этой системы находится непосредственным интегрированием $x_1(t) = C_1 e^{2t} - e^t$, $x_2(t) = C_2 e^{-3t} + \frac{1}{3}$. Используя начальные условия, получаем частное решение $x_1(t) = e^{2t-1} - e^t$, $x_2(t) = \frac{1}{3}\left(2e^{-3(t-1)} + 1\right)$.

3 По заданной фундаментальной матрице $\Phi(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$ составить линейную однородную систему.

Как известно, фундаментальная матрица однородной системы является ее решением, т. е. $\Phi' = A(t)\Phi$, откуда определяем матрицу коэффициентов системы $A(t) = \Phi'(t)\Phi^{-1}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Искомая система имеет вид

$$\begin{cases} x_1' = x_2, \\ x_2' = -x_1. \end{cases}$$

9.3 Задачи к занятию

Проинтегрировать линейные векторные уравнения вида $x' = Ax + f(t)$, где $A, f(t)$ заданы. Указать максимально возможный промежуток существования решения.

1 $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $f(t) \equiv 0$.

2 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$, $f(t) \equiv 0$.

3 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $f(t) \equiv 0$.

4 $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $f(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \\ \sin t \end{pmatrix}$.

5 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$, $f(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{t} \\ 0 \end{pmatrix}$.

6 $A(t) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $f(t) \equiv 0$.

Решить задачи Коши для линейных векторных уравнений.

1 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$, $f(t) \equiv 0$, $x_1(3) = 1$, $x_2(3) = 0$.

2 $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $f(t)=\begin{pmatrix}t\\ 0\\ 3\end{pmatrix}$, $x_1(0)=x_2(0)=x_3(0)=0$.

По заданной фундаментальной матрице $\Phi(t)$ найти матрицу $A(t)$ линейной однородной системы $x'=A(t)x$.

1 $\Phi(t)=\begin{pmatrix}1 & -t\\ t & 1\end{pmatrix}$.

3 $\Phi(t)=\begin{pmatrix}1 & t^2\\ -t^2 & 1\end{pmatrix}$.

2 $\Phi(t)=\begin{pmatrix}e^t & 0\\ te^t & e^t\end{pmatrix}$.

4 $\Phi(t)=\begin{pmatrix}e^t & 0\\ te^t & e^{2t}\end{pmatrix}$.

9.4 Домашнее задание

1 По заданной фундаментальной матрице $\Phi(t)$ найти матрицу $A(t)$ линейной однородной системы $x'=A(t)x$, если $\Phi(t)=\begin{pmatrix}e^{-t}+t & 1\\ te^t & e^t\end{pmatrix}$.

2 Проинтегрировать линейное векторное уравнение $x'=Ax+f(t)$, где $A=\begin{pmatrix}5 & 6 & 7\\ 0 & 8 & 9\\ 0 & 0 & 10\end{pmatrix}$; $f(t)=\begin{pmatrix}e^t\\ 2e^t\\ e^{-t}\end{pmatrix}$.

3 Решить задачу Коши для линейного векторного уравнения $x'=Ax+f(t)$ при условиях $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $f(t)=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ e^t\end{pmatrix}$, $x_1(0)=1$, $x_2(0)=0$, $x_3(0)=1$.

10 Линейные однородные системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

10.1 Теоретические сведения

Самым простым методом интегрирования систем линейных дифференциальных уравнений является метод сведения системы к однородному уравнению, называемый методом исключения. Согласно этому методу необходимо исключить из уравнений системы неизвестные функции и их производные, в результате чего система сводится к однородному дифференциальному уравнению.

Для решения однородной дифференциальной системы

$$x' = Ax \tag{10.1}$$

в общем виде необходимо найти корни характеристического уравнения

$$\det\left(A - \lambda E\right) = 0 .$$

Каждому простому корню λ_i характеристического уравнения соответствует решение $C_i v^i e^{\lambda_i t}$, где C_i – произвольная постоянная; v_i – собственный вектор матрицы *A*, соответствующий этому λ_i.

Если для кратного корня λ имеется столько линейно независимых собственных векторов $v^1,...,v^k$, какова его кратность, то ему соответствует решение $C_1 v^1 e^{\lambda t} + ... + C_k v^k e^{\lambda t}$.

Если для корня λ кратности k имеется только m линейно независимых собственных векторов и $m < k$, то решение, соответствующее этому λ, можно искать в виде произведения многочлена степени $k - m$ на $e^{\lambda t}$, т. е. в виде

$$\begin{cases} x_1 = \left(a + bt + ... + dt^{k-m}\right)e^{\lambda t}, \\ ... \\ x_n = \left(p + qt + ... + st^{k-m}\right)e^{\lambda t}. \end{cases} \tag{10.2}$$

Чтобы найти коэффициенты $a, b, ..., s$, надо подставить решение (10.2) в систему (10.1). Приравняв коэффициенты подобных членов в левой и правой частях уравнений, получим систему линейных алгебраических уравнений относительно $a, b, ..., s$. Надо найти общее решение этой системы. Коэффициенты $a, b, ..., s$ должны зависеть от k произвольных постоянных, где k – кратность корня λ.

В случае, когда имеются комплексные корни λ, изложенные способы дают выражение решения через комплексные функции. Если при этом коэффициенты системы (10.1) вещественны, то можно выразить решения только через вещественные функции. Для этого надо воспользоваться тем, что вещественная и мнимая части комплексного решения, соответствующего корню $\lambda = \alpha + \beta i \left(\beta \neq 0\right)$, являются линейно независимыми решениями.

