

## СТРОИТЕЛЬСТВО. АРХИТЕКТУРА

УДК 620.9.008

С. В. Босаков, д-р техн. наук, проф., В. Н. Белевич, Н. С. Щетько

### ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ОПРЕДЕЛЕНИЮ ПОЛОЖЕНИЯ НАКЛОННОЙ ТРЕЩИНЫ В ПРИОПОРНОЙ ЗОНЕ ПРЕДНАПРЯЖЕННЫХ ПЛИТ БЕЗОПАЛУБОЧНОГО ФОРМОВАНИЯ

В статье приводятся результаты теоретических исследований напряженно-деформированного состояния приопорных зон плит безопалубочного формования. Получено аналитическое выражение для формы наклонной трещины. Проведенные эксперименты подтверждают правильность теоретических результатов.

В последнее время в строительстве стали широко использовать плиты безопалубочного формования. В этих плитах отсутствует поперечная арматура и для армирования используются предварительно-напряженные канаты. Применение таких канатов позволяет использовать при изготовлении многопустотных плит перекрытий безопалубочного формования бетон более низких марок и снизить потребление цемента и удельную металлоемкость плит либо повысить уровень предварительного напряжения арматуры.

В отечественных условиях производство плит безопалубочного формования на местных материалах может отличаться от зарубежного уровня. В связи с недостаточностью сведений о характере работы в различных условиях нагружения конструкций, армированных эффективной канатной арматурой из проволоки профильного сечения европейского стандарта EN 10138-3:2000, возникла необходимость провести исследования напряженно-деформированного состояния многопустотных плит безопалубочного формования «Weiler Italia» с такой арматурой и разработать комплект технической документации на плиты для дополнения серии Б1.041.1-4.08.

Авторами выполнены теоретиче-

ские исследования НДС приопорных зон плит безопалубочного формования. Полученные результаты подтверждены данными экспериментов. Были приняты следующие предпосылки при проведении теоретических исследований.

1. Для плиты считается справедливой гипотеза плоских сечений [1].

2. До появления трещин материал плиты работает упруго. Так как уравнения равновесия одинаково справедливы в теории упругости и теории пластичности, то полученные теоретические результаты при анализе напряженного состояния в приопорных точках плиты приблизительно верны и для нелинейной стадии работы материала плиты.

3. Считается, что плита работает в условиях плоского напряженного состояния.

4. Так как на нижней и верхней поверхностях плиты нормальные и касательные напряжения равны нулю, то они принимаются равными нулю везде внутри объема плиты, за исключением мест приложения вертикальных нагрузок и опорных реакций.

Определение геометрических характеристик поперечного сечения выполнялось с помощью программы «AutoCAD» и производилось сопоставление для верификации результатов.

**Определение напряженного состояния в приопорной зоне преднапряженной плиты безопалубочного формирования**

Расчетная модель плиты при испытаниях приведена на рис. 1. В приопорной зоне действуют усилия от сил преднапряжения и опорной реакции  $V_A = P$ .

Напряжения, возникающие в плите от их действия, ввиду наличия отверстий будут образовывать тензор напряжений общего вида

$$T_H = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix}. \quad (1)$$

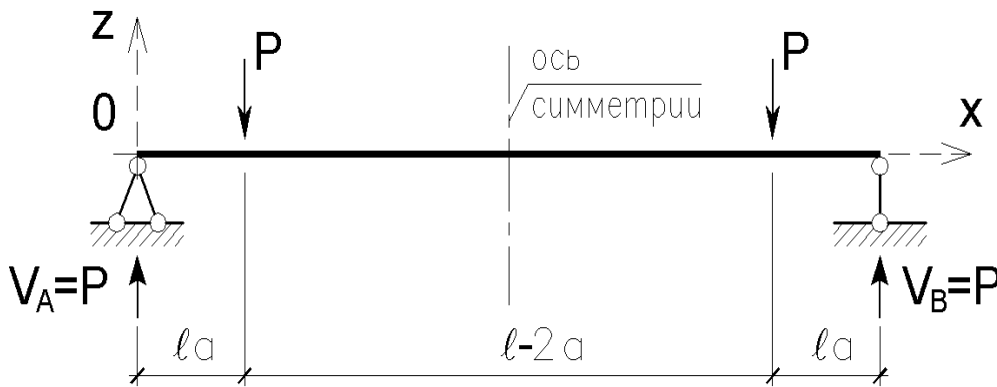


Рис. 1. Расчетная модель плиты

Однако элементарные рассуждения, подтвержденные результатами численных исследований одним из авторов на ПК «Фемар», показывают, что напряжения  $\sigma_x$  и  $\tau_{xz}$  на порядок и более превышают остальные составляющие тензора напряжений. Надо также подчеркнуть, что в местах приложения внешних сил и опорных реакций влиянием напряжения  $\sigma_z$  пренебрегать нельзя.

На основании отмеченных фактов авторами в дальнейшем принято, что напряженное состояние приопорной зоны плиты безопалубочного формирования описывается тензором напряжений следующего вида:

$$T_H = \begin{vmatrix} \sigma_x & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & 0 & 0 \\ \tau_{xz} & 0 & \sigma_z \end{vmatrix}. \quad (2)$$

Далее будем рассматривать точки

приопорной зоны плиты, лежащие на оси  $Ox$  (рис. 2), т. к. на ней [1] касательные напряжения  $\tau_{xz}$  достигают своего максимума. Приведем формулы для их определения в точках А, В, С приопорной зоны плиты (см. рис. 2).

Приняв приведенное двутавровое сечение с шириной стенки, равной суммарной ширине ребер, и поперечную силу в пределах приопорной зоны плиты постоянной, по формуле Журавского [1] приближенно получим для точек А, В, С следующее.

$$\tau_{xz} = -\frac{3 P}{2 A}; \quad (3)$$

– для точки А

$$\sigma_x^A = 0; \quad (4)$$

– для точки В ( $\sigma_x$  от момента

$\frac{1}{2} P l_a$  равно 0)

$$\sigma_x^B = -\frac{1}{4} \frac{N_a + N_a'}{A}; \quad (5)$$

$$\sigma_x^B \approx -\frac{1}{2} \frac{N_a + N_a'}{A}. \quad (6)$$

– для точки С ( $\sigma_x$  от момента  $P l_a$  равно 0)

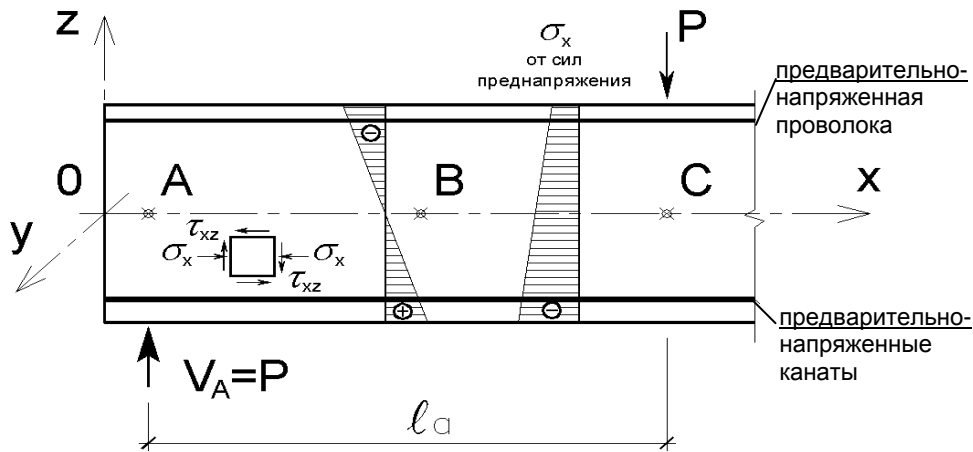


Рис. 2. Припорная зона плиты безпалубочного формирования

**Определение величины и направления действия главного растягивающего напряжения  $\sigma_1$  в точках А, В, С припорной зоны плиты безпалубочного формирования**