10.2 Образцы решения примеров

1 Найти общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x' = -4x + 2y + 5z, \\ y' = 6x - y - 6z, \\ z' = -8x + 3y + 9z. \end{cases}$$

Выразим из первого уравнения системы переменную z и продифференцируем полученное выражение $z' = \frac{1}{5}\left(x'' + 4x' - 2y'\right)$. Подставим z и z' во второе и третье уравнения системы:

$$\begin{cases} y' = \frac{1}{5}\left(-6x' + 6x + 7y\right), \\ x'' = 5x' + 2y' - 4x - 3y. \end{cases} \tag{10.3}$$

Исключим отсюда y' и выразим y:

$$y = -5x'' + 13x' - 8x .$$

Дифференцируем последнее выражение $y' = -5x''' + 13x'' - 8x'$. Подставляем выражения для y, y' в первое уравнение системы (10.3)

$$x''' - 4x'' + 5x' - 2x = 0 .$$

Получаем однородное уравнение с постоянными коэффициентами. Его общее решение имеет вид

$$x = \left(C_1 + C_2 t\right)e^t + C_3 e^{2t} .$$

Отсюда находим выражения для остальных неизвестных функций:

$$y = 3C_2 e^t - 2C_3 e^{2t};\ z = \left(C_1 - C_2 + C_2 t\right)e^t + 2C_3 e^{2t} .$$

2 Решить систему

$$\begin{cases} x' = 2x + y + z, \\ y' = -2x - z, \\ z' = 2x + y + 2z. \end{cases} \tag{10.4}$$

Составляем и решаем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ -2 & -\lambda & -1 \\ 2 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 . \tag{10.5}$$

$\lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 = 0$, $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$.

Для простого корня $\lambda_1 = 2$ находим собственный вектор, решая систему

$$\begin{cases} \beta + \gamma = 0, \\ -2\alpha - 2\beta - \gamma = 0, \\ 2\alpha + \beta = 0. \end{cases}$$

Из этой системы находим $2\alpha = -\beta = \gamma$, собственный вектор $(1, -2, 2)$ и $x = e^{2t}, y = -2e^{2t}, z = 2e^{2t}$ – частное решение системы (10.4).

Для кратного корня $\lambda = 1$ сначала определим число линейно независимых собственных векторов. Из (10.5) при $\lambda = 1$ получаем матрицу, ранг которой равен 2, и число линейно независимых векторов, равное 1. Решение ищем в виде произведения многочлена степени 1 на $e^{\lambda t}$, т. е. в виде

$$x = (a + bt)e^t;\ y = (c + dt)e^t;\ z = (f + gt)e^t. \tag{10.6}$$

Чтобы найти коэффициенты $a, b, ...,$ подставим (10.6) в систему (10.4) и приравняем коэффициенты при подобных членах, в результате получим общее решение системы

$$x = -C_2 e^t + C_3 e^{2t};\ y = (C_1 + C_2 t)e^t - 2C_3 e^{2t};\ z = (C_2 - C_1 - C_2 t)e^t + 2C_3 e^{2t}.$$

3 Решить систему

$$\begin{cases} x' = 4x - y, \\ y' = 5x + 2y. \end{cases}$$

Характеристическое уравнение системы

$$\lambda^2 - 6\lambda + 13 = 0;\ \lambda = 3 \pm 2i.$$

Для корня $\lambda = 3 + 2i$ находим собственный вектор из системы

$$\begin{cases} (1 - 2i)a - b = 0, \\ 5a - (1 + 2i)b = 0. \end{cases}$$

Возьмем $a = 1, b = 1 - 2i$. Имеем частное решение $x = e^{(3+2i)t}$, $y = (1 - 2i)e^{(3+2i)t}$. Так как данная система с вещественными коэффициентами, то решение, соответствующее корню $\lambda = 3 - 2i$, можно не искать, оно будет комплексно сопряженным с найденным решением. Чтобы получить два вещественных решения, надо взять вещественную и мнимую части найденного комплексного решения. Так как $e^{(3+2i)t} = e^{3t}(\cos 2t + i \sin 2t)$, то

$$\begin{cases} x_1 = \operatorname{Re} e^{(3+2i)t} = e^{3t} \cos 2t, \\ y_1 = \operatorname{Re}(1 - 2i)e^{(3+2i)t} = e^{3y}(\cos 2t - 2\sin 2t); \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = \operatorname{Im} e^{(3+2i)t} = e^{3t} \sin 2t, \\ y_2 = \operatorname{Im}(1 - 2i)e^{(3+2i)t} = e^{3y}(\sin 2t - 2\cos 2t). \end{cases}$$

Общее решение выражается через два найденных линейно независимых решения

$$x = C_1x_1 + C_2x_2 = C_1e^{3t}\cos 2t + C_2e^{3t}\sin 2t;$$

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 = C_1e^{3t}\left(\cos 2t + 2\sin 2t\right) + C_2e^{3t}\left(\sin 2t - 2\cos 2t\right).$$

10.3 Задачи к занятию

Решить системы дифференциальных уравнений методом исключения.

1 $\begin{cases} x' = 3x + 2y, \\ y' = 3x + 4y. \end{cases}$ 4 $\begin{cases} x' = 3x - 4y, \\ y' = x - 2y. \end{cases}$ 7 $\begin{cases} x' = 2x - y, \\ y' = 5x - 2y. \end{cases}$

2 $\begin{cases} x' = x - 2y, \\ y' = 7x - 8y. \end{cases}$ 5 $\begin{cases} x' = 3x - 2y, \\ y' = 2x - y. \end{cases}$ 8 $\begin{cases} x' = 4x - 2y, \\ y' = x + 2y. \end{cases}$

3 $\begin{cases} x' = 5x + 3y, \\ y' = x + 3y. \end{cases}$ 6 $\begin{cases} x' = 2x - y, \\ y' = 5x - 4y. \end{cases}$ 9 $\begin{cases} x' = 3x - y, \\ y' = 13x - 3y. \end{cases}$

Решить системы дифференциальных уравнений с помощью характеристического уравнения.