**Точка А**

Напряженное состояние на основании (2) и (4) описывается тензором напряжений

$$T_H^A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & 0 & 0 \\ \tau_{xz} & 0 & 0 \end{vmatrix}. \quad (7)$$

Для этого тензора напряжений искомые величины имеются в литературе. Они равны [1]:

$$\sigma_1 = |\tau_{xz}|; \quad \ell_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$m_1 = 0; \quad n_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad (8)$$

где  $\sigma_1$  – главное растягивающее напряжение;  $\ell_1, m_1, n_1$  – направляющие косинусы первой главной площадки [1].

**Точка В**

$$T_H = \begin{vmatrix} \sigma_x & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & 0 & 0 \\ \tau_{xz} & 0 & 0 \end{vmatrix}. \quad (9)$$

Инварианты напряженного состояния [1]:

$$I_1 = \sigma_x^B; \quad I_2 = -\tau_{xz}^2; \quad I_3 = 0.$$

Главное растягивающее напряжение является наибольшим корнем кубического уравнения

$$\sigma^3 - \sigma_x^B \sigma^2 - \tau_{xz}^2 \sigma = 0;$$

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x^B}{2} + \sqrt{\frac{(\sigma_x^B)^2}{4} + \tau_{xz}^2}. \quad (10)$$

Находим направляющие косинусы первой главной площадки из системы

$$\begin{cases} (\sigma_x^B - \sigma_1) \ell_1 + \tau_{xy} m_1 + \tau_{xz} n_1 = 0; \\ (\sigma_y^B - \sigma_1) m_1 = 0; \\ \ell_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1. \end{cases} \quad (11)$$

Получаем:

$$\ell_1 = \sqrt{1 - n_1^2}; \quad m_1 = 0;$$

$$n_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\tau_{xz}^2}{(\sigma_x^B - \sigma_1)^2}}}. \quad (12)$$

**Точка С**

Нужные результаты получаем из формул (10) и (12) заменой  $\sigma_x^B$  на  $\sigma_x^C$ .

**Места приложения вертикальных нагрузок и опорных реакций**

$$T_H = \begin{vmatrix} \sigma_x & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & 0 & 0 \\ \tau_{xz} & 0 & \sigma_z \end{vmatrix}.$$

Опуская промежуточные вычисления, сразу приводим окончательные результаты:

$$\sigma_1 = \frac{1}{2} \left( \sigma_x + \sigma_z + \sqrt{\frac{\sigma_x^2 - 2\sigma_x\sigma_z + \sigma_z^2}{+ \sigma_z^2 + 4\tau_{xz}^2}} \right);$$

$$\sigma_3 = \frac{1}{2} \left( \sigma_x + \sigma_z - \sqrt{\frac{\sigma_x^2 - 2\sigma_x\sigma_z + \sigma_z^2}{+ \sigma_z^2 + 4\tau_{xz}^2}} \right);$$

$$\{\ell_1, m_1, n_1\} = \left\{ -\frac{-\sigma_x + \sigma_z - \sqrt{\frac{\sigma_x^2 - 2\sigma_x\sigma_z + \sigma_z^2}{+ \sigma_z^2 + 4\tau_{xz}^2}}}{2\tau_{xz}}, 0, 1 \right\};$$

$$\{\ell_3, m_3, n_3\} = \left\{ -\frac{-\sigma_x + \sigma_z + \sqrt{\frac{\sigma_x^2 - 2\sigma_x\sigma_z + \sigma_z^2}{+ \sigma_z^2 + 4\tau_{xz}^2}}}{2\tau_{xz}}, 0, 1 \right\}.$$

Авторы отмечают, что самостоятельного значения при исследовании данного вопроса изучение свойств этого тензора не имеет.

**Пример определения величины главного растягивающего напряжения  $\sigma_1$  для плиты безопалубочного формования 2ПТМ 72.12.22-6**

Для этой плиты ( $P = 150980$  Н – нагрузка, при которой образовалась наклонная криволинейная трещина) получаем следующее:

$$N_a = 900 \cdot 8\pi \cdot 9,3^2 / 4 = 489089 \text{ Н};$$

$$N_a' = 400 \cdot 4\pi \cdot 5^2 / 4 = 7854 \text{ Н};$$

$$A = 301 \cdot 1,2 / 2500 = 0,14448 \text{ м}^2;$$

$$\sigma_x^B = (N_a + N_a') / 4A = 1,71977 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2;$$

$$\sigma_x^C = (N_a + N_a') / 2A = 3,43953 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2;$$

$$\tau_{xz} = 3P / 2A = 1,56748 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2.$$

**Точка А** (см. рис. 2)

$$\sigma_x^A = 15,67 \text{ кг/см}^2; \quad \alpha_A = 45^0.$$

**Точка В** (см. рис. 2)

$$\sigma_1^B = 7,655 \text{ кг/см}^2; \quad \ell_1^B = 0,5335;$$

$$\alpha_B = 32,2^0; \quad n_1^B = 0,8458.$$

**Точка С** (см. рис. 2)

$$\sigma_1^C = 6,808 \text{ кг/см}^2; \quad \ell_1^C = 0,4080;$$

$$\alpha_C = 24,1^0; \quad n_1^C = 0,9130.$$

Анализ полученных результатов говорит о том, что наклонная трещина в приопорной зоне преднапряженной плиты безопалубочного формования теоретически должна иметь криволинейный характер. На рис. 3 ее предполагаемая траектория показана пунктирной линией. В местах левее приложения опорной реакции и правее приложения внешней нагрузки направления главных напряжений совпадают с направлением осей координат.

**Определение уравнения трещины в глобальной системе координат  $Oxz$**

Обозначим через  $Z(x)$  уравнение криволинейной трещины в системе координат рис. 3. Тогда следует, что  $Z(x)$  является решением обыкновенного диффе-

ренциального уравнения первого порядка

$$\frac{dZ}{dx} = \frac{n_3}{l_3} \quad (13)$$

Будем считать, что нормальное напряжение  $\sigma_x$  на отрезке  $0 \leq x \leq l_a$  меняется по закону прямой

$$\sigma_x(x) = \frac{N_a + N_a' x}{2A} = \frac{\sigma_{x0}}{l_a} x.$$

С учетом (11) уравнение (13) запишется следующим образом:

$$\frac{dZ}{dx} = -\sigma_{x0} \frac{x}{2\tau_{xz} l_a} + \sqrt{1 + \left( \sigma_{x0} \frac{x}{2\tau_{xz} l_a} \right)^2} \quad (14)$$