1 $\begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = 3x + 4y. \end{cases}$ 3 $\begin{cases} x' = x - y, \\ y' = y - 4x. \end{cases}$ 5 $\begin{cases} x' + x - 8y = 0, \\ y' - x - y = 0. \end{cases}$

2 $\begin{cases} x' = x + z - y, \\ y' = x + y - z, \\ z' = 2x - y. \end{cases}$ 4 $\begin{cases} x' = x - y - z, \\ y' = x + y, \\ z' = 3x + z. \end{cases}$

10.4 Домашнее задание

Решить системы дифференциальных уравнений методом исключения.

1 $\begin{cases} x' = x - 3y, \\ y' = 5x + 9y. \end{cases}$ 2 $\begin{cases} x' = x - y, \\ y' = x + y. \end{cases}$ 3 $\begin{cases} x' = 7x - 4y, \\ y' = 4x - y. \end{cases}$

Решить системы дифференциальных уравнений методом характеристического уравнения.

1 $\begin{cases} x' = y - 2z - x, \\ y' = 4x + y, \\ z' = 2x + y - z. \end{cases}$ 2 $\begin{cases} x' = 2x - y - z, \\ y' = 2x - y - 2z, \\ z' = 2z - x + y. \end{cases}$

11 Линейные неоднородные системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

11.1 Теоретические сведения

Частное решение линейной неоднородной системы с постоянными коэффициентами

$$x' = A(t)x + f(t) \tag{11.1}$$

можно искать методом неопределенных коэффициентов в том случае, если функции $f_i(t)$ состоят из сумм и произведений функций $b_0 + b_1 t + ... + b_m t^m$, $e^{\alpha t}$, $\cos\beta t$, $\sin\beta t$. Если $f_i(t) = P_{m_i}(t)e^{\gamma t}$, где $P_{m_i}(t)$ – многочлен степени m_i, то частное решение системы (11.1) ищется в виде

$$x_i = Q^i_{m+s}(t)e^{\gamma t},\ i = 1,...,n, \tag{11.2}$$

где $Q^i_{m+s}(t)$ – многочлены степени $m+s$ с неизвестными коэффициентами, $m = \max m_i$, $s = 0$, если γ – не корень характеристического уравнения, а если γ – корень, то s можно взять равным кратности этого корня (или, точнее, s на единицу больше наибольшей из степеней многочленов, на которые умножается $e^{\gamma t}$ в общем решении однородной системы). Неизвестные коэффициенты многочленов определяются подстановкой выражений (11.2) в систему (11.1) и сравнением коэффициентов подобных членов.

Аналогично определяются степени многочленов и в случае, когда $f_i(t)$ содержат $e^{\alpha r}\cos\beta t$ и $e^{\alpha t}\sin\beta t$, а число $\gamma = \alpha + \beta i$ является корнем характеристического уравнения.

Решение неоднородной системы (11.1) можно найти методом вариации постоянных, если известно общее решение однородной системы с теми же коэффициентами $a_{ik}(t)$. Для этого в формуле общего решения однородной системы надо заменить произвольные постоянные C_i на неизвестные функции $C_i(t)$. Полученные выражения для x_i подставить в данную неоднородную систему и из этой системы найти $C_i(t)$.

11.2 Образцы решения примеров

1 Решить систему

$$\begin{cases} x' = 4x - y + e^{3t}(t + \sin t), \\ y' = x + 2y + te^{3t}\cos t. \end{cases} \tag{11.3}$$

Сначала для однородной системы находим корни характеристического уравнения $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$ и записываем ее общее решение:

$$x_0 = \left(C_1 t + C_2\right)e^{3t};\ y_0 = \left(C_1 t + C_2 - C_1\right)e^{3t}.$$

В системе (11.3) для функций te^{3t}, $e^{3t}\sin t$, $te^{3t}\cos t$ числа $\alpha + \beta i$ соответственно равны $3, 3+i, 3+i$, поэтому надо отдельно найти частные решения систем

$$\begin{cases} x' = 4x - y + te^{3t}, \\ y' = x + 2y; \end{cases} \tag{11.4}$$

$$\begin{cases} x' = 4x - y + e^{3t}\sin t, \\ y' = x + 2y + te^{3t}\cos t. \end{cases} \tag{11.5}$$

Для системы (11.4) $\alpha + \beta i = 3 = \lambda_1 = \lambda_2$, $s = 2$, $m = 1$, согласно (11.2), частное решение можно искать в виде

$$x_1 = \left(at^3 + bt^2 + ct + d\right)e^{3t};\ y_1 = \left(ft^3 + gt^2 + ht + j\right)e^{3t}.$$

Для системы (11.5) $\alpha + \beta i = 3 + i \neq \lambda_{1,2}$, $s = 0$, $m = 1$. Частное решение имеет вид

$$x_2 = \left(kt + l\right)e^{3t}\sin t + \left(mt + n\right)e^{3t}\cos t;\ y_2 = \left(pt + q\right)e^{3t}\sin t + \left(rt + s\right)e^{3t}\cos t.$$

Отыскав значения коэффициентов $a, b, \ldots$, общее решение системы запишем в виде

$$x = x_0 + x_1 + x_2; \qquad y = y_0 + y_1 + y_2.$$

2 Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x' = -2x - 4x + 1 + 4t, \\ y' = -x + y + \dfrac{3}{2}t^2. \end{cases}$$

Решаем соответствующую однородную систему, общим решением которой являются функции

$$x = -C_1 e^{2t} + 4C_2 e^{-3t};\ y = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-3t}.$$

Решение исходной системы ищем в виде

$$x = -C_1(t)e^{2t} + 4C_2(t)e^{-3t};\ y = C_1(t)e^{2t} + C_2(t)e^{-3t}.$$

Подставив эти решения в исходную систему после приведения подобных слагаемых, получим

$$\begin{cases} -C_1'(t)e^{2t} + 4C_2'(t)e^{-3t} = 1 + 4t, \\ C_1'(t)e^{2t} + C_2'(t)e^{-3t} = \dfrac{3}{2}t^2, \end{cases}$$

откуда

$$C_1'(t) = \frac{1}{5}\left(6t^2 - 4t - 1\right)e^{-2t}; \; C_2'(t) = \frac{1}{10}\left(3t^2 + 8t + 2\right)e^{3t}.$$

Интегрируя, находим

$$\begin{cases} C_1(t) = -\dfrac{1}{5}\left(t + 3t^2\right)e^{-2t} + C_1, \\ C_2(t) = \dfrac{1}{10}\left(2t + t^2\right)e^{3t} + C_2, \end{cases}$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные.

Окончательно получаем общее решение исходной дифференциальной системы

$$\begin{cases} x = -C_1e^{2t} + 4C_2e^{-3t} + t + t^2, \\ y = C_1e^{2t} + C_2e^{-3t} - \dfrac{1}{2} + t^2. \end{cases}$$

11.3 Задачи к занятию

Решить линейные неоднородные системы.

1 $\begin{cases} x' = y + 2e^t, \\ y' = x + t^2. \end{cases}$ 4 $\begin{cases} x' = y - 5\cos t, \\ y' = 2x + y. \end{cases}$ 6 $\begin{cases} x' = 3x + 2y + 4e^{5t}, \\ y' = x + 2y. \end{cases}$

2 $\begin{cases} x' = 2x - 4y + 4e^{-2t}, \\ y' = 2x - 2y. \end{cases}$ 5 $\begin{cases} x' = 4x + y - e^{2t}, \\ y' = y - 2x. \end{cases}$ 7 $\begin{cases} x' = 2y - x + 1, \\ y' = 3y - 2x. \end{cases}$

3 $\begin{cases} x' = 5x - 3y + 2e^{3t}, \\ y' = x + y + 5e^{-t}. \end{cases}$

Решить системы методом вариации постоянных.

1 $\begin{cases} x' = y + \operatorname{tg}^2 t - 1, \\ y' = -x + \operatorname{tg} t. \end{cases}$ 3 $\begin{cases} x' = 2y - x, \\ y' = 4y - 3x + e^{3t} / \left(e^{2t} + 1\right). \end{cases}$

2 $\begin{cases} x' = -4x - 2y + 2 / \left(e^t - 1\right), \\ y' = 6x + 3y - 3 / \left(e^t - 1\right). \end{cases}$

11.4 Домашнее задание

Решить линейные неоднородные системы.

1 $\begin{cases} x' = x - y + 8t, \\ y' = 5x - y. \end{cases}$ 2 $\begin{cases} x' = 2x - y, \\ y' = 2y - x - 5e^t \sin t. \end{cases}$

Решить системы методом вариации постоянных.

1 $\begin{cases} x' = 3x - 2y, \\ y' = 2x - y + 15e^t \sqrt{t}. \end{cases}$

12 Матричный метод интегрирования линейных дифференциальных систем

12.1 Теоретические сведения

Пусть $x(t)$ – вектор-функция; A – матрица размером $n \times n$ с постоянными коэффициентами. Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} x' = Ax, \\ x(0) = x_0. \end{cases} \tag{12.1}$$

Решение задачи (12.1) задается формулой $x(t) = e^{At} \cdot x_0$.

Экспонентой матрицы называется ряд

$$e^B = E + B + \frac{B^2}{2!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^k}{k!}.$$

Свойства матричной экспоненты.

1 $e^{A+B} = e^A e^B$, если $AB = BA$.

2 Если $B = T^{-1}AT$, то $e^B = T^{-1}e^A T$.

3 $\exp\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & A_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & A_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{A_1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & e^{A_2} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & e^{A_k} \end{pmatrix}.$

4 Если h – собственный вектор матрицы A, соответствующий собственному значению λ, то $e^{Ah} = e^{\lambda}h$.

5 Если J – жорданова клетка:

$$J=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda\end{pmatrix}=\lambda E+N,$$

то

$$e^{Jt}=e^{\lambda t}\begin{pmatrix}1 & t & t^2/2 & \dots & t^{n-1}/(n-1)!\\ 0 & 1 & t & \dots & t^{n-2}/(n-2)!\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & 1 & t\\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Методы отыскания e^A:

1) путем решения системы дифференциальных уравнений;

2) путем приведения матрицы к жордановой форме. Пусть известна такая матрица C, что матрица $C^{-1}AC=M$ имеет жорданову форму, т. е. состоит из клеток K_i. Каждая жорданова клетка имеет вид $K=\lambda E+F$, у матрицы F все элементы нули, кроме первого косого ряда над диагональю. Поэтому $F^m=0$, где m – порядок матрицы F; e^F легко найти разложением в ряд. Так как еще $e^{\lambda E}=e^{\lambda}E$, то $e^K=e^{\lambda E+F}=e^{\lambda E}\cdot e^F=e^{\lambda}E\cdot e^F=e^{\lambda}e^F$.

Составив из клеток e^{K_i} матрицу e^M, по второму свойству найдем e^A.

12.2 Образцы решения примеров

1 Найти общее решение системы дифференциальных уравнений, используя матричную экспоненту:

$$\begin{cases}x'=2x+3y,\\ y'=3x+2y.\end{cases}$$

Вычислим собственные значения матрицы A: $\det(A-\lambda E)=0$, $\lambda_1=5,\ \lambda_2=-1$.

Для каждого из собственных значений найдем собственные векторы. Для значения $\lambda_1=5$ собственным вектором является $v_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, для $\lambda_2=-1$ собственным вектором является вектор $v_2=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$.