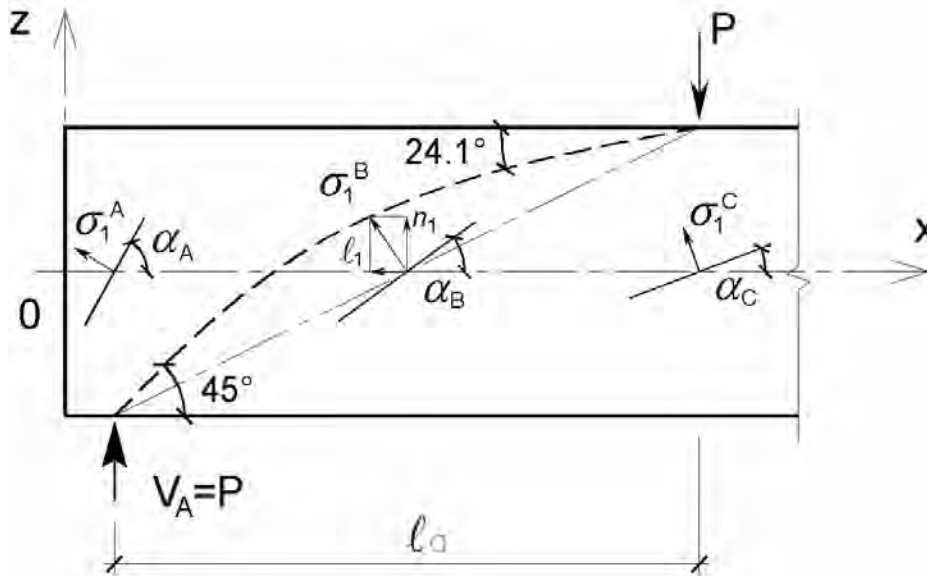


Рис. 3. Направления главного напряжения  $\sigma_1$  в приопорной зоне плиты безопалубочного формования 2ПТМ 72.12.22-6

Решением (14) будет [2] следующее:

$$Z(x) = \frac{1}{2} \times \left( \begin{aligned} & -\sigma_{x0} \frac{x^2}{4\tau_{xz} l_a} + \frac{x}{2} \times \\ & \sqrt{4 + \sigma_{x0}^2 \frac{x^2}{\tau_{xz}^2 l_a^2}} + \\ & + 2 \frac{l_a \tau_{xz}}{\sigma_{x0}} \operatorname{arcSh} \frac{x \sigma_{x0}}{2 l_a \tau_{xz}} \end{aligned} \right) \quad (15)$$

В полученном решении (15) два неизвестных параметра:  $l_a$  и  $C_1$ . Их находим из граничных условий

$$x = 0; \quad Z(0) = -\frac{h}{2};$$

$$x = l_a; \quad Z(l_a) = \frac{h}{2}.$$

Следовательно,

$$C_1 = -\frac{h}{2};$$

$$l_a = \left[ (4\sigma_{x0} \tau_{xz}) / (-\sigma_{x0}^2 + \sigma_{x0} \tau_{xz} \times \sqrt{4 + \frac{\sigma_{x0}^2}{\tau_{xz}^2} + 4\tau_{xz}^2 \operatorname{arcSh} \frac{\sigma_{x0}}{2\tau_{xz}}}) \right] h. \quad (16)$$

Для плиты 2ПТМ 72.12.22-6, рассмотренной выше, получаем теоретически вычисленное значение длины зоны передачи напряжений  $l_a = 35,1$  см, которое хорошо согласуется с ранее полученными результатами [3].