Составим матрицу из найденных собственных векторов и найдем обратную к ней:

$$H=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix};\ H^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}.$$

Жорданова форма в данном случае имеет вид

$$J=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}.$$

Окончательно находим

$$e^{tA}=He^{tJ}H^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{5t} & 0\\ 0 & e^{-t}\end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}e^{5t}+e^{-t} & e^{5t}-e^{-t}\\ e^{5t}-e^{-t} & e^{5t}+e^{-t}\end{pmatrix}.$$

Общее решение исходной системы записывается в виде

$$x(t)=e^{tA}\begin{pmatrix}C_1\\ C_2\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}e^{5t}+e^{-t} & e^{5t}-e^{-t}\\ e^{5t}-e^{-t} & e^{5t}+e^{-t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_1\\ C_2\end{pmatrix},\ C_1,C_2\in\mathbb{R}.$$

12.3 Задачи к занятию

Найти показательную функцию e^{tA} данной матрицы A.

1 $A=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}$.

2 $A=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix}$.

3 $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$.

4 $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$.

5 $A=\begin{pmatrix}-2 & -4\\ 1 & 2\end{pmatrix}$.

6 $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$.

7 $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$.

Решить дифференциальные системы методом матричной экспоненты.

1 $\begin{cases}x'=4x,\\ y'=x+4y.\end{cases}$

2 $\begin{cases}x'=x+y,\\ y'=-x+y.\end{cases}$

3 $\begin{cases}x'=-5x-7y-3z,\\ y'=2x+y-6z,\\ z'=y+4z.\end{cases}$

13 Метод построения интегрируемых комбинаций для решения линейных дифференциальных систем

13.1 Теоретические сведения

Интегрирование системы дифференциальных уравнений

$$x' = f\left(t, x\right) \tag{13.1}$$

в ряде случаев осуществляется путем подбора так называемых интегрируемых комбинаций.

Интегрируемой комбинацией называется дифференциальное уравнение, являющееся следствием системы (13.1), но уже легко интегрирующееся, например, являющееся уравнением вида $d\Phi\left(t, x_1, x_2, ..., x_n\right) = 0$ или уравнением, сводящимся заменой переменных к какому-нибудь интегрируемому типу уравнений с одной неизвестной функцией.

Одна интегрируемая комбинация дает возможность получить одно конечное уравнение $\Phi_1\left(t, x_1, x_2, ..., x_n\right) = c_1$, связывающее неизвестные функции и независимое переменное; такое конечное уравнение называется первым интегралом системы (13.1).

Если найдено k интегрируемых комбинаций, то получаем k первых интегралов:

$$\begin{cases} \Phi_1\left(t, x_1, x_2, ..., x_n\right) = c_1, \\ ... \\ \Phi_k\left(t, x_1, x_2, ..., x_n\right) = c_k. \end{cases} \tag{13.2}$$

Если все эти интегралы независимы, то из системы можно выразить k неизвестных функций через остальные и свести задачу к интегрированию системы уравнений с меньшим числом неизвестных. Если $k = n$, то все неизвестные функции определяются из системы (13.2).

Покажем применение метода для решения системы двух уравнений

$$\begin{cases} x' = a_1 x + b_1 y + f_1\left(t\right), \\ y' = a_2 x + b_2 y + f_2\left(t\right). \end{cases} \tag{13.3}$$

Умножим второе уравнение на некоторое число λ и сложим почленно с первым уравнением:

$$\frac{d\left(x + \lambda y\right)}{dt} = \left(a_1 + \lambda a_2\right) x + \left(b_1 + \lambda b_2\right) y + f_1\left(t\right) + \lambda f_2\left(t\right).$$

Перепишем последнее уравнение в виде

$$\frac{d(x+\lambda y)}{dt}=(a_1+\lambda a_2)\left(x+\frac{b_1+\lambda b_2}{a_1+\lambda a_2}\right)+f_1(t)+\lambda f_2(t). \qquad (13.4)$$

Выберем λ так, чтобы

$$\frac{b_1+\lambda b_2}{a_1+\lambda a_2}=\lambda. \qquad (13.5)$$

Тогда (13.4) приводится к уравнению, линейному относительно $x+\lambda y$,

$$\frac{d(x+\lambda y)}{dt}=(a_1+\lambda a_2)(x+\lambda y)+f_1(t)+\lambda f_2(t),$$

интегрируя которое, получаем

$$x+\lambda y=e^{(a_1+\lambda a_2)t}\left(C+\int\left(f_1(t)+\lambda f_2(t)\right)e^{-(a_1+\lambda a_2)t}dt\right). \qquad (13.6)$$

Если уравнение (13.5) имеет различные вещественные корни λ_1,λ_2, то из (13.6) получим два первых интеграла системы и значит, интегрирование этой системы будет окончено.

Для нахождения интегрируемых комбинаций часто удобно переходить к так называемой симметрической форме записи системы уравнений (13.1):

$$\frac{dx_1}{\varphi_1(t,x_1,x_2,...,x_n)}=\frac{dx_2}{\varphi_2(t,x_1,x_2,...,x_n)}=...=$$
$$...=\frac{dx_n}{\varphi_n(t,x_1,x_2,...,x_n)}=\frac{dt}{\varphi_0(t,x_1,x_2,...,x_n)},$$

где

$$f_i(t,x_1,x_2,...,x_n)=\frac{\varphi_i(t,x_1,x_2,...,x_n)}{\varphi_0(t,x_1,x_2,...,x_n)}\ (i=1,2,...,n).$$

В системе, заданной в симметрической форме, переменные входят равноправно, что иногда облегчает нахождение интегрируемых комбинаций.

13.2 Образцы решения примеров

1 Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x'=5x+4y+e^t, \\ y'=4x+5y+1. \end{cases}$$

Выберем λ по формуле (13.5): $4+5\lambda=\lambda(5+4\lambda)$, откуда $\lambda_{1,2}=\pm1$. Тогда по формуле (13.6) для $\lambda=1$ получаем

$$x + y = C_1 e^{9t} - \frac{1}{8}e^t - \frac{1}{9}.$$

Для $\lambda = -1$ аналогично получаем

$$x - y = C_2 e^t + te^t + 1.$$

Получили два первых независимых интеграла системы

$$\left(x + y + \frac{1}{8}e^t + \frac{1}{9}\right)e^{-9t} = C_1; \ \left(x - y - te^t - 1\right)e^{-t} = C_2.$$

2 Решить систему в симметрической форме

$$\frac{dx}{x^2 - y^2 - z^2} = \frac{dy}{2xy} = \frac{dz}{2xz}.$$

Интегрируя уравнение $\frac{dy}{2xy} = \frac{dz}{2xz}$, находим $\frac{y}{z} = c_1$. Умножая числители и знаменатели первого из отношений системы на *x*, второго на *y*, третьего на *z* и составляя производную пропорцию, получим

$$\frac{xdx + ydy + zdz}{x\left(x^2 + y^2 + z^2\right)} = \frac{dy}{2xy},$$

откуда $\ln\left(x^2 + y^2 + z^2\right) = \ln|y| + \ln c_2$, или $\frac{x^2 + y^2 + z^2}{y} = c_2$.

Найденные независимые первые интегралы $\frac{y}{z} = c_1$ и $\frac{x^2 + y^2 + z^2}{y} = c_2$ определяют искомые интегральные кривые.

13.3 Задачи к занятию

Решить методом интегрируемых комбинаций системы дифференциальных уравнений.

1 $\begin{cases} x' = 5x + 4y, \\ y' = x + 2y. \end{cases}$

2 $\begin{cases} x' = 3x + y + e^t, \\ y' = x + 3y - e^t. \end{cases}$

3 $\frac{dx}{5z - 2y} = \frac{dy}{2x - z} = \frac{dz}{y - 5x}.$

4 $\frac{dx}{2x - z} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{2z - x}.$

5 $\begin{cases} x' = x^2 + xy, \\ y' = xy + y^2, \end{cases} x(1) = 1, y(1) = 2.$

6 $\begin{cases} x' = 6x + y, \\ y' = 4x + 3y. \end{cases}$

7 $\begin{cases} x' = 2x + 4y + \cos t, \\ y' = -x - 2y + \sin t. \end{cases}$

8 $\begin{cases} x' = 2x - 4y + 1, \\ y' = -x + 5y. \end{cases}$

9 $\dfrac{dx}{2z-y}=\dfrac{dy}{x-4z}=\dfrac{dz}{4y-2x}$.

10 $\begin{cases} x'=x/(x+y), \\ y'=y/(x+y), \end{cases} x(0)=y(0)=1.$

13.4 Домашнее задание

Решить методом интегрируемых комбинаций системы дифференциальных уравнений.

1 $\dfrac{dx}{z+3}=\dfrac{dy}{-y}=\dfrac{dz}{x+3}$.

3 $\dfrac{dx}{0}=\dfrac{dy}{z(y+x)}=\dfrac{dz}{x(x-z)}$.

2 $\begin{cases} x'=y, \\ y'=-x, \end{cases} x(0)=1, y(0)=0.$

14 Устойчивость по Ляпунову. Классификация точек покоя

14.1 Теоретические сведения

Пусть дана система дифференциальных уравнений

$$x'=f(t,x), \tag{14.1}$$

заданная в матрично-векторной форме.

Решение $\varphi_i(t)$, $i=1,2,...,n$, системы (14.1), удовлетворяющее начальным условиям $\varphi_i(t_0)=\varphi_{i0}$, $i=1,2,...,n$, называется устойчивым по Ляпунову при $t\to\infty$, если для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta(\varepsilon)>0$ такое, что для всякого решения $x_i(t)$, $i=1,2,...,n$, системы (14.1), начальные значения которого удовлетворяют условиям

$$\left|x_i(t_0)-\varphi_{i0}\right|<\delta,\ i=1,2,...,n, \tag{14.2}$$

имеют место неравенства

$$\left|x_i(t)-\varphi_i(t)\right|<\varepsilon,\ i=1,2,...,n, \tag{14.3}$$

для всех $t\ge t_0$.

Если при сколь угодно малом $\delta>0$ хотя бы для одного решения $x_i(t)$, $i=1,2,...,n$, неравенства (14.3) не выполняются, то решение $\varphi_i(t)$ называется неустойчивым.

Если кроме выполнения неравенств (14.3) при условии (14.2) выполняется также условие $\lim\limits_{t\to\infty}\left|x_i(t)-\varphi_i(t)\right|=0$, $i=1,2,...,n$, то решение $\varphi_i(t)$, $i=1,2,...,n$, называется асимптотически устойчивым.

На практике устойчивость решения $\varphi_i(t)$, $i=1,2,...,n$, системы (14.1) можно свести к исследованию на устойчивость нулевого (тривиального) решения $x_i \equiv 0$, $i=1,2,...,n$, некоторой системы, аналогичной системе (14.1). Говорят, что точка $x_i = 0$, $i=1,2,...,n$, есть точка покоя системы. Применительно к точке покоя определения устойчивости и неустойчивости могут быть сформулированы так. Точка покоя $x_i = 0$, $i=1,2,...,n$, устойчива по Ляпунову, если, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, можно найти такое $\delta > 0$, что для любого решения $x_i(t)$, $i=1,2,...,n$, начальные данные которого $x_{i0} = x_i(t_0)$, $i=1,2,...,n$, удовлетворяют условию $|x_{i0}| < \delta$, $i=1,2,...,n$, выполняются неравенства $|x_i(t)| < \varepsilon$, $i=1,2,...,n$, для всех $t \ge t_0$.

Точка покоя неустойчива, если при сколько угодно малом $\delta > 0$ хотя бы для одного решения $x_i(t)$, $i=1,2,...,n$, условие устойчивости не выполняется.