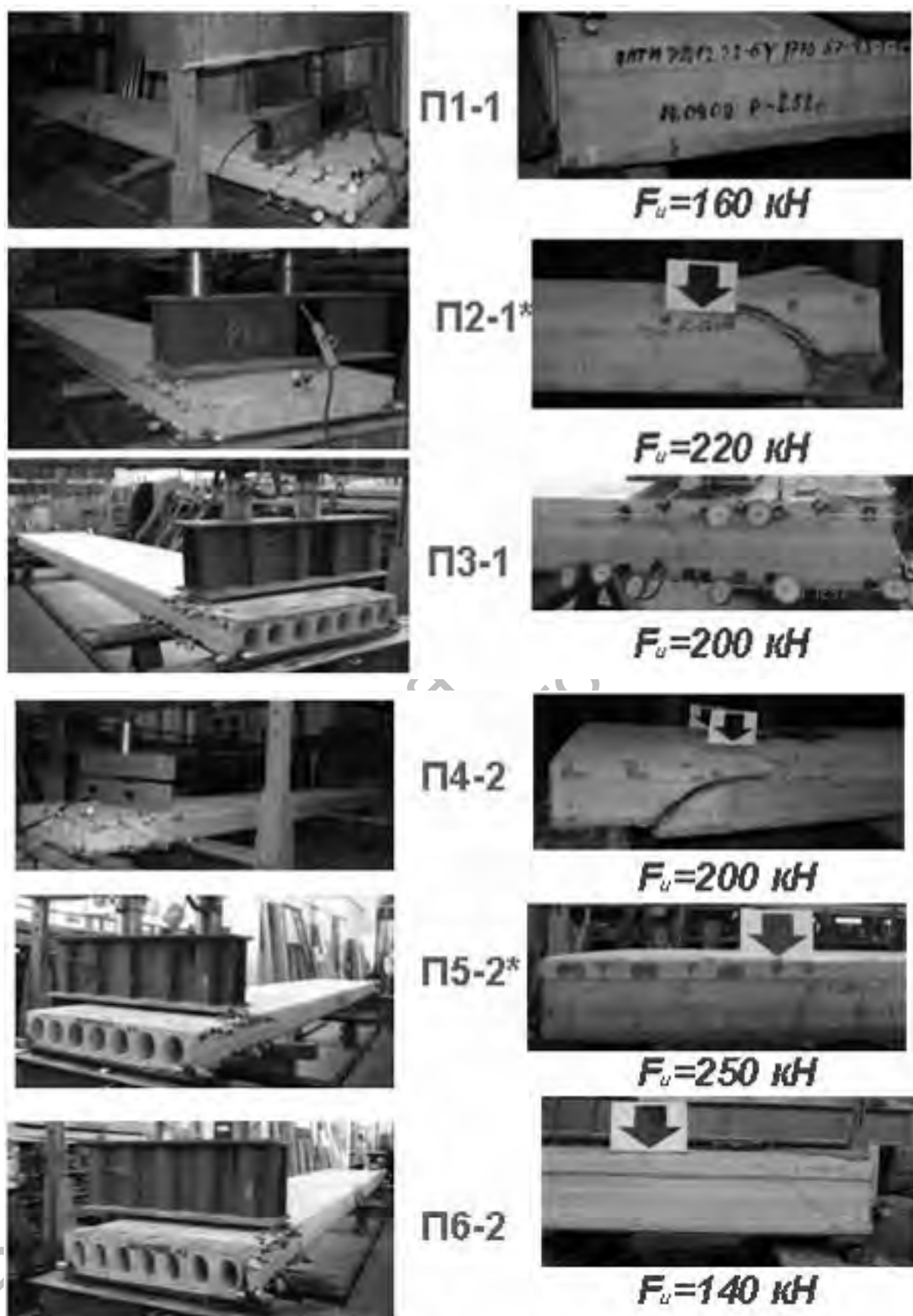


Рис. 4. Испытания приопорных зон плит на действие поперечных сил

Полученные теоретические результаты подтверждаются данными экспериментальных исследований, проведенных в институте БелНИИС. На рис. 4 показаны испытания и результаты испытаний плит безопалубочного формования при исследовании НДС приопорной зоны плит.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Александров, А. В.** Сопротивление материалов / А. В. Александров, В. А. Потапов, Б. П. Державин. – М. : Высш. шк., 2000. – 359 с.
2. **Кулешов, А. А.** Уравнения математической физики в системе Mathematica / А. А. Кулешов. – Минск : БГУ, 2004. – 294 с.
3. **Босаков, С. В.** Определение величины втягивания канатов в изгибаемых преднапряженных железобетонных плитах безопалубочного формования / С. В. Босаков, В. Н. Белевич, Н. С. Щетько // Вестн. БрГТУ. – 2010. – № 1 (61). – С. 46–50.

РУП «Институт БелНИИС»  
Материал поступил 11.11.2010

**S. V. Bosakov, V. N. Belevich,  
N. S. Shchetko**  
**Theoretical researches on definition  
of the inclined crack position in the  
bysupporting zone of stressed plates  
of the off-form molding**

In the article the results of theoretical researches of tensely deformed condition of bysupporting zones of plates of off-form molding are presented. Analytic form for the inclined crack has been obtained. The carried out experiments prove the correctness of the theoretical results.