Пусть имеем систему двух линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y, \\ y' = a_{21}x + a_{22}y, \end{cases} \tag{14.4}$$

причем $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$.

Точка $x=0, y=0$, в которой правые части уравнений системы (14.4) обращаются в нуль, называется точкой покоя системы (14.4). Для исследования точки покоя системы (14.1) надо составить характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{14.5}$$

и найти его корни λ_1, λ_2.

Возможны следующие случаи.

1 Корни характеристического уравнения (14.5) вещественные и разные:

а) $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$. Устойчивый узел (асимптотическая устойчивость);

б) $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$. Неустойчивый узел;

в) $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$. Седло (точка покоя неустойчива).

2 Корни характеристического уравнения (14.5) комплексные: $\lambda_1 = p + iq$, $\lambda_2 = p - iq$:

а) $p < 0, q \neq 0$. Устойчивый фокус (асимптотическая устойчивость);

б) $p > 0, q \neq 0$. Неустойчивый фокус;

в) $p = 0, q \neq 0$. Центр (точка покоя устойчива).

3 Корни $\lambda_1 = \lambda_2$ кратные:

а) $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$. Устойчивый узел;

б) $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$. Неустойчивый узел.

14.2 Образцы решения примеров

1 Исходя из определения устойчивости по Ляпунову, исследовать на устойчивость решение уравнения $x' = 1 + t - x$, удовлетворяющее начальному условию $x(0) = 0$.

Уравнение является линейным неоднородным уравнением. Его общее решение $x(t) = Ce^{-t} + t$. Начальному условию $x(0) = 0$ удовлетворяет решение $\varphi(t) = t$ уравнения. Начальному условию $x(0) = x_0$ удовлетворяет решение $x(t) = x_0 e^{-t} + t$. Рассмотрим разность решений уравнения и запишем ее так:

$$x(t) - \varphi(t) = x_0 e^{-t} + t - t = (x_0 - 0)e^{-t}.$$

Отсюда видно, что для всякого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всякого решения $x(t)$ уравнения, начальные значения которого удовлетворяют условию $|x_0 - 0| < \delta$, выполняется неравенство

$$|x(t) - \varphi(t)| = |x_0 - 0| e^{-t} < \varepsilon$$

для всех $t \geq 0$. Следовательно, решение $\varphi(t) = t$ является устойчивым. Это решение является неограниченным при $t \to +\infty$.

2 Определить характер точки покоя (0, 0) системы

$$\begin{cases} x' = 5x - y, \\ y' = 2x + y. \end{cases}$$

Составляем характеристическое уравнение $\lambda^2 - 6\lambda + 7 = 0$.

Его корни $\lambda_1 = 3 + \sqrt{2} > 0$, $\lambda_2 = 3 - \sqrt{2} > 0$ вещественные, разные, положительные. Следовательно, точка покоя (0, 0) – неустойчивый узел.

14.3 Задания к занятию

Исходя из определения устойчивости по Ляпунову, исследовать устойчивость решения следующих уравнений и систем уравнений.

1 $x' = x + t$, $x(0) = 1$.

2 $x' = -x + t^2$, $x(1) = 1$.

3 $\begin{cases} x' = x - 13y, \\ y' = \dfrac{1}{4}x - 2y, \end{cases} x(0) = y(0) = 0.$

4 $x' = 2t(x + 1)$, $x(0) = 0$.

5 $x' = 2 + t$, $x(0) = 1$.

6 $\begin{cases} x' = -x - 9y, \\ y' = x - y, \end{cases} x(0) = y(0) = 0.$

Определить характер точек покоя (0,0) для следующих систем дифференциальных уравнений:

1 $\begin{cases} x' = 3x + y, \\ y' = -2x + y. \end{cases}$

3 $\begin{cases} x' = -x + 2y, \\ y' = x + y. \end{cases}$

5 $\begin{cases} x' = -x + 3y, \\ y' = -x + y. \end{cases}$

2 $\begin{cases} x' = -2x - y, \\ y' = 3x - y. \end{cases}$

4 $\begin{cases} x' = -2x + \dfrac{5}{7}y, \\ y' = 7x - 3y. \end{cases}$

15 Метод функций Ляпунова. Устойчивость по первому приближению

15.1 Теоретические сведения

Метод функций Ляпунова состоит в непосредственном исследовании устойчивости положения равновесия системы

$$x' = f\left(t, x\right) \tag{15.1}$$

при помощи подходящим образом подобранной функции $V\left(t, x_1, ..., x_n\right)$ – функции Ляпунова, причем делается это без предварительного нахождения решений системы.

Будем рассматривать автономные системы, для которых $x_i \equiv 0$, $i = 1, ..., n$, есть точка покоя.

Функция $V\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$, определенная в некоторой окрестности начала координат, называется знакоопределенной (определенно-положительной или определенно-отрицательной), если она в области $\left|x_i\right| \le h$, $i = 1, 2, ..., n$, где h – достаточно малое положительное число, может принимать значения одного определенного знака и обращаться в нуль лишь при $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$.

Функция $V\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ называется знакопостоянной (положительной или отрицательной), если она в области $\left|x_i\right| \le h$ может принимать значения только одного определенного знака, но может обращаться в нуль и при $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 \ne 0$.

Теорема Ляпунова об устойчивости. Если для системы дифференциальных уравнений (15.1) существует знакоопределенная функция $V\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$, полная производная которой по времени, составленная в силу (15.1), есть функция знакопостоянная, знака, противоположного с *V*, или тождественно равная нулю, то точка покоя системы устойчива.

Теорема Ляпунова об асимптотической устойчивости. Если для системы дифференциальных уравнений (15.1) существует знакоопределенная функция $V\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$, полная производная которой по времени, составленная в силу системы (15.1), есть также функция знакоопределенная, знака, противоположного с *V*, то точка покоя системы (15.1) асимптотически устойчива.

Теорема Ляпунова о неустойчивости. Пусть для системы дифференциальных уравнений (15.1) существует дифференцируемая в окрестности начала координат функция $V\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ такая, что $V\left(0,0,...,0\right)=0$. Если ее полная производная, составленная в силу системы (15.1), есть определенно-положительная функция и сколько угодно близко от начала координат имеются точки, в которых функция $V\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ принимает положительные значения, то точка покоя неустойчива.

Теорема Четаева о неустойчивости. Пусть для системы дифференциальных уравнений (15.1) существует непрерывно дифференцируемая в некоторой окрестности точки покоя функция $v\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$, удовлетворяющая в некоторой замкнутой окрестности точки покоя условиям:

1) в сколь угодно малой окрестности Ω точки покоя существует область Ω_1, в которой $v\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) > 0$, причем $v = 0$ в тех граничных точках Ω_1, которые являются внутренними для Ω;

2) точка покоя $O\left(0,0,...,0\right)$ является граничной точкой области Ω_1;

3) в области Ω_1 производная dv/dt, составленная в силу системы (15.1), определенно-положительная.

Тогда точка покоя системы (15.1) неустойчива.

Пусть система задана в общем виде (15.1) и пусть $x_i \equiv 0$, $i = 1,2,...,n$, есть точка покоя системы. Будем предполагать, что компоненты функции $f_i\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ дифференцируемы в начале координат достаточное количество раз. Разложим функции f_i по формуле Тейлора по x в окрестности начала координат:

$$f_i\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + R_i\left(x_1, x_2, ..., x_n\right),$$

здесь $a_{ij} = \partial f_i\left(0,0,...,0\right)/\partial x_j$;

R_i – члены второго порядка малости относительно $x_1, x_2, ..., x_n$.

С учетом этого система (15.1) запишется в виде

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + R_i\left(x_1, x_2, ..., x_n\right),\ i = 1,2,...,n. \tag{15.2}$$

Вместо системы (15.2) рассмотрим систему

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ \left(i = 1,2,...,n\right),\ a_{ij} = \text{const}, \tag{15.3}$$

называемую системой уравнений первого приближения системы (15.1).

Справедливы следующие предложения.

1 Если все корни характеристического уравнения имеют отрицательные вещественные части, то нулевое решение $x_i \equiv 0$, $i = 1, 2, ..., n$, системы (15.3) и системы (15.2) асимптотически устойчивы.

2 Если хотя бы один корень характеристического уравнения имеет положительную вещественную часть, что нулевое решение системы (15.3) и системы (15.2) неустойчиво.

15.2 Образцы решения примеров

1 Исследовать на устойчивость точку покоя $x = 0, y = 0$ системы

$$\begin{cases} x' = x, \\ y' = -y. \end{cases}$$

Возьмем функцию $v(x, y) = x^2 - y^2$. Тогда

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} = 2x^2 + 2y^2$$

есть функция определенно-положительная. Так как сколь угодно близко к началу координат найдутся точки, в которых $v > 0$ (например, $v = x^2 > 0$ вдоль прямой $y = 0$), то выполнены все условия теоремы Ляпунова о неустойчивости и точка покоя $O(0,0)$ неустойчива (седло).

2 Исследовать на устойчивость точку покоя системы

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = -x. \end{cases}$$

Выберем в качестве функции $V(x, y)$ функцию $V = x^2 + y^2$. Эта функция определенно-положительная. Производная функции V в силу системы

$$\frac{dV}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 2xy - 2xy = 0.$$

Из теоремы Ляпунова об устойчивости следует, что точка покоя $O(0,0)$ системы устойчива.

15.3 Задачи к занятию

Исследовать на устойчивость точку покоя (0, 0) следующих систем.

1 $\begin{cases} x' = -3y - 2x^3, \\ y' = 2x - 2y^3. \end{cases}$

2 $\begin{cases} x' = x + 2xy^2, \\ y' = -2y + 4x^2 y. \end{cases}$

3 $\begin{cases} x' = y + x^3, \\ y' = -x + y^3. \end{cases}$

5 $\begin{cases} x' = -y - x/2 - x^3/4, \\ y' = x - y/2 - y^3/4. \end{cases}$

4 $\begin{cases} x' = -xy^4, \\ y' = x^4 y. \end{cases}$

6 $\begin{cases} x' = y + x^2 y^2 - 0{,}25x^5, \\ y' = -2x - x^3 y - 0{,}5y^3. \end{cases}$

Исследовать на устойчивость по первому приближению точку покоя (0,0) следующих систем.

1 $\begin{cases} x' = x + 2y - \sin y^2, \\ y' = -x - 3y + x\left(e^{x^2/2} - 1\right). \end{cases}$

3 $\begin{cases} x' = -x + 3y + x^2 \sin y, \\ y' = -x - 4y + 1 - \cos y^2. \end{cases}$

2 $\begin{cases} x' = -2x + 8\sin^2 y, \\ y' = x - 3y + 4x^3. \end{cases}$

4 $\begin{cases} x' = -10x + 4e^u - 4\cos y^2, \\ y' = 2e^x - 2 - y + x^4. \end{cases}$

Список литературы

1 **Осадчий, Ю. М.** Дифференциальные уравнения: учебное пособие / Ю. М. Осадчий. – Москва: ИНФРА-М, 2019. – 157 с.

2 **Пантелеев, А. В.** Обыкновенные дифференциальные уравнения. Практикум: учебное пособие / А. В. Пантелеев, А. С. Якимова, К. А. Рыбаков. – Москва: ИНФРА-М, 2016. – 432 с.

3 **Егоров, А. И.** Обыкновенные дифференциальные уравнения с приложениями / А. И. Егоров. – Москва: Физматлит, 2005. – 384 с.